Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Matemática

Multiplicidade de soluções para certos problemas elípticos superlineares

Eugenio Tommaso Massa

22 de Janeiro de 2010

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Neste texto apresentamos recentes resultados obtidos pelo candidato, junto com alguns colaboradores, mostrando existência e multiplicidade de soluções para equações diferenciais parciais elípticas com vários tipos de não-linearidades.

Como exemplo, podemos considerar o problema modelo

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(0) = 0$. Neste caso $u \equiv 0$ é solução e torna-se interessante o problema da existência de (uma ou mais) soluções não triviais. Dependendo do caso as soluções procuradas serão apenas as positivas, ou também as que mudam de sinal.

Em geral, demonstrar a existência de mais soluções torna-se possível desde que estejam satisfeitas algumas condições sobre a interação da não linearidade com o espectro do operador. A função dessas condições é permitir a aplicação de técnicas como sub e supersoluções ou de teoremas de tipo Passo de Montanha ou Enlace, e também permitir distinguir entre elas as soluções encontrados. Tal distinção pode ser obtida por várias técnicas, como por exemplo comparando os níveis críticos, os grupos críticos associados (veja-se por exemplo em [Cha93]), o sinal das soluções correspondentes, ou usando princípios de máximo e de comparação.

Os artigos completos nos quais foram obtidos os resultados que apresentaremos são os seguintes:

[dPM07] F. O. de Paiva and E. Massa, *Multiple solutions for some elliptic equations with a nonlinearity concave at the origin*, Nonlinear Anal. **66** (2007), no. 12, 2940–2946.

[MU09] E. Massa and P. Ubilla, *Superlinear elliptic problems with sign changing coefficients*, aceito para publicação em Commun. Contemp. Math. (2009).

[IMSU10] L. Iturriaga, E. Massa, J. Sanchez, and P. Ubilla, *Positive solutions for the p−Laplacian with a nonlinear term with zeros*, J. Differential Equations **248** (2010), no. 2, 309–327.

[ILM10] L. Iturriaga, S. Lorca, and E. Massa, *Positive solutions for the p-laplacian involving critical and supercritical nonlinearities with zeros*, aceito para publicação em Annales de l'Institut Henri Poincare / Analyse non lineaire. doi:10.1016/j.anihpc.2009.11.003(2010).

A seguir serão introduzidos os problemas considerados, os resultados obtidos e serão brevemente discutidas as técnicas e as problemáticas envolvidas, junto com uma descrição da literatura relacionada.

1.1 Multiplicidade de soluções para não-linearidades de tipo côncavo-convexo e coeficientes indefinidos

Os primeiros dois trabalhos que apresentamos consideram uma classe de problemas da qual um exemplo simples mas significativo é o seguinte:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda b(x)|u|^{q-2}u + a\,u + |u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega\,, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ são parâmetros reais, os expoentes satisfazem $1 < q < 2 < p$ e a função $b(x)$ pode mudar de sinal e ser não limitada.

Quando $b(x) \equiv 1$ e $a = 0$, temos a chamada não-linearidade de tipo "côncavo-convexo" considerada num famoso trabalho por Ambrosetti, Brezis e Cerami [ABC94]. Eles mostraram a existência de um valor $\Lambda > 0$ tal que existem pelo menos duas soluções positivas para $\lambda \in (0, \Lambda)$, pelo menos uma para $\lambda = \Lambda$ e nenhuma solução positiva para $\lambda > \Lambda$. Neste caso, uma das soluções era obtida sem restrições sobre o crescimento da não-linearidade (isto é, sem limitação superior para o expoente p), usando sub e supersoluções; a outra era obtida, nos casos subcrítico e crítico (isto é, para $p \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$), usando o Teorema do Passo de Montanha.

Se $b(x)$ é uma função em um oportuno espaço L^σ (possivelmente mudando de sinal mas sendo positiva pelo menos num pequeno aberto) e o termo superlinear é subcrítico, os resultados em [DFGU03] implicam que ainda existem duas soluções não-negativas para λ pequeno; neste caso as soluções são obtidas via minimização numa bola pequena e Passo de Montanha.

No caso de una superlinearidade com crescimento crítico, isto é, quando $p = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, o resultado em [ABC94] continua valendo, enquanto o caso em que o coeficiente $b(x)$ é variável foi considerado em [dFGU06], encontrando novamente duas soluções positivas, mas com as restrições $b \in L^\infty$ e $b \geq 0$; a última condição é importante pois implica numa dependência monótona de λ da não-linearidade, o que é fundamental para aplicar o argumento de sub e supersoluções.

Se considerarmos $a \geq \lambda_1$ (o primeiro autovalor do Laplaciano em Ω) e um termo superlinear mais geral no lugar de $|u|^{p-2}u$, então torna-se interessante também a busca por soluções que mudam de sinal. Observe-se que se pusermos $a > \lambda_1$ no problema (1.1), então soluções não-negativas podem existir apenas se $b(x)$ é negativo pelo menos em uma região de medida positiva.

Em [Per97b], Perera considera o caso $a > \lambda_1$ quando o coeficiente $b \equiv -1$, mas com hipóteses diferentes das nossas sobre o comportamento da não-linearidade no infinito, a saber, a não-linearidade é assumida ser sublinear no infinito. Isso impõe uma interação com o primeiro autovalor, de maneira que um papel chave nas demonstrações é jogado pela coercividade do funcional; neste trabalho Perera obtém até cinco soluções não triviais, das quais duas não-positivas e duas não-negativas.

Por outro lado, usando teoria de Morse, o mesmo Perera obtém em [Per97a] duas soluções não triviais quando $b(x) \equiv 1$, enquanto uma solução não trivial foi obtida em [Mor03] com um coeficiente $b \in L^\infty$ que muda de sinal, desde que a esteja abaixo de um certo valor que depende de $b(x)$.

Outros problemas relacionados com (1.1) foram considerados em [WY01] e [LWZ02], onde o coeficiente b é assumido em L^∞ mas pode mudar de sinal e a não-linearidade é assintoticamente linear. Em [WY01] uma solução não trivial é obtida para a pouco acima de λ_1, enquanto em [LWZ02] é considerado o caso $a < \lambda_1$ e são encontradas duas soluções não-negativas.

Nos trabalhos que apresentamos aqui consideraremos uma classe de problemas mais ampla com respeito a (1.1):

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f_\mu(x,u) + a\,u + g(x,u) & \text{em} \quad \Omega\,, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde agora g é um termo superlinear (possivelmente com crescimento crítico), $\mu \geq 0$ é um outro parâmetro e $f_\mu(x,u)$ um oportuno termo sublinear, que pode mudar de sinal.

No primeiro trabalho que consideramos, [dPM07], com o objetivo principal de estender os resultados de [Per97b] ao caso em que g tem crescimento superlinear, consideramos o caso em que $f_\mu(x,u) = -|u|^{q-2}u$ (isto é, $b(x) \equiv -1$ em (1.1)) e g é superlinear e subcrítica. Nesta situação encontramos uma solução não-negativa (e uma não-positiva) para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$, via Teorema do Passo de Montanha, e uma terceira solução não trivial quando λ é suficientemente pequeno e $a \geq \lambda_1$; esta terceira solução é obtida via Teorema de Enlace.

No segundo trabalho, [MU09], nosso objetivo foi melhorar mais um pouco os resultados acima, em duas direções principais.

O primeiro objetivo foi determinar uma classe de funções $f_\mu(x,u)$, para as quais os resultados em [dPM07] continuam válidos, isto é, para as quais podemos obter pelo menos uma solução não-negativa e uma não-positiva para todo $\lambda > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, e uma terceira solução para λ pequeno e $a \geq \lambda_1$, ainda via Teorema do Passo de Montanha e Teorema de Enlace. Como observado anteriormente, para obter as soluções positivas precisamos sempre da condição $f_\mu(x,s)\,s\ < 0$ em alguma região; por outro lado, descobre-se que se $f_\mu(x,s)\,s\ > 0$ em alguma outra região, o que não acontecia em [dPM07], então aparece mais uma solução não-positiva (e uma não-negativa) via minimização perto da origem. Estes resultados são enunciados com precisão nos teoremas 2.1 e 2.2 na página 13.

O segundo objetivo de [MU09] foi estudar o problema (1.2) no caso mais delicado de crescimento crítico da não-linearidade, o que não tinha sido considerado em [dPM07]. Como é bem conhecido, quando a não-linearidade tem comportamento crítico, o funcional associado à equação não satisfaz, em geral, a chamada condição de Palais-Smale (PS), que nos permite chegar a uma solução. Logo, precisaremos primeiro mostrar que esta condição está satisfeita em oportunos níveis do funcional, e em seguida mostrar que os níveis críticos provenientes das caracterizações variacionais dos teoremas anteriores estão mesmo nestes níveis. Para esse fim usaremos várias técnicas introduzidas em [BN83, CFP85, ABC94], veja-se também em [Wil96]. O resultado para não linearidade crítica será dado nos teoremas 2.5 e 2.6 na página 14.

Como veremos, os resultados de [dPM07] podem ser vistos como uma consequência dos de [MU09], por este motivo enunciamos os resultados de [dPM07] no teorema 2.4 na página 13, inclusive em uma forma um pouco mais geral, mas a prova será integrada com as provas dos resultados de [MU09] pois de fato as técnicas e as estimativas usadas neste último trabalho funcionam também para o primeiro, e permitem considerar também um termo f_μ mais geral e o caso em que a não-linearidade depende também da variável $x \in \Omega$.

Por outro lado, vale destacar que em [dPM07] foram consideradas também não linearidades com um crescimento no infinito mais geral, a saber, pedíamos $\lim_{s\to\pm\infty} \frac{as+g(x,s)}{s} = b^{\pm}$ sendo $\lambda_k < a < \lambda_{k+1} < b^{\pm}$ e podendo $b^{\pm}$ serem tanto finitos quanto infinitos, isto é, podendo incluir o caso assintoticamente linear de ambos os lados ou assintoticamente linear de um lado e superlinear do outro, desde que a razão de crescimento no infinito fosse suficiente para garantir uma interação com pelo menos um autovalor. De fato, com esta hipótese mais fraca a geometria do funcional não muda, sendo que então a única dificuldade a mais era a de garantir a condição de compacidade (PS), o que era obtido com uma hipótese adicional que relacionava os valores $b^{\pm}$ com o chamado Espectro de Fučík (veja por exemplo em [Fuč76, Dan77] e em [Mas03]), e aproveitando alguns resultados em [dF88]. Não incluiremos estes últimos resultados de [dPM07] neste texto sistematizado por saírem do contexto dos problemas com não-linearidade superlinear no infinito, e sendo que, como observado, as diferenças estão apenas em algumas questões técnicas.

1.2 Soluções positivas para o $p-$Laplaciano envolvendo não-linearidades com zeros

Nos outros dois trabalhos que trataremos a atenção será concentrada apenas na busca de soluções positivas. Em compensação, será considerada uma generalização quase-linear do operador Laplaciano, isto é, o operador $p-$Laplaciano $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ onde $p > 1$; de fato, o Laplaciano corresponde ao caso $p = 2$.

Em particular, estudamos existência, multiplicidade e o comportamento com respeito ao parâmetro λ das soluções positivas de um problema da forma

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda h(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro real, Ω é ainda um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, e h é uma não-linearidade não negativa com um zero positivo, o qual pode variar com a variável x. Denotamos por $a(x)$ dito zero. Assumiremos para h um crescimento p-linear (isto é, do tipo u^{p-1}) perto de 0 e $p-$superlinear no infinito. Um modelo simples para h é dado por $h(x,u) = u^{p-1}|a(x) - u|^r$, onde $2 < r + p$ e $a(x)$ é uma oportuna função positiva.

Problemas com não-linearidades superlineares no infinito e com vários comportamentos na origem já foram bastante estudados, vejam-se por exemplo [dFLN82, ABC94, DFGU03] para o Laplaciano, e [AGAP96, PS02] para o $p-$Laplaciano. Na maioria desses trabalhos porém, a não-linearidade é estritamente positiva, enquanto que as características do problema mudam consideravelmente quando a não-linearidade possui um zero de valor positivo. No trabalho [Lio82], este tipo de problema com zero é considerado para o operador Laplaciano com uma não-linearidade $h(t)$ que é independente de x, que satisfaz $h(0) \geq 0$, $h(\beta) = 0$, e que é positiva e superlinear para $t > \beta > 0$. Usando argumentos de grau topológico e com condições técnicas adicionais que garantam limitações a priori para as soluções (como por exemplo convexidade do domínio), é mostrado que existem duas soluções positivas do problema (P_λ) para λ grande. É mostrado também que uma solução está estritamente abaixo de β, enquanto a outra possui um máximo maior que β. Um problema análogo foi estudado também em [Liu99], onde de novo foi mostrada a existência de duas soluções positivas. Uma solução era obtida como solução minimal positiva, enquanto a outra era obtida como limite de um fluxo gradiente cujo ponto de partida precisava ser oportunamente escolhido. Esta estratégia permitia mostrar que algumas hipóteses técnicas em [Lio82] podiam ser enfraquecidas; além disso, podia ser obtida uma melhor compreensão do comportamento com respeito a λ da solução minimal de [Lio82].

No terceiro trabalho deste texto sistematizado, [IMSU10], estudamos um problema mais geral do considerado em [Lio82, Liu99]. Consideramos o problema (P_λ), onde o operador é o $p-$Laplaciano e a não-linearidade depende de x e é subcrítica, que no caso do operador $p-$Laplaciano significa que o crescimento no infinito é no máximo do tipo u^{r-1} com $r < p^* := \frac{Np}{N-p}$.

Usando principalmente técnicas variacionais mostramos a existência de pelo menos uma solução positiva para todo $\lambda > 0$ (teoremas 3.2, 3.3 e 3.4 na página 33) e de pelo menos duas para λ maior que o primeiro autovalor de um certo problema de autovalores não linear e com pesos para o $p-$Laplaciano (teorema 3.5 na página 34). Devido à dependência da variável x e como não estamos pedindo que o domínio seja convexo, mesmo no caso $p = 2$ estes resultados melhoram, em certas direções, os de [Lio82, Liu99].

Em seguida estudamos o comportamento assintótico das soluções quando λ tende a zero, a $+\infty$ e ao ponto que separa a região de uma solução da de duas soluções (teoremas 3.7, 3.8 e 3.9 na página 35), mostrando em particular, no teorema 3.9, que as soluções u_λ satisfazem

$$\lim_{\lambda \to \infty} u_\lambda(x) = a(x), \qquad \text{para todo } x \in \Omega\,.$$

Vale destacar que para obter este comportamento quando $\lambda \to \infty$, precisamos obter estimativas a priori e demonstrar um teorema de tipo Liouville que considere não-linearidades com zeros (veja-se o teorema 3.11 na página 35). Precisamos também estender ao $p-$Laplaciano um resultado devido a Redheffer (veja-se [Red86, Theorem 1]). Acreditamos que estes dois resultados possam ter interesse por si mesmos; veja-se na seção 3.5 para uma breve introdução sobre os teoremas de tipo Liouville.

É importante observar que a presença do zero na não-linearidade implica que nosso problema possui algumas das propriedades dos chamados "problemas logísticos", isto é, nos quais a não-linearidade é positiva até um certo valor e depois é negativa. De fato, qualquer solução do nosso problema que esteja abaixo de $a(x)$ é também solução de um problema logístico correspondente obtido modificando a não-linearidade acima desse zero.

Para problemas logísticos, é comum estudar o comportamento assintótico das soluções quando $\lambda \to \infty$, e descobre-se que as soluções tendem à função $a(x)$ que descreve o zero da não-linearidade. Estes resultados de convergência a $a(x)$ se aplicam à primeira solução do nosso problema, pois mostraremos que ela está abaixo de $a(x)$ e então não depende do comportamento de h acima de a. O resultado do teorema 3.9 é bem mais geral, pois mostra que, quando $\lambda \to \infty$, todas as soluções obtidas tendem à função a, pelo menos pontualmente em Ω.

Outro fenômeno importante e amplamente estudado no caso dos problemas logísticos é a ocorrência de "coincidence sets", isto é, conjuntos abertos nos quais, para λ grande, a solução coincide com $a(x)$ (chamados também "flat cores" quando o valor da função é constante nestes abertos), veja-se por exemplo [KV93, GMSdL00, DG02, Tak07a, Tak07b] e as referências neles contidas. Este fenômeno está relacionado tanto com a forma da função $a(x)$ quanto com o comportamento da não-linearidade perto dela. Em particular, em [Tak07b], está provado que para o operador $p-$Laplaciano, um “flat core” pode ocorrer em todas as regiões nas quais $a(x)$ é constante, enquanto em [Tak07a], é encontrado um “coincidence set” onde a é harmônica, mas apenas para o Laplaciano. Em ambos os casos, a não-linearidade precisa ter ordem menor que $p-1$ perto do zero.

A questão dos flat cores e coincidence sets é muito importante para o nosso trabalho, pois para obter a segunda solução precisamos antes mostrar que a primeira está estritamente abaixo de $a(x)$. Para obter isso precisamos nos pôr na situação em que estes fenômenos não podem ocorrer: isso será obtido através de algumas hipóteses adicionais sobre os parâmetros envolvidos no problema (P_λ): veja as condições $(a$ ... $d)$ do teorema 3.5 na página 34 e a observação 3.6.

No último trabalho deste texto sistematizado, [ILM10], procuramos obter novamente o resultado de existência de pelo menos duas soluções positivas para λ grande, mas sem restrições sobre o crescimento no infinito da não-linearidade (teorema 4.1 na página 52). Para obter isso precisamos renunciar a uma parte da generalidade de [IMSU10], supondo que a não-linearidade não dependa da variável $x \in \Omega$ e que o domínio Ω seja convexo. Observe-se que esta condição é a mesma usada em [Lio82], mas o nosso problema é bem mais geral por envolver o operador $p-$Laplaciano. O problema torna-se então o seguinte,

$$(\Pi_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f satisfaz $f(0) = f(1) = 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \notin \{0; 1\}$.

É conhecido (veja-se [Poh65, PS86]) que quando o domínio Ω é estrelado e a não-linearidade é $|u|^{r-2}u$ com r maior ou igual ao expoente crítico $p^* = pN/(N-p)$, então não existe solução não trivial. Uma solução pode ser recuperada ou considerando domínios topologicamente mais ricos (por exemplo a região entre duas esferas), ou perturbando a não-linearidade. Nessa segunda direção, vários autores consideraram não-linearidades com crescimento arbitrário no infinito mas que se comportam perto de zero como $|u|^{q-2}u$ com $q \in (p, p^*)$. Por exemplo, [LU04], [CL05] e [ILM] assumem este tipo de condição, truncam a não-linearidade e procuram por estimativas sobre as possíveis soluções. Estas estimativas permitem demonstrar que as soluções encontradas estão abaixo do ponto de truncamento para oportunos valores de λ, de modo que se tornam soluções também do problema original.

Como comentado anteriormente, a existência de uma solução de (Π_λ) abaixo de 1 (o zero de f) e o fato que esta solução converge a 1 quando $\lambda \to \infty$ são questões já bem conhecidas. Por outro lado, a existência de uma solução cujo máximo esteja acima de 1 é uma questão bem mais delicada e normalmente alguma hipótese sobre o crescimento no infinito de f é necessária, conforme feito em [IMSU10]. Porém, o fato que ambas as soluções obtidas em [IMSU10] convirjam, pelo menos pontualmente, ao zero da não-linearidade quando $\lambda \to \infty$, sugere que também no nosso problema um procedimento de truncamento como o usado em

[LU04, CL05, ILM] poderia ser usado para provar a existência de duas soluções considerando não-linearidades críticas ou supercríticas.

Infelizmente, a convergência pontual do teorema 3.9 não é suficiente para garantir o controle necessário sobre a norma L^∞ das soluções. Por este motivo, suporemos que Ω seja convexo e que f não dependa de $x \in \Omega$ e seja Lipschitz, para podermos usar oportunos resultados de monotonia (veja [BN91, DS04]). Estes resultados implicarão num melhor conhecimento da geometria das soluções, e então permitirão estimar a norma L^∞ quando $\lambda \to \infty$ e por fim obter o resultado de existência para não-linearidades críticas ou supercríticas. Destacamos que, mesmo no caso subcrítico, o resultado que obteremos melhora um pouco o de [IMSU10], no sentido que (desde que estejam satisfeitas as novas hipóteses sobre Ω e sobre a dependência de x da não-linearidade) podemos substituir algumas hipóteses, que em [IMSU10] eram globais, por outras, bem mais fracas e apenas locais (veja-se a observação 4.2).

1.3 Considerações finais

Como pode ser apreciado pela bibliografia apresentada nesta introdução, os trabalhos tratados neste texto estudam problemas importantes da área de equações diferenciais parciais elípticas e visam contribuir a essa área com alguns resultados novos e interessantes.

Acreditamos que ainda seja possível obter resultados interessantes pesquisando nesses mesmos assuntos. Citamos a seguir algumas possíveis direções de pesquisa.

Ainda continuando no assunto dos trabalhos [dPM07] e [MU09], uma possibilidade interessante, que estamos considerando junto com o Prof. Ubilla, é a de estender os resultados (ou pelo menos uma parte) ao operador p-Laplaciano. Isto poderia ser feito aproveitando as propriedades do primeiro autovalor do p-Laplaciano (veja-se em [Ana87b, Lin90]) de ser simples, isolado dos demais autovalores, e caracterizável variacionalmente da mesma forma que no caso do Laplaciano, nos permitindo construir uma estrutura de enlace similar à do caso já feito. Na verdade, a extensão ao caso subcrítico parece ser bastante simples, de modo que o verdadeiro interesse seria estender a parte dos resultados sobre o problema crítico.

Paralelamente, junto com o Prof. de Paiva, estamos estudando a possibilidade de considerar ainda o operador $p-$Laplaciano, mas sem a limitação de se manter pouco acima do primeiro autovalor: de fato, alguns recentes trabalhos (veja [CD05, DL07]) desenvolveram novas estruturas de enlace associadas a certos "autovalores variacionais" do $p-$Laplaciano. Estas técnicas poderiam permitir-nos obter este tipo de resultado.

Outra direção na qual estamos trabalhando, junto com o Prof. Iturriaga, é a de considerar o coeficiente $b(x)$ no problema (1.1) numa forma quanto mais geral possível, procurando encontrar as geometrias de passo de montanha e de enlace por técnicas diferentes das descritas neste texto.

Com relação à pesquisa começada em [IMSU10] e depois em [ILM10], uma possível evolução que está sendo considerada junto com os Profs. Iturriaga, Sanchez e Ubilla, é a de considerar sistemas não variacionais em domínios anulares, tendo neste caso que usar técnicas diferentes, como grau topológico e teoremas de ponto fixo sobre cones.

1.4 Agradecimentos

Os trabalhos tratados neste texto sistematizado são fruto de colaborações com os Profs. Francisco Odair de Paiva (Unicamp), Pedro Ubilla (USACH, Santiago - Chile) Justino Sanchez (Universidad de La Serena, Chile) Leonelo Iturriaga e Sebastian Lorca (Universidad de Tarapacá, Arica - Chile).

Capítulo 2

Problemas elípticos superlineares com coeficientes indefinidos

Neste capítulo serão descritos os resultados principais de [dPM07] e de [MU09].

Como antecipado na introdução estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f_\mu(x,u) + a\,u + g(x,u) & \text{em} \quad \Omega\,, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde g é um termo superlinear (possivelmente crítico), λ, $\mu \geq 0$ são dois parâmetros e $f_\mu(x,u)$ um oportuno termo sublinear, que pode mudar de sinal.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 2.1, apresentamos o enunciado preciso dos resultados, nas seções 2.2 e 2.3 fornecemos as demonstrações dos teoremas principais: a seção 2.2 é relativa ao caso subcrítico e a seção 2.3 ao caso crítico.

Como os resultados de [MU09] são uma evolução e generalização dos de [dPM07], estes últimos serão apresentados separadamente, mas as demonstrações serão dadas conjuntamente, para evitar inúteis repetições.

