Resposta dos exercícios da 4ª lista

Caso encontre algum erro nesta lista de respostas, por favor escreva para o Prof. Miguel Frasson no e-mail `mvsfrasson@gmail.com`.

2) (a) $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} + c_3te^{-2t} + \dfrac{e^{3t}}{50}$

(b) $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t} + \dfrac{t^2}{8}(e^t + e^{-t})$

(c) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \dfrac{t}{2} \cos t$

(d) $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + c_3te^{-t} + \dfrac{t}{24}e^{2t} - \dfrac{t}{8}e^{-2t}$

(e) $\Big(\dfrac{d}{dt} - t\Big)\Big(\dfrac{d}{dt} + \dfrac{1}{t}\Big)y = y'' + \Big(\dfrac{1}{t} - t\Big)y' - \Big(\dfrac{1}{t^2} + 1\Big)y = 0$

É fácil ver que uma solução é conseguida resolvendo $y' + \dfrac{y}{t} = 0$

$y(t) = \dfrac{c_1 + c_2e^{t^2/2}}{t}$

3) $\Big(\dfrac{d}{dt} + \dfrac{1}{t}\Big)\Big(\dfrac{d}{dt} - t\Big)y = y'' + \Big(\dfrac{1}{t} - t\Big)y' - 2y = 0$

É fácil ver que uma solução é conseguida resolvendo $y' - ty = 0$

$y(t) = c_1e^{t^2/2}E(t) + c_2e^{t^2/2}$

(Obs: este exercício e o 2-d poderiam ser facilmente resolvidos usando a versão decomposta do operador, sem usar redução de ordem; neste, por exemplo, seja $L_1 = \Big(\dfrac{d}{dt} + \dfrac{1}{t}\Big)$, $L_2\Big(\dfrac{d}{dt} - t\Big)$; então a equação é $L_1L_2y = 0$; seja $z = L_2y$, e a equação fica $L_1z = 0$, o que implica $z = c_1/t$; desfazendo a mudança, resolvemos $L_2y = z = c_1/t$, encontrando a resposta dada.)

(Obs2: a idéia era mostrar que se nos operadores da forma $\Big(\dfrac{d}{dt} + f(t)\Big)$, se $f(t)$ não é constante, então em geral estes operadores não comutam.)

4) Obs: exercícios com equações de coeficientes constantes e partes não homogêneas compostas por funções trigonométricas, se a intenção é "obter formulas fáceis", é mais fácil resolver usando o método dos coeficientes a determinar (MCD), pois identidades trigonométricas nem sempre são fáceis de simplificar.

(a) $\cos t \cos 2t = \dfrac{1}{2}(\cos t + \cos 3t)$

Usando o MCD (tem que resolver a homogênea de todo jeito), obtemos

$y_p(t) = \dfrac{t}{4} \operatorname{sen} t - \dfrac{1}{16} \cos 3t.$

Usando Método da Variação dos Parâmetros (MVP):

Solução da homogênea é $y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$;

$u_1 = \frac{1}{16} \cos 4t$

$u_2 = \frac{t}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 4t.$

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{1}{16} \cos t \cos 4t + \frac{t}{4} \operatorname{sen} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{16} \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 4t \\ &= \frac{1}{4} t \operatorname{sen} t - \frac{1}{16} \cos 3t + \frac{1}{8} \cos t \end{aligned}$$

(b) Usando o MCD (tem que resolver a homogênea de todo jeito), obtemos
$y_p(t) = \dfrac{1}{17}\cos 2t - \dfrac{4}{17}\operatorname{sen} 2t + \dfrac{1}{5}$.
Usando MVP:
Solução da homogênea é $y_h(t) = e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$;
$u_1 = e^{-t}\left(\frac{1}{17}\cos 4t + \frac{1}{68}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{5}\cos 2t + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2t\right)$.
$u_2 = e^{-t}\left(-\frac{1}{68}\cos 4t + \frac{1}{17}\operatorname{sen} 4t - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2t\right)$
$$y_p(t) = \tfrac{1}{17}\cos 2t\cos 4t + \tfrac{1}{68}\cos 2t \operatorname{sen} 4t - \tfrac{1}{68}\operatorname{sen} 2t\cos 4t + \tfrac{1}{17}\operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} 4t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + \tfrac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{17}\cos 2t - \frac{4}{17}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{5}$$

5) a) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \cos t \ln(\sec t + \tan t)$

b) $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + e^t\left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(1+e^t)\right) + e^{3t}\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\ln(1+e^t)\right) + \frac{1}{2}e^{2t}$

c) equações como as dos itens c) e d) muitas vezes tem soluções da parte homogênea do tipo $y = t^n$; tentanto soluções deste tipo, neste item c), obtemos como solução da homogênea
$y_h(t) = c_1 t + c_2 \frac{1}{t}$
Poderiamos ver também, por tentativa, que t é solução da homogênea, e utilizar redução de ordem. Para aplicar o MVP, é preciso recordar que este exige que o coeficiente do termo y'' seja 1, ou seja, precisamos dividir a equação por t (isto também no item d.)
$y(t) = c_1 t + c_2 \frac{1}{t} - 4$

d) $y_h(t) = c_1 t + c_2 t^2$
(obs: por tentativa, t é solução da homogênea)
$y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \dfrac{1}{12t^2}$

6) a) $y_p(t) = \frac{2}{3}t^3 - 4t$
obs(fazendo $z = y''$, poderíamos reduzer o problema para ordem 2, encontrar z_p e integrar duas vezes para obter y_p)

b) $y_p(t) = -\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{5}\operatorname{sen} t + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{16}$

7) mesmas observações do exercício 5c.
$y_p = \dfrac{t^4}{15}$

8) O Wronskiano satisfaz à EDO $W' + p(t)W = 0$ (feito em sala de aula).
Como o Wronskiano é constante, então necessariamente $p(t) = 0$.
Usando redução de ordem, obtemos $y_2 = \dfrac{1}{t+1}$.
Usando variação dos parâmetros, obtemos a solução particular $y_p = \dfrac{1}{4}(t+1)^3$.
Obs: não precisamos de $q(t)$ para resolver o exercício, mas ele é útil para conferir as respostas. Substituindo a solução dada, encontramos $q(t) = -\dfrac{2}{(1+t)^2}$.

9) a) faça você

b) usando o item a), vemos que se $L(y) = y'' - 6y' + 9y$ ($\lambda = 3$), fazendo $y = e^{3t}v$ então $L(y) = e^{3t}v'' = t^{3/2}e^{3t}$. Então $v'' = t^{3/2}$, donde
$v = \dfrac{4}{35}t^{7/2} + c_1 t + c_2$. Voltando a substituição,
$$y = e^{3t}\left(\frac{4}{35}t^{7/2} + c_1 t + c_2\right)$$