Métodos de Alisamento (ou Suavização)

Ricardo Ehlers
ehlers@icmc.usp.br

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Universidade de São Paulo

Alisamento Exponencial

Nesta técnica os valores suavizados são dados por

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j x_{t-j}$$

com $0 < \alpha < 1$.

- Note como, embora todas as observações passadas sejam usadas no filtro, os pesos $\alpha(1-\alpha)^j$ decaem geometricamente com j.
- Quanto mais próximo de 1 estiver α mais peso será dado às observações mais recentes e quanto mais próximo de zero mais os pesos estarão distribuidos ao longo da série.

Por exemplo se $\alpha = 0.9$ a série filtrada fica,

$$y_t = 0.9x_t + 0.09x_{t-1} + 0.009x_{t-2} + \dots$$

enquanto que para $\alpha = 0.5$ temos que,

$$y_t = 0.5x_t + 0.25x_{t-1} + 0.125x_{t-2} + \dots$$

Este tipo de filtro pode ser utilizado para fazer previsões.

Especificamente a previsão da série original em $t + 1$ será o valor filtrado y_t.

Alisamento Exponencial Simples

Dada uma série temporal $x_1, \ldots, x_n$, não sazonal e sem tendência sistemática, é razoável tomar a estimativa de x_{n+1} como uma soma ponderada das observações passadas, i.e.

$$\hat{x}_n(1) = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots$$

onde $\{a_j\}$ são os pesos.

- Parece razoável também dar um peso maior às observações mais recentes do que às observações mais distantes no passado, i.e. $a_0 > a_1 > \ldots$.
- Neste procedimento são adotados pesos que decaem geometricamente a uma taxa constante dados por

$$a_j = \alpha(1-\alpha)^j, \quad j = 0, 1, \ldots$$

onde $0 < \alpha < 1$ é chamada de *constante de alisamento*.

Assim, a previsão 1 passo à frente em $t = n$ fica

$$\hat{x}_n(1) = \alpha x_n + \alpha(1-\alpha)x_{n-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{n-2} + \dots. \qquad (1)$$

- Na prática haverá um número finito de observações passadas e a soma acima será também finita.
- A idéia de que o conteúdo informativo de uma observação decai com a sua "idade" é bastante intuitivo e o parâmetro α está controlando o grau de "envelhecimento" deste conteúdo.

A equação (1) costuma ser reescrita em forma de equação recursiva. Colocando-se $(1-\alpha)$ em evidência obtém-se que,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_n(1) &= \alpha x_n + (1-\alpha)[\alpha x_{n-1} + \alpha(1-\alpha)x_{n-2} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{n-3} + \ldots] \\
&= \alpha x_n + (1-\alpha)\hat{x}_{n-1}(1) \qquad (2)
\end{aligned}$$

$\hat{x}_n(1)$ é uma média ponderada entre a observação mais recente e a previsão 1 passo à frente anterior (no tempo $t = n-1$).

A equação (1) pode ainda ser reescrita na forma de *correção de erro*. Definindo $e_n = x_n - \hat{x}_{n-1}(1)$ o erro de previsão 1 passo à frente no tempo n então,

$$\hat{x}_n(1) = \hat{x}_{n-1}(1) + \alpha e_n.$$

Ou seja, a previsão para $t = n + 1$ é igual à previsão para $t = n$ que foi feita em $t = n - 1$ mais uma proporção do erro cometido.

A previsão k-passos a frente é a mesma, i.e

$$\hat{x}_n(k) = \hat{x}_n(1),\ k = 2, 3, \ldots$$

Previsões Dentro da Amostra

Usando $\hat{x}_0(1) = x_1$ como previsão inicial em $t = 0$ e definindo $e_t = x_t - \hat{x}_{t-1}(1)$ os erros de previsão 1 passo à frente, a equação (2) pode ser usada recursivamente para obter as previsões, i.e.

$$\hat{x}_t(1) = \alpha x_t + (1 - \alpha)\hat{x}_{t-1}(1), \quad t = 1, 2, \ldots$$

Na forma de correção de erro as recursões ficam

$$\hat{x}_t(1) = \hat{x}_{t-1}(1) + \alpha e_t, \quad t = 1, 2, \ldots$$

Especificação de α

- O valor de α não depende da escala em que as observações foram medidas, mas sim das propriedades da série temporal.
- O valor de α deve ser especificado de modo a refletir a influência das observações passadas nas previsões.
- Valores pequenos produzem previsões que dependem de muitas observações passadas.
- Valores próximos de 1 levam a previsões que dependem das observações mais recentes e no caso extremo $\alpha = 1$ a previsão é simplesmente a última observação.

