3. Derivando e integrando a série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

obtenha os seguintes desenvolvimentos, válidos em $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad \text{e} \quad \log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

onde $\log(1-z)$ é o ramo do logaritmo que corresponde a $\log 1 = 0$.

4. Obtenha os seguintes desenvolvimentos:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n; \quad \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n};$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n; \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n;$$

todos válidos em $|z| < 1$.

Usando o teste de Weierstrass, mostre que as séries dadas nos Exercs. 5 a 16 convergem uniformemente nos domínios indicados em cada caso.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos 3n}{1+5n}z^n$, em qualquer disco $|z| \le r < 1$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 - 3\cos n}{10n^2+7}z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z| \le r < 1$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7\sqrt{n+1}}{(n+1)2^n}z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z| \le r < \sqrt{2}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}(z-1)^n$, em qualquer disco $|z-1| \le r < 1$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{R^n}z^n$, em qualquer disco $|z| \le r < R$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}z^n$, em qualquer disco $|z| < R$, qualquer que seja a constante a.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}z^n$, em qualquer disco $|z| < R$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n}{n^3+1}e^{z/n}$, em qualquer disco $|z| < R$.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os quadrados perfeitos.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{z/n}}{n^2+z^2}$, em qualquer conjunto compacto que não contenha números da forma $z = \pm in$ com n natural.

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z-n)}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os números naturais.

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2-z^2}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os números inteiros.

17. Prove que a série $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ define uma função analítica em $\operatorname{Re} z > 0$, conhecida como *função zeta* de Riemann.

18. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nz}{2^n}$ define uma função analítica na faixa $|\operatorname{Im} z| < \log 2$.

19. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$ converge uniformemente no eixo real, mas em nenhuma região do plano complexo.

SUGESTÕES

17. Qualquer ponto z tal que $\operatorname{Re} z > 0$ está contido num semiplano aberto $\operatorname{Re} z \ge c > 0$.

18. Use o teste de Weierstrass, notando que

$$|\operatorname{sen} nz|^2 = \frac{1}{4}(e^{2ny} + e^{-2ny}) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 nx - \cos^2 nx).$$

19. Use a experiência ganha com o exercício anterior.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Dentre as séries de funções, são de interesse especial as *séries de potências*, ou séries do tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{4.9}$$