Estatística I - Desafio

Prof. Eduardo F. Costa

Fila em tempo contínuo - estratégia de atendimento - teste de hipótese

Sistema e modelo

Seja uma fila para um determinado serviço, por exemplo para processar mensagens num sistema de comunicação. Saber modelar as filas e calcular / estimar seu tamanho e outras características é útil, por exemplo, para "projetar" o serviço e estudar novas estratégias.

Nesta atividade, vamos usar duas estratégias de alocação de servidores para atendimento, e comparar sua eficiência por teste de hipóteses, baseado em dados levantados por simulação.

Uma primeira estratégia (chamaremos de **"Estratégia A"**) consiste em alocar mais servidores quando a fila é maior, como acontece, cada vez mais frequentemente, em estabelecimentos comerciais. A fila é modelada pela cadeia de Markov da Figura 2. O estado X denota o número de clientes aguardando, de forma que

$$X(t) = \text{número de clientes na fila após t unidades de tempo de operação.}$$

A fila inicia sempre vazia no instante $t = 0$ [min].

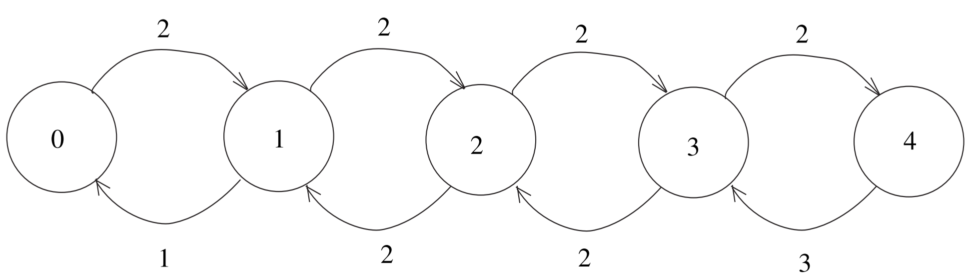

Figura 1: Fila usando a "Estratégia A" de atendimento. Modelo por cadeia de Markov em tempo contínuo. As taxas de transição são em [cliente/min].

A segunda estratégia (**"Estratégia B"**) mantém o número de servidores, de forma que as taxas de atendimento são idênticas. A fila é modelada pela cadeia de Markov da Figura 3.

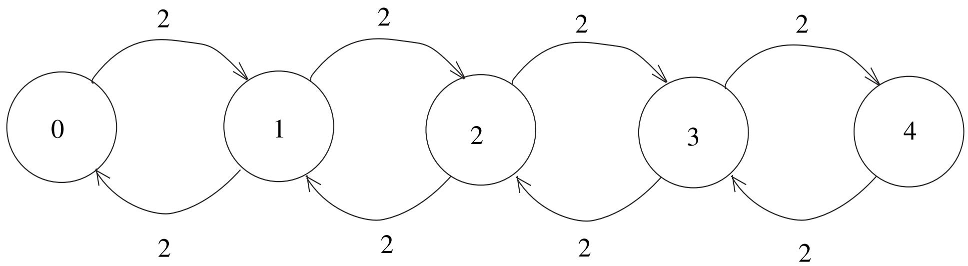

Figura 2: Fila usando a “Estratégia B” de atendimento. Modelo por cadeia de Markov em tempo contínuo. As taxas de transição são em [cliente/min].

Atividades a desenvolver

1) Teste o código para simulação da fila que foi disponibilizado, ou o seu próprio código. Para ilustrar, trace 5 curvas de $X(t)$ versus t num mesmo gráfico.

2) O número médio de pessoas na fila (em regime, com $t \to \infty$) para a Estratégia B pode ser calculado via a distribuição limite $\pi_B(\infty)$, ou aproximadamente pela distribuição com $t = 20$ ou mais. Fazendo isso, $\pi_B(20) = \pi(0) * e^{(\Lambda 20)} \approx [1/5 \;\; 1/5 \;\; 1/5 \;\; 1/5 \;\; 1/5 \;\;]$, o que leva a $E_B(X(\infty)) = 2$.

   Conduza um teste de hipótese para testar se a Estratégia A é igual a estratégia B, ou A é pior que B:

$$\mathcal{H}_0 : \mu_A = 2 \;\text{ versus }\; \mathcal{H}_1 : \mu_A > 2.$$

   Use nível de significância de 1% e considere uma amostra de tamanho $N = 40$. Qual o valor de x_c? Simule a fila com a Estratégia A para obter o valor observado

$$\bar{X}_{A,40} = \sum_{n=1}^{40} X_{A,n}(t = 20).$$

   Cada $X_{A,n}(t = 20)$ é obtido por simulação, usando o código.

