$[0, 2\pi)$. Então, ρ permanecerá fixo e o ponto w descreverá um círculo de raio ρ, centrado na origem. Para $x = 0$ esse círculo tem raio unitário; para $x > 0$, ele é exterior ao círculo unitário, e para $x < 0$, ele é interior.

Essas observações comprovam, no caso da função exponencial, o que dissemos ao final da subseção anterior (veja o Exerc. 13 adiante): as imagens das famílias de retas coordenadas $x =$ const. e $y =$ const. são ortogonais. Vemos também que toda a faixa do plano complexo z, dada por $0 \leq y < 2\pi$, é levada, de maneira biunívoca (Exerc. 14 adiante) sobre o plano complexo w, excluída a origem deste plano. Como e^z é periódica de período $2\pi i$, qualquer outra faixa $2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi$ é transformada exatamente como a faixa $0 \leq y < 2\pi$, no plano w com a origem excluída.

EXERCÍCIOS

1. Prove o Corolário 2.16.
2. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a cada uma das formas seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar, no caso de cada uma das funções dadas nos Exercs. 3 a 10, qual é analítica e em que domínio. Em caso positivo, calcule a derivada $f'(z)$. (Observe que esta derivada, quando existe, é dada por $\partial f/\partial x$.)

3. $w = z^3$. 4. $w = \overline{e^z}$ 5. $w = \overline{z}$

6. $w = 1/z$ 7. $w = (e^y + e^{-y}) \operatorname{sen} x + (e^y - e^{-y}) \cos x$.

8. $w = e^y(\cos x + i \operatorname{sen} x)$. 9. $w = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$.

10. $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}[(\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2)]$, $0 < \theta < 2\pi$.
11. Dada a função $w = z^2 = u + iv$, faça o gráfico das curvas das famílias $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, para diferentes valores das constantes c_1 e c_2, e observe que essas curvas se cruzam em ângulo reto.
12. Faça o mesmo para $w = 1/z$.
13. Dada uma função $w = f(z)$, analítica numa região R, considere as seguintes famílias F_1 e F_2 de curvas do plano w, parametrizadas por x e por y, respectivamente:

$$F_1: \ u = u(x, y_0), \ v = v(x, y_0) \quad \text{e} \quad F_2: \ u = u(x_0, y), v = v(x_0, y).$$

Prove que em cada ponto $f(z_0)$, onde $f'(z_0) \neq 0$, essas curvas se cruzam ortogonalmente. Faça um gráfico.

14. Mostre que a função e^z é injetiva em qualquer faixa horizontal do plano, dada por $\alpha \leq y < \alpha + 2\pi$.
15. Vimos que a exponencial é uma função $w = f(z) = u + iv$, analítica em todo o plano e tal que $f'(z) = f(z)$ e $f(0) = 1$. Prove que existe uma e uma só função satisfazendo estas condições, de forma que a função exponencial pode ser por elas definida. (*Sugestão:* $u_x = u$ e $v_x = v$ são equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem em x, cujas soluções são $u = ge^x$ e $v = he^x$, onde g e h são constantes em relação a x, portanto, podem depender de y. Use as equações de Cauchy-Riemann e obtenha $g'' + g = 0$ e $h'' + h = 0$. Daqui e de $f(0) = 1$, segue-se que $g(y) = \cos y$ e $h(y) = \operatorname{sen} y$.)

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS

Vamos introduzir agora as funções trigonométricas e hiperbólicas. Começamos observando que das relações

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$$

decorrem as seguintes *fórmulas de Euler*:

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Elas são usadas para estender as funções trigonométricas a todo o plano complexo. Assim, definimos:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

As conhecidas fórmulas de derivação,

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z \quad \text{etc.},$$

seguem das definições acima e de $(e^z)' = e^z$.

As identidades trigonométricas familiares permanecem todas válidas no campo complexo. Assim,

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$