$\boxed{\textbf{3ª Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II}}$

Eugenio Massa

1. Desenhe a imagem:

   a) $F(t) = (1, t)$, b) $F(t) = (2t - 1, t + 2)$, c) $F(t) = (t, t^3)$, d) $F(t) = (t^2, t)$,

   e) $F(t) = (t^2, t^4)$, f) $F(t) = (cost, 2sent)$, g) $F(t) = (sent, sent)$,

   h) $F(t) = (sent, sen^2t)$, i) $F(t) = (e^t cost, e^t sent),\ t \geq 0$

2. Desenhe a imagem:

   a) $F(t) = (1, t, 1),\ t \in \mathbb{R}$, b) $F(t) = (1, 1, t),\ t \geq 0$, c) $F(t) = (t, t, 1),\ t \geq 0$,

   d) $F(t) = (cost, sent, 2)$, e) $F(t) = (t, t, 1 + sent),\ t \geq 0$, f) $F(t) = \left(1, 1, \dfrac{1}{t}\right),\ t > 0$,

   g) $F(t) = (cost, sent, e^{-t}),\ t \geq 0$, h) $F(t) = (1 + sent, 1 + sent, cost),\ -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

3. Calcule o comprimento da curva dada, e verifique quais delas são regulares:
   a) $\gamma(t) = (tcost, tsent),\ t \in [0, 2\pi]$, b) $\gamma(t) = (2t - 1, t + 1),\ t \in [1, 2]$,
   c) $\gamma(t) = (cost, sent, e^{-t}),\ t \in [0, \pi]$, d) $\gamma(t) = (e^{-t}cost, e^{-t}sent, e^{-t}),\ t \in [0, 1]$,
   e) $\gamma(t) = (t, lnt),\ t \in [1, e]$,

4. Dê exemplos de curvas γ e δ tais que $Im\gamma = Im\delta$, mas que seus comprimentos de curvas sejam diferentes.

5. Dizemos que uma curva $\delta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, com derivada contínua, está parametrizada pelo comprimento de arco se $\parallel \delta'(s) \parallel = 1$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$. Verifique que cada uma das curvas abaixo está parametrizada pelo comprimento de arco. Interprete o parâmetro s.

   a) $\delta(s) = (cos(s), sen(s)),\ s \geq 0$

   b) $\delta(s) = \left(Rcos(\dfrac{s}{R}), Rsen(\dfrac{s}{R})\right),\ s \geq 0$, onde $R > 0$ é um real fixo

   c) $\delta(s) = \left(\dfrac{s}{\sqrt{5}}, \dfrac{2s}{\sqrt{5}}\right),\ s \geq 0$

6. Esboce o gráfico da curva C determinada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, sendo:

   (a) $\mathbf{r}(t) = 3\,t\,\mathbf{i} + (1 - 9\,t^2)\,\mathbf{j},\quad t \in \mathbb{R}$ (b) $\mathbf{r}(t)(1 - t^2)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j},\quad t \in \mathbb{R}$

   (c) $\mathbf{r}(t) = (2 + \cos\,t)\mathbf{i} - (3 - \sin\,t)\,\mathbf{j},\ t \in [0, 2\,\pi]$ (d) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - 3\,\sin\,t\,\mathbf{j} + 3\,\cos\,t\,\mathbf{k},\quad t \geq 0$

   (e) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 4\,\cos\,t\,\mathbf{j} + 9\,\sin\,t\,\mathbf{k},\quad t \geq 0$ (f) $\mathbf{r}(t) = \text{tg}\,t\,\mathbf{i} + \sec\,t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k},\quad |t| \leq \pi/2$

7. Calcule o comprimento das curvas dadas por: (deixe a integral indicada quando não der para calcular)

   (a) $y = \frac{1}{3}\,(x^2 + 2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$. (b) $y = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}),\ x \in [-1, 0]$

   (c) $y = x^{3/2}$ de $(0, 0)$ a $(4, 8)$. (d) $\mathbf{r}(t) = (t\,\cos\,t, t\,\sin t, e^t),\quad t \in [0, 1]$

   (e) $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t\sin\,t \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z = 1 - t^2 \end{cases}$ (f) $C : \begin{cases} x = t \\ y = 4\,t^2 \quad 0 \leq t \leq 2 \\ z = 3\,t^2 \end{cases}$

