Lista de Matrizes e Sistemas Lineares

SME141 – Álgebra Linear e Equações Diferenciais.

1) Calcular os seguintes produtos

a) $5\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 6\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 7\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

2) Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, vale $AB = BA$? Mostre ou dê contra-exemplo.

3) Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$, onde a, b são números reais.

a) Motre que $\mathcal{M}$ é fechado com respeito à adição e à multiplicação matricial, isto é, a soma ou multiplicação de duas matrizes de $\mathcal{M}$ é uma matriz de $\mathcal{M}$.
b) Faça a matriz

$$\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$$

corresponder ao número complexo $a + bi$. quais números complexos correpondem às seguintes matrizes?

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

c) Usando a correspondência da parte b entre $\mathcal{M}$ e $\mathbb{C}$, mostre que $\mathcal{M}$ é um bom modelo matricial para números complexos, isto é, a adição em $\mathcal{M}$ corresponde à adição em $\mathbb{C}$, e o mesmo para a multiplicação em $\mathcal{M}$ e $\mathbb{C}$.

4) Uma *matriz triangular estritamente superior* é uma matriz triangular superior cujas entradas da diagonal são 0, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i \geqslant j$. Seja S é uma matriz triangular estritamente superior $n \times n$ e sejam $e_1, e_2, \ldots, e_n$ os vetor coluna correspondentes à base canônica do $\mathbb{R}^n$.
a) Mostre que Se_k é a k-ésima coluna de S.
b) Mostre que $Se_1 = 0$ e que Se_k é uma combinação linear dos vetores $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$.
c) Mostre que $S^n = 0$.
d) Mostre que $(I - S)^{-1} = I + S + \cdots + S^{n-1}$

5) Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n. É verdadeiro que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Mostre ou dê um contra-exemplo.

6) Encontre todas as matrizes X de ordem 2×2 tais que $X^2 = I_2$.

7) Classifique os sistemas quanto a serem impossíveis, possíveis determinados ou indeterminados.

a) $\begin{cases}x + y = 0\\ 2x - y = 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x + y = 0\\ 2x + y = 0\end{cases}$

c) $\begin{cases}x + y = 0\\ 2x + 2y = 0\end{cases}$ d) $\begin{cases}x + y = 0\\ 2x + 2y = 2\end{cases}$

8) Pode um sistema linear de equações algébricas ter exatamente duas soluções?

9) Para cada um dos seguintes pares de matrizes A e B, encontre uma matriz inversível P tal que $B = PA$.

a) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

10) Encontre a forma escalonada reduzida das seguintes matrizes e dê o rank das mesmas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

11) Encontre as soluções do sistema $Ax = 0$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ (para o valor conveniente de n) onde A é cada uma das matrizes do exercício 10.

12) Seja A é matriz $n \times n$ invertível e b é um vetor coluna com n entradas, então o sistema $Ax = b$ é possível e determinado.

13) Escreva cada uma das matrizes abaixo como produto de matrizes elementares, e encontre suas inversas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

14) Mostre por meio de um exemplo que não vale em geral $\det(A + B) = \det A + \det B$.

15) Mostre que $(A + B)^T = A^T + B^T$ e $(AB)^T = B^T A^T$

16) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz que satisfaz $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_n = 0$. A matriz A é invertível? Em caso afirmativo, exiba a sua inversa.

17) Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $X, Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Mostre que $X^T AY = Y^T A^T X$.

18) Seja A uma matriz quadrada invertível. Mostre que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

19) Escrever a matriz X em função das matrizes invertíveis A, B e C.

a) $(AXB^{-1})^T = C$ b) $(BC)^{-1}X = A$ c) $(AB)^T XC = I_n$

20) *Matrizes de Vandermonde.* Mostre (sem fazer as contas) que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (c - b)(c - a)(b - a)$$

através dos seguintes passos:

a) Pense em c como uma variável e denote o determinante por $f(c)$. Explique porque $f(c)$ é um polinômio de segundo grau em c.

b) Explique porque a e b são zeros de $f(c)$ e conclua que $f(c) = k(c - b)(c - a)$.

c) Calcule $f(0)$ pela fórmula no item anterior pelo determinante, e então calcule k.

d) Prove agora que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix} = (d - c)(d - b)(d - a)(c - b)(c - a)(b - a)$$

e) Note que, fazendo por indução os mesmos passos, é possível mostrarmos o caso geral.

