Módulo e complexo conjugado

Definimos o *módulo*, *valor absoluto* ou *norma* de um número complexo $z = x + iy$ como sendo o número não-negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como se vê, ele é a distância do ponto z à origem.

O *complexo conjugado* de $z = x + iy$ é definido como sendo $\overline{z} = x - iy$. A Fig. 1.4 ilustra exemplos de complexos conjugados.

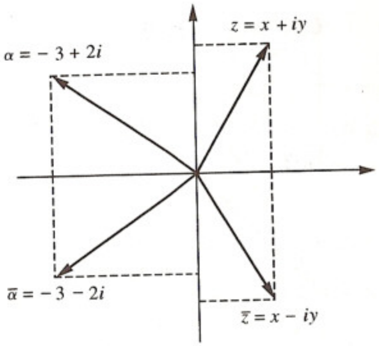

Fig. 1.4

Em termos do módulo e do conjugado, temos:

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(-xy + yx) = x^2 + y^2,$$

isto é, $z\overline{z} = |z|^2$. Esta propriedade permite calcular o *quociente* $z = z_1/z_2$ de dois números complexos z_1 e z_2, $z_2 \neq 0$, que é definido pela condição $zz_2 = z_1$. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador. Exemplos:

$$\frac{-3+i}{1-2i} = \frac{(-3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5-5i}{1^2+2^2} = -1 - i.$$

Em geral, com $z_1 = x_1 + x_1$ e $z_2 = x_2 + x_2$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de provar as seguintes propriedades:

$$|z| = |\overline{z}|; \quad \text{Re}\, z = \frac{z + \overline{z}}{2}; \quad \text{Im}\, z = \frac{z - \overline{z}}{2i};$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2; \quad \overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

Esta última segue da penúltima e da definição de quociente:

$$zz_2 = z_1; \quad \text{logo}, \quad \overline{z}\,\overline{z}_2 = \overline{z}_1, \quad \text{donde} \quad \overline{z} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

EXERCÍCIOS

Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões dadas nos Exercs. 1 a 11.

1. $(3 + 5i) + (-2 + i)$.
2. $(-3 + 4i) - (1 - 2i)$.
3. $(\sqrt{3} - 2i) - i[2 - i(\sqrt{3} + 4)]$.
4. $(3 - 5i)(-2 - 4i)$.
5. $\left(1 + \frac{i}{3}\right)\left(-\frac{6}{5} + 3i\right)$.
6. $(3i - 1)\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{2}\right)$.
7. $7 - 2i\left(2 - \frac{2i}{5}\right)$.
8. $(2 + 3i)^2$.
9. $(4 - 2i)^2$.
10. $(1 + i)^3$
11. $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5$.
12. Mostre que $\sum_{n=0}^{N} i^n = 1,\ 1 + i,\ i$ ou zero, conforme o resto da divisão de N por 4 seja zero, 1, 2 ou 3, respectivamente.
13. Mostre que $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.
14. Mostre que $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$.
15. Mostre que $(x + iy)^2(x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2$.
16. Mostre que $(x + iy)^n(x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n$.

Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões dadas nos Exercs. 17 a 27.

17. $\frac{1}{2 + 3i}$.
18. $\frac{1}{4 - 3i}$.
19. $\frac{1 + i}{3 - 2i}$.
20. $\frac{3 - i}{2i - 1}$.
21. $\frac{1 - i}{1 + i}$.
22. $\frac{1 + i}{1 - i}$.
23. $\frac{4 - 3i}{i - 1}$.
24. $\frac{1 - i}{\sqrt{2} - i}$.
25. $\frac{1}{(1 + i)^2}$.
26. $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{30}$.
27. $(1 - i)(\sqrt{3} + i)$.

Nos Exercs. 28 a 32, represente graficamente os números complexos z_1, z_2, $z_1 z_2$ e z_1/z_2.

28. $z_1 = 3+4i,\ \ z_2 = \dfrac{1-i}{5\sqrt{2}}$.

29. $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

30. $z_1 = \dfrac{1+i}{2\sqrt{2}},\ \ z_2 = 1+i\sqrt{3}$.

