

7ª Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

Eugenio Massa

1. Calcule as derivadas parciais e mostre, usando a definição de diferenciabilidade, que as funções dadas são diferenciáveis em todo seu domínio.
a) $f(x, y) = xy$, b) $f(x, y) = x + y$, c) $f(x, y) = x^2y^2$
d) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$, e) $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$, f) $f(x, y) = x^2 + y^2$
2. Em cada um dos casos abaixo, verifique se a função dada é diferenciável na origem:
(a) $g(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
3. f é diferenciável em $(0,0)$?
a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.
b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.
c) $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.
4. As funções dadas são diferenciáveis? Justifique.
a) $f(x, y) = \ln(\sqrt{1 + x^2 + y^2})$, b) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$,
d) $f(x, y) = \sin(\sqrt{1 + x^2 + y^2})$, e) $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$, f) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$,
5. Calcule a diferencial.
a) $z = x^3y^2$, b) $z = x \operatorname{arctg}(x + 2y)$, c) $z = \operatorname{sen} xy$
d) $u = e^{s^2 - t^2}$, e) $t = \ln(1 + p^2 + v^2)$, f) $x = \operatorname{arcsen} uv$
6. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.
a) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$,
b) $f(x, y) = \frac{x^y}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.
c) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$,
7. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.
a) $f(x, y) = 2x^2y$ em $(1, 1, f(1, 1))$, b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $(0, 1, f(0, 1))$
c) $f(x, y) = 3x^3y - xy$ em $(1, -1, f(1, -1))$, d) $f(x, y) = xe^{x^2 - y^2}$ em $(2, 2, f(2, 2))$
e) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x - 2y)$ em $\left(2, \frac{1}{2}, f\left(2, \frac{1}{2}\right)\right)$, f) $f(x, y) = xy$ em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$
8. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 2, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.
9. $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 3)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.
10. $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$.
a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.
b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1, 1, 1)$.

11. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.
12. Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.
13. Quais os pontos do hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$?
14. Determinar a equação do plano tangente ao elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36$ no ponto $(1, 2, 3)$.
15. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal à superfície dada no ponto indicado:
- (a) $z = (x^2 + y^2)^2$, $P = (1, 2, 25)$
 (b) $z = 4xy$, $P = (4, 1/4, 4)$
 (c) $z = \sin x + \sin 2y + \sin 3(x + y)$, $P = (0, 0, 0)$
 (d) $z = \arctg \frac{x}{y}$, $P = (4, 4, \pi/4)$
16. Calcule a derivada direcional de f no ponto P na direção de P a Q . Calcule também a direção segundo a qual f cresce mais rapidamente, bem como essa taxa de crescimento:
- (a) $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$, $P = (2, 0)$, $Q = (-3, 1)$
 (b) $f(x, y) = \sin(2x - y)$, $P = (-\pi/2, \pi/6)$, $Q = (0, 0)$
 (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P = (-2, 3, 1)$, $Q = (0, -5, 4)$
17. Uma chapa metálica aquecida está situada em um plano xy de tal modo que a temperatura $T(x, y)$ em um ponto $P = (x, y)$ é inversamente proporcional à distância de P à origem. Sabendo que a temperatura em $P_0 = (3, 4)$ é $100^\circ C$, determine a taxa de variação de T em P_0 na direção do vetor $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. A partir de P_0 , em que direção T cresce mais rapidamente? Em que direção a taxa de variação é nula?
18. Considere a função $f(x, y) = xg(x^2 + y^2)$, onde $g(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, a, f(a, a))$ passa pela origem.
19. A função $z = z(x, y)$ é diferenciável e dada implicitamente pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Mostre que $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$ é a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0) , $z_0 \neq 0$.
20. Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0) . Seja S a função afim dada por $S(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$. Suponha que

$$f(x, y) = S(x, y) + E(x, y) \quad \text{com} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Conclua que $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $c = f(x_0, y_0)$.

GABARITO

Exercício 4 só a (e) não é: por que?

Exercício 5 c) $df(x, y) : (h, k) \mapsto y \cos(x, y)h + x \cos(xy)k$

Exercício 7 a) $\pi(x, y) = 2 + 4(x - 1) + 2(y - 1)$

Exercício 8 $z = y$ ou $z = 2x - 3y + 6$