Minimização da soma de quadrados dos erros de previsão.

- Dado um valor fixo de α e usando a equação (2), calcule

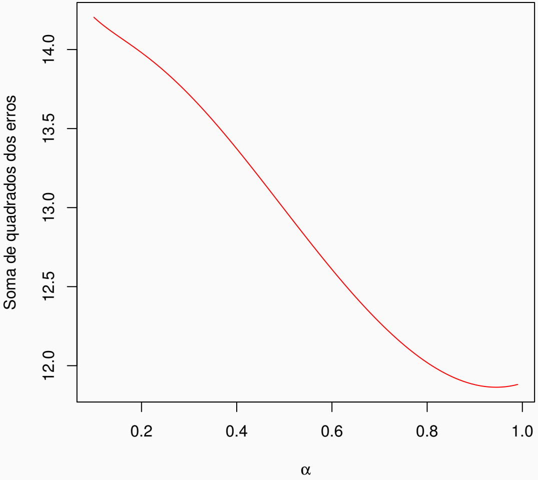
$$
\begin{aligned}
\hat{x}_0(1) &= x_1, \\
\hat{x}_1(1) &= \alpha x_1 + (1-\alpha)\hat{x}_0(1), \quad e_2 = x_2 - \hat{x}_1(1) \\
\hat{x}_2(1) &= \alpha x_2 + (1-\alpha)\hat{x}_1(1), \quad e_3 = x_3 - \hat{x}_2(1) \\
&\vdots \\
\hat{x}_{n-1}(1) &= \alpha x_{n-1} + (1-\alpha)\hat{x}_{n-2}(1), \quad e_n = x_n - \hat{x}_{n-1}(1)
\end{aligned}
$$

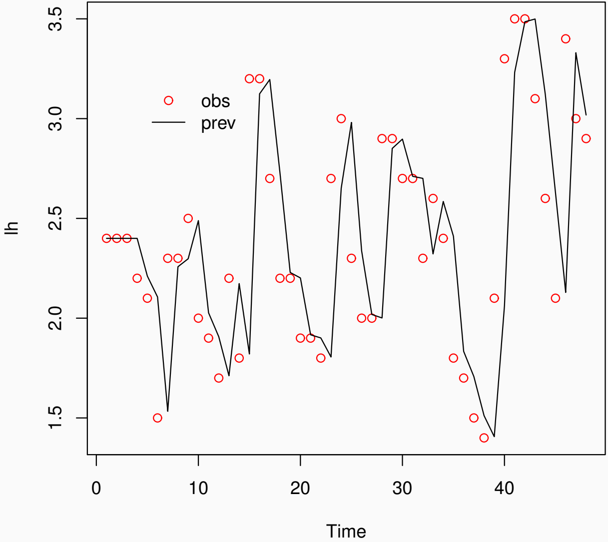
- Calcule $\sum_{t=2}^{n} e_t^2$.
- Repita o procedimento para valores de α variando entre 0 e 1 (digamos com incrementos de 0.1) e selecione o valor que minimiza esta soma de quadrados.

- Na prática, o valor mínimo pode ocorrer muito próximo de um dos extremos do intervalo de variação de α.
- Isto pode ocorrer quando a soma de quadrados varia muito pouco na região em torno do mínimo.
- Neste caso faz mais sentido utilizar valores não tão extremos.