A seguir, denotaremos por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$ os autovalores do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ (com a convenção de repetir o autovalor nesta sequência conforme sua multiplicidade), por $\sigma(-\Delta) = \{\lambda_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ seu espectro e por $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ as correspondentes autofunções, escolhidas ortogonais e normalizadas com $\|\phi_k\|_{L^2} = 1$ e $\phi_1 > 0$.

Ao longo das demonstrações, C, C' serão usadas para denotar diferentes constantes cujo valor exato é irrelevante.

2.1 Hipóteses e Resultados

Consideraremos o termo $f_\mu(x,u)$ na forma

$$f_\mu(x,u) = b_\mu(x)|u|^{q-2}u \quad \text{com} \quad 1 < q < 2\,, \tag{f_1}$$

onde escrevemos $b_\mu(x) = c_\mu(x) - d(x)$, com $c_\mu, d \geq 0$ em Ω.

Assumiremos o seguinte conjunto de hipóteses:

(Hf_a) existe $\sigma > \frac{2^*}{2^*-q}$ tal que $c_\mu, d \in L^\sigma(\Omega)$, para todo $\mu \geq 0$;

(Hf_b) existe $\delta_d > 0$ tal que $d(x) \geq \delta_d > 0$ em Ω;

(Hf_c) $\|c_\mu\|_{L^\sigma}$ é uma função contínua de $\mu \in [0, +\infty)$ e $\lim_{\mu\to 0} \|c_\mu\|_{L^\sigma} = 0$;

(Hf_d) para todo $\mu > 0$, existe um aberto $\Omega_\mu \subseteq \Omega$ e uma constante $M_\mu > 0$ tal que

$$b_\mu(x) = c_\mu(x) - d(x) \geq M_\mu \text{ em } \Omega_\mu\,.$$

Um modelo para este coeficiente pode ser $b_\mu(x) = (\mu c(x) - 1)$, onde $c \in L^\sigma(\Omega)$, $c \geq 0$, e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $c(x)$ é contínuo em $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$ e $\lim_{x\to x_0} c(x) = +\infty$; um exemplo simples é $c(x) = \frac{1}{|x-x_0|^\gamma}$ sendo $0 < \gamma < \frac{N(2^*-q)}{2^*}$.

Observe-se que as hipóteses dadas implicam que, quando o parâmetro μ tende a zero, o conjunto $\{b_\mu > 0\}$ tende a zero em medida, mas nunca desaparece. Em geral, este conjunto não precisa reduzir-se a uma única pequena bola como no modelo acima: por exemplo, a função $c(x)$ poderia ser escolhida como $\sum_{j=1}^\infty 2^{-j} \frac{1}{|x-x_j|^\gamma}$ sendo $\{x_j :\ j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto denso de Ω; neste caso o coeficiente $b_\mu(x)$ é positivo em algum subconjunto de qualquer aberto, para todo $\mu > 0$. Note-se porém que a condição (Hf_c) implica $c_\mu \equiv 0$ quando $\mu = 0$.

É fundamental destacar que para o problema (2.1), soluções não triviais podem anular-se em abertos não vazios (veja-se por exemplo em [SU03]), por causa do termo $f_\mu(x,u)$, que pode violar as hipóteses do Lema de Hopf se em alguma região $\lim_{s\to 0} \frac{f_\mu(x,s)}{s} = -\infty$ (isto é, onde $b_\mu < 0$); por esta razão os resultados deste capítulo serão sempre de existência de soluções (não triviais) não-negativas ou não-positivas, em vez que estritamente positivas ou estritamente negativas.

2.1.1 Resultados para o caso subcrítico

Para o caso subcrítico, consideraremos no problema (2.1) um termo superlinear na forma geral $g(x,s)$, satisfazendo as seguintes hipóteses:

(Hg_0) $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory;

(Hg_1) existem $p \in (2, 2^*)$ e $C \in \mathbb{R}$ tais que $|g(x,s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$;

(Hg_2) (i) $\lim_{s\to\pm\infty} \frac{g(x,s)}{s} = +\infty$ uniformemente;
(ii) existem $\Theta > 2$ e $s_0 \geq 0$ tais que $\Theta G(x,s) - sg(x,s) + \left(\frac{\Theta}{2} - 1\right) as^2 \leq 0$ para $|s| \geq s_0$;

(Hg_3) $\lim_{s\to 0} \frac{g(x,s)}{s} = 0$ uniformemente.

As hipóteses $(Hg_0$ ... $Hg_3)$ são clássicas quando se quer uma não-linearidade superlinear mas subcrítica no infinito e para que o funcional associado satisfaça a condição (PS); a condição (Hg_3) apenas significa que perto de zero os termos dominantes em (2.1) serão f_μ e $a\,u$.

Os primeiros resultados de [MU09] são

Teorema 2.1. *Suponha que f_μ satisfaça $(Hf_a$ ... $Hf_d)$, g satisfaça $(Hg_0$ ... $Hg_3)$ e $a \in \mathbb{R}$. Então, para todo $\lambda > 0$ existe $\overline{\mu}(\lambda)$ tal que o problema (2.1) possui duas soluções não triviais não-negativas e duas não-positivas para todo $\mu \in (0, \overline{\mu}(\lambda))$.*

Teorema 2.2. *Suponha que f_μ satisfaça $(Hf_a$ ... $Hf_d)$, g satisfaça $(Hg_0$ ... $Hg_3)$ e além disso $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds \geq 0$ e $a \geq \lambda_1$. Fixe um $A > 0$ arbitrário. Então existe $\overline{\lambda}(A) > 0$ tal que o problema (2.1) possui mais uma solução não trivial para $\lambda \in [0, \overline{\lambda}(A))$ e $\mu \in [0, A)$.*
Em particular, para $\lambda \in (0, \overline{\lambda}(A))$ e $\mu \in (0, \min\{\overline{\mu}(\lambda), A\})$, temos pelo menos 5 soluções não triviais.

Observação 2.3. *Observe-se que o papel dos dois parâmetros é bem diferente nos dois resultados: as quatro soluções do teorema 2.1 existem para todo $\lambda > 0$ se $\mu > 0$ é pequeno, enquanto a quinta solução do teorema 2.2 existe para todo $\mu > 0$ se $\lambda > 0$ é pequeno. Mesmo assim, como $\overline{\lambda}(A)$ não depende diretamente de μ, mas apenas do conjunto limitado no qual limitamos μ, obtemos uma região no quadrante $\{\mu, \lambda > 0\}$ na qual todas as cinco soluções existem ao mesmo tempo.*

Como observado na introdução, o problema de [dPM07] pode ser visto como um caso particular de (2.1), quando g não depende de x e $f_\mu(x,u) = -|u|^{q-2}u$, o que corresponde ao caso $\mu = 0$ e $d(x) \equiv 1$; o próximo teorema inclui o resultado principal de [dPM07] estendendo-o a funções g e d mais gerais:

Teorema 2.4. *Nas mesmas hipóteses do teorema 2.1, se $\mu = 0$ o problema (2.1) possui uma solução não trivial não-negativa e uma não-positiva para todo $\lambda > 0$.*
Nas hipóteses do teorema 2.2, se $\mu = 0$ então existe uma terceira solução não trivial, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Observe-se que quando $\mu = 0$ perdemos uma solução não-negativa e uma não-positiva com respeito ao caso dos dois teoremas anteriores, de fato, as duas soluções que sobrevivem serão obtidas via Teorema do Passo de Montanha, enquanto as outras duas virão de dois pontos críticos a nível negativo perto da origem produzidos pelo termo $f_\mu(x,u)$: quando $\mu = 0$ este termo dá apenas uma contribuição positiva no funcional, assim a origem será mínimo local e os dois mínimos não triviais desaparecem.

2.1.2 Resultados para o caso crítico

No caso crítico, precisaremos considerar uma forma mais simples para o termo superlinear, de fato, poremos $g(x,u) = |u|^{p-2}u$ com $p = 2^* = \frac{2N}{N-2}$; o problema torna-se então

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f_\mu(x,u) + a\,u + |u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega\,, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Nossos resultados no caso crítico são

Teorema 2.5. *Seja $N \geq 3$, suponha que f_μ satisfaça $(Hf_a...Hf_d)$ e sejam $p = 2^*$ e $a > 0$. Então, para todo $\lambda > 0$ existe $\overline{\mu}(\lambda)$ tal que o problema (2.2) possui duas soluções não triviais não-negativas e duas não-positivas para todo $\mu \in (0, \overline{\mu}(\lambda))$.*

Teorema 2.6. *Seja $N \geq 4$, suponha que f_μ satisfaça $(Hf_a...Hf_d)$, seja $p = 2^*$ e além disso $a > \lambda_1$ e $a \notin \sigma(-\Delta)$. Fixe um $A > 0$ arbitrário. Então existe $\overline{\lambda}(A) > 0$ tal que o problema (2.2) possui mais duas soluções não triviais para $\lambda \in [0, \overline{\lambda}(A))$ e $\mu \in [0, A)$.*
Em particular, para $\lambda \in (0, \overline{\lambda}(A))$ e $\mu \in (0, \min\{\overline{\mu}(\lambda), A\})$, temos pelo menos seis soluções não triviais.

Como o caso crítico não tinha sido considerado em [dPM07], podemos complementar esse resultado considerando de novo o caso $\mu = 0$, de fato mostramos em [MU09] o seguinte:

Teorema 2.7. *Nas mesmas hipóteses do teorema 2.6, se $\mu = 0$ o problema (2.2) possui uma solução não trivial não negativa, uma não-positiva, e mais duas soluções não triviais, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.*

Observação 2.8. *Observe-se que o resultado para o caso do teorema 2.7 não é tão completo como quando $\mu \neq 0$ nem como no caso subcrítico, de fato, a solução não-negativa está garantida apenas para λ pequeno, e não para todo $\lambda > 0$ como nos teoremas 2.4 e 2.5. De fato, na prova do teorema 2.5, a existência de uma região na qual $b_\mu > 0$ nos permitirá obter, para todo $\lambda > 0$, um nível de passo de montanha no qual a condição (PS) vale, o que não poderá ser feito quando o coeficiente é estritamente negativo.*

2.2 O caso subcrítico

Consideraremos os seguintes funcionais de classe $\mathcal{C}^1$ definidos em $H_0^1(\Omega)$:

$$J_{\mu,\lambda}(u) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - a\,\|u\|_2^2\right) - \int_\Omega \lambda F_\mu(x,u) - \int_\Omega G(x,u) \tag{2.3}$$

e

$$J_{\mu,\lambda}^{\pm}(u) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - a\,\left\|u^{\pm}\right\|_2^2\right) - \int_\Omega \lambda F_\mu(x,u^{\pm}) - \int_\Omega G(x,u^{\pm})\,, \tag{2.4}$$

onde $u^+ = \max\{u,0\}$, $u^- = \min\{u,0\}$, $\|\cdot\|$ representa a norma em H_0^1, $\|\cdot\|_r$ a norma em L^r, $F_\mu(x,u) = \int_0^u f_\mu(x,s)ds$ e $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$.

Observe-se que $J_{\mu,\lambda}^{+}(u)'[u^-] = 0$ implica

$$0 = \int_\Omega \nabla u \nabla u^- - \int_\Omega a u^+ u^- - \int_\Omega \lambda f_\mu(x,u^+)u^- - \int_\Omega g(x,u^+)u^- = \int_\Omega |\nabla u^-|^2\,,$$

isto é, $u \geq 0$: isso significa que os pontos críticos de $J_{\mu,\lambda}^{+}$ são soluções não-negativas, e analogamente os pontos críticos de $J_{\mu,\lambda}^{-}$ são soluções não-positivas; logo são também pontos críticos de $J_{\mu,\lambda}$ ao mesmo nível.

Primeiramente, provaremos algumas estimativas que serão usadas ao longo das provas que seguirão.

Lema 2.9.

(a) Se valem (Hg_1) e (Hg_3), então para todo $\varepsilon > 0$ existe D_ε tal que

$$|G(x,s)| \leq \varepsilon\frac{s^2}{2} + D_\varepsilon\frac{|s|^p}{p}\,, \qquad \textit{para todo}\ \ s \in \mathbb{R}\,. \tag{2.5}$$

(b) Se valem (Hg_1) e (Hg_2)-(i), então para todo $M > 0$ existe E_M tal que

$$G(x,s) \geq M\frac{s^2}{2} - E_M\,, \qquad \textit{para todo}\ \ s \in \mathbb{R}\,. \tag{2.6}$$

Demonstração. A hipótese (Hg_3) implica que existe $s_1(\varepsilon) > 0$ tal que $|G(x,s)| \leq \varepsilon\frac{s^2}{2}$ para $|s| \leq s_1(\varepsilon)$, enquanto (Hg_1) implica que $|G(x,s)| \leq C|s| + C\frac{|s|^p}{p}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, logo existe D_ε tal que $|G(x,s)| \leq D_\varepsilon\frac{|s|^p}{p}$ para $|s| \geq s_1(\varepsilon)$. Concluímos que $|G(x,s)|$ é limitada pela soma das duas estimativas, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, a hipótese (Hg_2)-(i) implica que existe $s_2(M)$ tal que $G(x,s) \geq M\frac{s^2}{2}$ para $|s| \geq s_2(M)$, enquanto (Hg_1) implica que existe $E_M > 0$ tal que $G(x,u) - M\frac{s^2}{2} \geq -E_M$ para $|s| \leq s_2(M)$. Logo $G(x,u) - M\frac{s^2}{2} \geq -E_M$ para todo $s \in \mathbb{R}$. $\square$

Agora, estudaremos a condição (PS) para os funcionais (2.3) e (2.4). Lembramos que dizemos que um funcional J de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$ se toda sequência em $H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$ contém uma subsequência convergente; dizemos que satisfaz a condição (PS) se $(\mathrm{PS})_c$ vale para todo $c \in \mathbb{R}$. Provaremos

Lema 2.10. *Nas hipóteses (Hg_0 ... Hg_2) e (Hf_a), os três funcionais em (2.3) e (2.4) satisfazem a condição (PS) para todo $\lambda, \mu \geq 0$ e $a \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\Theta > 2$ como em (Hg_2)-(ii); observe-se que por (Hg_1) podemos reformular (Hg_2)-(ii) como

$$\Theta G(x,s) - sg(x,s) + \left(\frac{\Theta}{2} - 1\right) as^2 \leq C \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}\,. \tag{2.7}$$

Suponha-se que u_n seja uma sequência (PS) para $J_{\mu,\lambda}$, isto é, $|J_{\mu,\lambda}(u_n)| < C$ e $\|J'_{\mu,\lambda}(u_n)\| \leq \varepsilon_n$ para alguma sequência $\varepsilon_n \to 0$; para provar que u_n é limitada estimamos

$$\begin{aligned} \Theta C + \varepsilon_n \|u_n\| \geq \Theta J_{\mu,\lambda}(u_n) - J'_{\mu,\lambda}(u_n)[u_n] &= \left(\frac{\Theta}{2} - 1\right)\left(\|u_n\|^2 - a\|u_n\|_2^2\right) + \\ &- \int_\Omega (\Theta G(x,u_n) - g(x,u_n)u_n) - \lambda\left(\frac{\Theta}{q} - 1\right)\int_\Omega b_\mu(x)\,|u_n|^q\ ; \end{aligned} \tag{2.8}$$

por (2.7) e estimando a última integral, usando a Hölder e a hipótese (Hf_a), com $\|b_\mu\|_\sigma \|u_n\|_{2^*}^q \leq C\|b_\mu\|_\sigma \|u_n\|^q$, obtemos

$$\left(\frac{\Theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 \leq C' + \varepsilon_n\|u_n\| + \lambda\left(\frac{\Theta}{q} - 1\right)C\|b_\mu\|_\sigma \|u_n\|^q$$

e logo $\|u_n\|$ é limitada.

A existência de uma subsequência convergente agora segue por argumentos clássicos, sendo $p < 2^*$ em (Hg_1) e $\sigma > \frac{2^*}{2^*-q}$ em (Hf_a).

O mesmo argumento vale para $J^{\pm}_{\mu,\lambda}$. □

Nos dois lemas a seguir encontraremos a geometria que permitirá provar o teorema 2.1; primeiro, no lema 2.11 encontraremos uma "cadeia de montanhas" ao redor da origem, em seguida, no lema 2.12, veremos que a origem não pode ser um mínimo.

Lema 2.11. *Nas hipóteses do teorema 2.1, para todo $\lambda > 0$, existe $\overline{\mu}(\lambda)$ tal que para $\mu \in [0, \overline{\mu}(\lambda))$ existem $r, \delta > 0$ (dependendo de μ, λ) tais que $J_{\mu,\lambda}(u) \geq \delta > 0$ se $\|u\| = r$. Além disso, $J_{\mu,\lambda}$ é limitado inferiormente na bola $B_r = \{u \in H_0^1 :\ \|u\| \leq r\}$.*
A mesma propriedade vale para $J^{\pm}_{\mu,\lambda}(u)$.

Demonstração. Nesta demonstração separaremos o funcional em duas partes, nas quais os termos positivos dominantes serão, respectivamente, $\lambda \int_\Omega d(x)|u|^q$ e $\|u\|^2$.

Se $u \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, usando (Hf_b) e a estimativa (2.5) obtemos

$$J_1(u) := \frac{\lambda}{q}\int_\Omega d(x)|u|^q - \frac{a}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega G(x,u) \geq \|u\|_q^q \left(\frac{\lambda\delta_d}{q} - \frac{(a+\varepsilon)\|u\|_\infty^{2-q}}{2} - \frac{D_\varepsilon \|u\|_\infty^{p-q}}{p}\right).$$

Para $\|u\|_\infty$ pequena o termo em parênteses é positivo, logo 0 é um mínimo local na topologia $\mathcal{C}^1$ e então também na topologia H_0^1, por [BN93], isto é, existe $\rho(\lambda) > 0$ tal que $J_1(u) \geq 0$ para $\|u\| \leq \rho(\lambda)$.

Para a outra parte de $J_{\mu,\lambda}$ estimamos

$$J_2(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega c_\mu(x)|u|^q \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda\|c_\mu\|_\sigma}{q}\|u\|^q \geq \|u\|^q\left(\frac{\|u\|^{2-q}}{2} - \frac{\lambda\|c_\mu\|_\sigma}{q}\right),$$

logo para $\|u\| = \left(\frac{4\lambda\|c_\mu\|_\sigma}{q}\right)^{1/(2-q)} := r(\mu,\lambda)$ temos

$$J_2(u) \geq \delta(\mu,\lambda) := C\left[\lambda\|c_\mu\|_\sigma\right]^{2/(2-q)}.$$

Então, por (Hf_c), para $\mu > 0$ suficientemente pequeno temos $r(\mu,\lambda) < \rho(\lambda)$, de modo que

$$J_{\mu,\lambda}(u) \geq \delta(\mu,\lambda) > 0$$

para $\|u\| = r(\mu,\lambda)$. Note-se que a afirmação no lema é verdadeira também para $\mu = 0$ pois neste caso $c_\mu \equiv 0$ e então J_2 possui um ponto de mínimo estrito na origem.

Pelo mesmo argumento

$$J_1^\pm(u) = \frac{\lambda}{q}\int_\Omega d(x)|u^\pm|^q - \frac{a}{2}\left\|u^\pm\right\|_2^2 - \int_\Omega G(x,u^\pm) \geq 0$$

para $\|u\| \leq \rho^\pm(\lambda)$ e

$$J_2^\pm(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega c_\mu(x)|u^\pm|^q \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega c_\mu(x)|u|^q,$$

de modo que obtemos o mesmo resultado para $J_{\mu,\lambda}^\pm$.

O fato que os funcionais sejam limitados inferiormente em B_r é trivial, pelas hipóteses (Hf_a) e (Hg_1). $\square$

Lema 2.12. *Nas hipóteses do teorema 2.1, para todos $\lambda,\mu > 0$, existem $\phi \in H_0^1(\Omega)$ e $\bar{t} > 0$ tais que $J_{\mu,\lambda}(t\phi) < 0$ para $t \in (0,\bar{t})$.*
A mesma propriedade vale para $J_{\mu,\lambda}^\pm(u)$.

Demonstração. Uma vez que λ e μ são fixados, considere-se Ω_μ como em (Hf_d) e uma função não-negativa $\phi \not\equiv 0$ com suporte em Ω_μ, então (usando a estimativa (2.5))

$$\begin{aligned} J_{\mu,\lambda}(t\phi) &= \frac{t^2}{2}\left(\|\phi\|^2 - a\|\phi\|_2^2\right) - \int_\Omega G(x,t\phi) - \frac{t^q}{q}\lambda\int_\Omega b_\mu(x)\phi^q \\ &\leq \frac{t^2}{2}\left(\|\phi\|^2 - (a-\varepsilon)\|\phi\|_2^2\right) + \frac{t^p}{p}D_\varepsilon\|\phi\|_p^p - \frac{t^q}{q}\lambda\int_\Omega b_\mu(x)\phi^q \end{aligned}$$

onde $\int_\Omega b_\mu(x)\phi^q \geq M_\mu\|\phi\|_q^q > 0$ por (Hf_d); como a menor potência é q, obtemos que $J_{\mu,\lambda}(t\phi) < 0$ para $t > 0$ pequeno.

O mesmo vale para $J^+_{\mu,\lambda}(t\phi)$, e para $J^-_{\mu,\lambda}(-t\phi)$. □

Agora podemos demonstrar o teorema 2.1.

Demonstração do teorema 2.1. Para todos $\lambda > 0$ e $\mu \in (0, \overline{\mu}(\lambda))$, pelos lemas 2.11, 2.12 e pela condição (PS) no lema 2.10, $J^+_{\mu,\lambda}$ possui um ponto de mínimo estritamente negativo em B_r, onde r é o raio obtido no lema 2.11. Esta é uma primeira solução não trivial não-negativa.

Seja agora $u \geq 0$ não trivial, então

$$J^+_{\mu,\lambda}(tu) = \frac{t^2}{2}\left(\|u\|^2 - a\|u\|_2^2\right) - \int_\Omega G(x,tu) - \frac{t^q}{q}\lambda\int_\Omega b_\mu(x)|u|^q\,;$$

logo, podemos usar a estimativa (2.6) com M tão grande que $\left(\|u\|^2 - a\|u\|_2^2 - M\|u\|_2^2\right) < 0$ obtendo que

$$J^+_{\mu,\lambda}(tu) \leq \frac{t^2}{2}\left(\|u\|^2 - a\|u\|_2^2 - M\|u\|_2^2\right) + \int_\Omega E_M + \frac{t^q}{q}\lambda\|b_\mu\|_\sigma\|u\|^q \to -\infty \qquad (2.9)$$

para $t \to +\infty$.

Isso significa que $J^+_{\mu,\lambda}$ possui a geometria do passo de montanha, isto é, $J^+_{\mu,\lambda}(0) = 0$, $J^+_{\mu,\lambda}(u) \geq \delta > 0$ para $\|u\| = r$, onde $r, \delta > 0$ são os obtidos no lema 2.11, e $J^+_{\mu,\lambda}(e) < 0$ para algum e com $\|e\| > r$.

Como pelo lema 2.10 a condição (PS) está satisfeita, o Teorema do Passo de Montanha afirma que existe um ponto crítico, cujo nível é pelo menos $\delta > 0$, o que implica que corresponde a uma segunda solução não trivial não-negativa.

O mesmo argumento nos fornece duas solução não triviais não-positivas como pontos críticos de $J^-_{\mu,\lambda}$.

Os níveis de passo de montanha podem ser caracterizados como

$$c^\pm = \inf_{\gamma\in\Gamma^\pm}\sup_{t\in[0,1]} J^\pm_{\mu,\lambda}(\gamma(t))\,, \qquad (2.10)$$

onde

$$\Gamma^\pm = \left\{\gamma \in \mathcal{C}([0,1]; H_0^1) : \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(1) = \pm t_0\phi_1\right\}$$

e $t_0 > 0$ é suficientemente grande. □

Enfim, mostremos a existência de uma quinta solução não trivial para λ suficientemente pequeno, quando $a \geq \lambda_1$ e $G \geq 0$.