31. $z_1 = 1+2i,\ \ z_2 = 2-i$.

32. $z_1 = 3-i,\ \ z_2 = 3-i/2$.

33. Mostre que $\operatorname{Re}[-i(2-3i)^2] = -12$.

34. Mostre que $\dfrac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} = -i$.

35. Mostre que $\operatorname{Im}\left[\dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-2}\right] = \dfrac{2(1+2\sqrt{3})}{5}$.

36. Mostre que $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta} = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$.

37. Dados dois números complexos α e β, prove que

$$|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2.$$

Faça um gráfico e obtenha a seguinte interpretação geométrica: a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.

38. Dados três vértices de um paralelogramo pelos números complexos z_1, z_2 e z_3, determine o vértice z_4 oposto a z_2. Faça um gráfico.

39. Prove que o produto de dois números complexos é zero se e somente se um dos fatores se anula.

40. O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que todo polinômio com coeficientes complexos possui uma raiz (real ou complexa). Prove, como corolário, que todo polinômio $P(x)$ de grau n possui n raízes, contadas as multiplicidades; e sendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ essas raízes, então $P(x)$ se escreve $P(x) = a(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$. Prove também que se o polinômio tem coeficientes reais, e se α é uma raiz complexa, então $\overline{\alpha}$ também é raiz.

REPRESENTAÇÃO POLAR

Considerando a representação geométrica de um número complexo $z \neq 0$, chama-se *argumento* de z o ângulo θ formado pelo eixo Ox e o vetor Oz (Fig. 1.5). Como em Trigonometria, os ângulos são aqui orientados: consi[...] positivo o sentido de percurso oposto ao dos ponteiros do relógio.

O argumento de z só pode ser definido quando $z \neq 0$; mesm[...] hipótese, o argumento só fica determinado a menos de múltiplos int[...] 2π. Como $x = |z|\cos\theta$ e $y = |z|\operatorname{sen}\theta$, temos a seguinte representaç[...] conhecida como *representação polar* ou *representação trigonométri[...]*

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \quad r = |z|;$$

r e θ são designados as *coordenadas polares* de z.

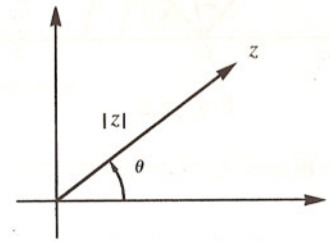

Fig. 1.5

Fórmulas do produto e do quociente

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra muito [...]niente para a multiplicação. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$$

dois números complexos quaisquer. Então,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,sen\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i\,(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{s}[...] \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)].$$

Vemos assim que *o produto de dois números complexos é o núme[...] módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a so[...]*

1. $z = -2 + 2i$.

2. $z = 1 + i\sqrt{3}$.

3. $z = -\sqrt{3} + i$.

4. $z = \left(\dfrac{i}{1+i}\right)^5$.

5. $z = \dfrac{1}{-1 - i\sqrt{3}}$.

6. $z = -1 - i$.

7. $z = \dfrac{-3+3i}{1+i\sqrt{3}}$.

8. $z = \dfrac{-4}{\sqrt{3} - i}$.

9. $z = 1 + 2i$.

10. $z = -1 + 3i$.

11. $z = -3 - 2i$.

12. $z = 4 - i$.

Nos Exercs. 13 a 18, reduza os números z_1 e z_2 à forma polar e determine as formas polares de $z_1 z_2$ e z_1/z_2. Represente esses quatro números num gráfico.

13. $z_1 = \sqrt{3} + 3i$, $z_2 = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$.

14. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$.

15. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

16. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

17. $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + i$.

18. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + 2i$.

19. Prove que se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, então z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo eqüilátero inscrito no círculo unitário de centro na origem. Faça um gráfico.