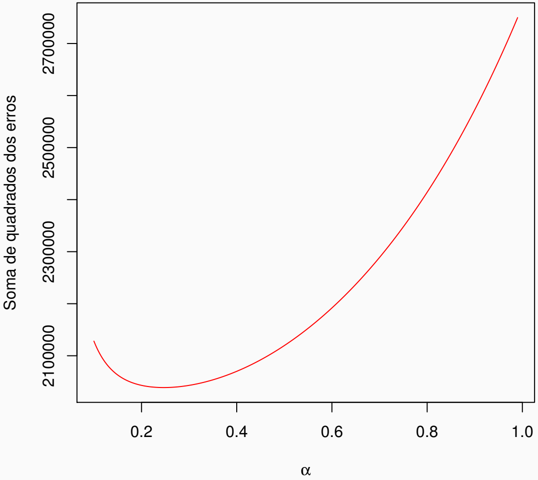
```
> AES <- function(x,interval){
+  e=NULL
+  for (alfa in interval){
+    e2=0; prev = x[1]
+    for (i in 2:length(x)){
+      prev = c(prev,alfa*x[i-1] + (1-alfa)*prev[i-1])
+      e2 = e2 + (x[i]-prev[i])**2
+    }
+    e=c(e,e2)
+  }
+  plot(interval,e,type="l",xlab=expression(alpha),
+       ylab="Soma de quadrados dos erros",col=2)
+  e.min=min(e)
+  alfa=interval[e==e.min]
+  prev = x[1]
+  for (i in 2:length(x))
+      prev = c(prev,alfa*x[i-1] + (1-alfa)*prev[i-1])
+  return(list(alfa=alfa,sq2=e.min,prev=prev))
+ }
```

Exemplo. Quantidades de um tipo de hormonio em amostras de sangue coletadas a cada 10 minutos de uma pessoa do sexo feminino.

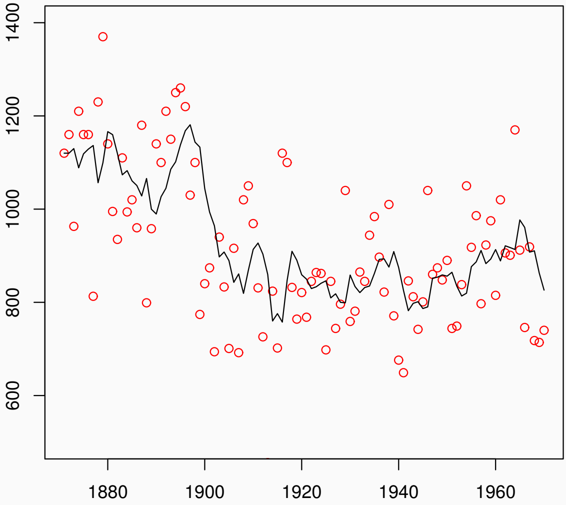



obs
prev
lh
Time
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
0
10
20
30
40

Exemplo. Medidas anuais de vazões do Rio Nilo entre 1871 e 1970.



Previsões 1 passo a frente e valores observados



Método de Holt-Winters

Suponha uma série temporal com componentes de tendência e sazonalidade e com observações mensais.

- Sejam L_t, T_t e I_t o nível, a tendência e o índice sazonal no tempo t.
- Suponha que $(L_1, T_1, I_1), \ldots, (L_{t-1}, T_{t-1}, I_{t-1})$ sejam conhecidos no tempo t .

Se a variação sazonal é multiplicativa (amplitudes tendem a crescer ao longo do tempo),

$$
\begin{aligned}
L_t &= \alpha \left(\frac{x_t}{I_{t-12}} \right) + (1-\alpha)\,(L_{t-1} + T_{t-1}) \\
T_t &= \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)\; T_{t-1} \\
I_t &= \delta \left(\frac{x_t}{L_t} \right) + (1-\delta) I_{t-12}
\end{aligned}
$$

Previsões k períodos à frente,
$\hat{x}_t(k) = (L_t + kT_t)\; I_{t-12+k}, \quad k = 1, 2, \ldots.$

Se a sazonalidade for aditiva (amplitudes não tendem a crescer ao longo do tempo),

$$
\begin{aligned}
L_t &= \alpha(x_t - I_{t-12}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \\
T_t &= \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)\; T_{t-1} \\
I_t &= \delta(x_t - L_t) + (1-\delta) I_{t-12}
\end{aligned}
$$

Previsões k períodos à frente,

$$\hat{x}_t(k) = L_t + kT_t + I_{t-12+k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

- Em geral, $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, 1)$ e $\delta \in (0, 1)$.
- α, γ e δ podem ser estimados minimizando-se a soma de quadrados dos erros de previsão 1 passo à frente, $x_{t+1} - \hat{x}_t(1)$.
- Valores podem ficar próximos aos extremos devido à soma de quadrados variar pouco nesta região.
- α, γ e δ não dependem da escala das observações mas sim das propriedades temporais do nível, tendência e sazonalidade da série.
- Valores refletem a influência das observações passadas nas previsões de cada componente.