21) Calcule a matriz adjunta das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Gabarito

1) a) $\left[\begin{smallmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{smallmatrix}\right]$. b) igual ao anterior. c) $[\,32\,]$ d) $\left[\begin{smallmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{smallmatrix}\right]$ e) 0_2 f) I_2

2) Teste com $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

4) a) Seja $\delta_{ab} = 1$ se $a = b$ e $\delta_{ab} = 0$ se $a \neq b$. Então e_k é a matriz coluna com entradas δ_{ik}. Se Se_k é a matriz coluna com entradas c_i, temos $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}$, que é a i-ésima entrada da coluna k e S. b) Se_1 é a coluna 1ª coluna de S, que é 0. Se $k > 1$, S_k tem entradas nulas a partir da linha k, que é combinação linear de $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$. c) Cada vetor é combinação linear de $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Então basta mostrar que $S^n e_k = 0$. Usaremos o item b repetidas vezes. Se_k é combinação linear de $e_1, \ldots, e_{k-1}$. $S^2 e_k = S(Se_k)$ é combinação linear de $e_1, \ldots, e_{k-2}$. Assim, $S^n e_k = 0$ para todo k e portanto $S^n = 0$. d) Basta multiplicar a matriz dada por $I - S$.

5) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Então só vale se $AB = BA$, o que não é verdade em geral. Ver a resposta do exercício 2

6) Se $a = d = 0$ então $bc = 1$, senão $a, d \in \{\pm 1\}$ e $b = c = 0$

8) Se há duas soluções, então há pelo menos uma variável livre. Então, é possível se $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, e impossível nos outros casos.

9) Dica: faça a matriz aumentada de A com I_3 e aplique as operações elementares de linha que levam A em B; no lado direito aparecerá $PI_3 = P$.

10) a) $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, rank 3 b) I_2, rank 2 c) $\left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, rank 2 d) $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, rank 1 e) I_3, rank 3 f) $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, rank 1

12) Multiplicando o sistema por A^{-1}, encontra-se a única solução $x = A^{-1}b$.

14) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], A + B = I_2$.

15) Mostraremos só a segunda parte. Seja $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^T = (c_{ij})$, $B^T = (d_{ij})$. Então $c_{ij} = a_{ji}$, $d_{ij} = b_{ji}$, $AB = (m_{ij})$, onde $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}d_{jk} = \sum_{k=1}^{n} d_{jk}c_{ki} = n_{ji}$, onde $B^T A^T = n_{ij}$. Logo $(AB)^T = B^T A^T$.

16) Neste caso, A é invertível. Note que, da equação, é possível isolar I_n e fatorar A, obtendo a inversa: $4I_n = A^3 - 5A^2 + 8A = A(A^2 - 5A + 8I_n) \implies A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I_n)$
[caso ficou curioso: se A satisfaz esse tipo de equação, é possível mostrar que o polinômio característico de A divide o polinômio da equação. A só não é invertível se 0 é um autovalor, ou seja, o termo com I_n não aparece na equação.]

17) Note que o produto de matrizes é 1×1, daí o último passo: $X^T AY = \big((X^T AY)^T\big)^T = (Y^T A^T X)^T = Y^T A^T X$.

18) $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$. Logo $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

19) a) $X = A^{-1}C^T B$ b) $X = BCA$ c) $X = {A^T}^{-1}{B^T}^{-1}C^{-1} = (CB^T A^T)^{-1}$

21) a) $\operatorname{adj} A = \left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$ b) $\operatorname{adj} A = \left[\begin{smallmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$