Lista de espaços vetoriais, base e dimensão

SME141 – Álgebra Linear e Equações Diferenciais.

1) Faça todos os exercícios do capítulo 3 da apostila.

2) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $U \subset V$ um subspaço também de dimensão n. Mostre que $U = V$.

3) *Soma direta.* Seja V um espaço vetorial e U, W subespaços de V. Definimos a soma de U e W por

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U, w \in W\}.$$

Se $U \cap W = \{0\}$, este fato é enfatizado denotando $U + V$ por $U \oplus V$. Este conjunto chama-se *soma direta* de U e W.

a) Mostre que $U + W$ é subespaço de V.

b) Mostre que se $V = U \oplus W$, então todo elemento de V se escreve de maneira única como soma de um elemento de U com outro de W.

c) Mostre que se B_1 é base de U e B_2 é base de W e $V = U + W$ (isto é, $U \cap W \neq \{0\}$), então $V = [B_1 \cup B_2]$, mas $B_1 \cup B_2$ não é base de V.

d) Mostre que se B_1 é base de U e B_2 é base de W e $V = U \oplus W$, então $B_1 \cup B_2$ é base de V.

4) Verifique, em cada um dos itens abaixo, se $V = U \oplus W$.

a) $V = \mathbb{R}^2$, U, W são retas distintas que passam pela origem

b) $V = \mathbb{R}^3$, U, W são planos distintos que passam pela origem

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} | c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

d) $V = M_n(\mathbb{R})$, $U = \{S \in M_n(\mathbb{R}) | S = S^T\}$ (matrizes simétricas),
$W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A = -A^T\}$ (matrizes antissimétricas)
Dica: $B = \frac{1}{2}(B + B^T) + \frac{1}{2}(B - B^T), \forall B \in M_n(\mathbb{R})$

e) $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), U = \{f \in V | f(-x) = f(x)\}$ (f. pares), $W = \{f \in V | f(-x) = -f(x)\}$ (f. ímpares).
Dica: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$

5) Seja $S = \{u, v, w\}$ um conjunto l.i. em V. Verifique se os conjuntos abaixo são l.i. ou l.d..

a) $S_1 = \{u, u + v, u + v + w\}$ b) $S_2 = \{u - v, v - w, w - u\}$ c) $S_3 = \{u + v, u + v + w, w\}$

6) Encontrar uma base para cada subespaço abaixo.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0\}$

b) $W = \{f \in P_3(\mathbb{R}) | p'(t) = 0\}$

c) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A = A^T\}$

d) $W = \{X \in M_3(\mathbb{R}) | AX = 0\}$, onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

e) $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = XA\}$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

f) $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = X\}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

7) Verifique se $P_2(\mathbb{R})$ tem como base os vetores $u_1(t) = 1 + t$, $u_2(t) = t + 2t^2$ e $u_3(t) = 1 - t^2$.

8) Em cada item abaixo, encontrar uma base para os subspaços U, W, $U \cap W$ e $U + W$ de V.

a) $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)]$, $W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$, $V = R^3$.

b) $U = \{(x, y, z) \in R^3 | x + y = 0\}$, $W = [(1, 3, 0), (0, 4, 6)]$, $V = R^3$.

c) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A = A^T\}, W = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

d) $U = [t^3 + 4t^2 - t + 3, t^3 + 5t^2 + 5, 3t^3]$, $W = [t^3 + 4t^2, t - 1, 1]$, $V = P_3(\mathbb{R})$.

9) Determinar as coordenadas do vetor $u = (2,6,7) \in \mathbb{R}^3$ em relação a cada uma das bases de $\mathbb{R}^3$ abaixo.
a) base canônica
b) $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$
c) $\{(1,2,1),(0,3,2),(1,1,4)\}$

10) Determine uma base ortonormal para o subespaço $W = [(1,1,0,0),(1,1,1,1),(1,0,1,0)]$ de R^4.