Para séries sem variação sazonal,

$$\begin{aligned} L_t &= \alpha x_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \\ T_t &= \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma) T_{t-1} \end{aligned}$$

e a previsão k passos à frente no tempo t é simplesmente $L_t + kT_t$.

- Este método é chamado método de Holt.
- Séries sem tendência sistemática,

$$L_t = \alpha x_t + (1-\alpha) L_{t-1}$$

  e L_t é a previsão 1 passo à frente $\hat{x}_t(1)$.

Exemplo. Holt-Winters com sazonalidade multiplicativa aplicado à série `AirPassengers` (totais mensais de passageiros em linhas aéreas internacionais nos EUA entre 1949 e 1960).

Utilizando a função `HoltWinters()`.

```
> args(HoltWinters)

function (x, alpha = NULL, beta = NULL, gamma = NULL,
  seasonal=c("additive","multiplicative"), start.periods=2,
  l.start = NULL, b.start = NULL, s.start = NULL,
  optim.start=c(alpha=0.3,beta=0.1,gamma=0.1),
  optim.control=list())
```

```
> data(AirPassengers)
> m = HoltWinters(AirPassengers, seasonal = "mult")
```

```
     alpha     gamma      delta
[1,] 0.2755925 0.03269295 0.8707292
```

O valor pequeno de γ diz que a tendência muda pouco ao longo do tempo (não significa que não há tendência).

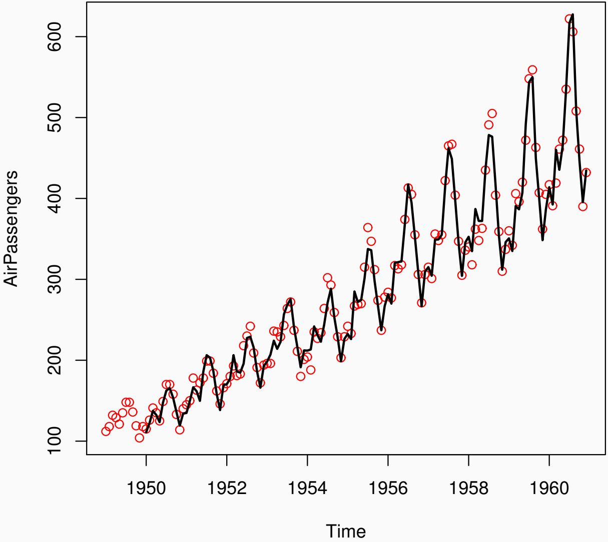
Valores ajustados e as componentes calculadas ao longo do tempo.

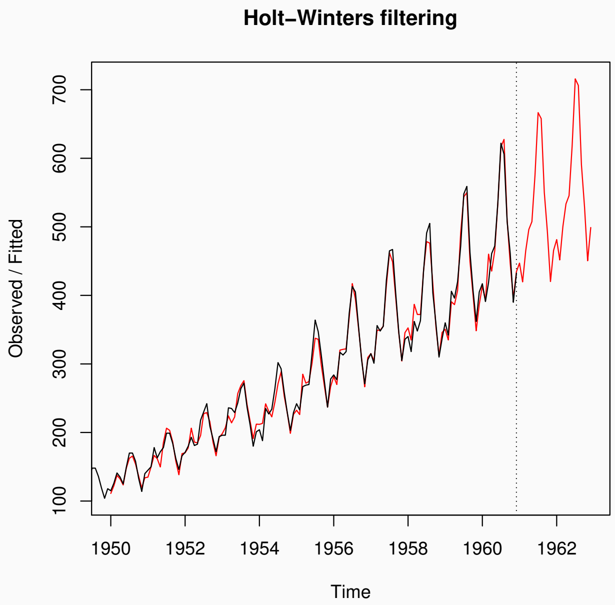
```
             xhat    level    trend    season
Jan 1950 111.0818 124.3169 1.145688 0.8853778
Feb 1950 122.3315 126.6822 1.185561 0.9567027
Mar 1950 137.4390 128.9246 1.220110 1.0560479
Apr 1950 132.3234 131.0740 1.250491 0.9999918
May 1950 123.4797 133.0621 1.274608 0.9191803
Jun 1950 147.6673 134.7926 1.289510 1.0851340
Jul 1950 162.4432 136.4205 1.300576 1.1795086
Aug 1950 165.5296 139.4868 1.358300 1.1752602
Sep 1950 153.8877 141.8933 1.392571 1.0739905
Oct 1950 136.3186 144.3412 1.427070 0.9351739
```