Demonstração do teorema 2.2. Seja $a \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e definamos $H_k = span\,\{\phi_1, .., \phi_k\}$. A solução não trivial será obtida através de uma estrutura de enlace. Em particular, obteremos o nível crítico

$$c_e = \inf_{\gamma \in \Gamma_e} \sup_{u \in \gamma(Q_e)} J_{\mu,\lambda}(u)\,, \tag{2.11}$$

onde

$$\Gamma_e = \left\{\gamma \in \mathcal{C}(Q_e, H_0^1) : \ \gamma|_{\partial Q_e} = id\right\}\,, \tag{2.12}$$

$$Q_e = \{u + te : u \in H_k, \quad t \geq 0, \quad \|u + te\| \leq R\}\,, \tag{2.13}$$

a função $e \neq 0$ é uma função qualquer em $H_k^\perp$ e R é um real suficientemente grande.

Precisaremos mostrar a existência de constantes $\eta, \widetilde{\eta}$ tais que

$$J_{\mu,\lambda}(u) \geq \eta > 0 \text{ em } S_\rho \cap H_k^\perp, \text{ para um apropriado } \rho \in (0, R), \tag{2.14}$$

$$J_{\mu,\lambda}(u) \leq \widetilde{\eta} < \eta \text{ em } \partial Q_e, \text{ a fronteira relativa de } Q_e, \tag{2.15}$$

onde S_ρ é a esfera de raio ρ em H_0^1; de fato $S_\rho \cap H_k^\perp$ enlaça com ∂Q_e e logo (2.14), (2.15) mais a condição (PS) permitem aplicar o Teorema de Enlace implicando que c_e é de fato um nível crítico para $J_{\mu,\lambda}$.

Podemos estimar $\left|\int_\Omega b_\mu(x)|u|^q\right| \leq \left(\|d\|_\sigma + \|c_\mu\|_\sigma\right)\|u\|_{2^*}^q$; se limitamos $\mu \in [0, A)$ então, por (Hf_c), obtemos $\left|\int_\Omega b_\mu(x)|u|^q\right| \leq C_A\|u\|^q$ para uma constante apropriada C_A.

Seja $u \in H_k^\perp$; usando a estimativa (2.5) com $\varepsilon < \lambda_{k+1} - a$ obtemos

$$\begin{aligned} J_{\mu,\lambda}(u) &\geq \frac{\|u\|^2 - a\|u\|_2^2}{2} - \lambda\frac{C_A}{q}\|u\|^q - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 - \frac{D_\varepsilon}{p}\|u\|_p^p \\ &\geq \frac{\lambda_{k+1} - a - \varepsilon}{2\lambda_{k+1}}\|u\|^2 - \lambda\frac{C_A}{q}\|u\|^q - D_\varepsilon\frac{C}{p}\|u\|^p\ ; \end{aligned}$$

como o coeficiente do termo quadrático é positivo, existe um $\overline{\lambda} > 0$ suficientemente pequeno tal que para $\lambda \in [0, \overline{\lambda})$ a função de $\|u\|$ acima seja maior que uma função que possui um máximo positivo, isto é, (2.14) acima está satisfeita para apropriados $\rho, \eta > 0$, e vale uniformemente para $\lambda \in [0, \overline{\lambda})$ e $\mu \in [0, A)$.

Seja agora $u \in H_k$; então

$$J_{\mu,\lambda}(u) \leq \frac{\lambda_k - a}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\lambda}{q}C_A\|u\|^q - \int_\Omega G(x, u) \tag{2.16}$$

$$\leq \frac{\lambda}{q}C_A\|u\|^q - \frac{M}{2}\|u\|_2^2 + E_M|\Omega|\,, \tag{2.17}$$

onde usamos a estimativa (2.6) com um $M > 0$ qualquer. Como as normas são equivalentes em H_k, (2.17) implica que o conjunto

$$T = \{u \in H_k : J_{\mu,\lambda}(u) \geq 0 \ \text{ para algum } \ \lambda \in [0, \overline{\lambda}] \ \text{ e } \ \mu \in [0, A)\}$$

é limitado, isto é, $\|u\| \leq C_T$ em T; logo de (2.16), usando também a hipótese que $G \geq 0$, obtemos $J_{\mu,\lambda}(u) \leq \frac{\lambda}{q} C_A C_T^q \to 0$ quando $\lambda \to 0$. Concluímos que, para λ suficientemente pequeno e $\mu \in [0, A)$, existe $\widetilde{\eta}$ tal que

$$J_{\mu,\lambda} \leq \widetilde{\eta} < \eta \ \text{ em } H_k. \tag{2.18}$$

Enfim, dada uma qualquer $e \in H_k^\perp$ não nula, estimamos, usando de novo (2.6) com M tão grande que $\left(\|u\|^2 - a\,\|u\|_2^2 - M\,\|u\|_2^2\right) < 0$ para todo $u \in (H_k \oplus \{te;\ t \in \mathbb{R}\})$, e obtemos

$$J_{\mu,\lambda}(u) \leq \frac{\|u\|^2 - a\,\|u\|_2^2}{2} + \frac{\lambda}{q} C_A\,\|u\|_{2^*}^q - M\,\|u\|_2^2 + E_M|\Omega|\,;$$

logo (como λ agora é limitado) temos $J_{\mu,\lambda} \leq 0$ em $S_R \cap (H_k \oplus \{te;\ t \in \mathbb{R}\})$, para algum $R > 0$ suficientemente grande, que depende de e (de novo as normas são equivalentes). Esta estimativa e (2.18) completam a prova de (2.15) e logo obtemos que c_e é de fato um nível crítico.

Ainda falta provar que a solução correspondente é distinta das outras: para fazer isso observemos que, por (2.14), $c_e \geq \eta > 0$, enquanto a solução trivial e as outras quatro soluções (quando existem) são todas a níveis menores, de fato, podemos estimar os níveis de passo de montanha em (2.10) considerando caminhos $\gamma \in \Gamma^\pm$ cujas imagens estejam contidas em H_k; pela estimativa (2.18) os máximos ao longo destes caminhos são no máximo $\widetilde{\eta} < \eta$, logo $c^\pm < \eta$ e isso implica que c_e corresponde a uma solução não trivial distinta. □

A este ponto, podemos analisar o que acontece no caso $\mu = 0$, isto é, $b_\mu \leq -\delta_d < 0$.

Demonstração do teorema 2.4. Como $\mu = 0$ a afirmação no lema 2.12 não vale, assim não temos as soluções de mínimo.

Por outro lado, o lema 2.11 vale e toda a prova do teorema 2.2 funciona da mesma maneira, implicando que podemos aplicar o Teorema do Passo de Montanha e o de Enlace (sendo que a condição (PS) do lema 2.10 continua valendo) para obter uma solução não positiva e uma não-negativa para todo $\lambda > 0$ nas hipóteses do teorema 2.1, e uma terceira solução para λ pequeno nas hipóteses do teorema 2.2. □

2.3 O caso crítico

No caso crítico, mesmo assumindo a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (Hg_2)-(ii), a condição (PS) em geral não vale em todos os níveis do funcional. Por esta razão, para provar os teoremas

2.5 e 2.6 e 2.7, precisaremos verificar que os potenciais níveis críticos de mínimo, passo de montanha e enlace estejam onde (PS) vale.

Precisaremos considerar dois problemas distintos. Para mostrar o teorema 2.5 precisamos estimar os níveis de passo de montanha para todo $\lambda > 0$, enquanto para o teorema 2.6 estimaremos o nível de enlace, para λ suficientemente pequeno.

Ao longo desta seção consideraremos o problema (2.2) com $N \geq 3$ e $p = 2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Denotaremos por S a melhor constante da imersão de H_0^1 em L^p, a saber

$$S = \inf\left\{ \frac{\|u\|^2}{\|u\|_p^2} : u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\} = \inf\left\{ \frac{\|u\|^2}{\|u\|_p^2} : u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \right\}.$$

Observação 2.13. *A não-linearidade no problema (2.2) é ímpar com respeito à incógnita u, o que implica que para toda solução não-negativa e não trivial u, existe a solução não-positiva e não trivial $-u$; logo não consideraremos mais o funcional $J^-_{\mu,\lambda}$ mas nos concentraremos na busca de soluções não-negativas.*

2.3.1 A condição (PS) no caso crítico

Primeiro analisaremos os níveis (PS) do funcional.

Lema 2.14. *Considere o funcional*

$$J_{\mu,\lambda}(u) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - a\|u\|_2^2\right) - \int_\Omega \lambda F_\mu(x,u) - \frac{1}{p}\|u\|_p^p$$

com $a \in \mathbb{R}$ qualquer; se a hipótese (Hf_a) vale, então

(i) se $b_\mu(x) \leq 0$ a condição $(PS)_c$ vale para $c < \frac{1}{N}S^{N/2}$;

(ii) para todo $\varepsilon, A > 0$, existe $\lambda^* > 0$ tal que a condição $(PS)_c$ vale desde que $c < \frac{1}{N}S^{N/2} - \varepsilon$, $\mu \in [0, A)$ e $\lambda \in [0, \lambda^*)$;

(iii) se existe uma solução de energia mínima u_0, então a condição $(PS)_c$ vale para $c < J_{\mu,\lambda}(u_0) + \frac{1}{N}S^{N/2}$.

A mesma propriedade vale para $J^+_{\mu,\lambda}$.

Demonstração. Suponha-se que $J_{\mu,\lambda}(u_n) \to c$ e $J'_{\mu,\lambda}(u_n) \to 0$.
Como para todo $\Theta \in (2,p)$, temos $\left(\frac{\Theta}{2} - 1\right) as^2 + \left(\frac{\Theta}{p} - 1\right) s^p \leq C$, deduzimos como no lema 2.10 que a sequência $\{u_n\}$ é limitada. Logo podemos assumir $u_n \to \overline{u}$ fracamente em H_0^1, quase toda parte, e fortemente em L^r para $r < p$; além disso, $|u_n|^{p-2}u_n \rightharpoonup |\overline{u}|^{p-2}\overline{u}$ em $L^{p'}$ (o dual de L^p) e logo $\overline{u}$ é uma solução do problema (2.2). Por consequência, podemos escrever

$$J_{\mu,\lambda}(\overline{u}) = J_{\mu,\lambda}(\overline{u}) - \frac{1}{2}J'_{\mu,\lambda}(\overline{u})[\overline{u}] = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|\overline{u}\|_p^p + \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega b_\mu(x)\,|\overline{u}|^q . \tag{2.19}$$

Usando Brézis-Lieb [BL83] sabemos que $\|u_n\|_p^p - \|u_n - \overline{u}\|_p^p \to \|\overline{u}\|_p^p$, enquanto pela convergência fraca $\|u_n\|^2 - \|u_n - \overline{u}\|^2 \to \|\overline{u}\|^2$, logo

$$J_{\mu,\lambda}(u_n) = J_{\mu,\lambda}(\overline{u}) + \frac{1}{2}\|u_n - \overline{u}\|^2 - \frac{1}{p}\|u_n - \overline{u}\|_p^p + \sigma(1) \to c\,, \tag{2.20}$$

$$J'_{\mu,\lambda}(u_n)[u_n] = J'_{\mu,\lambda}(\overline{u})[\overline{u}] + \|u_n - \overline{u}\|^2 - \|u_n - \overline{u}\|_p^p + \sigma(1) \to 0\,, \tag{2.21}$$

onde $\sigma(1)$ representa uma quantidade que tende a zero.

Como $J'_{\mu,\lambda}(\overline{u})[\overline{u}] = 0$, (2.21) implica que (a menos de subsequência)

$$\|u_n - \overline{u}\|^2 \to b \qquad e \qquad \|u_n - \overline{u}\|_p^p \to b$$

para algum $b \geq 0$; se $b = 0$ isso significaria que $u_n \to \overline{u}$ fortemente e concluiria a demonstração. Em caso contrário, por (2.19) e (2.20)

$$J_{\mu,\lambda}(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|\overline{u}\|_p^p + \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega b_\mu(x)\,|\overline{u}|^q + \frac{1}{2}\|u_n - \overline{u}\|^2 - \frac{1}{p}\|u_n - \overline{u}\|_p^p + \sigma(1) \to c$$

e tomando limite obtemos

$$c = \frac{p-2}{2p}\|\overline{u}\|_p^p + \lambda\frac{q-2}{2q}\int_\Omega b_\mu(x)\,|\overline{u}|^q + \frac{p-2}{2p}b\,.$$

Pelas desigualdades de Sobolev (usando que $\frac{p-2}{2p} = \frac{1}{N}$) temos que $\|u_n - \overline{u}\|^2 \geq S\,\|u_n - \overline{u}\|_p^2$, logo $b \geq Sb^{2/p}$, isto é, $b^{\frac{p-2}{p}} = b^{2/N} \geq S$, e enfim

$$c \geq \frac{1}{N}\left(S^{N/2} + \|\overline{u}\|_p^p\right) + \lambda\frac{q-2}{2q}\int_\Omega b_\mu(x)\,|\overline{u}|^q\,. \tag{2.22}$$

Se $b_\mu(x) \leq 0$, então isso leva a uma contradição se $c < \frac{1}{N}S^{N/2}$, assim $b = 0$ e demonstramos a afirmação (i).

Agora estimamos (usando, como na prova do teorema 2.2, que $\left|\int_\Omega b_\mu(x)|u|^q\right| \leq C_A\,\|u\|_p^q$ para $\mu \in [0, A)$)

$$c \geq \frac{1}{N}\left(S^{N/2} + \|\overline{u}\|_p^p\right) - \lambda C_A\frac{2-q}{2q}\,\|\overline{u}\|_p^q\ ;$$

como o mínimo de $t^p - \lambda N C_A\frac{2-q}{2q}t^q$ tende a zero quando $\lambda \to 0^+$, para obtermos a contradição que implica $b = 0$ precisamos $c < \frac{1}{N}S^{N/2} - \varepsilon$ e λ suficientemente pequeno (dependendo de ε e também de A); isso prova a afirmação (ii).

Enfim, seja u_0 uma solução de energia mínima; pela identidade (2.19) e a desigualdade (2.22) obtemos

$$c \geq J_{\mu,\lambda}(\overline{u}) + \frac{1}{N}S^{N/2} \geq J_{\mu,\lambda}(u_0) + \frac{1}{N}S^{N/2}\,, \tag{2.23}$$

logo, no caso da afirmação (iii), podemos garantir $(\mathrm{PS})_c$ abaixo do nível $J_{\mu,\lambda}(u_0) + \frac{1}{N}S^{N/2}$.

Para $J^+_{\mu,\lambda}(u_n)$ podemos argumentar da mesma maneira: de fato $(u_n^+)^{p-1} \to (\overline{u}^+)^{p-1}$, então podemos deduzir que $\overline{u} \geq 0$ e aplicar Brézis-Lieb à função de classe $\mathcal{C}^1$ $t \mapsto (t^+)^p$. $\square$

2.3.2 Estimativas dos níveis de infsup

Agora precisamos estimar os níveis de infsup obtidos nas provas dos teoremas 2.1 e 2.2; de fato, a não-linearidade $g(x,u) = |u|^{2^*-2}u$ satisfaz as condições (Hg_0 ... Hg_3) com $p = 2^*$ em (Hg_1), logo todas as estimativas obtidas para esses teoremas continuam valendo no caso crítico, exceto pela condição (PS) do lema 2.10.

Como clássico em literatura, precisaremos considerar apropriadas aproximações de suporte compacto das funções "instanton" que realizam a melhor constante de Sobolev S da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$. Mais precisamente, consideremos

$$\Psi_1(x) = (N(N-2))^{(N-2)/4} \frac{1}{(1+|x|^2)^{(N-2)/2}}\,,$$

$$\Psi_\nu(x) = \nu^{(2-N)/2}\Psi(x/\nu) = (N(N-2))^{(N-2)/4}\left(\frac{\nu}{(\nu^2+|x|^2)}\right)^{(N-2)/2}$$

e tomemos uma bola $B_{2\xi} \subseteq \Omega$ e uma função $\rho_\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega;[0,1])$ definida como 1 em B_ξ e 0 em $\Omega \setminus \overline{B}_{2\xi}$; então definimos

$$\psi_\nu(x) = \rho_\xi(x)\Psi_\nu(x)\,. \tag{2.24}$$

Com esta definição temos as seguintes estimativas (veja-se [BN83, Gho93]), que serão usadas nas demonstrações desta seção.

Lema 2.15.

$$\|\psi_\nu\|^2 = S^{N/2} + O(\nu^{N-2})\,, \tag{2.25}$$

$$\|\psi_\nu\|_p^p = S^{N/2} + O(\nu^N)\,, \tag{2.26}$$

$$\|\psi_\nu\|_2^2 = \begin{cases} C\nu^2 + O(\nu^{N-2}) & \textit{para } N \geq 5, \\ C\nu^2|\ln(\mu)| + O(\nu^2) & \textit{para } N = 4, \\ O(\nu) & \textit{para } N = 3, \end{cases} \tag{2.27}$$

onde $O(f(\nu))$ representa uma função de ν que é limitada em modulo por $Cf(\nu)$ quando $\nu \to 0$. Além disso, para algumas constantes $C, C' > 0$ e para ν pequeno

$$C'\nu^{(N-2)/2} \geq \|\psi_\nu\|_{p-1}^{p-1} \geq C\nu^{(N-2)/2}\,, \tag{2.28}$$

$$C'\nu^{(N-2)q/2} \geq \|\psi_\nu\|_q^q \geq C\nu^{(N-2)q/2}\,, \quad \textit{desde que } q < \frac{N}{N-2}. \tag{2.29}$$

Primeiro, como consequência do lema 2.14, obtemos

Proposição 2.16. *Nas hipóteses do teorema 2.5, para $\lambda > 0$ e $\mu \in (0, \overline{\mu}(\lambda))$, existe uma solução não trivial não-negativa u_0 do problema (2.2), com a propriedade que o nível crítico correspondente $J^+_{\mu,\lambda}(u_0)$ é negativo e $\|u_0\| < r$, onde r é o raio obtido no lema 2.11.*

Demonstração. Suponha-se por contradição que todos os pontos críticos de $J^+_{\mu,\lambda}$ estejam a níveis não-negativos. Então, pelo ponto (iii) do lema 2.14, a condição $(\mathrm{PS})_c$ valeria abaixo de $\frac{1}{N}S^{N/2}$; por consequência, argumentando como na primeira parte da prova do teorema 2.1, obteríamos um ponto crítico a um nível negativo, via minimização em B_r. Isso prova a existência de uma solução não trivial não-negativa u_0 a nível negativo.

Para provar que $\|u_0\| < r$ considere

$$j(t) := J_{\mu,\lambda}(tu_0) = \frac{t^2}{2}\left(\|u_0\|^2 - a\,\|u_0\|_2^2\right) - \frac{t^q}{q}\lambda\int_\Omega b_\mu(x)|u_0|^q - \frac{t^p}{p}\,\|u_0\|_p^p\;;$$

sabemos que $t = 1$ é um ponto crítico a nível negativo para $j(t)$ e que se $\left\|\widetilde{t}u_0\right\| = r$ então $j(\widetilde{t}) \geq \delta > 0$, pelo lema 2.11. Isso implica que, na expressão de j, o coeficiente de t^q é negativo e o de t^2 é positivo; por consequência $j(t) < 0$ para $t \in (0,1)$, e logo $\widetilde{t} > 1$, isto é, $\|u_0\| < r$. □

A seguir, consideraremos os níveis de passo de montanha; neste caso, usamos a mesma caracterização infsup (2.10), mas precisaremos considerar uma classe de caminhos diferente, que usem como origem a solução não-negativa u_0 da proposição 2.16. Sejam então $\lambda > 0$ e $\mu \in (0, \overline{\mu}(\lambda))$ como determinados no lema 2.11; o nosso candidato nível crítico será

$$c^+(\nu) = \inf_{\gamma\in\Gamma^+_\nu}\sup_{t\in[0,1]} J^+_{\mu,\lambda}(\gamma(t))\,, \tag{2.30}$$

$$\Gamma^+_\nu = \left\{\gamma \in \mathcal{C}([0,1]; H^1_0): \quad \gamma(0) = u_0, \quad \gamma(1) = u_0 + t_0\psi_\nu\right\}\,, \tag{2.31}$$

onde ψ_ν é escolhida com suporte contido no conjunto Ω_μ da condição (Hf_d) e t_0 (que depende de ν) é escolhido tal que $\|u_0 + t_0\psi_\nu\| > r$ e $J^+_{\mu,\lambda}(u_0 + t_0\psi_\nu) < 0$; o fato que isso seja possível é consequência da desigualdade (2.36) na demonstração do próximo lema.

Lema 2.17. *Nas hipóteses do teorema 2.5, existe $\nu > 0$ tal que*

$$c^+(\nu) < J_{\mu,\lambda}(u_0) + \frac{1}{N}S^{N/2}\,.$$

Demonstração. Pela definição de $c^+(\nu)$ é suficiente obter a estimativa no lema para um oportuno caminho em Γ^+_ν: precisamos então estimar, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} J_{\mu,\lambda}(u_0 + t\psi_\nu) = \frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2 - a\,\|u_0\|_2^2\right) + \frac{t^2}{2}\left(\|\psi_\nu\|^2 - a\,\|\psi_\nu\|_2^2\right) + \\ + t\int_\Omega(\nabla u_0\nabla\psi_\nu - a\,u_0\psi_\nu) - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega b_\mu(x)|u_0 + t\psi_\nu|^q - \frac{1}{p}\,\|u_0 + t\psi_\nu\|_p^p\;; \end{aligned} \tag{2.32}$$

usaremos a seguinte estimativa, deduzida das desigualdades $(1+s)^p \geq 1 + s^p + sp$ e $(1+s)^q \geq 1 + sq$ para todo $s \geq 0$:

$$\|u_0 + t\psi_\nu\|_p^p \geq \|u_0\|_p^p + t^p\,\|\psi_\nu\|_p^p + tp\int_\Omega u_0^{p-1}\psi_\nu\,, \tag{2.33}$$

$$\int_\Omega b_\mu(x)|u_0+t\psi_\nu|^q \geq \int_{b_\mu\geq 0} b_\mu(x)\left(u_0^q+qu_0^{q-1}t\psi_\nu\right)+\int_{b_\mu<0} b_\mu(x)u_0^q\,, \tag{2.34}$$

onde usamos o fato que $\psi_\nu=0$ onde $b_\mu(x)<0$. Além disso, como u_0 é uma solução,

$$t\int_\Omega (\nabla u_0\nabla\psi_\nu - a\,u_0\psi_\nu)=\lambda\int_{(b_\mu\geq 0)} b_\mu(x)u_0^{q-1}t\psi_\nu+\int_\Omega u_0^{p-1}t\psi_\nu \tag{2.35}$$

e estes dois termos anulam os correspondentes em (2.33) e (2.34), assim a equação (2.32) se torna

$$J_{\mu,\lambda}(u_0+t\psi_\nu) \;\leq\; J_{\mu,\lambda}(u_0)+\frac{t^2}{2}\left(\|\psi_\nu\|^2-a\,\|\psi_\nu\|_2^2\right)-\frac{t^p}{p}\,\|\psi_\nu\|_p^p\,. \tag{2.36}$$

Para $N\geq 4$, a afirmação segue agora como no famoso trabalho de Brézis e Nirenberg [BN83], sendo $a>0$.

Observe-se que (2.36) implica também que é possível encontrar $t_0(\nu)$ como requerido pela definição em (2.31). □

Demonstração do caso $N=3$. Consideremos agora o caso $N=3$, o que implica $p=6$.

Observe-se que se Ω_μ é como em (Hf_d) então, em Ω_μ, $-\Delta u_0\geq 0$ e logo temos $u_0\equiv 0$ ou $u_0>0$.

