Por exemplo, sendo $f(z) = z^2 + 3z - 5$, temos:

$$u = x^2 - y^2 + 3x - 5 \quad \text{e} \quad v = 2xy + 3y.$$

Outro exemplo é dado por $f(z) = \exp(z^2 + 4z)$, em cujo caso,

$$u = e^{x^2 - y^2 + 4x}\cos(2xy + 4y) \quad \text{e} \quad v = e^{x^2-y^2+4x}\operatorname{sen}(2xy + 4y).$$

EXERCÍCIOS

Determine as partes real e imaginária de cada uma das funções dadas nos Exercs. 1 a 6.

1. $w = z^2 - 5z + 3$. 2. $w = \dfrac{3}{z-5}$. 3. $w = \dfrac{z+2}{z-2}$.

4. $w = \dfrac{z-4i}{z+3i}$. 5. $w = \dfrac{z - 3i\bar{z}}{z-i}$. 6. $w = e^z(z-i)$.

Determine o domínio máximo de definição das funções dadas nos Exercs. 7 a 9.

7. $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)\operatorname{sen} y}$. 8. $f(z) = \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{z}$. 9. $f(z) = \dfrac{z^2 + (z-1)^3}{(e^z - 1)\cos y}$.

LIMITE E CONTINUIDADE

A definição de limite que daremos agora é formalmente a mesma dos cursos de Cálculo e Análise na reta. E, como veremos, sua importância é de natureza teórica, pois ela permite provar todos os resultados que são essenciais à construção da teoria do limite.

Seja f uma função com domínio D. Desejamos atribuir significado preciso à expressão "f tem limite L com z tendendo a z_0". Isto deverá significar que a distância $|f(z) - L|$ entre $f(z)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena, à custa de restringir z a uma vizinhança conveniente de z_0. Mas a variável z apenas aproxima z_0, sem nunca assumir este valor. É claro também que z deve pertencer ao domínio da função e z_0 deve ser ponto de acumulação desse domínio. Essas observações ajudam a bem compreender

a definição que damos a seguir. (Veja a Fig. 2.3.)

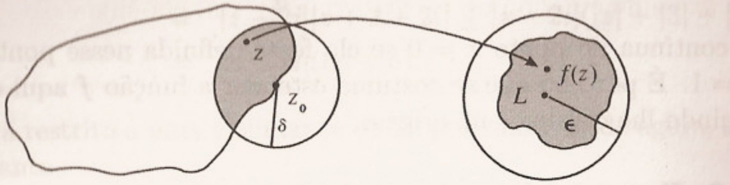

Fig. 2.3

2.1. Definição. *Seja z_0 um ponto de acumulação do domínio D de uma função f. Diz-se que f tem limite L com z tendendo a z_0 se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$z \in D,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon;$$

ou ainda, de maneira equivalente:

$$z \in D \cap V'_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in V_\varepsilon(L).$$

Escreve-se:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L.$$

Sendo essa definição formalmente a mesma que damos para funções reais, ela se reduz a este caso quando todos os números envolvidos são reais. Por exemplo, a função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ está definida para todo número real $x \neq 0$; e, como o leitor deve se lembrar do seu curso de Cálculo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Este é um exemplo típico de função que tem limite num ponto sem estar definida neste ponto; ele evidencia bem o fato de que o limite L nada tem a ver com o valor da função no ponto z_0.

Quando o ponto z_0 pertence ao domínio de f e $L = f(z_0)$, dizemos que f é *contínua* no ponto z_0 e escrevemos:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Poderíamos também ter simplificado um pouco mais, tomando $|z| > 1$, donde $2|z| - 1 > |z|$; portanto,

$$\left|f(z) - \frac{3i}{2}\right| \le \frac{7}{2(2|z|-1)} < \frac{7}{2|z|},$$

que é $< \varepsilon \Leftrightarrow |z| > 7/2\varepsilon$, de forma que, pondo $M = \max\{1,\ 7/2\varepsilon\}$, teríamos, como antes,

$$|z| > M \Rightarrow \left|f(z) - \frac{3i}{2}\right| < \varepsilon.$$

2.7. Exemplo. Vamos provar agora que

$$f(z) = \frac{z^2 - i}{3z+5} \to \infty \quad \text{com} \quad z \to \infty.$$

Com a restrição $|z| > 5$, teremos:

$$|f(z)| = \frac{|z^2 - i|}{|3z+5|} \ge \frac{|z|^2 - 1}{3|z| + 5} > \frac{|z|^2 - 1}{4|z|} > \frac{|z|^2 - |z|^2/2}{4|z|} = \frac{|z|}{8}.$$

