logo, passando ao limite com $R \to \infty$ em (5.9), obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi,$$

que é o resultado procurado.

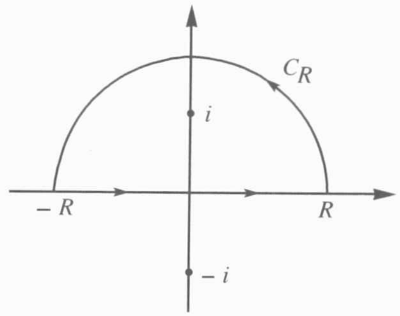

Fig. 5.2

Embora esse exemplo seja dos mais simples que se possa imaginar, ele apresenta um procedimento que é aplicável ao cálculo de toda integral de $-\infty$ a $+\infty$ de funções racionais $f(z) = P(z)/Q(z)$, onde $Q(z)$ não se anula para z real e

$$\text{grau}\, Q - \text{grau}\, P = m \geq 2.$$

De fato, como $z^m P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios de mesmo grau, $z^m f(z)$ tem limite finito e diferente de zero com $z \to \infty$; portanto, existem N e K positivos tais que

$$|z| = R > N \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{K}{R^m}.$$

Em conseqüência,

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)||dz| \leq \frac{K}{R^m} \int_{C_R} |dz| = \frac{K\pi}{R^{m-1}};$$

como $m \geq 2$, a integral sobre C_R tende a zero com $R \to \infty$.

Por outro lado, para R bastante grande,

$$\int_{-R}^{R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_i (\text{res.}\, f)(z_i),$$

onde a soma se estende a todos os pólos z_i da função $P(z)/Q(z)$ que jazem no semiplano $\operatorname{Im} z > 0$. Fazendo então $R \to \infty$, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_i (\text{res.}\, f).$$

5.7. Observação. Devemos notar que o contorno C_R pode ser tomado no semiplano inferior $\operatorname{Im} z < 0$. Neste caso, o caminho de $-R$ a R, seguido do semicírculo C_R, constitui um contorno fechado e com orientação negativa, como ilustra a Fig. 5.3. Logo, na fórmula anterior, o membro da direita leva um sinal negativo e a soma se estende aos pólos z_i do semiplano $\operatorname{Im} z < 0$.

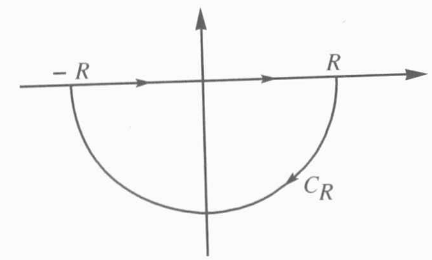

Fig. 5.3

5.8. Observação. O procedimento usado acima, que consistiu em incluir o caminho de integração C_R ao intervalo $[-R, R]$, costuma ser chamado de "dobrar o caminho de integração". Assim, o que fizemos foi dobrar o caminho de integração $[-R, R]$ no semiplano superior, incluindo o contorno C_R. Pela observação anterior, podemos também dobrar o caminho de integração no semiplano inferior.

EXERCÍCIOS

1. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
2. Sendo a, b, c números reais, com $b^2 < 4ac$, calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.
3. Mostre que
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)},$$

onde $a \geq b > 0$. Considere as duas possibilidades: $a \neq b$ e $a = b$.

Calcule cada uma das integrais dadas nos Exercs. 4 a 9.

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4+9}$. 5. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-x+1}$. 6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$.

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$. 8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$. 9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\pi/\sqrt{2}$. 2. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

3. O integrando $f(x)$ é função par, logo a integral de $-\infty$ a zero é igual à integral de zero a ∞.

4. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$. 7. $-\pi/27$. 8. $\pi/4a$.

LEMA DE JORDAN

Muitas vezes temos necessidade de calcular integrais impróprias do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{irz} f(z)dz.$$

Somos então levados a dobrar o caminho de integração e considerar a integral

$$I_R = \int_{C_R} e^{irz} f(z)dz,$$

onde C_R é um semicírculo de centro na origem e raio R. O lema de Jordan, que consideramos a seguir, estabelece condições suficientes para que esta integral tenda a zero com $R \to \infty$.

5.9. Lema de Jordan. *Sejam $r >$, $R > 0$ e C_R o semicírculo $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Suponhamos que f seja uma função regular no semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$, à exceção, eventualmente, de um número finito de singularidades isoladas; e que o máximo $G(R)$ de $|f(z)|$ para $z \in C_R$ tenda a zero com $R \to \infty$. Então $I_R \to 0$ com $R \to \infty$.*

Demonstração. Começamos observando que

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^\pi e^{irR(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\ &= iR\int_0^\pi e^{-rR\operatorname{sen}\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i(rR\cos\theta+\theta)} d\theta, \end{aligned}$$

donde

$$|I_R| \leq RG(R)\int_0^\pi e^{-rR\operatorname{sen}\theta} d\theta = 2RG(R)\int_0^{\pi/2} e^{-rR\operatorname{sen}\theta} d\theta.$$

Como $\operatorname{sen}\theta \geq 2\theta/\pi$ no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$[1], temos:

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq 2RG(R)\int_0^{\pi/2} e^{-2rR\theta/\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi G(R)}{r}(1 - e^{-rR}) \to 0 \text{ com } R \to \infty. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração.