No segundo caso, passando se for preciso a uma bola contida em Ω_μ, podemos assumir $u_0\geq C>0$ no suporte de ψ_ν. No lugar de (2.33), usamos a estimativa

$$\|u_0+t\psi_\nu\|_6^6\geq\|u_0\|_6^6+t^6\,\|\psi_\nu\|_6^6+6t\int_\Omega\psi_\nu u_0^5+6t^5\int_\Omega\psi_\nu^5u_0\,, \tag{2.37}$$

assim (2.32) se torna (usando $b_\mu(x)>M_\mu$ e $u_0\geq C>0$)

$$J_{\mu,\lambda}(u_0+t\psi_\nu) \;\leq\; J_{\mu,\lambda}(u_0)+\frac{t^2}{2}\left(\|\psi_\nu\|^2-a\,\|\psi_\nu\|_2^2\right)-\frac{t^6}{6}\,\|\psi_\nu\|_6^6-Ct^5\,\|\psi_\nu\|_5^5\,. \tag{2.38}$$

O máximo da função acima de $t\geq 0$ é atingido para algum t_ν, que é limitado e destacado de zero com respeito a ν quando este último é pequeno, de fato, por (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28), quando $\nu\to 0$ o lado direito de (2.38) converge uniformemente em conjuntos compactos a $\frac{t^2}{2}S^{3/2}-\frac{t^6}{6}S^{3/2}$, que possui um único máximo e depois tende a $-\infty$. Então deduzimos, usando as estimativas do lema 2.15

$$\begin{aligned}
J_{\mu,\lambda}(u_0+t\psi_\nu) &\leq J_{\mu,\lambda}(u_0)+\frac{t_\nu^2}{2}\left(\|\psi_\nu\|^2-a\,\|\psi_\nu\|_2^2\right)-\frac{t_\nu^6}{6}\,\|\psi_\nu\|_6^6-Ct_\nu^5\,\|\psi_\nu\|_5^5 && (2.39)\\
&\leq J_{\mu,\lambda}(u_0)+\frac{t_\nu^2}{2}\left(S^{3/2}+O(\nu)\right)-\frac{t_\nu^6}{6}\left(S^{3/2}+O(\nu^3)\right)-Ct_\nu^5\sqrt{\nu}\\
&\leq J_{\mu,\lambda}(u_0)+\frac{t_\nu^2}{2}S^{3/2}-\frac{t_\nu^6}{6}S^{3/2}-C\sqrt{\nu}+O(\nu)\,. && (2.40)
\end{aligned}$$

Como o máximo da função $\frac{t^2}{2}S^{3/2}-\frac{t^6}{6}S^{3/2}$ é o valor $\frac{1}{3}S^{3/2}$, a afirmação do lema fica provada escolhendo ν suficientemente pequeno, graças ao termo de ordem menor $-C\sqrt{\nu}$.

Enfim, consideremos o caso $u_0 \equiv 0$ em Ω_μ; neste caso os suportes de u_0 e ψ_ν são disjuntos, então

$$J_{\mu,\lambda}(u_0 + t\psi_\nu) = J_{\mu,\lambda}(u_0) + J_{\mu,\lambda}(t\psi_\nu) \tag{2.41}$$

e podemos considerar

$$J_{\mu,\lambda}(t\psi_\nu) = \frac{t^2}{2}\left(\|\psi_\nu\|^2 - a\,\|\psi_\nu\|_2^2\right) - t^6\frac{1}{6}\,\|\psi_\nu\|_6^6 - t^q\frac{\lambda}{q}\int_\Omega b_\mu(x)\psi_\nu^q\,; \tag{2.42}$$

usando (Hf_d) e (2.29) obtemos $\int_\Omega b_\mu(x)\psi_\nu^q \geq M_\mu \|\psi\|_q^q \geq C\nu^{q/2}$ e então, procedendo como fizemos com (2.38), obtemos

$$J_{\mu,\lambda}(t\psi_\nu) \leq \frac{1}{3}S^{3/2} - C'\nu^{q/2} + O(\nu)\,;$$

como $q < 2$, o termo de ordem menor é $-C'\nu^{q/2}$ e então para $\nu > 0$ suficientemente pequeno obtemos a afirmação do lema. $\square$

Com este resultado podemos demonstrar o teorema 2.5

Demonstração do teorema 2.5. A proposição 2.16 fornece uma solução não-negativa u_0, que está a um nível negativo. Pelo ponto (iii) do lema 2.14, se a origem e u_0 fossem os únicos pontos críticos de $J^+_{\mu,\lambda}$, então $(\mathrm{PS})_c$ valeria abaixo de $J^+_{\mu,\lambda}(u_0) + \frac{1}{N}S^{N/2}$. Mas neste caso, para o ν dado no lema 2.17, o nível de passo de montanha (2.30) daria um outro ponto crítico. Isso mostra a existência de uma segunda solução não trivial não-negativa. As soluções não triviais não-negativas vêm da observação 2.13. $\square$

Agora consideremos o nível de enlace obtido no teorema 2.2.

Lema 2.18. *Nas hipóteses do teorema 2.6, para todo $A > 0$, existem $\nu, \varepsilon, \widetilde{\lambda} > 0$ tais que se e_ν é a componente de ψ_ν ortogonal a H_k então o nível infsup c_{e_ν} em (2.11) satisfaz*

$$c_{e_\nu} < \frac{1}{N}S^{N/2} - \varepsilon$$

para todos $\lambda \in [0, \widetilde{\lambda})$ e $\mu \in [0, A)$.

Demonstração. Seja e_ν a componente ortogonal a H_k da função ψ_ν, e definamos $Y_\nu = H_k \oplus \{te_\nu :\ t \in \mathbb{R}\}$. Para todo $u \in Y_\nu$ fixado temos

$$J_{\mu,\lambda}(tu) = \frac{t^2}{2}\left(\|u\|^2 - a\,\|u\|_2^2\right) - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega b_\mu(x)|u|^q - \frac{t^p}{p}\,\|u\|_p^p\,; \tag{2.43}$$

estimamos $\frac{s^q}{q} \leq 1 + \frac{s^2}{2}C_1$ e usamos de novo $\left|\int_\Omega b_\mu(x)|u|^q\right| \leq C_A \|u\|_p^q$ para todo $\mu \in [0, A)$, obtendo

$$\left|\frac{\lambda}{q}t^q\int_\Omega b_\mu(x)|u|^q\right| \leq \lambda C_A\left(1 + C_1\frac{t^2}{2}\,\|u\|_p^2\right)\,.$$

Com esta estimativa, (2.43) implica

$$J_{\mu,\lambda}(tu) \leq \lambda C_A + \frac{t^2}{2}\left[\|u\|^2 - a\|u\|_2^2 + \lambda C_A C_1 \|u\|_p^2\right] - \frac{t^p}{p}\|u\|_p^p \; ;$$

como o máximo de $A\frac{t^2}{2} - B\frac{t^p}{p}$ é em $t = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ no nível $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\frac{A^{N/2}}{B^{N/2-1}}$, obtemos

$$\begin{aligned} J_{\mu,\lambda}(tu) &\leq \lambda C_A + \frac{1}{N}\frac{\left[\|u\|^2 - a\|u\|_2^2 + \lambda C_A C_1 \|u\|_p^2\right]^{N/2}}{\left(\|u\|_p^p\right)^{N/2-1}} & (2.44)\\ &\leq \lambda C_A + \frac{1}{N}\left[\frac{\|u\|^2 - a\|u\|_2^2}{\|u\|_p^2} + \lambda C_A C_1\right]^{N/2}. & (2.45)\end{aligned}$$

Agora consideremos

$$m_\nu = max\left\{\|u\|^2 - a\|u\|_2^2 : \quad u \in Y_\nu,\ \|u\|_p = 1\right\}. \tag{2.46}$$

O máximo é atingido pois Y_ν é finito-dimensional, seja então u um maximizante e escrevamos $u = \widetilde{y} + \tau e_\nu = y + \tau\psi_\nu$ com $y, \widetilde{y} \in H_k$. Observe-se que pela desigualdade triangular e a estimativa (2.27) vale

$$\|y\|_2 \leq \|u\|_2 + \|\tau\psi_\nu\|_2 \leq C\|u\|_p + |\tau|\ \|\psi_\nu\|_2 = C + |\tau| O(\nu)\,; \tag{2.47}$$

usando a desigualdade $|1+s|^p \geq 1 + ps$ para todo $s \in \mathbb{R}$, obtemos

$$1 = \|u\|_p^p = \|y + \tau\psi_\nu\|_p^p \geq \|\tau\psi_\nu\|_p^p + p\int_\Omega (\tau\psi_\nu)^{p-1} y \geq |\tau|^p \|\psi_\nu\|_p^p - |\tau|^{p-1} C \|\psi_\nu\|_{p-1}^{p-1}\|y\|_\infty \tag{2.48}$$

e usando (2.47) (H_k é finito-dimensional então as normas de y são equivalentes), (2.26) e (2.28), isso se torna

$$1 \geq |\tau|^{p-1}\left[|\tau|(S^{N/2} + \sigma(1)) - C\sigma(1) - |\tau|\sigma(1)\right] \; ;$$

concluímos que $|\tau|$ (e logo também y por (2.47)) é limitado para $\nu \to 0$.

Agora, de (2.48) e usando a limitação de τ deduzimos

$$1 \geq \|\tau\psi_\nu\|_p^p - C\|\psi_\nu\|_{p-1}^{p-1}\|y\|_\infty \; ; \tag{2.49}$$

logo computamos

$$\begin{aligned} m_\nu &= (y + \tau\psi_\nu, y + \tau\psi_\nu) - a(y + \tau\psi_\nu, y + \tau\psi_\nu)_2 \\ &\leq \|y\|^2 - a\|y\|_2^2 + \tau^2\left(\|\psi_\nu\|^2 - a\|\psi_\nu\|_2^2\right) + 2|\tau|\left(|(y,\psi_\nu)| + a|(y,\psi_\nu)_2|\right) \\ &\leq (\lambda_k - a)\|y\|_2^2 + \tau^2\|\psi_\nu\|_p^2\frac{\|\psi_\nu\|^2 - a\|\psi_\nu\|_2^2}{\|\psi_\nu\|_p^2} + C\|y\|_\infty\|\psi_\nu\|_1 & (2.50)\end{aligned}$$

onde usamos a regularidade de y para estimar $|(y,\psi_\nu)| = |(\Delta y,\psi_\nu)_2| \leq C\,\|y\|_\infty\,\|\psi_\nu\|_1$.
Por (2.49) e pela estimativa (2.28)

$$\tau^2\,\|\psi_\nu\|_p^2 \leq \left(1 + C\,\|\psi_\nu\|_{p-1}^{p-1}\,\|y\|_\infty\right)^{2/p} = \left(1 + O(\nu^{(N-2)/2})\,\|y\|_\infty\right)\,. \tag{2.51}$$

Pelas estimativas (2.25), (2.26) e (2.27) (no caso $N \geq 5$)

$$\frac{\|\psi_\nu\|^2 - a\,\|\psi_\nu\|_2^2}{\|\psi_\nu\|_p^2} = \frac{S^{N/2} - aC\nu^2 + O(\nu^{N-2})}{\left(S^{N/2} + O(\nu^N)\right)^{2/p}} = S - aC\nu^2 + O(\nu^{N-2})\,. \tag{2.52}$$

Usando $\|\psi_\nu\|_1 = O(\nu^{(N-2)/2})$, a equivalência das normas de y e as equações (2.51) e (2.52), a desigualdade (2.50) implica

$$m_\nu \leq (\lambda_k - a)\,\|y\|^2 + \left(S - aC\nu^2 + O(\nu^{N-2}) + O(\nu^{(N-2)/2})\,\|y\|\right)\,. \tag{2.53}$$

Como $\lambda_k < a$, temos duas possibilidades:

$$\text{ou} \qquad (\lambda_k - a)\,\|y\|^2 + O(\nu^{(N-2)/2})\,\|y\| \leq 0, \qquad \text{ou} \tag{2.54}$$

$(a - \lambda_k)\,\|y\| \leq O(\nu^{(N-2)/2})$, o que implica

$$\|y\|\,O(\nu^{(N-2)/2}) = O(\nu^{N-2})\,; \tag{2.55}$$

em ambos os casos, podemos concluir de (2.53) que

$$m_\nu \leq S - aC\nu^2 + O(\nu^{N-2}), \tag{2.56}$$

e logo por (2.45)

$$J_{\mu,\lambda}(tu) \leq \lambda C_A + \frac{1}{N}\left[S - aC\nu^2 + O(\nu^{N-2}) + \lambda C_A C_1\right]^{N/2}\,. \tag{2.57}$$

Para concluir, precisamos fixar valores oportunos para ε, ν e $\widetilde{\lambda}$ para que esteja satisfeita a afirmação do lema. Primeiro, sendo $N \geq 5$, podemos fixar ν, ε tais que o termo $\frac{1}{N}\left[S - aC\nu^2 + O(\nu^{N-2})\right]^{N/2}$ em (2.57) seja menor que $\frac{1}{N}S^{N-2} - 2\varepsilon$, assim, para $\widetilde{\lambda}$ suficientemente pequeno, o inteiro termo de direita de (2.57) será menor que $\frac{1}{N}S^{N/2} - \varepsilon$, para todos $\mu \in [0, A)$ e $\lambda \in [0, \widetilde{\lambda})$.

O caso $N = 4$ é parecido: a única diferencia é nas equações (2.52) e (2.56), onde precisa usar a segunda das estimativas em (2.27) obtendo $m_\nu \leq S - aC\nu^2|\ln(\nu)| + O(\nu^2)$. □

A este ponto podemos provar o teorema 2.6:

Demonstração do teorema 2.6. Dado o valor $A > 0$, sejam $\nu, \varepsilon, \widetilde{\lambda}$ como no lema 2.18, então o ponto (ii) do lema 2.14 implica que para λ suficientemente pequeno o nível c_{e_ν} é de fato crítico, e então corresponde a duas soluções não triviais distintas, sendo o funcional par.

Como $a > \lambda_1$, não precisamos usar a caracterização de passo de montanha em (2.30) junto com o lema 2.17 para estimar o nível da solução de passo de montanha; de fato, o mesmo argumento usado no teorema 2.2 mostra que o nível do passo de montanha como definido em (2.10) é menor que c_{e_ν} e logo está também a um nível onde (PS) vale. □

Para terminar, voltamos novamente ao caso $\mu = 0$.

Demonstração do teorema 2.7. Como $\mu = 0$, pelo ponto (i) do lema 2.14, a condição $(\mathrm{PS})_c$ está satisfeita abaixo de $\frac{1}{N}S^{N/2}$; como vimos na prova do teorema 2.4 continuamos tendo tanto a geometria do Passo de Montanha quanto a de Enlace, assim podemos obter quatro soluções desde que os níveis correspondentes estejam abaixo de $\frac{1}{N}S^{N/2}$ (a quarta solução pelo fato do funcional ser par).

Para verificar isso, observe-se que o lema 2.18 também continua valendo quando $\mu = 0$ e de novo, como o nível do passo de montanha está abaixo do de enlace, concluímos que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno as quatro soluções existem. □

Observação 2.19. *Resultados análogos aos obtidos aqui podem ser provados com uma diferente hipótese sobre o termo f_μ, onde consideramos ainda coeficientes $\overline{c}_\mu, \overline{d} \geq 0$, mas multiplicando termos com expoentes diferentes, a saber,*

$$f_\mu(x,u) = \overline{c}_\mu(x)|u|^{q_1-2}u - \overline{d}(x)|u|^{q_2-2}u \quad com \quad 1 < q_1 < q_2 < 2\,. \tag{f_2}$$

Neste caso precisa assumir as hipóteses a seguir, no lugar das (Hf_a)...(Hf_d) que assumimos até aqui:

(Hf'_a) *existem $\sigma_i > \frac{2^*}{2^*-q_i}$ $(i = 1, 2)$ tais que $\overline{c}_\mu \in L^{\sigma_1}(\Omega)$ e $\overline{d} \in L^{\sigma_2}(\Omega)$, para todo $\mu \geq 0$;*

(Hf'_{bc}) *$\overline{c}_\mu, \overline{d}$ satisfazem (Hf_b) e (Hf_c) (com a norma L^{σ_1} no lugar da norma L^σ).*

(Hf'_d) *para todo $\mu > 0$, existe um conjunto aberto $\Omega_\mu \subseteq \Omega$ e uma constante $M_\mu > 0$ tais que*

$$\overline{c}_\mu(x) \geq M_\mu \ e \ \overline{d}(x) \ é \ limitado \quad em \ \Omega_\mu\,;$$

A maior diferença entre este caso e o anterior está na hipótese (Hf_d), de fato, no problema original esta hipótese implica, por causa de (Hf_b), que $c_\mu \notin L^\infty$; isto não é mais necessário neste outro caso graças à hipótese $q_1 < q_2$. Como consequência, neste caso precisamos apenas pedir, em (Hf'_d), que, em alguma região comum, $\overline{c}_\mu$ não seja nulo e que $\overline{d}$ seja limitado.

As demonstrações para este caso diferem apenas em algumas passagens das apresentadas anteriormente: os detalhes podem ser encontrados em [MU09].

Capítulo 3

Soluções positivas para o $p-$Laplaciano envolvendo uma não-linearidade subcrítica com zeros

Neste capítulo descreveremos os resultados do trabalho [IMSU10]; como antecipado na introdução estudaremos existência, multiplicidade e o comportamento com respeito a λ, das soluções positivas do problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda h(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $p > 1$, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano, $\lambda > 0$ é um parâmetro real, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, e onde h é uma não-linearidade não negativa com um zero positivo, o qual pode variar com a variável x.

Usaremos uma combinação de técnicas, como métodos variacionais, o método das sub e supersoluções, princípios de comparação e estimativas a priori. Para analisar o comportamento assintótico das soluções estenderemos um resultado devido a Redheffer e demonstraremos um novo teorema de tipo Liouville para o operador $p-$Laplaciano no qual a não-linearidade é superlinear, não-negativa, mas possui zeros a valores positivos.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 3.1 enunciamos as hipóteses e os resultados, a seção 3.2 é dedicada às provas dos resultados de existência (teoremas 3.2, 3.3 e 3.4) enquanto na seção 3.3 mostramos a existência de uma segunda solução (teorema 3.5). A seção 3.4 é dedicada a obter as necessárias estimativas a priori para as soluções e na seção 3.5 mostramos o teorema de tipo Liouville 3.11 e a proposição 3.19. Na seção 3.6, enfim, estudamos o comportamento assintótico das soluções (teoremas 3.7, 3.8 e 3.9). Concluímos com uma apêndice que contém, nos lemas de 3.23 a 3.28, alguns dos resultados conhecidos mais importantes que usamos neste capítulo e no seguinte.

3.1 Enunciado dos resultados

Existência.
Assumiremos inicialmente as seguintes quatro hipóteses sobre a não-linearidade h.

(H_1) A função $h : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ é contínua e $h(x, 0) = 0$.

(H_2) Existe uma função $a \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ fracamente $p-$super-harmônica (isto é, $-\Delta_p\, a \geq 0$ em sentido fraco) e constantes positivas a_0, A_0 tais que

$$\begin{cases} h(x,t) = 0 & \text{se } t = a(x), \\ h(x,t) > 0 & \text{se } t \neq a(x),\ t > 0 \end{cases}$$

e vale

$$a_0 \leq a(x) \leq A_0 \quad \text{em } \Omega\,.$$

(H_3) Existe uma função $b \in L^{\infty}(\Omega)$ e constantes positivas b_0, B_0 tais que

$$\lim_{u \longrightarrow 0^+} \frac{h(x,u)}{u^{p-1}} = b(x) \quad \text{uniformemente com respeito a } x \in \Omega$$

e vale

$$b_0 \leq b(x) \leq B_0\,.$$

(M_1) Existe uma função contínua e não decrescente $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_0(0) = 0$ e a mapa $s \mapsto h(x,s) + f_0(s)$ é crescente para todo $x \in \Omega$.

Observação 3.1. *a) A hipótese $-\Delta_p\, a \geq 0$ em (H_2), da qual precisaremos para que a seja uma supersolução, parece ser bastante natural no nosso contexto, sendo que para λ grande as soluções, que necessariamente satisfazem $-\Delta_p\, u \geq 0$, aproximam esta função a (veja o teorema 3.9). No caso dos problemas logísticos, introduzidos na seção 1.2, esta hipótese não é necessária, sendo que a existência de uma supersolução é garantida pelo fato que a não-linearidade é negativa depois do zero, implicando também que as soluções não precisam satisfazer a condição $-\Delta_p\, u \geq 0$.*

b) A condição (M_1) é clássica quando se quer usar o método das sub e supersoluções.

Considere-se agora o problema de autovalores não-linear

$$(E_b) \qquad \begin{cases} -\Delta_p\, u = \lambda\, b(x)|u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Denotamos por $\lambda_{1,b}$ o primeiro autovalor do problema (E_b) e por $\phi_{1,b}$ a autofunção associada. É conhecido que, com a hipótese (H_3), tem-se $\phi_{1,b} > 0$ com derivada normal externa na fronteira estritamente negativa. Além disso, $\lambda_{1,b} > 0$ e temos a caracterização

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \geq \lambda_{1,b} \int_\Omega b(x)|u|^p \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,, \tag{3.1}$$

onde a igualdade vale se e só se u é múltiplo de $\phi_{1,b}$ (veja-se por exemplo em [ÔT88, Ana87b]).

Podemos agora enunciar nosso primeiro resultado, que considera valores grandes de λ.

Teorema 3.2. *Nas hipóteses $(H_1 \ \ldots \ H_3)$ e (M_1) existe, para todo $\lambda > \lambda_{1,b}$, uma solução positiva $u(x)$ do problema (P_λ) que satisfaz $u(x) \leq a(x)$.*

Para valores pequenos de λ, precisaremos a seguinte hipótese sobre o comportamento de h no infinito.

(H_4) Existem $\rho > 0$ e $\sigma \in (p-1, p^*-1)$, onde p^* denota o expoente crítico de Sobolev, dado por $p^* = \frac{Np}{N-p}$ se $N > p$, e podemos pôr $p^* = \infty$ se $N \leq p$, tais que

$$\lim_{u \longrightarrow +\infty} \frac{h(x,u)}{u^\sigma} = \rho \ \text{ uniformemente com respeito a } x \in \Omega.$$

Nosso segundo resultado de existência é o seguinte.

Teorema 3.3. *Nas hipóteses $(H_1 \ \ldots \ H_4)$ existe, para todo $\lambda \in (0, \lambda_{1,b})$, uma solução positiva $u(x)$ do problema (P_λ).*
Além disso, se a seguinte hipótese também está satisfeita,

(H_5) $\qquad h(x,t) < b(x)t^{p-1}$, *para todo* $\ x \in \Omega\ $ *e* $\ t \in (0, a(x))$,

então, para algum $x_0 \in \Omega$, temos $u(x_0) > a(x_0)$.

Finalmente, podemos encontrar uma solução para $\lambda = \lambda_{1,b}$.

Teorema 3.4. *Nas hipóteses $(H_1 \ \ldots \ H_5)$, existe uma solução positiva $u(x)$ do problema (P_λ) para $\lambda = \lambda_{1,b}$.*

Multiplicidade.
A questão da existência de uma segunda solução parece um pouco mais difícil, mas conseguiremos obter o resultado nos quatro casos a seguir.

(a) O caso semilinear $p = 2$.

(b) Quando $a(x) \equiv \overline{a}$, com $\overline{a}$ uma constante positiva, e existe uma constante $C > 0$ tal que $h(x,t) \leq C|\overline{a} - t|^{p-1}$ para $\ t \leq \overline{a}$.

(c) Quando $-\Delta_p a \in L^\infty(\Omega)$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que $-\Delta_p a(x) > \varepsilon$ q.t.p. $x \in \Omega$.

(d) Quando $a \in \mathcal{C}^1$ e $\nabla a \neq 0$ em Ω.

Além disso, precisaremos alguns resultados de comparação para poder mostrar que a primeira solução está estritamente abaixo da função $a(x)$. Para isso, precisamos de uma hipótese de monotonicidade mais forte da (M_1), a saber,

(M_2) existe uma constante $k > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$ a mapa $s \mapsto h(x,s) + k\,s^{p-1}$ é crescente.

Nosso resultado de multiplicidade é o seguinte.