	xhat	level	trend	season
Jan 1960	413.9168	436.2421	3.139507	0.9420439
Feb 1960	392.4512	440.2836	3.168996	0.8849902
Mar 1960	460.1705	443.0007	3.154222	1.0314142
Apr 1960	435.4218	435.1542	2.794576	0.9942300
May 1960	465.0951	445.0388	3.026372	1.0380076
Jun 1960	534.3527	449.8985	3.086306	1.1796262
Jul 1960	616.7354	453.1360	3.091250	1.3518161
Aug 1960	627.5510	457.3005	3.126339	1.3629766
Sep 1960	510.1331	456.0693	2.983876	1.1112725
Oct 1960	446.1628	458.5241	2.966581	0.9667861
Nov 1960	395.4528	465.7202	3.104856	0.8434976
Dec 1960	434.5725	467.0435	3.046611	0.9244450

Os valores ajustados são as previsões 1 passo a frente, por exemplo,

$$\hat{x}_{143}(1) = 434.5725 = (467.0435 + 3.0466)\ 0.9244.$$

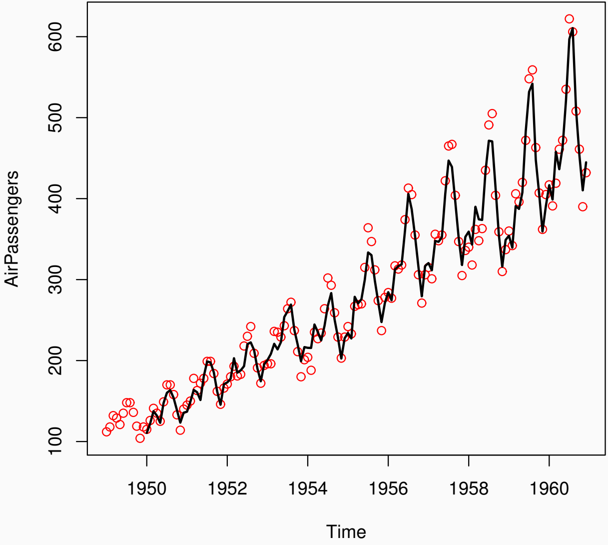

AirPassengers
100
200
300
400
500
600
1950
1952
1954
1956
1958
1960
Time

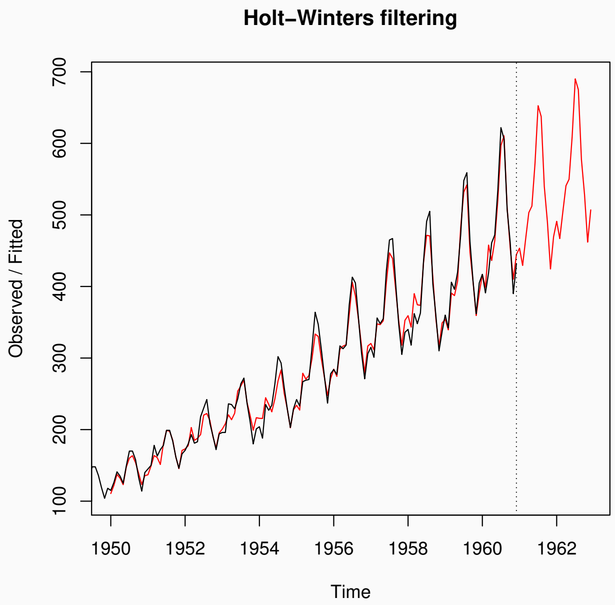

Holt−Winters filtering
Observed / Fitted
100
200
300
400
500
600
700
1950
1952
1954
1956
1958
1960
1962
Time

Supondo sazonalidade aditiva,

```
> data(AirPassengers)
> m = HoltWinters(AirPassengers, seasonal = "addit")

     alpha     gamma      delta
[1,] 0.2479595 0.03453373 1
```


AirPassengers
100
200
300
400
500
600
Time
1950
1952
1954
1956
1958
1960


Holt−Winters filtering
Observed / Fitted
700
600
500
400
300
200
100
1950
1952
1954
1956
1958
1960
1962
Time