8. Considere a curva C parametrizada por $x = a\,\sin\alpha\,\sin\,t,\ y = b\,\cos\alpha\,\sin\,t,\ z = c\,\cos\,t$, em que a, b, c, α são constantes fixadas.
   (a) Mostre que C está contida no elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
   (b) Mostre que C também está contida em um plano que contém o eixo z.
   (c) Faça um esboço da curva C

9. Considere a curva C parametrizada por $x = a\,e^{\omega\,t}\cos t,\; y = a\,e^{\omega\,t}\sin t,\; z = b\,e^{\omega\,t}$, em que a, b, ω são constantes fixadas.
   (a) Mostre que C está contida no cone $a^2\,z^2 = b^2\,(x^2 + y^2)$.
   (b) Faça um esboço da curva C para $a = b = 4$ e $\omega = -1$.
   (c) Calcule o comprimento de C correspondente ao intervalo $0 \leq t \leq 2\,\pi$.

10. A posição de uma partícula é descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos\,2t\,\mathbf{i} + 3\cos\,t\,\mathbf{j}$.
    (a) Mostre que a trajetória está sobre a parábola $4y^2 - 9x = 18$.
    (b) Desenhe a trajetória.
    (c) Qual é o vetor aceleração nos instantes de velocidade zero?
    (d) Desenhe estes vetores.

11. Um objeto de massa m desloca-se segundo a lei $\mathbf{r}(t) = a\cos(wt)\,\mathbf{i} + \sin(wt)\,\mathbf{j}$. Ache a força que atua sobre este objeto. Faça uma ilustração da situação trajetória-força.

12. Considere a função vetorial $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + (4t^2 - t^4)\,\mathbf{j}$:
    (a) Esboce a curva determinada pelas componentes de $\mathbf{r}(t)$.
    (b) Calcule $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.
    (c) Esboce os vetores correspondentes a $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.

13. Uma curva tem a propriedade: o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ é sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$. Mostre que a curva está sobre uma superfície esférica com centro na origem.

14. Encontre equações paramétricas da reta tangente a C em P, nos seguintes casos:

$$(a)\; C : \begin{cases} x = 2\,t^2 - 1 \\ y = -5\,t^2 + 3, \quad P = (1, -2, 10) \\ z = 8\,t + 2 \end{cases} \qquad (b)\; C : \begin{cases} x = e^t \\ y = t\,e^t, \quad P = (1, 0, 4) \\ z = t^2 + 4 \end{cases}$$

$(c)\; C : \mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + t\,\sin\,t\,\mathbf{j} + t\,\cos\,t\,\mathbf{k},\; P = (1, 0, 0)$ $\quad (d)\; C : \mathbf{r}(t) = 3\,t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + 6\,t\,\mathbf{k},\; P = (3, 1, 6)$

15. Uma *hélice* é uma curva cuja tangente faz um ângulo constante com um vetor unitário $\mathbf{u}$. Mostre que a curva $C : x = 3\,t - t^3,\; y = 3\,t^2,\; z = 3\,t + t^3,\; t \in \mathbb{R}$, é uma hélice, determinando um vetor apropriado $\mathbf{u}$.

16. Calcule a curvatura de cada uma das curvas abaixo. Em que ponto ela é máxima? (a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \ln\sec\,x$ (c) $y = x + 1/x$, (d) $x = e^t\,\cos\,t,\;\; y = e^t\,\sin\,t$, (e) $x = t^2,\; y = \ln\,t$.

17. Encontre uma possível parametrização para as seguintes curvas:
    a) parabola $y = x^2$ em $\mathbb{R}^2$ percorrida da direita à esquerda;
    b) parabola $x = y^2$ em $\mathbb{R}^2$ percorrida de baixo para cima;
    c) elipse $x^2 + 4(y-1)^2 = 1$ em $\mathbb{R}^2$, em sentido horário
    d) quadrado em $\mathbb{R}^2$ de lados paralelos aos eixos e vértices em $(0,0)$ e $(1,2)$, sentido anti-horário.
    e) em $\mathbb{R}^3$, o circulo de raio 1 e centro $(0,0,0)$, no plano $x = y$.

18. Reparametrize as curvas a seguir, de maneira que sejam parametrizadas respeito ao comprimento de arco:
    a) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (3t + 4, t - 1)$
    b) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2\cos(t), t^2\sin(t))$

Gabarito

Exercício 3 a) c=$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\,dt = ...$; d) $\sqrt{3}(1 - e^{-1})$
Exercício 14 b) $\mathbf{r}(t) = (1 + t, t, 4)$
Exercício 18 b) usa $t = \sqrt{[3(s + 8/3)]^{2/3} - 4}$