Teorema 3.5. *Nas hipóteses $(H_1\ \ldots\ H_4)$ e (M_2), se pelo menos uma das condições (a ... d) está satisfeita, existem pelo menos duas soluções positivas $u_1 \leq u_2$ do problema (P_λ) para $\lambda > \lambda_{1,b}$, onde $u_1 < a$.*

Além disso, se também está satisfeita a seguinte hipótese

(H_6) $\frac{1}{p}\,th(x,t) - \int_0^t h(x,s)ds$ *é estritamente decrescente para $t \in (0, a(x))$,*

então u_2 satisfaz $u_2(x_0) > a(x_0)$ em algum ponto $x_0 \in \Omega$.

Observação 3.6. *i) As condições (a ... d) acima serão usadas para provar que a solução obtida no teorema 3.2 está estritamente abaixo da supersolução $a(x)$, sendo que isso será fundamental para poder obter uma segunda solução.*

De fato, como comentamos na introdução, poder garantir que a solução está abaixo de $a(x)$ está relacionado com a impossibilidade de formação de "flat cores" e "coincidence sets"; como estes fenômenos acontecem em regiões nas quais $a(x)$ é constante ou harmônica, e dependendo do comportamento de h perto do zero, pode ver-se que as hipóteses (a ... d) visam impedir que eles aconteçam, em particular, a segunda condição do caso (b) é complementar à hipótese que garante a existência de soluções com flat core. Observe-se que no caso (a) a hipótese análoga não é assumida explicitamente mas é de fato uma consequência da hipótese (M_2). Enfim, as condições (c) e (d) claramente evitam a existência de regiões planas horizontais para a função a, onde poderia ter-se flat cores.

ii) Observe-se que todos os resultados acima poderiam ser obtidos com hipóteses menos restritivas com respeito à (H_4): poderíamos assumir apenas que a não-linearidade seja $p-$superlinear no infinito, subcrítica, e satisfaça alguma hipóteses adicional que garanta uma condição de compacidade (veja-se o lema 3.13), como por exemplo a clássica condição de Ambrosetti–Rabinowitz que assumimos no capítulo anterior em (Hg_2) . A hipótese de h ser assintoticamente uma potência pura, porém, será necessário para os próximos resultados.

iii) A hipótese (H_6) é necessária para provar que a segunda solução do teorema 3.5 não pode estar também abaixo de $a(x)$. De fato, esta hipótese está estritamente relacionada com a hipótese $h(x,u)/u^{p-1}$ estritamente decrescente que, em [DS87], garante a unicidade da solução que está abaixo de $a(x)$. A hipótese (H_6) porém nos permite de obter o nosso resultado de maneira simples e direta.

Comportamento assintótico.
A conclusão, enunciamos nossos resultados sobre o comportamento assintótico de u_λ.

Teorema 3.7. *Nas hipóteses* (H_1) *e* (H_3), *se* $\{u_\lambda\}$ *é uma família de soluções positivas do problema* (P_λ), *então* $\|u_\lambda\|_\infty \to \infty$ *quando* $\lambda \to 0$.

Teorema 3.8. *Nas hipóteses* $(H_1 \ldots H_3)$ *e* (H_5), *se* $\{u_\lambda\}$ *é uma família de soluções positivas do problema* (P_λ) *que satisfazem* $u_\lambda \le a$, *então* $u_\lambda \to 0$ *em* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *quando* $\lambda \to \lambda_{1,b}^+$.

Teorema 3.9. *Nas hipóteses* $(H_1 \ldots H_3)$, *mais as seguintes:*

(H_4^*) *a hipótese* (H_4) *vale com* $\sigma \in (p-1, p_*-1)$, *onde* p_* *denota o expoente de Serrin, dado por* $p_* = \frac{(N-1)p}{N-p}$ *se* $N > p$, *e de novo podemos pôr* $p_* = \infty$ *se* $N \le p$,

(H_7) *existe* $\gamma > 0$ *tal que* $h(x,t) \ge \gamma |t - a(x)|^\sigma$ *para* $t \ge a(x)$,

se $\{u_\lambda\}$ *é uma família de soluções positivas do problema* (P_λ), *e se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\varepsilon\phi_{1,b} \le u_\lambda$ *para todas as* u_λ *na família, então* $u_\lambda \to a$ *pontualmente em* Ω *quando* $\lambda \to +\infty$.

Observação 3.10. *O resultado acima de convergência pontual é obtido usando um técnica de blow–up (é por esta razão que precisamos* (H_4^*) *no lugar de* (H_4)*) centrado num ponto arbitrário de* Ω, *e usando o teorema de tipo Liouville em* $\mathbb{R}^N$ *que apresentamos abaixo. Um resultado mais forte poderia ser obtido centrando o blow–up no ponto de máximo da solução (como é comum em literatura), porém, fazendo assim, o problema limite que surge fazendo o blow–up não seria necessariamente um problema em todo* $\mathbb{R}^N$ *mas poderia ser apenas num semiespaço, e não possuímos teoremas de tipo Liouville num semiespaço para o tipo de não linearidade que estamos considerando, exceto no caso* $N = 1$. *De fato, para* $N = 1$ *pode-se facilmente provar que os possíveis limites de* $\|u_\lambda\|_\infty$ *estão no intervalo* $[a_0, A_0]$, *em particular* $\|u_\lambda\|_\infty \to a$ *se* a *é uma constante.*

A seguir enunciamos o teorema de tipo Liouville que precisaremos usar para o resultado acima: este teorema, que acreditamos possa ser um resultado interessante por si mesmo, envolve uma função não negativa com zeros.

Teorema 3.11. *Seja* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *uma função contínua que satisfaz as seguintes hipóteses:*

(f_1) *Existe* $\overline{a} > 0$ *tal que*

$$\begin{cases} f(t) = 0 & se\ t = 0\ ou\ t = \overline{a}\ , \\ f(t) > 0 & se\ t \neq \overline{a},\ t > 0. \end{cases}$$

(f_2) *Existem constantes* $\gamma > 0$ *e* $\sigma \in (p-1, p_* - 1)$ *tais que* $f(t) \geq \gamma(t-\overline{a})^\sigma$, *para* $t > \overline{a}$.

(f_3) *Existe uma constante* $\overline{b} > 0$ *tal que* $\liminf_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^{p-1}} \geq \overline{b}$.

(f_4) *Existe uma constante* $\Lambda > 0$ *tal que* $0 \leq f(t) \leq \Lambda\,(t^\sigma + 1)$, *para* $t \geq 0$.

Então toda solução fraca de classe $\mathcal{C}^1$ *do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p w = f(w) & em \quad \mathbb{R}^N, \\ w \geq 0\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

é uma das funções constantes $w \equiv 0$ *ou* $w \equiv \overline{a}$.

A prova deste teorema está baseada na proposição 3.19, que estende um resultado de [Red86].

3.2 Prova dos resultados de existência

Como estamos procurando soluções positivas, definamos a função auxiliar

$$\widetilde{h} : \mathbb{R} \to [0,\infty) : \begin{cases} \widetilde{h}(x,s) = h(x,0) = 0 & \text{para} \quad s \leq 0, \\ \widetilde{h}(x,s) = h(x,s) & \text{para} \quad s > 0, \end{cases}$$

isto é, $\widetilde{h}(x,s) = h(x,s^+)$ onde $s^+ = \max\{0,s\}$.

As soluções do problema (P_λ) com a nova função $\widetilde{h}$ serão então soluções não-negativas do problema original. Além disso, como $\widetilde{h}(x,s) \geq 0$, toda solução não-negativa é de fato, estritamente positiva pelo princípio de máximo forte de Vázquez que enunciamos no lema 3.23. Enfim, observe-se que, pelas hipóteses (H_1) e (H_4), todas as soluções fracas do problema (P_λ) são de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0,1)$ (veja [GV89]), e o mesmo vale para a autofunção $\phi_{1,b}$. Neste contexto, todas as igualdades ou desigualdades envolvendo o $p-$Laplaciano de alguma função serão entendidas em sentido fraco.

Ao longo das provas a seguir, C denotará uma constante positiva genérica, que pode variar de uma linha para outra.

Começaremos com a prova do nosso primeiro resultado de existência.

Demonstração do teorema 3.2. Pelas hipóteses (H_1) e (M_1), podemos usar o método de sub e supersoluções (veja-se [CDG97]).
Como $a(x)$ é positiva, fracamente $p-$super-harmônica e $\widetilde{h}(x,a(x)) = 0$ (esta é a hipótese (H_2)),

temos que $a(x)$ é sempre uma supersolução do problema (P_λ). Em particular, é uma supersolução estrita, já que a condição $a(x) \geq a_0 > 0$ implica que não pode satisfazer a condição de fronteira. Lembramos que uma *supersolução estrita* (resp. *subsolução estrita)* é uma supersolução (resp. subsolução) que não é uma solução.

Seja $\lambda > \lambda_{1,b}$. Pela hipótese (H_3), dado um $\delta \in (0,1)$, existe um $t_0 = t_0(\delta)$ suficientemente pequeno tal que

$$(1-\delta)b(x)t^{p-1} < \widetilde{h}(x,t)\,, \text{ para } \ t \in (0,t_0]\,. \tag{3.3}$$

Agora, se δ é escolhido de maneira que $\lambda_{1,b} < (1-\delta)\lambda$, então

$$\lambda_{1,b}b(x)t^{p-1} < \lambda\widetilde{h}(x,t)\,, \text{ para } \ t \in (0,t_0], \tag{3.4}$$

e se $\varepsilon > 0$ é tal que $\varepsilon\|\phi_{1,b}\|_\infty < t_0$, temos

$$-\Delta_p(\varepsilon\phi_{1,b}) = \lambda_{1,b}\, b(x)\ (\varepsilon\phi_{1,b})^{p-1} < \lambda\widetilde{h}(x,\varepsilon\phi_{1,b}) \tag{3.5}$$

em sentido fraco, isto é, $\varepsilon\phi_{1,b}$ é uma subsolução (estrita) para o problema (P_λ). Enfim, ε sempre pode ser escolhido de maneira que $\varepsilon\|\phi_{1,b}\|_\infty \leq a_0 \leq a(x)$. Assim o método de sub e supersoluções implica que existe uma solução u satisfazendo $0 < \varepsilon\phi_{1,b} \leq u \leq a$. □

Observação 3.12. *Observe-se que a escolha de δ (e por consequência também o valor de t_0 e ε) na prova acima depende de λ. Mesmo assim, uma vez escolhido δ para um certo valor de λ, a mesma escolha poderá ser mantida para qualquer λ maior. Consequentemente, dado $\widetilde{\lambda} > \lambda_{1,b}$, podemos encontrar uma única função $\varepsilon\phi_{1,b}$ que sirva como subsolução para todo $\lambda > \widetilde{\lambda}$.*

Os teoremas de existência a seguir serão demonstrados por técnicas variacionais. No caso do teorema 3.3, provaremos que o funcional $\mathcal{C}^1$ associado ao problema (P_λ), a saber,

$$J_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} : u \mapsto J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \lambda\int_\Omega \widetilde{H}(x,u) \tag{3.6}$$

onde $\widetilde{H}(x,t) = \int_0^t \widetilde{h}(x,s)\,ds$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo de Montanha, (veja na demonstração do teorema 2.1).

Primeiramente mostraremos a condição (PS) no lema a seguir e em seguida daremos a prova do teorema 3.3.

Lema 3.13. *Nas hipóteses (H_1) e (H_4), o funcional (3.6) satisfaz a condição (PS) para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. A demonstração é bem clássica. De fato, usando a hipótese (H_4) e a continuidade de $\widetilde{h}$, para $\theta \in (p, \sigma+1)$ e algum $s_0 > 0$, temos

$$\theta\widetilde{H}(x,s) - s\widetilde{h}(x,s) \leq \left(\frac{\theta}{\sigma+1} - 1\right)s^{\sigma+1} \leq 0, \ \text{ para } \ s > s_0. \tag{3.7}$$

A condição (PS) segue então como no lema 2.10 da desigualdade (3.7) e do fato que a hipótese (H_4) implica num crescimento subcrítico para $\widetilde{h}$. □

Demonstração do teorema 3.3. A prova da existência é de novo bastante clássica. Aplicaremos o Teorema do Passo de Montanha. Primeiramente, observe-se que, em consequência da superlinearidade dada na hipótese (H_4), $\lim_{t\longrightarrow+\infty} J_\lambda(tu) = -\infty$, para toda $u \geq 0$ não trivial.

Combinando as hipóteses (H_3), (H_4) e a continuidade de $\widetilde{h}$, para todo $\delta > 0$, temos

$$\widetilde{h}(x,u) \leq (1+\delta)b(x)|u^+|^{p-1} + C|u^+|^\sigma\,,$$

onde a constante C depende de δ. Dado $\lambda < \lambda_{1,b}$, seja δ tal que $\lambda(1+\delta) < \lambda_{1,b}$: pela desigualdade (3.1) e a inclusão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{\sigma+1}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \lambda\int_\Omega \widetilde{H}(x,u) \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{\lambda}{p}(1+\delta)\int_\Omega b(x)|u^+|^p - \lambda\frac{C}{\sigma+1}\int_\Omega |u^+|^{\sigma+1} \\ &\geq \left(1 - \frac{\lambda(1+\delta)}{\lambda_{1,b}}\right)\frac{1}{p}\,\|u\|^p - \lambda\frac{C}{\sigma+1}\,\|u\|^{\sigma+1} \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma em $W_0^{1,p}$.
Como $p < \sigma+1$ e o coeficiente em parênteses da última desigualdade é positivo, concluímos que o funcional J_λ é estritamente positivo em esferas suficientemente pequenas na norma $W_0^{1,p}$. Em outras palavras, a origem é um mínimo local estrito para J_λ. Aplicando então o Teorema do Passo de Montanha a J_λ, obtemos uma solução positiva u.

Para terminar, suponhamos que $\lambda \leq \lambda_{1,b}$ e $0 < u(x) \leq a(x)$ para todo $x \in \Omega$. Logo, pela hipótese (H_5), teríamos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p = \lambda\int_\Omega \widetilde{h}(x,u)u < \lambda\int_\Omega b(x)|u|^p \leq \frac{\lambda}{\lambda_{1,b}}\int_\Omega |\nabla u|^p \leq \int_\Omega |\nabla u|^p\,,$$

que é impossível. Isso mostra que existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) > a(x_0)$. □

Enfim, a solução para $\lambda = \lambda_{1,b}$ será obtida como limite das soluções de tipo passo de montanha obtidas no teorema 3.3.

Demonstração do teorema 3.4. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de soluções do problema (P_{λ_n}) como no teorema 3.3, onde $\lambda_n \to \lambda_{1,b}^-$. Afirmamos que $\{J_{\lambda_n}(u_n)\}$ é uma sequência limitada. De fato, podemos supor $\lambda_n \geq \lambda_0 > 0$, disso obtemos (como as u_n são soluções de tipo passo de montanha)

$$0 \leq J_{\lambda_n}(u_n) \leq \sup_{t\geq 0} J_{\lambda_n}(t\phi_{1,b}) \leq \sup_{t\geq 0} J_{\lambda_0}(t\phi_{1,b}) \leq C\,,$$

como afirmamos. Em consequência, $|J_{\lambda_n}(u_n)| \leq C$ e $J'_{\lambda_n}(u_n) = 0$.

Como $\{\lambda_n\}$ é limitada, argumentando como na prova da condição (PS), concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De [Ana87a] e [Lie88] segue que $\{u_n\}$ é também limitada em $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Logo, a menos de subsequência, $u_n \to u$ na norma $\mathcal{C}^1$ em $\overline{\Omega}$ e u é uma solução não negativa do problema $(P_{\lambda_{1,b}})$. Enfim, pelo teorema 3.3 e a hipótese (H_5), temos $\|u_n\|_\infty \geq a_0$, implicando que também $\|u\|_\infty \geq a_0$. Logo u é uma solução não trivial. □

3.3 A segunda solução

Nesta seção, para $\lambda > \lambda_{1,b}$, mostraremos a existência de uma segunda solução. Usando técnicas variacionais, mostraremos primeiro que a solução do teorema 3.2 é um mínimo de um certo funcional, em seguida usaremos este fato para obter a segunda solução a partir da primeira. Um ponto chave para obter esta segunda solução será mostrar que a primeira permanece estritamente abaixo de $a(x)$. Esta situação ocorre em cada um dos casos de (a) até (d) apresentados na seção 3.1, os quais serão considerados separadamente nos próximos quatro lemas.

Lema 3.14. *Assuma que as hipóteses do teorema 3.2 e a hipótese (M_2) estejam satisfeitas. No caso (a), seja u uma solução do problema (P_λ) satisfazendo $0 < u \leq a$. Então $u < a$.*

Demonstração. As hipóteses (M_2) e (H_2) implicam que

$$\widetilde{h}(x,t) \leq k(a(x) - t) \text{ para } t \leq a(x). \tag{3.8}$$

Considere $v = a - u$. Então $-\Delta v = -\Delta a + \Delta u \geq \Delta u$, implicando que v satisfaz

$$-\Delta v + \lambda kv \geq -\lambda\widetilde{h}(x, a(x) - v) + \lambda kv, \quad v \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Como (3.8) implica $\lambda\widetilde{h}(x, a - v) \leq \lambda kv$, concluímos que a desigualdade acima se torna

$$-\Delta v + \lambda kv \geq -\lambda kv + \lambda kv = 0\,.$$

Logo, pelo princípio de máximo forte do lema 3.23, temos que $v \equiv 0$ ou $v > 0$ em Ω. Mas $v \equiv 0$ não pode acontecer por causa da condição $v = a(x) \geq a_0$ em $\partial\Omega$. Concluímos que $u < a$. □

Lema 3.15. *Assuma que as hipóteses do teorema 3.2 estejam satisfeitas. No caso (b), seja u uma solução do problema (P_λ) satisfazendo $0 < u \leq a$. Então $u < a$.*

Demonstração. Considere $v = \overline{a} - u$. Logo, para todo $k \in \mathbb{R}$, temos que v satisfaz o problema

$$-\Delta_p v + \lambda kv^{p-1} = -\lambda\widetilde{h}(x, \overline{a} - v) + \lambda kv^{p-1}, \quad v \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Como estamos assumindo $\lambda\widetilde{h}(x, \overline{a} - v) \leq \lambda Cv^{p-1}$, obtemos

$$-\Delta_p v + \lambda kv^{p-1} \geq -\lambda Cv^{p-1} + \lambda kv^{p-1} \geq 0\,,$$

uma vez que k seja escolhido suficientemente grande. Pelo princípio de máximo forte do lema 3.23, procedendo exatamente como no lema anterior, obtemos $v > 0$ em Ω. Concluímos que $u < \overline{a}$. □

Lema 3.16. *Assuma que as hipóteses do teorema 3.2 e a hipótese (M_2) estejam satisfeitas. No caso (c), seja u uma solução do problema (P_λ) satisfazendo $0 < u \leq a$. Então $u < a$.*

Demonstração. Seja $\overline{\lambda} > \lambda$ tal que $A_0^{p-1}k(\overline{\lambda} - \lambda) < \varepsilon < -\Delta_p\, a$, e seja u_a uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u_a + \lambda k\, u_a^{p-1} = \overline{\lambda} k\, a^{p-1} & \text{em} \quad \Omega, \\ u_a = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega\,, \end{cases}$$

onde k é como na hipótese (M_2). Então comparemos as relações

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u + \lambda k\, u^{p-1} & = \lambda \widetilde{h}(x,u) + \lambda k\, u^{p-1}\,, \\ -\Delta_p\, u_a + \lambda k\, u_a^{p-1} & = \overline{\lambda} k\, a^{p-1}\,, \\ -\Delta_p\, a + \lambda k\, a^{p-1} & > \varepsilon + \lambda k\, a^{p-1} \geq \overline{\lambda} k\, a^{p-1}\,. \end{cases} \tag{3.9}$$

Como $u_a \leq a$ em $\partial\Omega$, concluímos que $u_a \leq a$ em Ω pela parte (a) do lema 3.24. Por outro lado, como

$$\lambda \widetilde{h}(x,u) + \lambda k\, u^{p-1} < \overline{\lambda} \widetilde{h}(x,u) + \overline{\lambda} k\, u^{p-1} \leq \overline{\lambda} \widetilde{h}(x,a) + \overline{\lambda} k\, a^{p-1} = \overline{\lambda} k\, a^{p-1}\,,$$

e todas estas funções são contínuas, deduzimos que $u < u_a$ em Ω pela parte (b) do lema 3.24. Concluímos que $u < a$ em Ω. □

Lema 3.17. *Assuma que as hipóteses do teorema 3.2 estejam satisfeitas. No caso (d), seja u uma solução do problema (P_λ) satisfazendo $0 < u \leq a$. Então $u < a$.*

Demonstração. Observe-se que se as hipóteses (M_2) e (H_3) estão satisfeitas, então $\widetilde{h}(x,u) + \overline{k}u$ é uma função crescente em $[0, A_0]$ para algum $\overline{k}$ apropriado. Comparemos as relações

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u + \lambda \overline{k}\, u & = \lambda \widetilde{h}(x,u) + \lambda \overline{k}\, u\,, \\ -\Delta_p\, a + \lambda \overline{k}\, a & \geq \lambda \overline{k}\, a\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Observe-se que estamos nas condições do lema 3.25 pois $\lambda \widetilde{h}(x,u) + \lambda \overline{k}\, u \leq \lambda \overline{k}\, a$ e $u \leq a$: suponha-se que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = a(x_0)$, então pelo lema 3.25 (onde neste caso $Z = \emptyset$), teríamos que $u \equiv a$ em Ω, o que nos leva a uma contradição. Concluímos mais uma vez que $u < a$ em Ω. □

Estamos agora na posição de mostrar a existência de uma segunda solução para o problema (P_λ).

Demonstração do teorema 3.5. A prova será variacional e segue as linhas de [DFGU09]. Escreveremos $u << v$ quando $u < v$ em Ω e $\frac{\partial u}{\partial n} > \frac{\partial v}{\partial n}$ em $\partial\Omega$, onde n é a normal externa a $\partial\Omega$.

Seja $\lambda > \lambda_{1,b}$. Como na prova do teorema 3.2, existe algum $\varepsilon_\lambda > 0$ tal que $\varepsilon_\lambda \phi_{1,b} < a$, sendo elas respectivamente uma subsolução e uma supersolução. Aplicando [DFGU09, Proposition 3.1], obtemos uma solução u_1 que minimiza J_λ em $X = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varepsilon_\lambda \phi_{1,b} \leq u \leq a\}$. Afirmamos que

$$\varepsilon_\lambda \phi_{1,b} << u_1 < a\,. \tag{3.11}$$

De fato, a segunda desigualdade é consequência dos lemas 3.14–3.17, quanto à primeira, observe-se que (aqui k é o que vem da hipótese (M_2))

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u + \lambda k\, u^{p-1} & = \lambda\widetilde{h}(x,u) + \lambda k\, u^{p-1}, \\ -\Delta_p\, (\varepsilon_\lambda \phi_{1,b}) + \lambda k\, (\varepsilon_\lambda \phi_{1,b})^{p-1} & = \lambda_{1,b} b(x)(\varepsilon_\lambda \phi_{1,b})^{p-1} + \lambda k\, (\varepsilon_\lambda \phi_{1,b})^{p-1}\,. \end{cases} \tag{3.12}$$

Como $u \geq \varepsilon_\lambda \phi_{1,b}$, concluímos $\lambda\widetilde{h}(x,u) + \lambda k\, u^{p-1} \geq \lambda\widetilde{h}(x, \varepsilon_\lambda \phi_{1,b}) + \lambda k\, (\varepsilon_\lambda \phi_{1,b})^{p-1}$ pela hipótese (M_2). A desigualdade (3.5) implica então que vale uma desigualdade estrita entre as expressões (contínuas) nos lados direitos de (3.12). Logo, pela parte (b) do lema 3.24, $\varepsilon_\lambda \phi_{1,b} << u_1$, como afirmado.

De (3.11) segue que X contém uma vizinhança em $\mathcal{C}^1_0(\overline{\Omega})$ de u_1 e consequentemente u_1 é um mínimo local de J_λ na topologia $\mathcal{C}^1_0(\overline{\Omega})$. Aplicando os resultados em [GAPAM00] (veja-se também [BIU08]), obtemos que u_1 é também um mínimo local de J_λ em $W^{1,p}_0(\Omega)$.