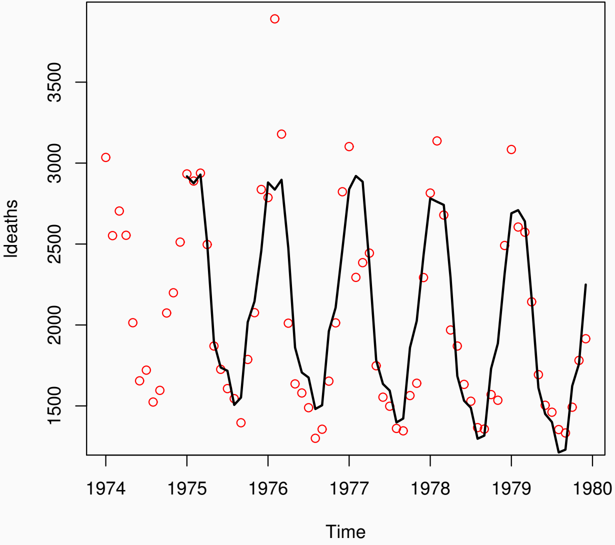
Exemplo. Números mensais de mortes por doenças do pulmão (bronquite, efisema e asma) no Reino Unido entre janeiro de 1974 e dezembro de 1979.

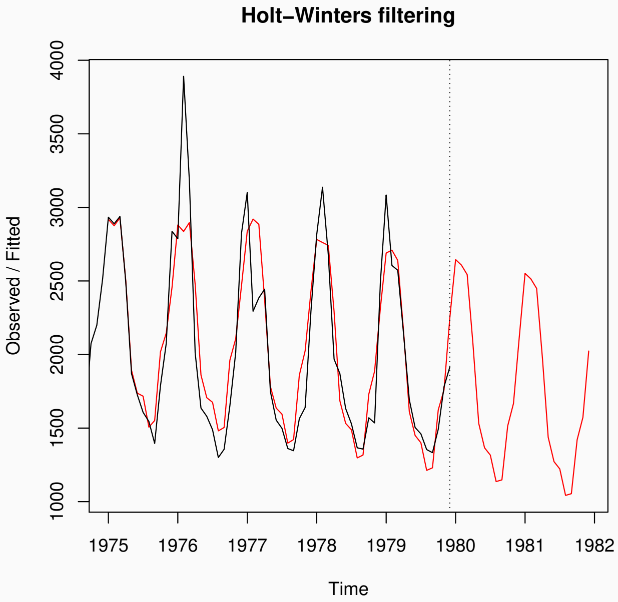
```
> data(UKLungDeaths)
> m = HoltWinters(ldeaths, seasonal="addit")

     alpha      gamma     delta
[1,] 0.00527852 0.4923091 0.1085724
```

Valores ajustados e as componentes calculadas ao longo do tempo,

	xhat	level	trend	season
Jan 1975	2918.185	2207.652	-2.893502	713.4271
Feb 1975	2875.283	2204.836	-2.855003	673.3021
Mar 1975	2928.995	2202.054	-2.819358	729.7604
Apr 1975	2505.538	2199.282	-2.795956	309.0521
May 1975	1892.758	2196.441	-2.818144	-300.8646
Jun 1975	1737.344	2193.502	-2.877284	-453.2812
Jul 1975	1716.836	2190.565	-2.906763	-470.8229
Aug 1975	1506.272	2187.079	-3.192189	-677.6146
Sep 1975	1551.593	2184.091	-3.091548	-629.4062
Oct 1975	2017.901	2180.178	-3.495883	-158.7812

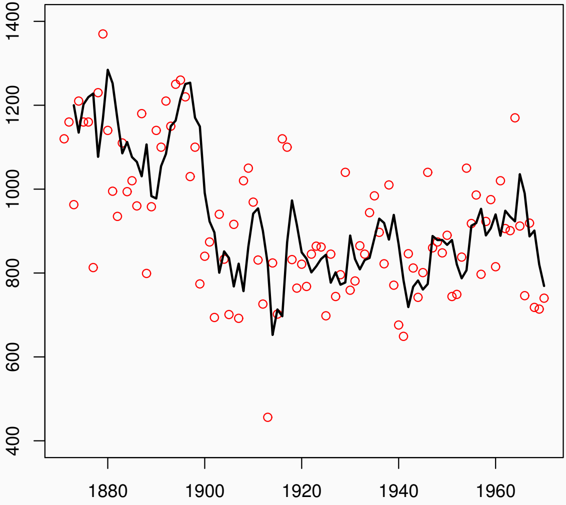

ldeaths
Time
1500
2000
2500
3000
3500
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980