O leitor não terá dificuldade em verificar resultado análogo para $r < 0$ e C_R no semiplano inferior $\operatorname{Im} z \leq 0$.

5.10. Exemplo. Como aplicação do lema de Jordan, seja calcular

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2+x^2} dx, \quad a > 0.$$

Observando que o integrando é uma função par e que $\operatorname{sen} x = \operatorname{Im} e^{ix}$, teremos:

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{ze^{iz}}{a^2+z^2} dz. \tag{5.10}$$

[1] Para provar isso, consideramos a função $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta - 2\theta/\pi$ no referido intervalo. Sua derivada, $f'(\theta) = \cos\theta - 2/\pi$, se anula para um certo valor a, é positiva para $0 < \theta < a$ e negativa para $a < \theta < \pi/2$. A função f é então crescente no intervalo $0 < \theta < a$ e decrescente em $a < \theta < \pi/2$. Como $f(0) = f(\pi/2) = 0$, concluímos que $f(\theta) \geq 0$ em todo o intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$; logo, $\operatorname{sen}\theta \geq 2\theta/\pi$ nesse intervalo.

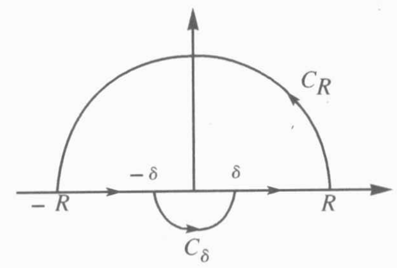

Fig. 5.4

Então, passando ao limite em (5.12) com $\delta \to 0$ e $R \to \infty$, e tendo também em conta que, pelo lema de Jordan, a integral sobre C_R tende a zero, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i.$$

Substituindo em (5.11), chegamos ao resultado final:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$$

EXERCÍCIOS

Calcule as integrais dadas nos Exercs. 1 a 4.

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+4} dx, \quad a > 0.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+4x+20} dx.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+a^2)} dx, \quad a > 0.$

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx.$

5. Seja $f(z)$ uma função regular no semiplano $\operatorname{Re} z \geq 0$, tal que o máximo $G(R)$ de $|f(z)|$ sobre o arco C_R : $z = Re^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/2$, tende a zero com $R \to \infty$. Mostre que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{rz} dz = 0, \quad r < 0.$$

6. Prove que $\int_{C_R} e^{-z^2} dz \to 0$ com $R \to \infty$, onde C_R é o arco $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

7. Calcule as chamadas *integrais de Fresnel*,

$$C = \int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx \quad \text{e} \quad S = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 \, dx,$$

mostrando que ambas são iguais a $\sqrt{2\pi}/4$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\pi e^{-2a}/4$.

2. $\pi e^{-4}(2\cos 2 + \operatorname{sen} 2)/2$.

3. $\pi(1-e^{-a})/a^2$.

4. $\pi/4e$.

7. Lembre-se de que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$. Use $x = e^{-i\pi/4} z$ e o exercício anterior para mostrar que $I_R = \int_0^R e^{-ix^2} dx = e^{-i\pi/4} \int_0^{Re^{i\pi/4}} e^{-z^2} dz = [(1-i)/\sqrt{2}] \int_0^R e^{-x^2} dx + \varepsilon_R$, onde $\varepsilon_R \to 0$ com $R \to \infty$.

INTEGRANDOS MULTIVALENTES

Vamos calcular a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x+1} dx, \quad 0 < k < 1,$$

onde consideramos a determinação real de x^{k-1}.

Seja $C = C_1 \cup C_R \cup C_2 \cup C_r$ o contorno fechado formado do segmento

$$C_1 = [r, R], \quad \arg z = 0,$$

do círculo C_R de centro na origem e raio R, do segmento

$$C_2 = [r, R], \quad \arg z = 2\pi$$

e do círculo C_r de centro na origem e raio r, onde $r < 1 < R$ (Fig. 5.5). Então, a única singularidade da função

$$f(z) = \frac{z^{k-1}}{z+1}$$

no interior de C é o ponto $z = -1$, que é pólo simples, no qual o resíduo de f é

$$(-1)^{k-1} = e^{(k-1)\log(-1)} = e^{(k-1)\pi i}.$$