$18^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

Eugenio Massa

1. Calcule o plano tangente às superfícies abaixo, no ponto indicado.
   a) $\sigma(u,v) = (u, u+v, u+2v)$, $P = (1,2,3)$;
   b) $\sigma(r,s) = (r\cos(s), r\sin(s), 1/r)$, $P = (1,1,\sqrt{2}/2)$;

2. Calcule a área da parte da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 2$ que se encontra dentro do parabolóide $z = x^2+y^2$ e acima do plano xy. **Dica:** Escreva a integral de superfície e passe para coordenadas polares. **Resp.:** $\dfrac{4\pi}{2+\sqrt{2}}$.

3. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\overrightarrow{i} + \dfrac{y}{(x^2+y^2)^\alpha}\overrightarrow{j}$. Determine α para que $\overrightarrow{F}$ seja solenoidal ($\overrightarrow{F}$ é solenoidal se div $\overrightarrow{F} = 0$ em seu domínio). Desenhe o campo para o α determinado. **Resp.:** $\alpha = 1$.

4. Calcule a área do parabolóide hiperbólico z = xy que fica dentro do cilindro $x^2+y^2 = 1$.

5. Calcule as seguintes integrais de superfície:
   (a) $\iint_S (x^2+y^2)dS$, em que S é a esfera de centro na origem e raio a.
   (b) $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, em que S é a superfície lateral do cone $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \le z \le b$.
   (c) $\iint_S \sqrt{1+y^2}dS$, em que S é dada por $z = y^2/2$, $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$.

6. Calcule $\iint_S f(x,y,z)dS$, em que:
   (a) $f(x,y,z) = 1$, S é a porção do plano x+y+z-1 = 0 no primeiro octante
   (b) $f(x,y,z) = x^2$, S é a parte do plano z = x interior ao cilindro $x^2+y^2 = 1$.
   (c) $f(x,y,z) = x^2$, S é o hemisfério superior $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$
   (d) $f(x,y,z) = x+y$, S é a porção do plano 2x+3y+z = 6 situada no primeiro octante.
   (e) $f(x,y,z) = x$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v) = (u, v, u^2+v)$, $0 \le u \le 1$ e $u^2 \le v \le 1$.
   (f) $f(x,y,z) = xy$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v) = (u-v, u+v, 2u+v+1)$, $0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le u$.
   (g) $f(x,y,z) = y$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v) = (u, v, 1-u^2)$, $0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le \sqrt{u}$.

7. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$, nos seguintes casos (primeiro fixe a orientação de $\vec{n}$)
   (a) $\vec{F} = (x+1)\vec{i} - (2y+1)\vec{j} + z\vec{k}$ e S é o triângulo de vértices (1,0,0),(0,1,0) e (0,0,1).
   (b) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z^2 = x^2+y^2$, para z entre 1 e 2.
   (c) $\vec{F} = xy\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$ e S é a parte do cilindro $y^2 = 2-x$ cortado pelos cilindros $y^2 = z$ e $y = z^3$.

8. Aplicando o teorema de Stokes, achar as integrais abaixo.
   (a) $\int_\gamma (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, em que γ é a circunferência $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$.
   (b) $\int_\gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, em que γ é a elipse $x^2+y^2 = 1$, $x+z = 0$.
   (c) $\int_\gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$, em que γ é o triângulo de vértices $(a,0,0), (0,a,0)$ e $(0,0,a)$, $a > 0$.
   (d) $\vec{F} = (3z-\sin x)\vec{i} + (x^2+e^y)\vec{j} + (y^3-\cos z)\vec{k}$, e C a curva $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, $0 \le t \le 2\pi$.
   (e) $\vec{F} = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ e C o quadrado de vértices (0,0,2),(1,0,2),(1,1,2) e (0,1,2).
   (f) $\iint_S \vec{\nabla}\wedge\vec{F}\cdot\vec{n}dS$, em que $\vec{F} = (2y,\ e^z,\ -\arctan x)$ e S é a parte do parabolóide $z = 4-x^2-y^2$ acima do plano z = 0 e $\vec{n}$ é a normal superior. Observação: $\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = rot\vec{F}$.

9. Comprove o teorema de Stokes nos casos em que o $\vec{F}(x,y,z)$ e a superfície S são dados por:

(a) $\vec{F} = (x, y, z)$ e S é a parte superior da esfera unitária centrada na origem.

(b) $\vec{F} = (3z, 4x, 2y)$ e S é a porção do parabolóide $z = 10 - x^2 - y^2$ compreendida entre os planos z = 1 e z = 9.

(c) $\vec{F} = (x^4, xy, z^4)$ e S é o triângulo de vértices (2,0,0),(0,2,0) e (0,0,2).

(d) $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$.

(e) $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} - 2xz\vec{k}$ e S é $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

(f) $\vec{F} = z\vec{i} - x\vec{k}$ e S é a parte da superfície de equação (coord. cilíndricas) $\rho(\theta) = 2 + \cos\theta$, que está acima do plano xy e abaixo do cone $z^2 = x^2 + y^2$.

10. Usando o teorema de Gauss, calcule o fluxo dos campos abaixo através na direção da normal exterior das respectivas superfícies:

    (a) $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ e S é a face do cubo $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$.

    (b) $\vec{F} = (x, y, z)$ e S é a face da pirâmide limitada pelos planos x+y+z = a, x = 0, y = 0 e z = 0.

    (c) $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

    (d) $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ e S é o cone $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$.

    (e) $\vec{F} = y\sin x\vec{i} + y^2z\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$, S a superfície da região limitada pelos planos $x = \pm 1$, $z = \pm 1$

    (f) $\vec{F} = y^3e^z\vec{i} - xy\vec{j} + x\arctan(y)\vec{k}$, S a superfície da região limitada pelos planos coordenados e pelo plano x+y+z = 1.

    (g) $\vec{F} = ye^z\vec{i} + (y - ze^x)\vec{j} + (xe^y - z)\vec{k}$, S o toro $(\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 = a^2$, $0 < b < a$.

    (h) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z\vec{k}$,S é formada por $x^2 + y^2 = 2$, $z = 0$, $z = x + 2$.

11. Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo do campo $F(x, y, z) = (2\,x, 5\,y, z)$ que atravessa a superfície S, sabendo-se que S é uma luva com volume de 15 e que sua abertura é a circunferência $\{(x, y, 0),\ x^2 + y^2 = 8\}$.

12. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (z\cos y^7, z^3e^{x^2}, z)$ sobre o parabolóide (sem tampa) $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

13. Verifique o Teorema de Gauss, sendo $\vec{F} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$ e S a superfície da região Q limitada por $y = x^2$ e $z^2 = 4 - x$.

Gabarito

Exercício 1 a) $(x - 1) - 2(y - 2) + (z - 3) = 0$, b) $\pi(\tau, \rho) = (1 + \rho\sqrt{2}/2 - \tau, 1 + \rho\sqrt{2}/2 + \tau, \sqrt{2}/2 - \rho/2)$;
Exercício 5 b) $2\pi\frac{a^2b}{3}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$, c) $4/3$.
Exercício 6 f) $\sqrt{14}/6$.
Exercício 7 a) 0.
Exercício 11 120.