Construiremos agora uma segunda solução do problema (P_λ) na forma $u_1 + w$, onde w é uma solução não trivial do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p\, (u_1 + w) = \lambda\widetilde{h}(x, u_1 + w^+) & \text{em } \Omega\,, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Observe-se que se $w \in W^{1,p}_0(\Omega)$ resolve o problema (3.13), então $w \geq 0$. De fato, segue de (H_4) e da teoria da regularidade que $w \in L^\infty(\Omega)$. Pela hipótese (M_2), temos

$$\begin{aligned} -\Delta_p\, u_1 + k u_1^{p-1} &= \lambda\widetilde{h}(x, u_1) + k u_1^{p-1} \\ &\leq \lambda\widetilde{h}(x, u_1 + w^+) + k(u_1 + w^+)^{p-1} \\ &= -\Delta_p\, (u_1 + w) + k(u_1 + w^+)^{p-1}. \end{aligned}$$

Como $(k(u_1 + w^+)^{p-1} - k u_1^{p-1}) w^- \equiv 0$, temos (aqui $w^- = \max\{0, -w\}$)

$$\int_\Omega [|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla (u_1 + w)|^{p-2} \nabla (u_1 + w)] \nabla w^- \leq 0\,.$$

Lembremos que, para $a, b \in \mathbb{R}^N$, tem-se $(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)\cdot(a-b) \geq 0$ (a igualdade vale se e só se $a = b$). Decompondo a integral acima em uma integral em $\{w > 0\}$ e uma em $\{w \leq 0\}$, vemos que $w^- \equiv 0$, isto é $w \geq 0$. Segue que se w for uma solução não trivial do problema (3.13), então $u_2 = u_1 + w$ será uma segunda solução positiva do problema (P_λ) satisfazendo $u_2 \geq u_1$.

Provaremos a seguir a existência de uma solução não trivial do problema (3.13). Associado a este problema temos o funcional

$$K_\lambda(w) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla (u_1 + w)|^p - \lambda \int_\Omega \mathcal{H}(x, w) \tag{3.14}$$

onde $\mathcal{H}(x,w) = \widetilde{H}(x, u_1 + w^+) - \widetilde{H}(x,u_1) - \widetilde{h}(x,u_1)w^-$. Aplicaremos o Teorema do Passo de Montanha para obter um ponto crítico não trivial de K_λ.

Primeiro, temos que a hipótese (H_4) implica tanto numa desigualdade análoga à (3.7) quanto num crescimento subcrítico para a não-linearidade. Segue então que o funcional K_λ satisfaz a condição (PS) (veja lema 3.13).

A seguir mostramos que 0 é um mínimo local para K_λ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, como u_1 é um mínimo local para J_λ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para $||w^+||$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} K_\lambda(w) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u_1+w)|^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u_1+w^+)|^p + J_\lambda(u_1+w^+) + \lambda\int_\Omega \widetilde{H}(x,u_1) + \\ &\quad +\lambda\int_\Omega \widetilde{h}(x,u_1)w^- \qquad (3.15) \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u_1+w)|^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u_1+w^+)|^p + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_1|^p + \lambda\int_\Omega \widetilde{h}(x,u_1)w^-. \end{aligned}$$

Usaremos que quando $p \geq 2$, para alguma constante positiva $c(p)$ e todos $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$, tem-se

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p \geq p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle + c(p)|\xi_2-\xi_1|^p/(2^p-1) \qquad (3.16)$$

e que quando $p < 2$, tem-se uma relação parecida onde o último termo de (3.16) é substituído por $c(p)|\xi_1 - \xi_2|^p/(|\xi_2| + |\xi_1|)^{2-p}$ (veja-se [Lin90], [Per98]).

Quando $p \geq 2$, usando (3.16), segue de (3.15) e do fato que u_1 satisfaz o problema (P_λ), que

$$\begin{aligned} K_\lambda(w) &\geq \int_\Omega |\nabla(u_1+w^+)|^{p-2}\nabla(u_1+w^+)\nabla(-w^-) + \lambda\int_\Omega \widetilde{h}(x,u_1)w^- + \\ &\quad +\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_1|^p + c(p)\int_\Omega |\nabla w^-|^p/p(2^p-1) \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_1|^p + c(p)\int_\Omega |\nabla w^-|^p/p(2^p-1) \geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_1|^p = K_\lambda(0) \end{aligned}$$

isto é, 0 é mínimo local para K_λ. De maneira análoga prova-se que 0 é mínimo local para K_λ quando $p < 2$.

Completando a prova, ou K_λ admite outro mínimo local perto de 0 (neste caso a prova estaria terminada), ou (usando [dF89, Theorem 5.10]) para todo $r > 0$ suficientemente pequeno, teríamos

$$K_\lambda(0) < \inf\{K_\lambda(w) : w \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } ||w|| = r\}. \qquad (3.17)$$

Neste caso, sendo que da condição de superlinearidade dada na hipótese (H_4) segue de novo que $K_\lambda(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ para algum $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos aplicar o Teorema do Passo de Montanha, e obter um ponto crítico não trivial w de K_λ.

Apenas falta mostrar que $u_2(x_0) > a(x_0)$ em algum ponto $x_0 \in \Omega$. Observe-se antes de tudo que qualquer solução positiva u do problema (P_λ) satisfaz

$$J_\lambda(u) = \lambda\int_\Omega \left[\frac{1}{p}\, u\widetilde{h}(x,u) - \widetilde{H}(x,u)\right].$$

Suponha-se por contradição que $u_2 \leq a$: pelos lemas 3.14–3.17, isso implica $u_2 < a$. Agora, como $u_1 \leq u_2$ mas são distintos, a hipótese (H_6) implica que $J_\lambda(u_1) > J_\lambda(u_2)$, o que é impossível em vista do fato que u_1 é um mínimo de J_λ em X. Isso completa a demonstração do teorema 3.5. $\square$

3.4 Estimativas a priori para o problema (P_λ)

A prova do teorema 3.9 precisará de estimativas a priori para as possíveis soluções do problema (P_λ). Tais estimativas serão obtidas no lema a seguir; observe-se que a partir deste ponto assumiremos a hipótese (H_4^*) no lugar da (H_4).

Lema 3.18. *Suponha-se que as hipóteses (H_1), (H_3) e (H_4^*) estejam satisfeitas.*

(1) Dado $\widetilde{\lambda} > 0$, existe uma constante $D_{\widetilde{\lambda}}$ tal que se $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ é uma solução positiva do problema (P_λ) com $\lambda > \widetilde{\lambda}$, então

$$\|u\|_\infty \leq D_{\widetilde{\lambda}}\,.$$

(2) Fixado $\lambda > 0$, existem constantes $C_\lambda > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ tais que a seguinte estimativa também vale:

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\lambda\,. \tag{3.18}$$

Demonstração. Suponha-se por contradição que exista uma sequência $\{(u_n, \lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\lambda_n > \widetilde{\lambda}$ e u_n é uma solução positiva de classe $\mathcal{C}^1$ do problema (P_{λ_n}), tal que $S_n = \max_{\overline{\Omega}} u_n = u_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, onde $\{x_n\} \subset \Omega$ é uma sequência de pontos onde o máximo é atingido. Seja $\delta_n = \operatorname{dist}(x_n, \partial\Omega)$, e defina $w_n(y) = S_n^{-1} u_n(A_n y + x_n)$, onde $A_n > 0$ será escolhido mais tarde. Então w_n satisfaz

$$-\Delta_p\, w_n(y) = \lambda_n \frac{A_n^p}{S_n^{p-1}} \widetilde{h}(A_n y + x_n, S_n w_n(y)) \ \text{ em } \ B(0, \delta_n A_n^{-1})$$

com $w_n(0) = \max w_n = 1$. Pela hipótese (H_4^*) e a continuidade de $\widetilde{h}$, temos

$$2\rho s^\sigma + C \geq \widetilde{h}(x,s) \geq \frac{\rho}{2} s^\sigma - C$$

para $s > 0$ e uma oportuna constante C. Por simples cálculos obtemos

$$\lambda_n\, \overline{\Upsilon}\,(A_n, S_n, w_n(y)) \geq -\Delta_p\, w_n(y) \geq \lambda_n\, \underline{\Upsilon}\,(A_n, S_n, w_n(y)) \tag{3.19}$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{\Upsilon}\,(A_n, S_n, w_n) &= \frac{A_n^p}{S_n^{p-1-\sigma}} 2\rho w_n^\sigma + C \frac{A_n^p}{S_n^{p-1}}\,, \\ \underline{\Upsilon}\,(A_n, S_n, w_n) &= \frac{A_n^p}{S_n^{p-1-\sigma}} \frac{\rho}{2} w_n^\sigma - C \frac{A_n^p}{S_n^{p-1}}\,. \end{aligned}$$

Agora escolhemos A_n tal que $\lambda_n \frac{\varrho}{2} A_n^p = S_n^{p-1-\sigma}$. Como $S_n \to \infty$ e $\lambda_n > \widetilde{\lambda}$, concluímos que $A_n \to 0$ e $\lambda_n \frac{A_n^p}{S_n^{p-1}} \to 0$. Logo, para n grande, a desigualdade (3.19) se torna $|\Delta_p\, w_n(y)| \leq 4w_n^\sigma + 1 \leq C$. Esta estimativa nos permitirá usar os teoremas de regularidade para o operador $p-$Laplaciano dados em [Tol84].

Se Ω_n é o domínio re-escalado, então (passando a uma subsequência) temos que ou $\delta_n/A_n \to +\infty$ (e então Ω_n tende a $\mathbb{R}^N$) ou $\delta_n/A_n \to const$ (e então Ω_n tende a um semiespaço). Agora, fixe-se um conjunto aberto $\widetilde{\Omega}$ tal que $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega_n$ para n suficientemente grande. Como w_n é uniformemente limitado em L^∞ por construção, usando [Tol84, Theorem 1], obtemos que para todo compacto $\Omega' \subseteq \widetilde{\Omega}$, existem constantes $\alpha \in (0,1)$ e $C > 0$ tais que $\|w_n\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C$. Usando um procedimento diagonal concluímos que, passando de novo a uma subsequência, $w_n \to w$ na norma $\mathcal{C}^1$ em conjuntos compactos, onde w é uma função $\mathcal{C}^1$ definida em $\mathbb{R}^N$ ou num semiespaço. Finalmente, tomando limite na desigualdade (3.19), obtemos que w satisfaz, em sentido fraco, as relações

$$\begin{cases} 4w^\sigma \geq -\Delta_p\, w \geq w^\sigma, \\ w > 0, \\ w(0) = \max w = 1\,; \end{cases} \tag{3.20}$$

isso contradiz os teoremas de tipo Liouville nos lemas 3.26 (no caso de $\mathbb{R}^N$) e 3.27 (no caso do semiespaço).

Esta contradição prova que $\|u\|_\infty \leq C$ para qualquer solução do problema (P_λ) com $\lambda > \widetilde{\lambda}$, isto é, a afirmação (1) do Lema.

A afirmação (2) segue agora dos teoremas de regularidade em [Lie88]. □

3.5 Um teorema de tipo Liouville

Nesta seção provaremos o teorema de tipo Liouville 3.11, combinando uma desigualdade de tipo Harnack com a proposição 3.19 abaixo.

Teoremas de tipo Liouville em $\mathbb{R}^N$ ou num semiespaço são muito importantes para estudar a geometria das soluções ou para obter estimativas a priori, usando um argumento onde é obtido um problema limite para o qual não existem soluções, conforme fizemos no lema 3.18 acima e faremos novamente na demonstração do teorema 3.9.

Para a equação $-\Delta_p\, u = f(u)$, existem em literatura diferentes resultados de não existência de soluções positivas não constantes. Quando a função f é estritamente positiva em $(0,\infty)$, vejam-se por exemplo [MP99] para $\mathbb{R}^N$ e [Lor07] para o semiespaço; para uma ampla exposição sobre este tipo de resultados veja-se também [SZ02]. Para o caso de não-linearidades de tipo logístico, isto é, tais que $f(0) = f(a) = 0$, $f(u) > 0$ em $(0,a)$, e $f(u) < 0$ em (a,∞), vejam-se [DD03, DG02]. Infelizmente, os resultados citados não funcionam se $f \geq 0$ mas possui zeros em $(0,\infty)$, como acontece no problema limite que surgirá na prova do teorema 3.9.

Para obter o nosso resultado envolvendo não-linearidades com zeros, primeiramente estenderemos ao caso do $p-$Laplaciano um resultado sobre o Laplaciano devido a [Red86].

Proposição 3.19. *Seja w uma solução fraca de classe $\mathcal{C}^1$ da equação*

$$-\Delta_p w = f(w) \quad em \quad \mathbb{R}^N ,$$

onde f é uma função contínua e não negativa. Então temos que $\inf_{\mathbb{R}^N} w = -\infty$, *ou* $\inf_{\mathbb{R}^N} w$ *é um zero de f.*

Demonstração. A primeira parte da prova segue as mesmas linhas da prova em [Red86, Theorem 1]: suponha-se por contradição que $\inf_{\mathbb{R}^N} w = M \in \mathbb{R}$ com $f(M) > 0$. Sejam

$$U(r) = \inf_{|x|=r} w(x) \qquad \text{e} \qquad M_0(r) = \inf_{|x|\leq r} w(x)\,,$$

assim temos necessariamente que $M_0(r) \to M^+$ quando $r \to \infty$.
Pela continuidade de f, existe um r_0 suficientemente grande e um $\alpha > 0$, tais que $f(w) \geq \alpha > 0$ sempre que $M \leq w \leq M_0(r_0)$.

Afirmamos que $U(r)$ é estritamente decrescente para $r > r_0$. De fato, se não fosse, existiriam r_1 e r_2 satisfazendo $r_0 < r_1 < r_2$ e tais que $U(r_1) \leq U(r_2)$, isto é, w deveria ter um mínimo em $\{x : \ |x| < r_2\}$. Como neste caso w deveria satisfazer

$$\begin{cases} -\Delta_p w \geq 0 & \text{em } B_{r_2}\,, \\ w \geq U(r_2) & \text{em } \partial B_{r_2}, \end{cases}$$

resulta do lema 3.23 que $w > U(r_2)$ em B_{r_2} ou $w \equiv U(r_2)$ em B_{r_2}: a primeira possibilidade contradiz $U(r_1) \leq U(r_2)$, por outro lado, pela definição de M_0, temos que se $w \equiv U(r_2)$ em B_{r_2} então $M_0(r_0) = M_0(r_2) = U(r_2)$, e por consequência $-\Delta_p w \geq \alpha > 0$ em B_{r_2}, o que é impossível para uma função constante: isso prova a afirmação que $U(r)$ é estritamente decrescente para $r > r_0$.

Seja agora

$$v(x) = \left(\frac{p-1}{p}\right) N^{\frac{1}{1-p}} |x|^{\frac{p}{p-1}}\,,$$

isto é, uma solução radial de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = -1 \;\; \text{em } \mathbb{R}^N, \\ v \geq 0\,, \;\; v(0) = 0. \end{cases}$$

Considere-se $W = w + \delta v$ com $\delta > 0$: como $\lim_{|x|\longrightarrow\infty} v(x) = +\infty$, W possui um mínimo. Como $U(r)$ é estritamente decrescente para $r > r_0$, podemos escolher δ suficientemente pequeno para que exista um mínimo em algum ponto x_0 com $|x_0| > r_0$ e $w(x_0) < M_0(r_0)$. Logo,

$f(w(x_0)) \geq \alpha > 0$. Escolha-se $\delta^{p-1} < \alpha/2$. Somando uma constante, podemos assumir que $W(x_0) = 0$, além disso, $\nabla w(x_0) + \delta \nabla v(x_0) = 0$.

Afirmamos que de fato $\nabla w(x_0) = \nabla v(x_0) = 0$. Se não for assim, ambos os gradientes seriam diferentes de 0 , e poderíamos argumentar como em [AR06, p. 853] para obter uma vizinhança B de x_0 na qual $|\nabla w| > 0$, $|\nabla v| > 0$, $\nabla w \cdot \nabla v < 0$, e $w + \delta v$ satisfaz

$$T(w + \delta v) = f(w) - \delta^{p-1} \geq \alpha/2\,,$$

onde T é um operador linear e uniformemente elíptico da forma $Tu = -\,div\,[A(x)\nabla u]$ cuja matriz de coeficientes $A(x)$ depende de ∇w e ∇v (compare-se também com [GV89]): a elipticidade uniforme é consequência de termos assumido que ambos os gradientes diferem do vetor nulo em x_0 . Como $W|_{\partial B} \geq 0$, concluímos $W|_B > 0$, pelo princípio de máximo forte aplicado ao operador T em B . Mas isso é impossível pois $W(x_0) = 0$. Logo $\nabla w(x_0) = \nabla v(x_0) = 0$, como afiramos.

Por outro lado, isso também não pode ser pois $\nabla v = 0$ apenas na origem. Isso completa a demonstração. □

Demonstraremos agora o nosso teorema de tipo Liouville.

Demonstração do teorema 3.11. Temos dois casos:

Caso $N \leq p$. Como w é $p-$super-harmônica, concluímos que w é constante pelo ponto (a) do lema 3.26. A conclusão segue imediatamente.

Caso $N > p$. Usaremos a proposição 3.19 e uma estimativa de tipo Harnack (veja [SZ02]). Primeiramente observe-se que se $w \geq \overline{a}$ então a mudança de variáveis $v = w - \overline{a}$ transforma o problema (3.2) no problema

$$\begin{cases} -\Delta_p\, v = f(v + \overline{a}), \\ v \geq 0, \end{cases} \qquad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{3.21}$$

Pela hipótese (f_2), temos $f(v + \overline{a}) \geq \gamma v^\sigma$. Segue então do ponto (b) do lema 3.26 que $v \equiv 0$, ou em outras palavras $w \equiv \overline{a}$.

Consideremos então o caso em que $\inf_{\mathbb{R}^N} w < \overline{a}$: assim a proposição 3.19 implica que $\inf_{\mathbb{R}^N} w = 0$.
Agora observe-se que existe um $\delta > 0$ tal que, para $u \geq 0$, temos

$$\delta u^\sigma - u^{p-1} \leq f(u) \leq \Lambda\,(u^\sigma + 1)\,. \tag{3.22}$$

De fato, para $u < \overline{a}$, temos $f(u) + u^{p-1} \geq u^{p-1}$, e para $u \geq \overline{a}$, segue da hipótese (f_2) que $f(u) + u^{p-1} \geq \gamma(u - \overline{a})^\sigma + \overline{a}^{\,p-1}$. Então a primeira desigualdade em (3.22) está satisfeita se δ é escolhido suficientemente pequeno, enquanto a última desigualdade é a hipótese (f_4). Como as desigualdades (3.22) estão satisfeitas para w, o resultado de tipo Harnack em [SZ02, Theorem V] implica que, para todo $R > 0$, existe uma constante $c(R)$ tal que $\sup_{B_R} w \le c(R) \inf_{B_R} w$, para toda bola B_R de raio R.

Pela hipótese (f_3), podemos escolher $\varepsilon \in (0, \overline{a})$ tal que $f(t)/(t^{p-1}) > \overline{b}/2$ para $t \in (0, \varepsilon)$. Seja então $R > 0$ tal que o primeiro autovalor do $p-$Laplaciano em B_R satisfaça $\lambda_1(B_R) < \overline{b}/4\cdot$ Como a proposição 3.19 nos garante que $\inf_{\mathbb{R}^N} w = 0$, podemos encontrar um ponto x_R tal que $B_R(x_R)$ (a bola de centro x_R) satisfaça $\inf_{B_R(x_R)} w < \dfrac{\varepsilon}{c(R)}$. Logo, pela desigualdade de Harnack acima, $w < \varepsilon < \overline{a}$ em $B_R(x_R)$. Seja agora Φ_1 a primeira autofunção do $p-$Laplaciano em $B_R(x_R)$.

Suponha-se que $\inf_{B_R(x_R)} w > 0$: isso implica que $\frac{\Phi_1^p}{w^{p-1}}$ está em $W^{1,p}(B_R(x_R))$. Pela identidade de Picone (veja-se o lema 3.28), temos

$$\int_{B_R(x_R)} \nabla \left(\frac{\Phi_1^p}{w^{p-1}} \right) |\nabla w|^{p-2} \nabla w \le \int_{B_R(x_R)} |\nabla \Phi_1|^p = \lambda_1(B_R(x_R)) \int_{B_R(x_R)} \Phi_1^p \,.$$

Por outro lado, por (3.2) e por como foi escolhido ε,

$$\int_{B_R(x_R)} \nabla \left(\frac{\Phi_1^p}{w^{p-1}} \right) |\nabla w|^{p-2} \nabla w = \int_{B_R(x_R)} f(w) \frac{\Phi_1^p}{w^{p-1}} \ge \int_{B_R(x_R)} \frac{\overline{b}}{2} \Phi_1^p \,,$$

o que é impossível sendo que $\lambda_1(B_R(x_R)) < \overline{b}/4$. Logo $\inf_{B_R(x_R)} w = 0$ e pela desigualdade de Harnack $w \equiv 0$ em $B_R(x_R)$. O lema 3.23 agora implica que $w \equiv 0$ em qualquer bola maior, e logo em todo R^N. Isso termina a demonstração. □

3.6 Comportamento assintótico das soluções

Nesta seção, estudaremos o comportamento assintótico das soluções com respeito ao parâmetro λ, demonstrando os teoremas 3.7–3.9.

Demonstração do teorema 3.7. ($\lambda \to 0$). Suponha-se por contradição que exista $C > 0$ tal que $u_\lambda \le C$, e seja D tal que $\widetilde{h}(x,u)/u^{p-1} \le D\, b_0$ para $0 < u \le C$. Se $\lambda D < \lambda_{1,b}$, então

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p = \lambda \int_\Omega \widetilde{h}(x, u_\lambda) u_\lambda \le \lambda D\, b_0 \int_\Omega u_\lambda^p < \lambda_{1,b} \int_\Omega b(x) u_\lambda^p \,,$$

isto contradiz a desigualdade (3.1). □

Demonstração do teorema 3.8. ($\lambda \to \lambda_{1,b}$). Considere-se uma sequência $\{(u_n, \lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sendo u_n uma solução de classe $\mathcal{C}^1$ de (P_{λ_n}), $u_n \le a$ e $\lambda_n \to \lambda_{1,b}^+$. Como $\|u_{\lambda_n}\|_\infty$ é limitado por A_0, procedemos como na prova do lema 3.18 para concluir que, passando a uma subsequência, $u_{\lambda_n} \to u$ na norma $\mathcal{C}^1$ em $\overline{\Omega}$ e assim u é uma solução não-negativa do problema $(P_{\lambda_{1,b}})$, satisfazendo

$u \leq a$.
Por outro lado, se $u \not\equiv 0$, pela hipótese (H_5) e por (3.1), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p = \lambda_{1,b} \int_\Omega \widetilde{h}(x,u)u < \lambda_{1,b} \int_\Omega b(x)u^p \leq \int_\Omega |\nabla u|^p \,,$$

que é uma contradição. □

Demonstração do teorema 3.9. ($\lambda \to \infty$). Considere-se uma sequência $\{(u_n, \lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sendo u_n uma solução de classe $\mathcal{C}^1$ de (P_{λ_n}), $\varepsilon\phi_{1,b} \leq u_n$, e $\lambda_n \to +\infty$. Pelo ponto (1) do lema 3.18 temos que $\|u_n\|_\infty \leq C$.
Fixe-se um ponto $x_0 \in \Omega$ e seja $\delta_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Com um argumento parecido ao usado na prova do lema 3.18, definamos agora $w_n(y) = u_n(A_n y + x_0)$, de maneira que

$$-\Delta_p\, w_n(y) = \lambda_n A_n^p \widetilde{h}(A_n y + x_0, w_n(y)) \quad \text{em} \quad B(0, \delta_0 A_n^{-1})$$

e $w_n(0) = u_n(x_0)$.