Dado $K > 0$, basta então fazer $|z| > 8K$ e $|z| > 5$ para termos $|f(z)| > K$, isto é, sendo M o maior dos números 5 e $8K$, teremos:

$$|z| > M \Rightarrow |f(z)| > K.$$

Como ilustram esses exemplos, para demonstrar, diretamente da definição de limite, que $f(z) \to L$ com $z \to z_0$, temos de obter uma desigualdade do tipo $|f(z) - L| < K|z - z_0|$. Conseguimos isto por meio de simplificações, à custa de desigualdades triangulares do tipo $|a+b| \le |a| + |b|$ em numeradores, e do tipo $|a + b| \ge |a| - |b|$ em denominadores. Evidentemente, neste último caso é preciso que $|a|$ seja maior do que $|b|$. Para obter uma desigualdade do tipo $|f(z)| > K$, devemos inverter o uso das desigualdades triangulares.

EXERCÍCIOS

Estabeleça, diretamente da definição, os limites indicados nos Exercs. 1 a 9.

1. $\lim\limits_{z\to 3i} (z^2 - 5z) = -9 + 15i.$
2. $\lim\limits_{z\to 2i} (2x + y^2) = 4.$
3. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{4z+i}{z+1} = \dfrac{5i}{1+i}.$
4. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{7}{z^2+1} = \infty.$
5. $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{z^2-1}{z-3} = \infty.$
6. $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{6z+7}{2z-3} = 3.$
7. $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{z+1}{z^2-7} = 0.$
8. $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{z^3-3z^2+1}{z^2+5z-3} = \infty.$
9. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{6z+7}{2z-3} = 3.$

10. Sendo a e b números complexos constantes, prove que

$$\lim_{z\to z_0} (az + b) = az_0 + b \quad \text{e} \quad \lim_{z\to z_0} (az^2 + bz + c) = az_0^2 + bz_0 + c.$$

11. Prove que $\lim_{z\to z_0} az^n = az_0^n$, onde a é uma constante complexa e n um inteiro positivo.

12. Prove que um polinômio de grau n,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \ne 0,$$

tende a ∞ com $z \to \infty$.

13. Prove que o quociente de dois polinômios,

$$f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \cdots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}, \quad a_m b_n \ne 0,$$

tende a zero, a a_m/b_n ou a ∞, com $z \to \infty$, conforme seja $m < n$, $m = n$ ou $m > n$, respectivamente.

14. Prove que a função $w = \sqrt{z}$ é contínua em todo ponto z.
15. Prove que a função $w = \lim 1/z$ é contínua em todo ponto $z \ne 0$.
16. Prove que a função $w = \lim 1/(z - \alpha)$ é contínua em todo ponto $z \ne \alpha$.
17. Prove que $\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = |L|$.

SUGESTÕES

2. Lembre-se de que $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|$ e $|\mathrm{Im}\, z| \le |z|$. Supondo, de início, $|z - z_0| < 1$, prove que $|x| < 1$ e $|y| < 3$. Então,

$$\begin{aligned} |(2x + y^2) - 4| &= |2x + (y-2)(y+2)| \\ &\le 2|x| + |y-2|(|y| + 2) \\ &\le 5|x| + 5|y-2| \le 10|z - 2i|. \end{aligned}$$

8. Observe que, sendo, digamos, $|z| \ge 5$, então,

$$\left|\frac{z^3 - 3z^2 + 1}{z^2 + 5z - 3}\right| \ge \frac{|z|^3 - |3z^2 + 1|}{|z|^2 + 5|z| + 3} \ge \frac{|z|^3 - 3|z|^2 - 1}{|z|^2 + 5|z| + 3} \ge \frac{|z|^3 - 3|z|^3/5 - |z|^3/5}{|z|^2 + 5|z|^2 + |z|^2} = \ldots$$