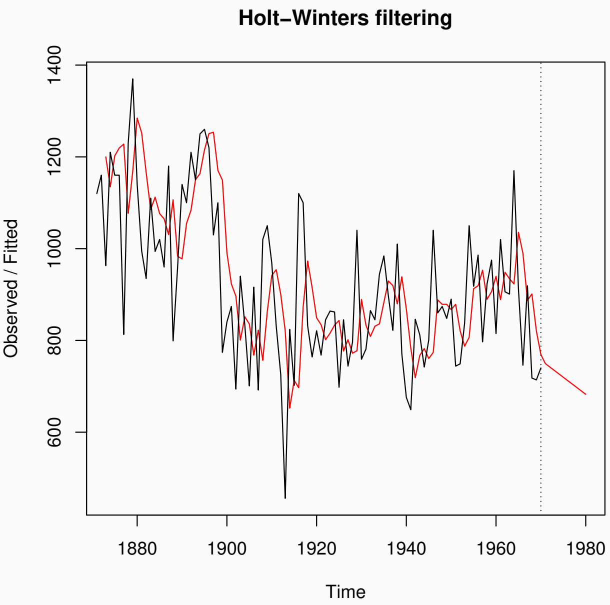

Holt−Winters filtering
Observed / Fitted
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
Time

Exemplo. Aplicando o alisamento exponencial sem sazonalidade à série `Nile`.

```
> data(Nile)
> m = HoltWinters(Nile,gamma=FALSE)
```

```
        alpha      gamma
[1,] 0.4190643 0.05987705
```


400
600
800
1000
1200
1400
1880
1900
1920
1940
1960


Holt−Winters filtering
Observed / Fitted
Time
1400
1200
1000
800
600
1880
1900
1920
1940
1960
1980

Tendência Exponencial

Para séries sem variação sazonal, com tendência exponencial,

$$\begin{aligned} L_t &= \alpha x_t + (1-\alpha)(L_{t-1} T_{t-1}) \\ T_t &= \gamma(L_t / L_{t-1}) + (1-\gamma) T_{t-1}, \end{aligned}$$

Nivel e tendência tem efeitos multiplicativos ao invés de aditivos.

A interpretação de T_t agora é como taxa de crescimento.

Previsão k passos à frente no tempo t é,

$$\hat{x}_t(k) = L_t T_t^k.$$

Tendência Amortecida Aditiva

Para séries sem variação sazonal, com tendência amortecida,

$$\begin{aligned} L_t &= \alpha x_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + \phi T_{t-1}) \\ T_t &= \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)\phi T_{t-1}, \end{aligned}$$

sendo $0 < \phi \leq 1$ o parâmetro de amortecimento.

A previsão k passos à frente no tempo t é,

$$\hat{x}_t(k) = L_t + (\phi + \phi^2 + \cdots + \phi^k) T_t.$$

.

- Quando $\phi = 1$ temos o método de Holt e a previsão $\hat{x}_t(k) = L_t + kT_t$.
- Para ϕ mais próximo de zero as previsões de curto prazo seguem uma tendência e no longo prazo se aproximam de uma constante.
- As previsões convergem para