   Observação: o desvio padrão pode ser calculado via π_A ou estimado pelas amostras. Vamos optar por estimar pelas amostras. Lembre que o comando std, aplicado às amostras, corresponde à estimativa do desvio padrão da variável que está sendo amostrada - nesse caso $X_A(t = 20)$. Para obter o desvio padrão da variável $\bar{X}_{A,40}$ tem que dividir o resultado por $\sqrt{N}$. E deve utilizar distribuição t de Student com $N - 1$ graus de liberdade.

3) Refaça com $N = 1000$. Agora você consegue concluir que A é pior?

4) Vamos refazer (2), agora em termos do tempo médio para ser atendido. Seja T a variável "tempo de atendimento para um cliente que chega na fila já em regime".

   O tempo médio de atendimento para B pode ser calculado de maneira simples baseado no $\pi_B(20)$. Cada atendimento leva em média $1/2$ [min] (isso vem direto da distribuição exponencial), então

$$\begin{aligned} E(T) &= E(T|X=0)P(X=0)+\cdots+E(T|X=4)P(X=4) \\ &= 0P(X=0)+1(1/2)P(X=1)+\cdots+4(1/2)P(X=4) \\ &= 10*(1/2)*(1/5) = 1 \text{ [min]}. \end{aligned}$$

   Verifique se, para a variável T,

$$\mathcal{H}_0 : \mu_A = 1 \text{ versus } \mathcal{H}_1 : \mu_A > 1.$$

   Mantenha os parâmetros de projeto do teste. Obs.: assumimos aqui que a fila é do tipo first-in first-out.

Relatório

Deve ter título, nome dos alunos (até 3), data, resumo de até 5 linhas, descrição das atividades acima (junto com comentários solicitados e respostas às perguntas).

Dinâmica da atividade

O objetivo da aula-desafio é desenvolver as atividades, tirar dúvidas, aprender e ensinar os colegas. Para isso, é permitido conversar em voz baixa, deslocar-se livremente, enfim, ter um comportamento pró-ativo e de colaboração. Vamos aprender juntos!

Observação 1. *Nesse problema, dada a simplicidade do modelo de fila e das perguntas, poderíamos responder tudo de forma teórica sem usar teste de hipótese. Por exemplo,* $\pi_A(20) = \pi(0)e^{(20\Lambda)} \approx [0.12\ 0.24\ 0.24\ 0.24\ 0.16]$, *logo* $E_A(X(\infty)) \approx 2.08$, *comprovando que o desempenho em termos de número médio de pessoas na fila é pior na Estratégia A.*

Contudo, se o modelo sofrer qualquer pequena alteração, pode ser muito difícil refazer a teoria e os cálculos, enquanto a simulação em geral é bem mais fácil de alterar. Para ilustrar, se entre cada atendimento o servidor "descansar" um tempo fixo 0.2 *[min], a teoria acima não se aplica. Na simulação, toda vez que houver uma saída de cliente acrescentamos* 0.2 *ao tempo de permanência; no código, implementa-se algo simples como: se* $X(k+1) < X(k)$ *então* $T(j) = T(j) + 0.2$ *para todo* $j \geq k$.

Código para simular fila - Estratégia A

```
N_saltos = 100;
Lambda = [-2 2 0 0 0 ;...
1 -3 2 0 0 ;...
0 2 -4 2 0 ;...
0 0 2 -4 2 ;...
0 0 0 3 -3];

expm(Lambda*20)

% simulando os estados:
Pr = [ 0 1 0 0 0 ; ...
1/3 0 2/3 0 0 ;...
0 .5 0 .5 0;...
0 0 .5 0 .5;...
0 0 0 1 0];
X=[]; X=0;
for k=1:N_saltos,
X = [ X sum(rand>cumsum(Pr(X(k)+1,:))) ];
end

% simulando tempos de permanencia:
T=[];
for k=1:N_saltos+1,
T = [ T log(1-rand/(Lambda(X(k)+1,X(k)+1))) ];
end

Tsum = cumsum(T);

% tracando um grafico:
ord = [ X(1) ]; abx=[ 0 ];
for k=1:N_saltos-1,
ord = [ ord X(k) X(k+1) ];
abx = [ abx Tsum(k) Tsum(k) ];
end
ord = [ ord X(k+1) ];
abx = [ abx Tsum(k+1) ];

plot(abx,ord)
```