11) Encontre uma base ortonormal de

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z+w=0\}$$

Gabarito
2) Seja $B_U = \{u_1,\dots,u_n\}$ uma base de U. Suponha que $U \neq V$. Então existe $v \in V$ tal que $v \notin U$. Vamos mostrar que $C = \{u_1,\dots,u_n,v\}$ é l.i.. Tome a equação $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \beta v = 0$. Se $\beta \neq 0$, podemos escrever v como combinação linear de B_U, o que é absurdo, pois $v \notin U$. Então $\beta = 0$, e a equação é uma combinação linear de elementos de B_U resultando 0. como B_U é base, segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Então C é um conjunto l.i. com $n+1$ elementos dentro de um espaço vetorial de dimensão n, o que é impossível pelo Teorema 3.5, p. 84 da apostila.
3) a) Feito em sala de aula, mas é bom que o aluno saiba fazer. b) Para todo $v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$, pois $V = U \oplus W$. Suponha que $v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, com $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$. Então $\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W} \in U \cap W = \{0\}$, o que implica $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$. c) Todo $v \in V$ é soma de elementos de U com elementos de W. Logo, v é combinação linear de elementos de B_1 e B_2. Logo $B_1 \cup B_2$ gera V, mas não é l.i., pois existe $v \in U \cap W$, $v \neq 0$. Então v é combinação linear de elementos de B_1 e também de elemntos de B_2. Fazendo a diferença, encontramos uma combinação linear de $B_1 \cup B_2$ com não todos os coeficientes nulos, dando 0. d) Igual ao anterior, mas agora $B_1 \cup B_2$ é l.i., pois 0 se escreve de maneira única como soma de elementos de U e W, isto é, $\underbrace{0}_{\in V} = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W}$ e a única combinação linear possível de elementos das bases B_1 e B_2 que dá 0 é a com todos os coeficientes nulos.
4) a) Como as retas são distintas, seus vetores diretores são l.i., digamos $U = [u]$ e $W = [w]$. $U + W = [u,w] = \mathbb{R}^2$. O único ponto em comum das retas é a origem (senão seriam retas coincidentes). Logo $V = U \oplus W$. b) Da geometria analítica, dois planos concorrentes têm pelo menos uma reta em comum, ou seja $U \cap W \neq \{0\}$. Neste caso, $\mathbb{R}^3 = U + W$, mas a soma não é direta. c) Qualquer matriz de M_2 pode facilmente ser decomposta como soma de elementos de U e W, e portanto $M_2 = U + V$. Se $A \in U \cap W$, então $A = 0$. Logo a soma é direta. d) Use a dica, mostre que uma das parcelas pertence a U e a outra a W. Logo $M_n = U + W$. Se $A \in U \cap W$, $-A^T = A = A^T \implies 2A^T = 0 \implies A = 0$. Portanto $V = U \oplus W$. e) Semelhante ao item anterior.
5) a) Considere a equação $0 = \alpha u + \beta(u+v) + \gamma(u+v+w) = (\alpha+\beta+\gamma)u + (\beta+\gamma)v + \gamma w$. Como S é l.i., então $0 = \gamma = \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$, que implica $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Portando, S é l.i. b) l.d. c) l.d.
6) Nota: não há resposta única a estes itens. a) $B_W = \{(2,1,0),(0,0,1)\}$ b) $p = a + bt + ct^2 + dt^3 \in W \implies 0 = b + 2ct + 3dt^3 \implies b = c = d = 0 \implies p(t) = a \implies B_W = \{1\}$. c) $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in W \implies \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] \implies b = c \implies A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right] = a\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] + b\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] + d\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \implies B_W = \{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\}$ d) $\det A = -8$, então $AX = 0 \implies X = 0$; logo não há vetores não nulos em W; portanto $B_W = \varnothing$. e) $B_W = \{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\}$ f) $B_W = \{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\}$
7) $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$ e portanto basta verificar se o conjunto é l.i.. O sistema $au_1(t) + bu_2(t) + cu_3(t) = 0$, escrito em coordenadas da base canônica, é equivalente ao sistema $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. O determinante da matriz é 1, logo o conjunto é l.i. e portanto o conjunto é base de $P_2(\mathbb{R})$.
8) a) $B_{U\cap W} = \{(0,1,1)\}$, $U + W = \mathbb{R}^3$. b) $B_U = \{(1,-1,0),(0,0,1)\}$, $B_{U\cap W} = \{(1,1,-3)\}$, $U + W = \mathbb{R}^3$. c) $B_U = \{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\}$, $U \cap W = \{0\}$, $U + W = M_2(\mathbb{R})$ d) $B_{U\cap W} = \{4t^3 + 4t + 1, t + 1\}$, $U + W = P_3(\mathbb{R})$.
9) a) $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$ b) $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ c) $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$
10) $B_W = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\}$
11) Primeiro, encontrar uma base de W, e depois aplicar Gram-Schmidt. Por exemplo: $B_1 = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1),(1,0,0,-1)\}$, obtendo a base ortonormal $B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)\}$.