P1 - SME 301 - 07/05/2012 - Nome:........................ N.USP:.........

Importante:

- Explique de maneira clara as soluções, preferencialmente baseando-se no formulário.

** Use o verso da folha de questões. **

1	
2	
3	
Total	

Exercício 1. *Encontre a decomposição LU para A dada abaixo. Com ela, resolva* $Ax = [1\ \ 2\ \ 2]'$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2. *Estude a convergência do método de Newton para o problema* $sin(3x) + 0,2x^2 = 0$, *em torno da solução próxima de* -1.1. *Obs - o m. Newton é um caso particular de MIL.*

Exercício 3. *Um certo problema de estimação pode ser colocado em forma linear* $A_k x_k = b_k$, $k \geq 0$, *onde* x_k *é o vetor calculado a cada "instante" k. Os valores de* A_k *e* b_k *só chegam em cada instante k. Considere que cada elemento de* $x_k - x_{k-1}$ *resulta menor que m em módulo.*

Dada as características do problema (dimensão de A, velocidade do processador, etc.), não é possível obter x_k *por eliminação de Gauss ou qualquer outro método exato. Optou-se por usar Jacobi-Richardson. Ainda assim, este método só consegue realizar duas interações entre instantes de tempo sucessivos. Desta forma, inicia-se com um vetor qualquer* x_0^0, *o método J-R faz duas iterações e obtem uma estimativa atualizada* x_0^2; *em seguida chegam as informações sobre* A_1, b_1 *e o método re-inicializa com* $x_1^0 = x_0^2$ *e faz duas iterações que levam a* x_1^2, *e assim sucessivamente.*

Obtenha uma fórmula para o erro e_k *da estimativa na k-ésima iteração,* $e_k = x_k^2 - x_k$, *levando em conta que todas as matrizes* $B_k = (-L_k - R_k)$ *tem norma sup menor ou igual a r. Note que a fórmula fica em função de* x_0^0. *Para* $r = 0,9$ *e* $m = 2$, *calcule o erro assintótico (quando k tende a infinito).*

Def.: um ponto $\bar{x} \in [a,b]$ é uma raiz de multiplicidade m da equação $f(x) = 0$ se $f(x) = (x-\bar{x})^m mg(x)$ com $g(\bar{x}) \neq 0$ em $[a,b]$.

$$\text{Erro relativo: } \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon. \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c. \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\bar{x})^k f^{(k)}(\bar{x})}{k!}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \quad \text{TVM: } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \qquad |\varphi'(x)| = M < 1,\ \forall x \in I.$$

$$|F_x| + |F_y| = k_1 < 1; \quad |G_x| + |G_y| = k_2 < 1. \quad J\,(x_k - x_{k-1}) = -f(x_{k-1}).$$

$$P(x) = (x^2 - \alpha x - \beta)Q(x) + b_1(x-\alpha) + b_0. \quad Q(x) = b_n x^{n-2} + \ldots + b_2.$$

$$b_n = a_n,\ b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_n,\ b_{n-2} = a_{n-2} + \alpha b_{n-1} + \beta b_n,\ \ldots b_1 = a_1 + \alpha b_2 + \beta b_3,\ b_0 = a_0 + \alpha b_1 + \beta b_2.$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial \alpha} = 0,\ \frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha} = b_n,\ \frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha} = b_{n-1} + \alpha\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha},\ \frac{\partial b_{n-3}}{\partial \alpha} = b_{n-2} + \alpha\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha},\ \ldots, \tag{1}$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \alpha} = b_3 + \alpha\frac{\partial b_3}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial b_4}{\partial \alpha}(= \partial b_1/\partial\beta),\ \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = b_2 + \alpha\frac{\partial b_2}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial b_3}{\partial \alpha}(= \partial b_0/\partial\beta),\ \frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = b_1 + \alpha\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha}\delta\alpha_{k-1} + \frac{\partial b_1}{\partial \beta}\delta\beta_{k-1} = -b_1(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) \\ \frac{\partial b_0}{\partial \alpha}\delta\alpha_{k-1} + \frac{\partial b_0}{\partial \beta}\delta\beta_{k-1} = -b_0(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) \end{cases}$$

$$det(A) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}, \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}u_{kj}, & i \leq j, \\ \ell_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}u_{kj}\right)/u_{jj}, & i > j, \end{cases}$$