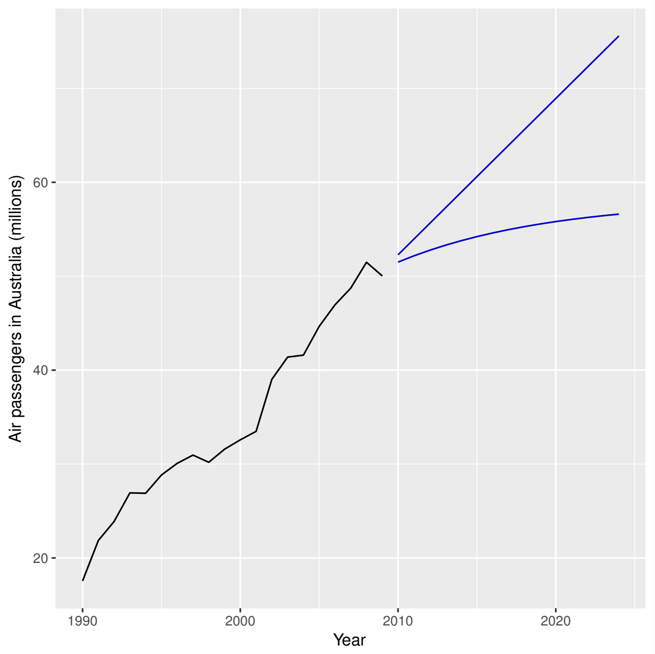
$$L_t + \frac{\phi}{1-\phi} T_t$$

quando $k \to \infty$. Verifique!

Exemplo. Totais anuais de passageiros (domésticos e internacionais) em companhias aéreas registradas na Austrália.

```
Time Series:
Start = 1990
End = 2009
Frequency = 1
 [1] 17.55340 21.86010 23.88660 26.92930 26.88850 28.83140
 [7] 30.07510 30.95350 30.18570 31.57970 32.57757 33.47740
[13] 39.02158 41.38643 41.59655 44.65732 46.95177 48.72884
[19] 51.48843 50.02697
```

Previsões usando os métodos de Holt e tendência amortecida, $\phi = 0.9$



Tendência Amortecida Multiplicativa

Séries sem variação sazonal, com tendência amortecida multiplicativa.

$$
\begin{aligned}
L_t &= \alpha x_t + (1-\alpha) L_{t-1} T_{t-1}^{\phi} \\
T_t &= \gamma (L_t / L_{t-1}) + (1-\gamma) T_{t-1}^{\phi},
\end{aligned}
$$

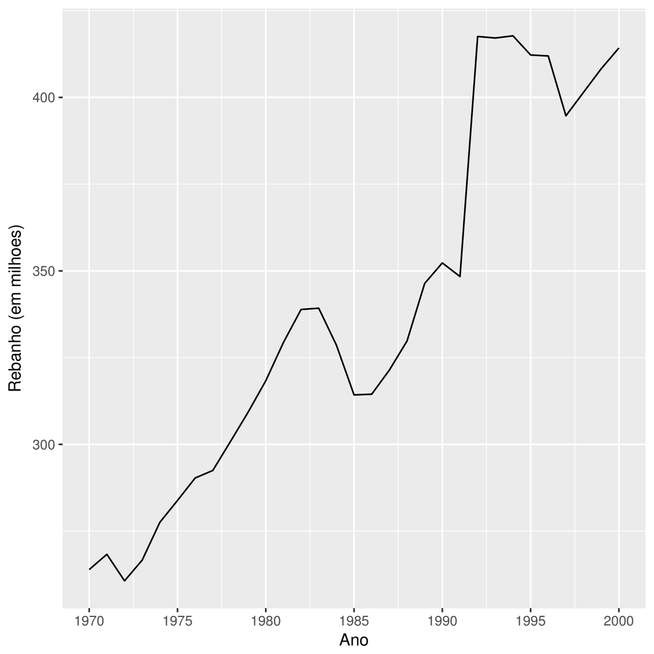
sendo $0 < \phi \leq 1$ o parâmetro de amortecimento.

A previsão k passos à frente no tempo t é,

$$\hat{x}_t(k) = L_t T_t^{\phi + \phi^2 + \cdots + \phi^k}.$$

Exemplo. Comparação de previsões da série Rebanho (em milhões) anual de carneiros na Ásia de 1970 a 2000. Dados disponiveis em `http://data.is/GFxwQi`.

```
Time Series:
Start = 1970
End = 2000
Frequency = 1
 [1] 263.9177 268.3072 260.6626 266.6394 277.5158 283.8340
 [7] 290.3090 292.4742 300.8307 309.2867 318.3311 329.3724
[13] 338.8840 339.2441 328.6006 314.2554 314.4597 321.4138
[19] 329.7893 346.3852 352.2979 348.3705 417.5629 417.1236
[25] 417.7495 412.2339 411.9468 394.6971 401.4993 408.2705
[31] 414.2428
```



Rebanho (em milhoes)
400
350
300
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
Ano

Previsões 1 a 15 passos à frente.