20. Prove que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,3\theta = -\mathrm{sen}^3\theta + 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

21. Obtenha fórmulas análogas às do exercício anterior para $\cos 4\theta$ e $\mathrm{sen}\,4\theta$.

22. Prove, de um modo geral, que

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + \ldots \\
&= P(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta), \\
\mathrm{sen}\,n\theta &= n\cos^{n-1}\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cos^{n-3}\mathrm{sen}^3\theta + \ldots \\
&= Q(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta),
\end{aligned}$$

onde P e Q são polinômios convenientes, homogêneos e de grau n nas duas variáveis $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

2. $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

4. $z = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

9. $z = \sqrt{5}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $\theta = \arccos(1/\sqrt{5})$, $0 < \theta < \pi/2$.

12. $z = \sqrt{17}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $\theta = \arccos(4/\sqrt{17})$, $-\pi/2 < \theta < 0$.

20. Desenvolva $(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)^3$ pela fórmula do binômio e pela fórmula de De Moiv

PROPRIEDADES DO VALOR ABSOLUTO

As seguintes propriedades são de verificação imediata:

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$|z| = |-z|; \quad |\mathrm{Re}z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}z| \leq |z|.$$

A propriedade

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

segue da seguinte observação: $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1\overline{z}_1)(z_2\overline{z}_2)$ $|z_1|^2|z_2|^2$. Menos trivial é a *desigualdade do triângulo*,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad (1$$

assim chamada por exprimir propriedade geométrica bem conhecida: *a so dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior ou igual ao co primento do terceiro lado* (Fig. 1.8). Para demonstrá-la, observemos qu

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z}_2| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2.
\end{aligned}$$

Como exemplo, seja determinar as raízes cúbicas do número $a = 8$. Uma delas é $z_0 = 2$. As raízes cúbicas da unidade são dadas por 1, ω, ω^2, sendo que agora

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, as raízes cúbicas de 8 são (Fig. 1.11):

$$z_0 = 2; \quad z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$z_2 = 2\omega^2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

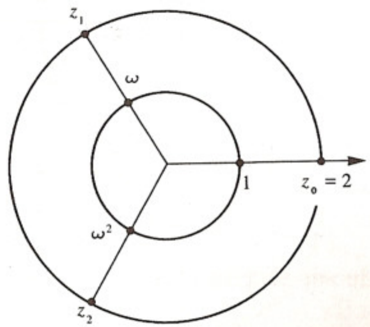

Fig. 1.11

Raízes primitivas

Chama-se *raiz n-ésima primitiva da unidade* qualquer raiz n-ésima $z \neq 1$ tal que n é o menor inteiro positivo tal que $z^n = 1$. É claro que, qualquer que seja n,

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$$

é raiz primitiva. Ela é a primeira raiz primitiva que ocorre quando percorremos o círculo unitário no sentido anti-horário a partir da unidade real. Mas pode não ser a única raiz primitiva; por exemplo, no caso das raízes triplas da unidade, como vimos há pouco, ω é raiz primitiva, mas ω^2 também é. Já no caso das raízes sêxtuplas, ω e ω^5 são raízes primitivas, enquanto ω^2, ω^3 e ω^4 não o são. Veja o Exerc. 22 adiante para uma caracterização das raízes primitivas.

Observação. O processo de cálculo de raízes, utilizando a representação trigonométrica, é de caráter geral; mas nem sempre é o mais conveniente. Por exemplo, no cálculo da raiz quadrada do número $-7 - 24i$, é mais fácil proceder assim:

$$\sqrt{-7-24i} = x + iy, \quad \text{donde} \quad x^2 - y^2 + 2ixy = -7 - 24i.$$

Mas isto equivale a

$$x^2 - y^2 = -7, \quad xy = -12.$$

Resolvendo esta última equação em relação a x e substituindo na primeira, obtemos uma equação quadrática para y^2, cuja solução é $y^2 = 16$ (como y é real, $y^2 > 0$). Logo, $y = \pm 4$ e $x = \mp 3$. Finalmente,

$$\sqrt{-7-24i} = \pm(3 - 4i).$$

EXERCÍCIOS

Calcule as raízes dos números complexos dados nos Exercs. 1 a 8 e faça a representação gráfica correspondente.