Escolhamos $A_n \to 0$ tal que $\lambda_n A_n^p = 1$ e, como na prova do lema 3.18, obtemos (sendo w_n limitada em L^∞ pela limitação a priori) também uma limitação uniforme na norma $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ nos conjuntos compactos, para algum $\alpha \in (0,1)$. Logo, passando a uma subsequência, $w_n \to w$ na norma $\mathcal{C}^1$ em conjuntos compactos, onde agora w é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ definida em $\mathbb{R}^N$, pois $\delta_0/A_n \to \infty$.
Como $\widetilde{h}$ é contínua, w é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p\, w = \widetilde{h}(x_0, w) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ w \geq 0\,. \end{cases} \tag{3.23}$$

Pelas hipóteses $(H_1 \ldots\ H_4)$ e (H_7), $\widetilde{h}(x_0, \cdot)$ satisfaz as hipóteses do teorema de tipo Liouville 3.11, assim podemos concluir que $w \equiv 0$ ou $w \equiv a(x_0)$.

Por outro lado, w não pode ser identicamente zero por causa da estimativa $\varepsilon\phi_{1,b} \leq u_n$. Concluímos que (passando de novo a subsequência) $u_n(x_0) = w_n(0) \to a(x_0)$. Como o mesmo argumento vale para qualquer subsequência, deduzimos que de fato $u_n(x_0) \to a(x_0)$. Como $x_0 \in \Omega$ é arbitrário, isso implica que $u_n \to a$ pontualmente em Ω quando $\lambda \to +\infty$. □

Observação 3.20. *Observe-se que as soluções obtidas no teorema 3.5 satisfazem a estimativa $\varepsilon_\lambda\phi_{1,b} \leq u_\lambda$ onde, como observados na observação 3.12, o valor de ε_λ pode ser escolhido de maneira independente de λ, se este último está acima e destacado de $\lambda_{1,b}$. Logo o teorema 3.5 nos fornece de fato soluções que satisfazem os pedidos do teorema 3.9.*

Observação 3.21. *Observe-se que a convergência pontual é um resultado mais fraco com respeito ao obtido em [Tak07b], onde a convergência era uniforme em subconjuntos compactos de*

Ω; por outro lado, no caso considerado por Takeuchi, a não-linearidade era negativa depois do zero, de modo que seu resultado se aplica apenas àquelas soluções do nosso problema que não superam $a(x)$.

Observação 3.22. *No caso particular $a(x) \equiv 1$, o teorema 3.9 implica que se $u_\lambda \leq 1$, então $\|u_\lambda\|_\infty \to 1$, mas não é suficiente para afirmar que $\|u_\lambda\|_\infty \to 1$ no caso general, sendo a convergência apenas pontual.*

3.7 Apêndice

Nesta apêndice incluímos os resultados conhecidos mais importantes que foram usados nas seções anteriores.

3.7.1 Princípios de máximo para o $p-$Laplaciano

Sobre o princípio de máximo para o operador $p-$Laplaciano, existe uma ampla literatura; de fato, precisamos utilizar vários resultados diferentes que listamos a seguir.

Lema 3.23 (Theorem 5 em [Váz84], veja-se também Theorem 1.1 em [PS04]).
Suponha-se que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ satisfaça, em sentido fraco,

$$-\Delta_p u + f(u) \geq 0, \qquad u \geq 0 \quad em \;\; \Omega\,,$$

onde Ω é um aberto conexo em $\mathbb{R}^N$ e f é contínua. Suponha-se também que, para algum $\mu > 0$, valha $f(s) \equiv 0$ para $s \in [0, \mu)$ ou $f(s) > 0$ para $s \in (0, \mu)$ e $\int_0^\mu [F(s)]^{-1/p} ds = +\infty$. Então $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \Omega$ implica $u \equiv 0$ em Ω.
Em particular, $f(s) = s^q$ satisfaz as hipóteses para $q \geq p - 1$.

Lema 3.24.
Para $\lambda \geq 0$ e $f, g \in L^\infty(\Omega)$, sejam u, v soluções das equações

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = f & em \quad \Omega, \\ -\Delta_p v + \lambda |v|^{p-2} v = g & em \quad \Omega\,, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave. Então:
a) Se $f \leq g$ em Ω e $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω.
b) Se $0 \leq f \prec g$ e $u = v = 0$ em $\partial\Omega$, então $u << v$.
Aqui $u << v$ significa que $u < v$ em Ω e $\frac{\partial u}{\partial n} > \frac{\partial v}{\partial n}$ em $\partial\Omega$, enquanto $f \prec g$ significa que para todo subconjunto compacto $\omega \subset \Omega$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f + \varepsilon < g$ q.t.p. em ω. Em particular, se f, g são contínuas e $f < g$ em Ω, então $f \prec g$.

A afirmação (a) pode ser encontrada no Theorem 2.4 de [AR06] e foi demonstrada em [Tol83]; a afirmação (b) é a Proposition 4.3 de [DFGU09], que corrige e completa o Theorem 2.6 de [AR06].

Lema 3.25 (Theorem 1.4 em [Dam98])**.**
Suponha-se que $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ satisfaçam, em sentido fraco,

$$-\Delta_p u + \Lambda u \leq -\Delta_p v + \Lambda v, \qquad u \leq v \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde Ω é um aberto conexo em $\mathbb{R}^N$ e $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Seja $Z = \{x \in \Omega : \ \nabla u = \nabla v = 0\}$; se $x_0 \in \Omega \setminus Z$ e $u(x_0) = v(x_0)$, então $u \equiv v$ em toda a componente conexa de $\Omega \setminus Z$ que contém x_0. Se $p = 2$ a conclusão vale também com Ω no lugar de $\Omega \setminus Z$.

3.7.2 Teoremas de tipo Liouville

Lema 3.26.
a) (Theorem II em [SZ02]) Se $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz, em sentido fraco,

$$-\Delta_p u \geq 0\,, \qquad u \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

e se $N \leq p$, então u é constante.
b) (Theorem 2.1 em [MP99]) Se $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz, em sentido fraco,

$$-\Delta_p u \geq u^{q-1}\,, \qquad u \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

e se $N > p$, $q \in (1, p_*)$, então $u \equiv 0$.

Lema 3.27 (Theorem 3.1 em [Lor07])**.**
Seja $\mathbb{R}^N_+$ o semiespaço (aberto) em $\mathbb{R}^N$ e $C > 0$; se $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N_+)$ satisfaz, em sentido fraco,

$$Cu^{q-1} \geq -\Delta_p u \geq u^{q-1}, \qquad u \geq 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^N_+$$

e se $q \in (p, p_*)$, então $u \equiv 0$.

3.7.3 Identidade de Picone

A seguir enunciamos uma estimativa que que foi usada numa prova deste trabalho, e que é consequência de uma estimativa de tipo Picone (veja-se [AH98, Sha00]).

Lema 3.28. *Sejam $u, v \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\Omega)$ tais que $u \geq 0$, $v > 0$, e $\dfrac{u}{v} \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega \nabla \left(\frac{u^p}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v = \\ = \int_\Omega p \left(\frac{u}{v} \right)^{p-1} \nabla u |\nabla v|^{p-2} \nabla v - (p-1) \left(\frac{u}{v} \right)^p |\nabla v|^p \leq \int_\Omega |\nabla u|^p . \tag{3.24}$$

Além disso, a igualdade vale se e só se $u = cv$ em Ω para alguma constante $c > 0$.

Capítulo 4

Soluções positivas para uma não-linearidade crítica ou supercrítica com zeros

Neste capítulo descreveremos os resultados do trabalho [ILM10]: procuramos por soluções fracas positivas de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ para o problema

$$(\Pi_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio convexo e limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $N > p > 1$, λ é um parâmetro positivo e f satisfaz $f(0) = f(1) = 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \notin \{0; 1\}$; mostraremos a existência de pelo menos duas soluções positivas para λ grande, sem restrições sobre o crescimento no infinito da não-linearidade.

4.1 Enunciado dos resultados

Consideraremos as seguintes hipóteses sobre f.

(F_1) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função contínua que também é localmente Lipschitz contínua em $(0, \infty)$; $f(0) = f(1) = 0$ e $f(x) > 0$ para $x \notin \{0; 1\}$.

(F_2) $\liminf_{s\to 0^+} \dfrac{f(s)}{s^{p-1}} \geq 1$.

(F_3) Existem $\gamma > 0$ e $\sigma \in (p-1, p_* - 1)$ tais que

$$\lim_{t\to 1} \frac{f(t)}{|t-1|^\sigma} = \gamma\,,$$

onde p_* denota o expoente de Serrin, dado por $p_* = \frac{(N-1)p}{N-p}$.

(F_4) Existem $k > 0$ e $T > 1$ tais que a mapa $t \mapsto f(t) + kt^{p-1}$ é crescente para $t \in [0, T]$.

Nosso resultado é o seguinte.

Teorema 4.1. *Seja Ω um domínio convexo e com fronteira suave. Então, nas hipóteses (F_1 ... F_4), existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (Π_λ) possui pelo menos duas soluções fracas positivas de classe $\mathcal{C}^1$: $u_{1,\lambda}$, $u_{2,\lambda}$, para $\lambda > \lambda^*$.*

Além disso, estas soluções satisfazem $\|u_{1,\lambda}\|_\infty \to 1^-$ e $\|u_{2,\lambda}\|_\infty \to 1^+$, quando $\lambda \to \infty$.

Um simples exemplo de uma função f satisfazendo as quatro hipóteses do teorema acima é $f(u) = u^{p-1}e^u|1-u|^\sigma$ com $\sigma \in (p-1, p_* - 1)$.

4.1.1 Alguns comentários sobre o problema

Se f satisfaz também as hipóteses do capítulo anterior, então os resultados que já obtivemos nos garantem a existência de duas soluções para o problema (Π_λ) se λ for maior que o valor $\lambda_{1,1}$ definido na página 32 e também que ambas as soluções tendem pontualmente a 1 quando $\lambda \to \infty$.

Lembramos que para este resultado de convergência pontual usamos (na prova do teorema 3.9) um argumento de blow–up centrado num ponto arbitrário de Ω e o teorema 3.11 (teorema de tipo Liouville em $\mathbb{R}^N$ para uma função com zeros). Como comentamos na observação 3.10, um resultado mais forte poderia ser obtido centrando o blow-up no ponto de máximo da solução, mas fazendo assim não saberíamos se estes máximos das soluções se mantêm destacados da fronteira de Ω ou não, implicando que o problema limite poderia ser em um semiespaço em vez que no $\mathbb{R}^N$ inteiro, e o teorema 3.11 não considera este caso.

Como agora pretendemos considerar não-linearidades que podem ter crescimento supercrítico, não podemos usar diretamente técnicas variacionais, como fizemos no capítulo anterior. Por esta razão truncaremos a não-linearidade e procuraremos por soluções que estejam abaixo do ponto de truncamento. Para fazer isso precisamos obter uma estimativa para a norma L^∞ das soluções, e então precisamos ter certeza, ao aplicar o argumento de blow-up, que os pontos de máximo se mantenham longe da fronteira de Ω, para que o problema limite esteja definido em todo $\mathbb{R}^N$ e não apenas num semiespaço. Isso será obtido assumindo a convexidade de Ω e usando os resultados em [DS04].

Infelizmente os resultados em [DS04] valem para não-linearidades localmente Lipschitz e estritamente positivas. A primeira condição impõe uma restrição sobre p e N (de fato, a hipótese (F_3) não pode ser satisfeita por uma função Lipschitz se $p < 2$ e N é grande, veja a observação 4.2) enquanto, devido à segunda condição, precisaremos resolver primeiramente um problema auxiliar, no qual somamos uma perturbação que torna a não-linearidade estritamente positiva para $u > 0$. Uma primeira solução para o problema perturbado é obtida via sub e supersoluções, e uma segunda usando grau topológico (veja as proposições 4.6-4.7).

Enfim, a primeira solução do teorema 4.1 será exatamente a mesma do teorema 3.2, isto é, a obtida via sub e supersoluções, enquanto a segunda é obtida como limite das soluções do problema perturbado. Como precisamos distinguir entre as duas soluções, é fundamental saber que uma está abaixo de 1 e a outra não: por esta razão, no lugar do teorema do Passo de Montanha usado no capítulo anterior, a segunda solução para o problema perturbado será obtida usando grau topológico, que tem a vantagem de fornecer a informação adicional que seu máximo é maior que a supersolução disponível.

Concluímos esta introdução com alguns comentários sobre as hipóteses.

Observação 4.2.

- *A hipótese (F_2) é clássica para termos uma subsolução quando λ está acima do primeiro autovalor do operador. Corresponde à hipótese (H_3) do capítulo anterior, mas aqui pedimos apenas uma limitação inferior pois nos ocupamos apenas do caso λ grande.*
  Por outro lado, a função constante 1 é sempre uma supersolução para (Π_λ), mas não o será mais para o problema perturbado: a hipótese (F_3) será usada para obter uma família de supersoluções, em particular uma supersolução estritamente abaixo de 1 e uma estritamente acima: isso nos ajudará a distinguir as duas soluções quando tomaremos limite.

- *A hipótese (F_3) é necessária também para obter a desigualdade (4.2) mais adiante para a não-linearidade truncada, o que é necessário para aplicar o teorema de tipo Liouville 3.11. De fato, esta hipótese reúne a (H_7) do capítulo anterior, que também era usada para aplicar o teorema 3.11, com a condição no caso (b) a página 33, que impede a formação de soluções com flat cores, de fato, se este fenômeno pudesse ocorrer seria difícil separar as duas soluções para obter o resultado de multiplicidade esperado.*

- *A hipótese (F_4) é o análogo da (M_2) do capítulo anterior e também serve para poder aplicar o método de sub e supersoluções e os princípios de comparação para o $p-$Laplaciano. Destacamos porém que no capítulo anterior precisávamos pedir esta hipótese para todo $t \geq 0$ e também impor explicitamente a condição (4.2); aqui estas hipóteses são substituídas pelas condições locais (F_3) e (F_4), sendo que as condições globais (4.2-4.3) poderão ser impostas no momento de truncar a não-linearidade.*

- *Observe-se que o teorema 4.1 é significativo apenas para $p > 4/3$, além disso, se $p \in (4/3, 2)$ temos uma limitação superior para a dimensão N: de fato, a hipótese (F_3) é realizável por uma função Lipschitz apenas se o expoente de Serrin p_* for maior que 2, o que implica, para $p < 2$, que $p < N < p/(2-p)$, e isso não pode ser satisfeito se $p \leq 4/3$.*

4.2 Preliminares

Denotaremos por λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p)$ em Ω e por ϕ_1 a primeira autofunção, que como já vimos pode ser escolhida positiva em Ω.

Pela hipótese (F_3) existem $R > 1$ e $\gamma' > 0$ tais que $f(t) \geq \gamma'|t-1|^\sigma$ para $t \in [1, R]$; sem perda de generalidade podemos supor que $R \leq T$, sendo T como na hipótese (F_4). Então podemos truncar f como segue

$$f_R(t) = \begin{cases} f(t^+), & t \leq R \\ \dfrac{f(R)}{R^\sigma} t^\sigma, & t \geq R\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $t^+ = \max\{0, t\}$. Com esta definição, f_R possui um crescimento no infinito de tipo potência com expoente abaixo do expoente de Serrin e satisfaz as seguintes propriedades:

$$f_R(t) \geq \gamma''|t-1|^\sigma \quad \text{para } t \geq 1 \tag{4.2}$$

se $\gamma'' = \min\left\{\gamma', \dfrac{f(R)}{R^\sigma}\right\} > 0$ e

$$\text{a mapa } t \mapsto f_R(t) + kt^{p-1} \text{ é crescente para } t \in [0, \infty), \tag{4.3}$$

onde k é como na hipótese (F_4).

A propriedade (4.3) nos permitirá usar o método de sub e supersoluções e os resultados de comparação, enquanto (4.2) e o crescimento de f_R, junto com (F_1) e (F_2), implicam que f_R satisfaz as hipóteses do teorema de tipo Liouville 3.11.

Consideraremos então o problema auxiliar

$$(Q_{\lambda,\tau}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f_R(u) + \tau(u^+)^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde τ é um parâmetro não negativo.

Observemos que, exatamente como no capítulo anterior, as soluções não triviais do problema $(Q_{\lambda,\tau})$ são estritamente positivas e, pela hipótese (F_1) e como $\sigma < p_* - 1$, estão em $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0,1)$; além disso, como $f_R \geq 0$, $(Q_{\lambda,\tau})$ não possui soluções positivas quando $\tau > \lambda_1$.

O lema a seguir segue dos resultados em [DS04], e será usado em nossas demonstrações.

Lema 4.3. *Nas hipóteses (F_1), (F_3) e por como foi construída f_R, se Ω é convexo, existe $\delta_\Omega > 0$, que depende apenas de Ω (e não de f, R, τ e λ), com a seguinte propriedade: para toda solução fraca $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ de $(Q_{\lambda,\tau})$ com $\tau > 0$, existe um ponto $x \in \Omega$ tal que $dist(x, \partial\Omega) > \delta_\Omega$ e $u(x) = \|u\|_\infty$.*

Nosso objetivo será obter uma solução para $(Q_{\lambda,0})$ como limite de soluções de $(Q_{\lambda,\tau})$ com $\tau > 0$, de maneira que as conclusões do lema 4.3 serão válidas também para esta solução. Assim será possível mostrar que, para λ grande, esta é também uma solução para (Π_λ).

4.3 Demonstrações

Nosso primeiro passo será obter estimativas a priori para as soluções de $(Q_{\lambda,\tau})$; destacamos que este resultado vale inclusive para $\tau = 0$. O lema a seguir é o análogo do lema 3.18 do capítulo anterior.

Lema 4.4. *Suponha-se que as hipóteses (F_1) e (F_3) estejam satisfeitas e que f_R seja definida como em (4.1).*

(1) Dado $\widetilde{\lambda} > 0$, existe uma constante $D_{\widetilde{\lambda}}$ tal que, se $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca positiva do problema $(Q_{\lambda,\tau})$ com $\lambda > \widetilde{\lambda}$ e $\tau \geq 0$ então

$$\|u\|_\infty \leq D_{\widetilde{\lambda}}\,.$$

(2) Fixado $\lambda > 0$, existem constantes $C_\lambda > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ tais que a seguinte estimativa também vale para todo $\tau \geq 0$:

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\lambda\,. \tag{4.4}$$

Demonstração. Procedendo como na prova do lema 3.18, podemos supor por contradição que exista uma sequência $\{(u_n, \lambda_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sendo $\lambda_n > \widetilde{\lambda}$, $\tau_n \geq 0$ e u_n uma solução positiva de classe $\mathcal{C}^1$ do problema (Q_{λ_n,τ_n}), tal que $S_n := \max_{\overline{\Omega}} u_n = u_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, onde $\{x_n\} \subset \Omega$ é uma sequência de pontos onde o máximo é atingido. Observamos que como por enquanto não estamos supondo $\tau > 0$, esta sequência poderia não estar destacada da fronteira de Ω.

Definindo δ_n e w_n como anteriormente temos que agora w_n satisfaz

$$-\Delta_p\, w_n(y) = \lambda_n \frac{A_n^p}{S_n^{p-1}} f_R(S_n w_n(y)) + \tau_n A_n^p w_n(y) \quad \text{em} \quad B(0, \delta_n A_n^{-1}) \tag{4.5}$$

e $w_n(0) = \max w_n = 1$. Escolhamos $A_n^p = \lambda_n^{-1} S_n^{p-1-\sigma} f(R)^{-1} R^\sigma$: como $S_n \to \infty$, $\lambda_n > \widetilde{\lambda}$ e $\tau_n \leq \lambda_1$ (sendo que não existem soluções positivas de $(Q_{\lambda,\tau})$ para $\tau > \lambda_1$), concluímos que $A_n \to 0$ e $\tau_n A_n^p \to 0$. Dessa maneira, o termo da direita de (4.5) torna-se $\frac{R^\sigma f_R(S_n w_n)}{f(R) S_n^\sigma} + o(1)$ e logo é limitado pela continuidade de f e a definição de f_R.

A partir desse ponto podemos continuar exatamente como na prova do lema 3.18, obtendo que, a menos de subsequência, $w_n \to w$ na norma $\mathcal{C}^1$ em conjuntos compactos, onde w é uma função $\mathcal{C}^1$ definida em $\mathbb{R}^N$ ou num semiespaço.

Tomando limite em (4.5) e usando (4.1) obtemos que w satisfaz (3.20), em sentido fraco, com $-\Delta_p w = w^\sigma$ e de novo isso contradiz os teoremas de tipo Liouville enunciados nos lemas 3.26 e 3.27, mostrando que $\|u\|_\infty \leq C$ para qualquer solução do problema $(Q_{\lambda,\tau})$ com $\lambda > \widetilde{\lambda}$ e $\tau \geq 0$, isto é, a afirmação (1) do lema, e também para qualquer solução com um λ fixado e $\tau \geq 0$.

Neste segundo caso, usando de novo os resultados de regularidade de [Lie88], obtemos a limitação uniforme também para a norma $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, como na afirmação (2). □

Agora procuraremos uma família de supersoluções: para isso, definamos primeiro $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como a solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p e = 1 & \text{em } \Omega, \\ e = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e ponhamos $n := \|e\|_\infty$.

Lema 4.5. *Na hipótese (F_3), para todo $\lambda > 0$ existem $\tau_\lambda^*, \delta_\lambda > 0$ tais que $v_\xi = 1 + \xi + \frac{\delta_\lambda}{4n} e$ é uma supersolução para $(Q_{\lambda,\tau})$ para todo $\xi \in [-\delta_\lambda, \delta_\lambda/2]$ e $\tau \in [0, \tau_\lambda^*)$. Além disso, podemos escolher δ_λ sendo uma função não crescente de λ.*

Demonstração. Fixado $\lambda > 0$, pela hipótese (F_3) temos que

$$\lim_{t \to 1} \frac{\lambda f_R(t)}{|t-1|^{p-1}} = 0$$

e logo existe $\delta > 0$ tal que $\lambda f_R(t) < \left(\frac{|t-1|}{8n}\right)^{p-1} < \left(\frac{\delta}{8n}\right)^{p-1}$ para $|t-1| \leq \delta$. Como esta estimativa continua valendo para valores menores de λ deduzimos que δ pode ser escolhido como uma função não crescente de λ.
Se $\tau^* > 0$ é tal que $\tau u^{p-1} < \left(\frac{\delta}{8n}\right)^{p-1}$ para $\tau \in [0, \tau^*)$, $u \in (0, 1+\delta]$, então

$$\lambda f_R(u) + \tau u^{p-1} < \left(\frac{\delta}{4n}\right)^{p-1} \quad \text{para } \tau \in [0, \tau^*),\ u \in [1-\delta, 1+\delta]\,.$$

Definindo $v_\xi = 1 + \xi + \frac{\delta}{4n} e$, temos que $v_\xi \in [1-\delta, 1+\delta]$ sempre que $\tau \in [0, \tau^*)$, $\xi \in [-\delta, \delta/2]$ e logo

$$-\Delta_p v_\xi = \left(\frac{\delta}{4n}\right)^{p-1} > \lambda f_R(v_\xi) + \tau v_\xi^{p-1}\,,$$

o que mostra que v_ξ é uma supersolução. □

Agora podemos provar a existência de uma primeira solução para $(Q_{\lambda,\tau})$ usando o método das sub e supersoluções: Para fazer isso precisaremos da hipótese (F_4).

Proposição 4.6. *Se as hipóteses $(F_1$ ... $F_4)$ estão satisfeitas, então o problema $(Q_{\lambda,\tau})$ possui uma solução positiva $u_{1,\lambda,\tau} < 1$ para $\lambda > \lambda_1$ e $0 \leq \tau < \tau_\lambda^*$.*

Além disso, vale a seguinte propriedade: dado $\overline{\lambda} > \lambda_1$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\phi_1 \leq u_{1,\lambda,\tau} < 1$ para todo $\lambda > \overline{\lambda}$ e $\tau \in [0, \tau_\lambda^*)$.

