3ª Lista de Exercícios de SMA-333- Cálculo 3

Eugenio Massa

Séries numéricas 2

1. Componha uma série infinita cuja soma seja 5.

2. Use o **Teste da integral** para determinar se cada série converge ou diverge.
$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n+1}$$

3. Determine se a série converge ou diverge, justificando a resposta.
$$a)\sum_{n=1}^{\infty}6n^{-1,01} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt[8]{n}}\right) \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{n^{\pi}} \qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\arctan n}{n^{1.001}}$$
$$e)\ 3+\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\frac{3}{4\sqrt{4}}+\cdots \qquad f)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ \ln(n)^p}: \quad \alpha,p\in\mathbb{R}$$
Sugestão: para o ponto (f), considere a parte o caso $\alpha=1$.

4. Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, o que podemos dizer sobre a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n)$? Justifique.

5. Prove que se $\sum a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, então $\sum a_n^2$ converge.

6. Use o **Teste de Leibnitz** para determinar se a série converge ou diverge.
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

7. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas; se for falsa forneça um contraexemplo.
   (a) toda série alternada é condicionalmente convergente.
   (b) toda série absolutamente convergente é convergente.
   (c) toda série convergente é absolutamente convergente.
   (d) toda série alternada converge.
   (e) se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergem então $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n+\beta b_n$ diverge para todos $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
   (f) se $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é condicionalmnente convergente.

8. Estime o número de termos que precisa somar para aproximar as seguintes séries com erro menor do ε dado.
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(25/n)\,,\ \varepsilon=10^{-2} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{10^n}\,,\ \varepsilon=10^{-10} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}\,,\ \varepsilon=10^{-2}$$

9. Quais das séries convergem **absolutamente**, quais convergem **condicionalmente**, quais divergem e quais são oscilantes?
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin n}{n!}\right)$$
$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^n}{(2n)^n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.01)^n}{n} \qquad i)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n+1}\frac{1}{n+5^n}$$
$$l)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^3\sqrt{n}}$$

10. Quais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas recursivamente como abaixo convergem e quais divergem? **Justifique**.
   a) $a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{11n^3+5n^2+1}{2n+9n^3}\, a_n$
   b) $a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\, a_n$
   b) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{\pi+\arctan n}{2n^2}\, a_n$

11. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma séries condicionalmente convergente e

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se} \quad a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad a_n < 0, \end{cases} \qquad\qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a_n \geq 0 \\ a_n & \text{se} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

   Prove que ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergem.

12. Determine se a série converge ou diverge, justificando a resposta.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^2} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\ln n}{n^3} \quad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2\cos(n\pi) \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n} \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!} \quad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sqrt{n}} \quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^3}$$

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n^{\frac{3}{2}}} \quad l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \quad m)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5-\sin(n)}\right)^n \quad n)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3-\sin(n)}\right)^n$$

$$o)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{n} \quad p)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n} \quad q)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/2)}{n} \quad r)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/n)}{n}$$

$$o)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \quad p)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} \quad q)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n\pi/15)}{n} \quad r)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$$

13. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}$$

   converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. Prove que $\forall x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^2}$$

   converge.

15. Mostre que a integral imprópria $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ converge, aplicando o critério de Leibnitz à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

16. Usando o **critério de Cauchy**, demonstre que se série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

17. Diga (justificando) quando é possível definir a soma dos elementos dos conjuntos a seguir; no caso, calcule esta soma.
   a) $\{n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *b)* $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *c)* $\{1/[n(n+1)] : \ n \in \mathbb{N}\}$
   d) $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *e)* $\left\{1/n^2 : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{-1/n^2 : \ n \in \mathbb{N}\right\}$