SME0808 Séries Temporais
ICMC-USP Ricardo Ehlers
Lista 6

1. Seja o modelo MA(1), $X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$.
   (a) Obtenha a previsão 1 passo à frente em $t = n$ e mostre que as previsões k passos à frente para $k = 2, 3, \ldots$ são iguais a zero.
   (b) Mostre que a variância do erro de previsão k passos à frente é dada por σ_ϵ^2 para $k = 1$ e $(1 + \theta^2)\sigma_\epsilon^2$ para $k = 2, 3, \ldots$.

2. Seja o modelo $X_t = 90 + \epsilon_t + 0,8\epsilon_{t-1} + 0,5\epsilon_{t-1}$.
   (a) Obtenha as previsões k passos à frente em $t = n$.
   (b) Obtenha a variância do erro de previsão k passos à frente.

3. Seja o modelo AR(1), $X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t$.
   (a) Mostre que a previsão k passos à frente feita em $t = n$ é dada por $\alpha^k x_n$.
   (b) Mostre que a variância do erro de previsão k passos à frente é dada por $\sigma_\epsilon^2(1 - \alpha^{2k})/(1 - \alpha^2)$.

4. Para o modelo SARIMA$(0, 0, 1) \times (1, 1, 0)_{12}$ obtenha as previsões no tempo $t = n$ para até 12 períodos à frente em termos das observações e residuos até o tempo $t = n$.

5. Seja o modelo $(1 - B)(1 - 0,2B)X_t = (1 - 0,5B)\epsilon_t$.
   (a) Obtenha as previsões 1 e 2 passos à frente.
   (b) Mostre que as previsões 3 ou mais passos à frente são dadas pela equação recursiva $\hat{x}_n(k) = 1,2\hat{x}_n(k-1) - 0,2\hat{x}_n(k-2)$.
   (c) Obtenha a variância dos erros de previsão 1, 2 e 3 passos à frente.
   (d) Obtenha a previsão $\hat{x}_n(2)$ e o erro padrão do erro de previsão sabendo que $\epsilon_n = 1$, $x_n = 4$, $x_{n-1} = 3$ e $\sigma_\epsilon^2 = 2$.

6. Seja o modelo ARIMA(1,0,1) para uma série X_t com média zero.

(a) Reescreva o modelo na forma de choques aleatórios, i.e.

$$X_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \dots$$

obtendo uma expressão geral para os coeficientes ψ_j.

(b) Escreva a expressão da variância do erro de previsão $e_t(k) = x_{t+k} - \hat{x}_t(k)$.

(c) Obtenha as previsões $\hat{x}_t(k)$ para horizontes $k = 1$ e $k > 1$.

7. Sabe-se que se $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $X = \exp(Y)$ tem distribuição log-normal com $E(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ e $Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$. Se foram obtidas as previsões k passos à frente de $Y_t = \log(X_t)$ e assumindo que Y_t é normal mostre que as previsões na escala original são dadas por

$$\hat{X}_t(k) = \exp(\hat{Y}_t(k) + V_y(k)/2)$$

com variância

$$\exp(2\hat{Y}_t(k) + V_y(k)) \ [\exp(V_y(k)) - 1].$$

8. Deseja-se ajustar um modelo ARMA a uma série temporal estacionária mas os gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial são pouco informativos. Descreva um procedimento de identificação alternativo (você tem um pacote estatístico para fazer as contas).

9. Descreva um procedimento para obter previsões h passos à frente em modelos autoregressivos com número máximo de defasagens igual a $k_{\max}$ utilizando todos os modelos estimados. Ilustre situações em que as previsões pontuais médias devem ser muito similares (ou muito diferentes) das previsões usando somente o melhor modelo.

10. Faça os exercicios do capítulo 9 em Morettin & Toloi.