1. $\sqrt[3]{-1}$.
2. $(1 + i\sqrt{3})^{1/2}$.
3. $\sqrt{2i}$.
4. $\sqrt{-2i}$.
5. $\sqrt[4]{i}$.
6. $\sqrt[3]{-i}$.
7. $(-1 + i\sqrt{3})^{1/4}$.
8. $(-1 - i\sqrt{3})^{1/2}$.

Usando o procedimento descrito na Observação acima, calcule as raízes indicadas nos Exercs. 9 a 11.

9. $\sqrt{-5-12i}$.
10. $\sqrt{3+4i}$.
11. $\sqrt{1 + 2i\sqrt{6}}$.

12. Decomponha o polinmio $P(x) = x^4 + 1$ em fatores do 2º grau com coeficientes reais.
13. Faça o mesmo com o polinômio $P(x) = x^4 + 9$.

Nos Exercs. 14 a 21, decomponha cada polinômio dado em um produto de fatores do 1º grau.

14. $P(z) = z^6 - 64$.　　15. $P(z) = z^6 + 64$.　　16. $P(z) = 3z^2 - i$.

17. $P(z) = 5z^3 + 8$.　　18. $P(z) = z^2 - 2z + 2$.　　19. $P(z) = 2z^2 + z + 1$.

20. $P(z) = z^2 - (1+i)z + 5i$.

21. $P(z) = z^4 - (1-i)z^2 - i$.

22. Prove que $\omega = \cos(2k\pi/n) + i\,\mathrm{sen}\,(2k\pi/n)$ é raiz n-ésima primitiva da unidade se e somente se k e n forem primos entre si. Em consequência, sendo $n > 2$, as raízes primitivas são sempre em número maior do que 1; e exatamente $n-1$ se n for número primo.

23. Prove que se $\omega = \cos(2k\pi/n) + i\,\mathrm{sen}\,(2k\pi/n)$ é raiz n-ésima primitiva da unidade, então as n raízes n-ésimas da unidade são dadas por $1,\ \omega,\ \omega^2, \ldots,\ \omega^{n-1}$.

24. Prove que $1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$, onde ω é qualquer raiz n-ésima da unidade, diferente de 1.

25. Prove que

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1},$$

onde ω é qualquer raiz n-ésima da unidade, diferente de 1.

RESPOSTAS, SUGESTÕES E SOLUÇÕES

1. $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ e -1.　　3. $1+i$.　　4. $1-i$.

5. $\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$ e $-i$.　　7. $\pm\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}$ e $\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt[4]{8}}$.

12. Pondo $\omega = (1+i)/\sqrt{2}$, temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - i^2 = (x^2 - i)(x^2 + i) = (x^2 - w^2)(x^2 - \overline{\omega}^2) \\ &= [(x-\omega)(x+\omega)][(x-\overline{\omega})(x+\overline{\omega})] \\ &= [(x-\omega)(x-\overline{\omega})][(x+\omega)(x+\overline{\omega})] \\ &= (x^2 - \sqrt{2} + 1)(x^2 + \sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

25. Seja S a referida soma. Então,

$$\begin{aligned} S &= (1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1}) + \omega[1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots + (n-1)\omega^{n-2})] \\ &= \omega(S - n\omega^{n-1}). \end{aligned}$$

A EXPONENCIAL

Admitimos que o leitor tenha familiaridade com as funções trigonon
a constante de Euler e e a função exponencial e^x, conceitos estes
estudados nos cursos de Cálculo. Lembramos, em particular, os de
mentos dessas funções em séries de MacLaurin, válidos para todos o
reais da variável x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots;$$

$$\mathrm{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

A *constante de Euler* e, que é um número irracional compreend
2 e 3 ($e \approx 2{,}71828\ldots$), é dada pela série

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

que se obtém de (1.5) com $x = 1$.

Vamos tomar o desenvolvimento (1.5) como base para definir
complexo. Se e^z já tivesse significado para z complexo, e o desenvo
(1.5) fosse válido neste caso, então teríamos, com y real,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{3!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \ldots \end{aligned}$$

Admitindo ainda que seja possível rearrumar os termos desta sér
juntos os termos reais e separadamente os termos imaginários, ob

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right.$$