$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

Eugenio Massa

1. Sejam $\overrightarrow{F}$(t)=(t, sent, 2) e $\overrightarrow{G}$(t)=(3, t, t^2). Calcule:

   a) $\overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t)$, b) $e^{-t}\overrightarrow{F}(t)$, c) $\overrightarrow{F}(t) - 2\overrightarrow{G}(t)$, d) $\overrightarrow{F}(t) \wedge \overrightarrow{G}(t)$

2. Calcule $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$, onde $\overrightarrow{u}(t) = sent\,\overrightarrow{i} + cost\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v}(t) = sent\,\overrightarrow{i} + cost\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

3. Calcule $\lim_{t\to t_o} \overrightarrow{F}(t)$, onde:

   a)$\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \dfrac{t-1}{t}\right)$ e $t_o = 1$, b)$\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{\text{tg}\,(3t)}{t}, \dfrac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right)$ e $t_o = 0$

   c)$\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{t^3-8}{t^2-4}, \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)}{t-2}, 2t\right)$ e $t_o = 2$

4. Calcule $\dfrac{d\overrightarrow{F}}{dt}$ e $\dfrac{d^2\overrightarrow{F}}{dt^2}$; em seguida calcule a reta tangente ao gráfico das funções dadas, no ponto $(t_0, \overrightarrow{F}(t_0))$

   a) $\overrightarrow{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, ln(t^2+1))$, $t_0 = 0$;

   b) $\overrightarrow{F}(t) = \sqrt[3]{t^2}\,\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + 3t\overrightarrow{k}$, $t_0 = 1$;

   c) $\overrightarrow{F}(t) = sen5t\,\overrightarrow{i} + cos4t\,\overrightarrow{j} - e^{-2t}\overrightarrow{k}$, $t_0 = \pi/2$.

5. Calcule:

   a) $\int_0^1 [t\,\overrightarrow{i} + e^t\overrightarrow{j}]dt$, b) $\int_{-1}^1 \left[sen3t\,\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{1+t^2}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right]dt$, c) $\int_1^2 [3\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}]dt$

6. Sejam $\overrightarrow{F}(t) = t\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + e^t\,\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Calcule:

   a) $\int_0^1 [\overrightarrow{F}(t) \wedge \overrightarrow{G}(t)]dt$, b) $\int_0^1 [\overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t)]dt$

7. Seja F dada por $F(t) = (lnt, t, \sqrt{1-t^2}, t^2)$.

   a) Determine o domínio de F.

   b) Calcule $F\left(\dfrac{3}{5}\right)$

8. Sejam $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}$ três funções definidas em $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ e a valores em $\mathbb{R}^3$. Verifique que:

   a)$\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{G} = -\overrightarrow{G} \wedge \overrightarrow{F}$, b)$\overrightarrow{F} \bullet (\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H}) = \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{G} + \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{H}$

9. Sejam $\overrightarrow{F} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{G} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$ Suponha $\lim_{t\to t_o} \overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{0}$ e que $\|\overrightarrow{G}(t)\| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{A}$, onde $M > 0$ é um real fixo. Prove que:

   a) $\lim_{t\to t_o} \overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t) = 0$, b) $\lim_{t\to t_o} \overrightarrow{F}(t) \wedge \overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{0}$

10. Seja $\overrightarrow{F} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua. Prove que existe $M > 0$ tal que $\| \overrightarrow{F}(t) \| \leq M$ em $[a,b]$.

11. Seja $\overrightarrow{F} : I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a segunda ordem em I. Suponha que exista um número real λ tal que, para todo t em I, $\dfrac{d^2\overrightarrow{F}(t)}{dt^2} = \lambda\overrightarrow{F}(t)$. Prove que $\overrightarrow{F}(t) \wedge \dfrac{d\overrightarrow{F}(t)}{dt}$ é constante em I.

12. Seja $\overrightarrow{r}$ definida em $\mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^3$, e derivável até a segunda ordem. Prove que se $\overrightarrow{r}(t) \wedge \dfrac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt}$ for constante em $\mathbb{R}$, então $\overrightarrow{r}(t) \wedge \dfrac{d^2\overrightarrow{r}(t)}{dt^2} = \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}$.

13. Seja $\overrightarrow{F}(t)$ uma força, dependendo do tempo t, que atua sobre uma partícula entre os instantes t_1 e t_2. Supondo $\overrightarrow{F}$ integrável em $[t_1, t_2]$, o vetor $\overrightarrow{I} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}(t)dt$ denomina-se impulso de $\overrightarrow{F}$ no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. Calcule o impulso de $\overrightarrow{F}$ no intervalo de tempo dado.

    a) $\overrightarrow{F}(t) = t\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + t^2\overrightarrow{k}, t_1 = 0$ e $t_2 = 2$

    b) $\overrightarrow{F}(t) = cos3t\,\overrightarrow{i} + e^t cost\,\overrightarrow{j} + lnt\,\overrightarrow{k}, t_1 = 0$ e $t_2 = 2\pi$

14. Ache a força que atua sobre uma partícula de massa m que se desloca segundo a lei $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$.

15. Dispara-se um projétil com velocidade inicial de 500 m/s e ângulo de inclinação de 30^o. Determine: (neste exercício e nos próximos, considere apenas a aceleração de gravidade, aproximando-a com $g = 10m/s^2$)
    (a) A velocidade no instante t.
    (b) A altura máxima atingida.
    (c) O alcance.
    (d) A velocidade com que o projétil atinge o solo.

16. Lança-se horizontalmente um projétil com velocidade de 600m/s de uma altura de 500m acima do nível do solo. Quando e onde o projétil atingirá o solo?.

17. Um jogador de futebol lança uma bola a uma distância de 30 metros. Sabendo que a bola é liberada com um ângulo de $\pi/4$ com a horizontal, encontre sua velocidade inicial.

Gabarito

Exercício 4 b) reta $(x, y, z) = (1 + 2(t-1)/3, -1 + 2t, 3t)$.
Exercício 15 b) $3125m$, c) $12500\sqrt{3}m$, d) $500m/s$