4ª Lista de Exercícios de SMA-333- Cálculo 3

Eugenio Massa

Sequências e séries de funções

1. Determine o conjunto de convergência pontual e a função limite pontual das seguintes sequências de funções.
   a) $f_n(x) = e^{nx}$, *b)* $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$, *c)* $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, , *d)* $f_n(x) = \sqrt{\frac{1+nx^2}{n}}$,
   e) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, *f)*$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} x^j$, *g)*$f_n(x) = x^n$, *h)*$f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$
   l)$f_n(x) = \frac{x}{n}$, *m)*$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n+x}$, *n)*$f_n(x) = nx$, *o)*$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$.

2. Verifique se as sequências do exercício anterior convergem uniformemente no seu conjunto de convergência pontual. Em caso contrário encontre um oportuno conjunto onde tenha-se convergência uniforme.

3. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$. Considere a função dada por
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$
   a) Esboce os gráficos de f e de f_n.
   b) f_n converge uniformemente a f em $[0,1]$? Justifique.
   c) Verifique que
$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

4. Verifique que a sequência $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$ converge pontualmente mas não uniformemente em $\mathbb{R}$. Mostre que a convergência é uniforme em oportunas semi-retas.

5. Seja $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}$.
   a) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx$
   b) Mostre que a seqüência f_n, onde $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, não converge uniformemente a f em $[0,1]$.

6. Verifique se a série dada converge uniformemente no intervalo dado:
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ em $[-r,r]$, $r > 0$.
   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$ em $[-r,r]$, $0 < r < 1$.

7. Mostre que as funções dadas são contínuas no conjunto B:
   a) $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2+k^2}$, $B = \mathbb{R}$ b) $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx^3}{k^4}$, $B = \mathbb{R}$
   c) $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kx}}$, $B = [1,\infty)$ d) $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$, $B = [-r,r]$, $r \in (0,1)$
   e) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$, $B = \mathbb{R}$ f) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. $B = \mathbb{R}$

8. Seja $s = s(x)$ dada por $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k$.

a) Prove que para todo $t \in (-1,1)$

$$\int_0^t s(x)\,dx = \frac{t^2}{1-t}.$$

b) Conclua que, para todo $x \in (-1,1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

9. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Verifique que $\int_0^x f(t)\,dt = f(x) - 1$.

10. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Justifique a igualdade: $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

11. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$. Justifique a igualdade: $\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

12. Seja $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x+n}$ e $a > 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f_n(x)\,dx = 0$$

13. Mostre que $f_n(x) = \frac{\sin(n^\alpha x)}{n^2}$ converge uniformemente a zero em $\mathbb{R}$. Calcule para quais $\alpha \in \mathbb{R}$ as sequências f_n' e f_n'' também convergem uniformemente a zero.

14. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$: calcule, se for possível, $\int_2^3 f(x)\,dx$ e $\int_1^2 f(x)\,dx$. (Justificar!!!).

15. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x+1}{n^2e^x+n}$: calcule, se for possível, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. (Justificar!!!).
Mostre, através do teorema de troca do limite com a série, que a convergência não pode ser uniforme em nenhum conjunto da forma $(-\infty, H]$.

16. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n\sqrt{n}}$: calcule, se for possível, sua primitiva e sua derivada. (Justificar!!!).

17. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,e^{-x^2/n}$: mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$ e calcule, se for possível, sua derivada. (Justificar!!!).