Começamos integrando a função

$$g(z) = \frac{\log z}{z^2 + 4z + 3} = \frac{\log z}{(z+1)(z+3)}$$

ao longo do mesmo contorno $C = C_1 \cup C_R \cup C_2 \cup C_r$ da Fig. 5.5. As singularidades de g no interior de C são os pólos simples $z = -1$ e $z = -3$, onde os resíduos de g são, respectivamente,

$$\frac{\log(-1)}{2} = \frac{\pi i}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\log(-3)}{-2} = -\frac{\log 3 + \pi i}{2}.$$

Então,

$$\int_C \frac{\log z}{z^2 + 4z + 3} dz = -2\pi i \frac{\log 3}{2}. \tag{5.16}$$

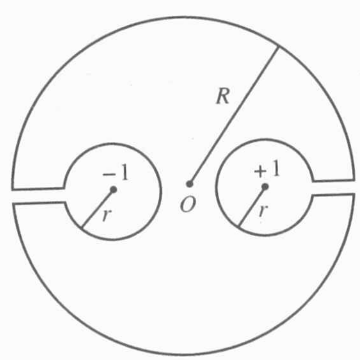

Fig. 5.6

Como no exemplo anterior, as integrais ao longo de C_r e C_R tendem a zero com $r \to 0$ e $R \to \infty$, respectivamente. De fato, $z = re^{i\theta}$ sobre C_r, e tomando $r < 1/4$, obtemos:

$$\left| \int_{C_r} \frac{\log z}{z^2 + 4z + 3} dz \right| \le \int_0^{2\pi} \left| \frac{\log r + i\theta}{z^2 + 4z + 3} ire^{i\theta} \right| d\theta$$

$$\le \frac{r(2\pi - \log r)}{3 - 4r - r^2} \int_0^{2\pi} d\theta \le 2\pi r(|\log r| + 2\pi) \to 0 \quad \text{com } r \to 0.$$

De modo análogo, prova-se que a integral sobre C_R tende a zero com $R \to \infty$.

Por outro lado,

$$\left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \frac{\log z}{z^2 + 4z + 3} dz = \int_r^R \left(\frac{\log x}{x^2 + 4x + 3} - \frac{\log x + 2\pi i}{x^2 + 4x + 3} \right) dx$$
$$= -2\pi i \int_r^R \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}.$$

Substituindo esta expressão em (5.16), e passando ao limite com $r \to 0$ e $R \to \infty$, obtemos o resultado desejado:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{\log 3}{2}.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule as seguintes integrais:

$$\int_0^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^3 + 1} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

2. Mostre que, sendo $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x(x - \alpha)} = \frac{\pi i \operatorname{Im} \alpha}{\alpha |\operatorname{Im} \alpha|}.$$

Sugestão: Integre ao longo do contorno usado no cálculo da integral de $\operatorname{sen} x / x$ (p. 106).

3. Mostre que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2},$$

onde tomamos o valor positivo da raiz quadrada. Sugestão: Use o contorno da Fig. 5.6, faça $r \to 0$ e $R \to \infty$.

INTEGRAIS ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Um outro tipo de integrais que podem ser calculadas por resíduos são integrais da forma

$$\int_0^{2\pi} f(\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)\, d\theta.$$