Demonstração. Usando (F_2) podemos, como na demonstração do teorema 3.2, encontrar um $\varepsilon > 0$ (pequeno quanto quisermos) tal que $\lambda f_R(t) > \lambda_1 t^{p-1}$ para todo $t \in (0, \max\{\varepsilon\phi_1\})$ e todo $\lambda > \overline{\lambda} > \lambda_1$; logo $\varepsilon\phi_1$ é uma subsolução para o problema $(Q_{\lambda,\tau})$ para todo $\tau \geq 0$ e $\lambda > \overline{\lambda}$ (veja também a observação 3.12).

Para $\tau \in [0, \tau_\lambda^*)$, temos também a supersolução $v_{-\delta_\lambda} < 1$ do lema 4.5; como δ_λ é não crescente em λ, podemos escolher ε tal que $\varepsilon\phi_1 < v_{-\delta_{\lambda}/2}$ para todo $\lambda > \overline{\lambda}$. Logo o método das sub e supersoluções nos fornece uma solução $u_{1,\lambda,\tau}$ com as propriedades enunciadas. □

Agora, trabalharemos com $\tau > 0$ e mostraremos a existência de uma segunda solução: usaremos um argumento de grau topológico, adaptando um resultado obtido, para $p = 2$, por de Figueiredo e Lions em [dFL85].

Proposição 4.7. *Nas mesmas hipóteses da proposição 4.6, se* $\lambda > \lambda_1$ *e* $\tau_0 \in (0, \tau^*_\lambda)$*, então* (Q_{λ,τ_0}) *possui uma segunda solução positiva* u_{2,λ,τ_0}*. Além disso,* $\|u_{2,\lambda,\tau_0}\|_\infty > 1$*.*

Demonstração. Fixemos $\lambda > \lambda_1$ e denotemos por X o espaço de Banach das funções $\mathcal{C}^1$ definidas em $\overline{\Omega}$ que valem 0 em $\partial\Omega$, com a norma usual de $\mathcal{C}^1$. Como no capítulo anterior escreveremos $u << v$ quando $u < v$ em Ω e $\frac{\partial u}{\partial \nu} > \frac{\partial v}{\partial \nu}$ em $\partial\Omega$, onde ν denota a normal externa a $\partial\Omega$. Seja k como em (4.3) e definamos $K_\tau : X \to X$ da seguinte maneira: $K_\tau v = u$, onde u é a única solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda\, k u^{p-1} = \lambda f_R(v) + (\lambda k + \tau) v^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega\,; \end{cases} \tag{4.6}$$

a mapa K_τ assim definida é compacta.

Consideremos o conjunto aberto e limitado

$$\mathcal{O} = \{u \in X : \|u\|_X < C_\lambda + B_\lambda + 1,\, u >> \varepsilon\phi_1\}\,,$$

onde $C_\lambda,\ B_\lambda > 0$ serão escolhido mais tarde (veja-se em (4.7) e (4.9), respectivamente) e $\varepsilon > 0$ é como na demonstração da proposição 4.6, de modo que $\varepsilon\phi_1 < 1$ e é uma subsolução estrita para todos os problemas $(Q_{\lambda,\tau})$ com $\tau \geq 0$ (em particular $\lambda_1(\varepsilon\phi_1)^{p-1} < \lambda f_R(\varepsilon\phi_1)$).

Precisaremos ter $0 \notin (I - K_\tau)(\partial\mathcal{O})$ (isto é, não ter soluções de $(Q_{\lambda,\tau})$ em $\partial\mathcal{O}$), de maneira que o grau $\deg(I - K_\tau, \mathcal{O}, 0)$ esteja bem definido e não dependa de τ. Para obter isso escolhemos a C_λ do lema 4.4 parte (2), de maneira que

$$\|u\|_X \leq C_\lambda \tag{4.7}$$

para todas as possíveis soluções de $(Q_{\lambda,\tau})$ com $\tau \geq 0$.

Além disso, afirmamos que qualquer solução u de $(Q_{\lambda,\tau})$ satisfazendo $u \geq \varepsilon\phi_1$ em Ω, também satisfaz $u >> \varepsilon\phi_1$ (e então não esta em $\partial\mathcal{O}$).
De fato, procedendo como da demonstração do teorema 3.5, temos

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda k\, u^{p-1} & = \lambda f_R(u) + (\lambda k + \tau) u^{p-1} \\ -\Delta_p(\varepsilon\phi_1) + \lambda k\, (\varepsilon\phi_1)^{p-1} & = \lambda_1(\varepsilon\phi_1)^{p-1} + (\lambda k + \tau)(\varepsilon\phi_1)^{p-1}\,, \end{cases} \tag{4.8}$$

por (4.2) e como $u \geq \varepsilon\phi_1$, obtemos $\lambda f_R(u) + (\lambda k + \tau) u^{p-1} \geq \lambda f_R(\varepsilon\phi_1) + (\lambda k + \tau)(\varepsilon\phi_1)^{p-1}$, e logo vale uma desigualdade estrita entre as funções (contínuas) que aparecem a direita em (4.8). Logo, pela parte (b) do lema 3.24, a afirmação fica provada.

Dos cálculos acima, deduzimos que

$$\deg(I - K_\tau, \mathcal{O}, 0) = 0 \qquad \text{para todo } \tau > 0\,,$$

uma vez que $(Q_{\lambda,\tau})$ não possui soluções para $\tau > \lambda_1$.

A partir de agora fixaremos $\tau = \tau_0$, consideraremos a supersolução $a := v_{\xi=0} > 1$ do lema 4.5, e assumiremos que nenhuma solução de (Q_{λ,τ_0}) toque esta supersolução, pois se tocasse seria já a segunda solução que estamos buscando e a proposição estaria provada. Usando a estimativa para a norma L^∞ em [Ana87a] e em seguida aplicando [Lie88] podemos ver que é possível escolher a constante $B_\lambda > 0$ de maneira que

$$\|K_{\tau_0} v\|_X \leq B_\lambda, \qquad \forall\, v \in X: \quad 0 \leq v \leq a; \tag{4.9}$$

consideremos então o subconjunto aberto de $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O}' = \{u \in \mathcal{O} :\, u < a \text{ em } \Omega\}$$

e afirmamos que $\deg(I - K_{\tau_0}, \mathcal{O}', 0) = 1$.

Observe-se que K_{τ_0} aplica $\overline{\mathcal{O}'}$ em $\overline{\mathcal{O}'}$. De fato, se $v \in \overline{\mathcal{O}'}$, então $\|K_{\tau_0} v\|_X \leq B_\lambda$ por (4.9), e se considerarmos $u = K_{\tau_0} v$ temos

$$\begin{cases} -\Delta_p a + \lambda k\, a^{p-1} & \geq \lambda f_R(a) + (\lambda k + \tau_0) a^{p-1}, \\ -\Delta_p u + \lambda k\, u^{p-1} & = \lambda f_R(v) + (\lambda k + \tau_0) v^{p-1}, \\ -\Delta_p(\varepsilon\phi_1) + \lambda k\, (\varepsilon\phi_1)^{p-1} & = \lambda_1 (\varepsilon\phi_1)^{p-1} + (\lambda k + \tau_0)(\varepsilon\phi_1)^{p-1}, \end{cases} \tag{4.10}$$

logo, sendo $\varepsilon\phi_1 \leq v \leq a$, a parte (a) do lema 3.24 implica que $\varepsilon\phi_1 \leq K_{\tau_0} v \leq a$.

Seja agora $u_0 \in \mathcal{O}'$ e considere-se o mapa constante $C : \overline{\mathcal{O}'} \to \overline{\mathcal{O}'}$ definido por $C(u) = u_0$: podemos ver que $I - \mu K_{\tau_0}(v) - (1-\mu)u_0$, $\mu \in [0,1]$, é uma homotopia entre $I - K_{\tau_0}$ e $I - C$ em $\overline{\mathcal{O}'}$ que não possui zeros em $\partial\mathcal{O}'$: de fato, se $v \in \partial\mathcal{O}'$ então (sendo $\mathcal{O}'$ convexo) $\mu K_{\tau_0}(v) + (1-\mu)u_0 \in \mathcal{O}'$ para $\mu \neq 1$, de modo que será diferente de v, enquanto para $\mu = 1$ temos $v \neq K_{\tau_0}(v)$ por estarmos assumindo que nenhuma solução pode tocar a.

Logo $\deg(I - K_{\tau_0}, \mathcal{O}', 0) = \deg(I - C, \mathcal{O}', 0) = 1$, como afirmamos.

Agora, aplicando a propriedade de excisão, obtemos que $\deg(I - K_{\tau_0}, \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}'}, 0) = -1$, implicando que (Q_{λ,τ_0}) possui uma solução $u_2 \in \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}'}$; em particular, $u_2(x_0) > a(x_0) > 1$ em algum ponto $x_0 \in \Omega$, pois se não fosse assim u_2 estaria em $\partial\mathcal{O}'$; logo u_2 é distinta da u_{1,λ,τ_0} obtida na proposição 4.6 e é a solução u_{2,λ,τ_0} que afirmamos existir. □

Agora, encontraremos uma solução para $(Q_{\lambda,0})$ como limite das soluções obtidas na proposição anterior; por consequência, esta solução herdará as propriedades enunciadas no lema 4.3.

Lema 4.8. *Nas mesmas hipóteses das proposições 4.6-4.7, supondo também Ω convexo, temos que dado $\lambda > \lambda_1$, existe uma solução $u_{2,\lambda,0}$ do problema $(Q_{\lambda,0})$, que satisfaz $\|u_{2,\lambda,0}\|_\infty \geq 1$.*

Além disso, existe $x \in \Omega$ tal que $d := dist(x, \partial\Omega) \geq \delta_\Omega$ e $u_{2,\lambda,0}(x) = \|u_{2,\lambda,0}\|_\infty$.

Demonstração. Dado $\lambda > \lambda_1$ consideraremos uma sequência $\tau_n \to 0$ e nos concentraremos nas soluções $u_n := u_{2,\lambda,\tau_n}$ obtidas na proposição 4.7, assim sabemos que $\|u_n\|_\infty > 1$ e que, pelo lema 4.3, existe uma sequência $\{x_n\} \subseteq \Omega$ tal que $d_n := dist(x_n, \partial\Omega) > \delta_\Omega$ e $u_n(x_n) = \|u_n\|_\infty$.

Pelo ponto (2) do lema 4.4, temos uma limitação uniforme para $\|u_n\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Logo, passando a subsequência, $u_n \to u$ em $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, sendo u uma solução fraca e não negativa de $(Q_{\lambda,0})$.

Como $\|u_n\|_\infty > 1$ obtemos $\|u\|_\infty \geq 1$, logo u é não trivial e então é positiva. Finalmente, passando de novo a subsequência, $x_n \to x \in \Omega$ com $dist(x, \partial\Omega) \geq \delta_\Omega$ e tomando limite $u(x) = \|u\|_\infty$. □

O lema a seguir mostrará que, para λ grande, a solução do lema 4.8 é uma solução também para problema original (Π_λ).

Lema 4.9. *As soluções $u_{2,\lambda,0}$ do lema 4.8 satisfazem $\|u_{2,\lambda,0}\|_\infty \to 1$ quando $\lambda \to \infty$. Em particular, existe λ^* tal que se $\lambda > \lambda^*$ então $\|u_{2,\lambda,0}\|_\infty \leq R$.*

Demonstração. Dado $\eta > 1$, suponha-se por contradição que exista uma sequência $\lambda_n \to \infty$ tal que as soluções correspondentes $u_n := u_{2,\lambda_n,0}$ satisfaçam $\|u_n\| > \eta$, em particular, pelo lema 4.8 existirá uma sequência $x_n \in \Omega$ tal que $d_n := dist(x_n, \partial\Omega) \geq \delta_\Omega$ e $u_n(x_n) = \|u_n\|_\infty > \eta$.

Agora repetiremos o argumento de blow–up usado na demonstração do teorema 3.9, mas centrado nos pontos x_n e não mais num ponto fixado x_0.

Pondo $w_n(x) = u_n(x_n + \lambda_n^{-\frac{1}{p}} x)$ podemos ver que w_n satisfaz

$$-\Delta_p w_n(x) = f_R(w_n) \quad \text{em} \quad B(0, d_n \lambda_n^{1/p}) \tag{4.11}$$

e $w_n(0) = u_n(x_n)$.

Usando o mesmo argumento da demonstração do teorema 3.9 obtemos uma limitação uniforme para w_n na norma $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ em conjuntos compactos, para algum $\alpha \in (0,1)$ e logo, passando a subsequência, $w_n \to w$ na norma $\mathcal{C}^1$ em conjuntos compactos, onde agora w é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ definida em $\mathbb{R}^N$, já que $d_n \lambda_n^{1/p} \to \infty$.

Então, w é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w = f_R(w) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ w \geq 0\,. \end{cases} \tag{4.12}$$

Pelo teorema 3.11 concluímos que $w \equiv 0$ ou $w \equiv 1$.

Isso contradiz o fato que $w_n(0) = u_n(x_n) > \eta > 1$, de modo que, pela arbitrariedade de η, o lema fica provado. □

Podemos agora provar nosso resultado principal.

Demonstração do teorema 4.1. A primeira solução é $u_{1,\lambda,0}$, obtida na proposição 4.6, e satisfaz $\|u_{1,\lambda,0}\|_\infty < 1$. Pelo lema 4.9 vemos que, para λ grande, as soluções $u_{2,\lambda,0}$ obtidas no lema 4.8 satisfazem $1 \leq \|u_{2,\lambda,0}\|_\infty < R$, logo são soluções do problema original (Π_λ). Assim obtemos a existência de uma segunda solução.

Que $\|u_{2,\lambda,0}\|_\infty \to 1$ quando $\lambda \to \infty$ já foi mostrado no lema 4.9.

Pelas hipóteses (F_1) e (F_2), se t_λ é o maior real tal que $\lambda f(t) > \lambda_1 t^{p-1}$ para $t \in (0, t_\lambda)$, então $t_\lambda \to 1$ quando $\lambda \to \infty$. Como nenhuma solução de (Π_λ) pode ser positiva e menor que t_λ, deduzimos que também $\|u_{1,\lambda,0}\|_\infty \to 1$ quando $\lambda \to \infty$. $\square$

Bibliografia

[ABC94] A. Ambrosetti, H. Brezis, and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), no. 2, 519–543.

[AGAP96] A. Ambrosetti, J. Garcia Azorero, and I. Peral, *Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations*, J. Funct. Anal. **137** (1996), no. 1, 219–242.

[AH98] W. Allegretto and Y. X. Huang, *A Picone's identity for the p-Laplacian and applications*, Nonlinear Anal. **32** (1998), no. 7, 819–830.

[Ana87a] A. Anane, *Etude des valeurs propres et de la résonnance pour l'opérateur p-Laplacien*, Ph.D. thesis, Universit Libre de Bruxelles, 1987.

[Ana87b] A. Anane, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), no. 16, 725–728.

[AR06] D. Arcoya and D. Ruiz, *The Ambrosetti-Prodi problem for the p-Laplacian operator*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), no. 4-6, 849–865.

[BIU08] F. Brock, L. Iturriaga, and P. Ubilla, *A multiplicity result for the p-Laplacian involving a parameter*, Ann. Henri Poincaré **9** (2008), no. 7, 1371–1386.

[BL83] H. Brézis and E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 3, 486–490.

[BN83] H. Brézis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437–477.

[BN91] H. Berestycki and L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **22** (1991), no. 1, 1–37.

[BN93] H. Brezis and L. Nirenberg, *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), no. 5, 465–472.

[CD05] S. Cingolani and M. Degiovanni, *Nontrivial solutions for p-Laplace equations with right-hand side having p-linear growth at infinity*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), no. 7-9, 1191–1203.

[CDG97] A. Cañada, P. Drábek, and J. L. Gámez, *Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 10, 4231–4249.

[CFP85] A. Capozzi, D. Fortunato, and G. Palmieri, *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **2** (1985), no. 6, 463–470.

[Cha93] K. Chang, *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 6, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.

[CL05] S. Chen and S. Li, *On a nonlinear elliptic eigenvalue problem*, J. Math. Anal. Appl. **307** (2005), no. 2, 691–698.

[Dam98] L. Damascelli, *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **15** (1998), no. 4, 493–516.

[Dan77] E. N. Dancer, *On the Dirichlet problem for weakly non-linear elliptic partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **76** (1976/77), no. 4, 283–300.

[DD03] E. N. Dancer and Yihong Du, *Some remarks on Liouville type results for quasilinear elliptic equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 6, 1891–1899 (electronic).

[dF88] D. G. de Figueiredo, *On superlinear elliptic problems with nonlinearities interacting only with higher eigenvalues*, Rocky Mountain J. Math. **18** (1988), no. 2, 287–303, Nonlinear Partial Differential Equations Conference (Salt Lake City, UT, 1986).

[dF89] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 81, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.

[DFGU03] D. G. De Figueiredo, J. P. Gossez, and P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*, J. Funct. Anal. **199** (2003), no. 2, 452–467.

[dFGU06] D. G. de Figueiredo, J.-P. Gossez, and P. Ubilla, *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **8** (2006), no. 2, 269–286.

[DFGU09] D. G. De Figueiredo, J. P. Gossez, and P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for the $p-$Laplacian*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 3, 721–752.

[dFL85] D. G. de Figueiredo and P.-L. Lions, *On pairs of positive solutions for a class of semilinear elliptic problems*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), no. 3, 591–606.

[dFLN82] D. G. de Figueiredo, P.-L. Lions, and R. D. Nussbaum, *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **61** (1982), no. 1, 41–63.

[DG02] Y. Du and Z. Guo, *Liouville type results and eventual flatness of positive solutions for p-Laplacian equations*, Adv. Differential Equations **7** (2002), no. 12, 1479–1512.

[DL07] M. Degiovanni and S. Lancelotti, *Linking over cones and nontrivial solutions for p-Laplace equations with p-superlinear nonlinearity*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **24** (2007), no. 6, 907–919.

[dPM07] F. O. de Paiva and E. Massa, *Multiple solutions for some elliptic equations with a nonlinearity concave at the origin*, Nonlinear Anal. **66** (2007), no. 12, 2940–2946.

[DS87] J. Díaz and J. Saá, *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), no. 12, 521–524.

[DS04] L. Damascelli and B. Sciunzi, *Regularity, monotonicity and symmetry of positive solutions of m-Laplace equations*, J. Differential Equations **206** (2004), no. 2, 483–515.

[Fuč76] S. Fučík, *Boundary value problems with jumping nonlinearities*, Časopis Pěst. Mat. **101** (1976), no. 1, 69–87.

[GAPAM00] J. P. García Azorero, I. Peral Alonso, and J. J. Manfredi, *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Commun. Contemp. Math. **2** (2000), no. 3, 385–404.

[Gho93] N. Ghoussoub, *Duality and perturbation methods in critical point theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 107, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, With appendices by David Robinson.

[GMSdL00] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, *Stationary profiles of degenerate problems when a parameter is large*, Differential Integral Equations **13** (2000), no. 10-12, 1201–1232.

[GV89] M. Guedda and L. Véron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **13** (1989), no. 8, 879–902.

[ILM] L. Iturriaga, S. Lorca, and M. Montenegro, *Existence of solutions to quasilinear elliptic equations with singular weights*, To appear in Adv. Nonlinear Stud.

[ILM10] L. Iturriaga, S. Lorca, and E. Massa, *Positive solutions for the p-laplacian involving critical and supercritical nonlinearities with zeros*, accepted for publication in Annales de l'Institut Henri Poincare / Analyse non lineaire. doi:10.1016/j.anihpc.2009.11.003 (2010).

[IMSU10] L. Iturriaga, E. Massa, J. Sanchez, and P. Ubilla, *Positive solutions for the $p-$Laplacian with a nonlinear term with zeros*, J. Differential Equations **248** (2010), no. 2, 309–327.

[KV93] S. Kamin and L. Véron, *Flat core properties associated to the p-Laplace operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 4, 1079–1085.

[Lie88] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **12** (1988), no. 11, 1203–1219.

[Lin90] P. Lindqvist, *On the equation* $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=0$, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), no. 1, 157–164.

[Lio82] P.-L. Lions, *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, SIAM Rev. **24** (1982), no. 4, 441–467.

[Liu99] Z. Liu, *Positive solutions of superlinear elliptic equations*, J. Funct. Anal. **167** (1999), no. 2, 370–398.

[Lor07] S. Lorca, *Nonexistence of positive solution for quasilinear elliptic problems in the half-space*, J. Inequal. Appl. (2007), Art. ID 65126, 4.

[LU04] S. Lorca and P. Ubilla, *Partial differential equations involving subcritical, critical and supercritical nonlinearities*, Nonlinear Anal. **56** (2004), no. 1, 119–131.

[LWZ02] S. Li, S. Wu, and H.S. Zhou, *Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities*, J. Differential Equations **185** (2002), no. 1, 200–224.

[Mas03] E. Massa, *On the Fučík spectrum and superlinear elliptic equations*, Ph.D. thesis, Università degli Studi di Milano, Italy, 2003.

[Mor03] V. Moroz, *On the Morse critical groups for indefinite sublinear elliptic problems*, Nonlinear Anal. **52** (2003), no. 5, 1441–1453.

[MP99] E. Mitidieri and S. I. Pokhozhaev, *Absence of positive solutions for quasilinear elliptic problems in* $\mathbf{R}^N$, Tr. Mat. Inst. Steklova **227** (1999), no. Issled. po Teor. Differ. Funkts. Mnogikh Perem. i ee Prilozh. 18, 192–222.

[MU09] E. Massa and P. Ubilla, *Superlinear elliptic problems with sign changing coefficients*, accepted for publication in Commun. Contemp. Math. (2009).

[ÔT88] M. Ôtani and T. Teshima, *On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equations*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **64** (1988), no. 1, 8–10.

[Per97a] K. Perera, *Critical groups of pairs of critical points produced by linking subsets*, J. Differential Equations **140** (1997), no. 1, 142–160.

[Per97b] K. Perera, *Multiplicity results for some elliptic problems with concave nonlinearities*, J. Differential Equations **140** (1997), no. 1, 133–141.

[Per98] I. Peral, *Some results on quasilinear elliptic equations: growth versus shape*, Nonlinear functional analysis and applications to differential equations (Trieste, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, pp. 153–202.

[Poh65] S. I. Pohožaev, *On the eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Dokl. Akad. Nauk SSSR **165** (1965), 36–39.

[PS86] P. Pucci and J. Serrin, *A general variational identity*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), no. 3, 681–703.

[PS02] S. Prashanth and K. Sreenadh, *Multiplicity results in a ball for p-Laplace equation with positive nonlinearity*, Adv. Differential Equations **7** (2002), no. 7, 877–896.

[PS04] P. Pucci and J. Serrin, *The strong maximum principle revisited*, J. Differential Equations **196** (2004), no. 1, 1–66.

[Red86] R. Redheffer, *A classification of solutions of certain nonlinear differential inequalities with application to theorems of Liouville type*, Math. Z. **192** (1986), no. 3, 453–465.

[Sha00] I. Shafrir, *Asymptotic behaviour of minimizing sequences for Hardy's inequality*, Commun. Contemp. Math. **2** (2000), no. 2, 151–189.

[SU03] J. Sánchez and P. Ubilla, *Uniqueness results for the one-dimensional m-Laplacian considering superlinear nonlinearities*, Nonlinear Anal. **54** (2003), no. 5, 927–938.

[SZ02] J. Serrin and H. Zou, *Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities*, Acta Math. **189** (2002), no. 1, 79–142.

[Tak07a] S. Takeuchi, *Coincidence sets in semilinear elliptic problems of logistic type*, Differential Integral Equations **20** (2007), no. 9, 1075–1080.

[Tak07b] S. Takeuchi, *Partial flat core properties associated to the p-Laplace operator*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (2007), no. Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, suppl., 965–973.

[Tol83] P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), no. 7, 773–817.

[Tol84] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **51** (1984), no. 1, 126–150.

[Váz84] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), no. 3, 191–202.

[Wil96] M. Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 24, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[WY01] S. Wu and H. Yang, *A class of resonant elliptic problems with sublinear nonlinearity at origin and at infinity*, Nonlinear Anal. **45** (2001), no. 7, Ser. A: Theory Methods, 925–935.

Eugenio Tommaso Massa