sua inversa $g^{-1}(z) = f(z) - \alpha$ seria analítica em z_0, contradizendo a hipótese do teorema. Se $g(z_0) = 0$, z_0 seria zero de certa ordem m da função g, significando isto que z_0 seria pólo de ordem m da função $f(z) - \alpha$. Mas isto também contradiz a hipótese do teorema e completa a demonstração.

EXERCÍCIOS

Mostre que $z = 0$ é singularidade removível de cada uma das funções dadas nos Exercs. 1 a 5. Determine o valor que se deve atribuir à função em $z = 0$ para que ela fique regular nesse ponto.

1. $\dfrac{z}{e^z - 1}$. 2. $\dfrac{e^z - 1}{\operatorname{sen} 2z}$. 3. $\dfrac{\cosh 2z - 1}{\operatorname{sen}^2 z}$. 4. $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$. 5. $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$.

Determine os pólos, com suas respectivas ordens, no caso de cada uma das funções dadas nos Exercs. 6 a 13.

6. $\dfrac{z+4}{z(z^2+1)^2}$. 7. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3(z-\pi)}$. 8. $\dfrac{1}{z \operatorname{sen}^2 \pi z}$. 9. $\dfrac{1 - e^z}{z^4 \operatorname{sen}(1+z)}$.

10. $\dfrac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$. 11. $\dfrac{1}{(e^{iz} - 1)^2}$. 12. $\dfrac{\cosh z}{z(1 - \cos z)}$. 13. $\dfrac{\operatorname{senh} z}{z \operatorname{sen}^2(z + \pi/2)}$.

14. Seja z_0 um zero das funções f e g. Supondo ainda que $g'(z_0) \neq 0$, mostre que z_0 é singularidade removível de f/g e
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$
15. Demonstre que uma singularidade isolada z_0 de uma função f é um pólo de ordem m se e somente se $(z - z_0)^m f(z)$ tiver limite finito e diferente de zero com $z \to z_0$.
16. Demonstre que z_0 é pólo de ordem m de uma função f se e somente se z_0 for zero de ordem m de $1/f$.
17. Demonstre que uma singularidade isolada z_0 de uma função f é pólo se e somente se $|f(z)|$ tende a infinito com $z \to z_0$.
18. Determine a parte principal da função
$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$$
relativa ao pólo $z = i$.
19. Determine a parte principal da função
$$f(z) = \frac{1}{(z - n\pi)^2 \operatorname{sen} z}$$
relativa ao pólo $z = n\pi$ (n inteiro).

RESPOSTAS

6. $z = 0$, i e $-i$, de ordens 1, 2 e 2, respectivamente.
8. $z = 0$, de ordem 3; $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ de ordens 2.
10. $z = 0$, de ordem 2; $z = 2k\pi i$ (k inteiro $\neq 0$), de ordens 1.
12. $z = 0$, de ordem 3; $z = 2k\pi$ (k inteiro $\neq 0$), de ordens 2.
18. $\dfrac{-i}{(z-i)^2} + \dfrac{1}{z-i}$.

TEOREMA DO RESÍDUO

Seja f uma função regular e univalente numa região R, exceto numa singularidade isolada $z_0 \in R$. Então, numa vizinhança de z_0 vale o desenvolvimento de Laurent,
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$
os coeficientes a_n sendo dados por
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \tag{5.3}$$
onde C é um contorno fechado de R, envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

O coeficiente a_{-1} acima é chamado o *resíduo de* f no ponto z_0, e denotado $(\text{res.}\, f)(z_0)$. Sua importância reside no teorema que daremos a seguir.

5.4. Teorema (do resíduo). *Se f é regular e univalente numa região simplesmente conexa R, exceto em um número finito de singularidades isoladas, $z_1, \ldots, z_k$, então*
$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} (\text{res.}\, f)(z_j), \tag{5.4}$$
onde C é um contorno fechado de R, envolvendo $z_1, \ldots, z_k$ uma vez no sentido positivo.