

NOTAS DE AULA

CURVAS PARAMETRIZADAS

Cláudio Martins Mendes

Segundo Semestre de 2005

Sumário

1	Funções com Valores Vetoriais	2
1.1	Definições - Propriedades	2
1.2	Movimentos no Espaço	3

Capítulo 1

Funções com Valores Vetoriais

Até aqui trabalhamos com funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Estudaremos agora funções com valores vetoriais. As mesmas são úteis para descrever superfícies e curvas espaciais. São também úteis para descrever o movimento de objetos no espaço.

1.1 Definições - Propriedades

Definição 1.1.1. $F : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}$, intervalo, $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ ou $F(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ é dita uma **função com valores vetoriais**.

Definição 1.1.2. Se $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ então

$$\lim_{t \rightarrow a} F(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \lim_{t \rightarrow a} f_2(t), \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) \right).$$

Definição 1.1.3. F é dita **contínua em a** se $\lim_{t \rightarrow a} F(t) = F(a)$.

Definição 1.1.4. F tem derivada $F'(t)$ se $F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$.

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_3(t+h) - f_3(t)}{h} \right) \\ &= (f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)). \end{aligned}$$

Definição 1.1.5. $\int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \int_a^b f_3(t)dt \right)$

ou

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt \cdot \vec{i} + \int_a^b f_2(t)dt \cdot \vec{j} + \int_a^b f_3(t)dt \cdot \vec{k} .$$

Propriedades: Consideremos:

$$F, G : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$$

(i) $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$

(ii) $(\mu \cdot F)'(t) = \mu(t)F'(t) + \mu'(t)F(t)$

(iii) $(F \cdot G)'(t) = F(t) \cdot G'(t) + F'(t) \cdot G(t)$, onde \cdot denota o produto escalar.

(iv) $(F \times G)'(t) = F(t) \times G'(t) + F'(t) \times G(t)$, onde \times denota o produto vetorial.

Faremos a prova de (iii). As outras serão deixadas como exercício.

Prova de (iii):

Seja $F(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ e $G(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}$.

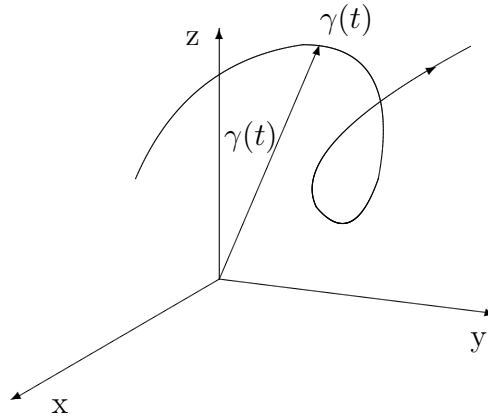
$$(F \cdot G)(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t) \cdot g_i(t)$$

$$\begin{aligned} (F \cdot G)'(t) &= \left(\sum_{i=1}^3 f_i(t) \cdot g_i(t) \right)' = \sum_{i=1}^3 (f_i(t) \cdot g_i(t))' = \\ &= \sum_{i=1}^3 (f_i(t) \cdot g_i'(t) + f_i'(t) \cdot g_i(t)) = \sum_{i=1}^3 f_i(t) \cdot g_i'(t) + \sum_{i=1}^3 f_i'(t) \cdot g_i(t) = \\ &= F(t) \cdot G'(t) + F'(t) \cdot G(t) . \end{aligned}$$

Passaremos a nos utilizar de funções de tipo acima para estudar os movimentos no espaço.

1.2 Movimentos no Espaço

Para descrever o movimento de uma partícula no espaço precisamos explicar onde a partícula está em cada instante de tempo t de um certo intervalo. Assim, a cada instante t no intervalo considerado I , corresponde um ponto $\gamma(t)$ e o movimento é descrito por uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Definição 1.2.1. Uma **curva no** \mathbb{R}^3 é uma aplicação contínua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde I é um intervalo da reta.

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)).$$

As equações :
$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \\ z = \gamma_3(t) \end{cases}$$
 são chamadas **equações paramétricas de γ** .

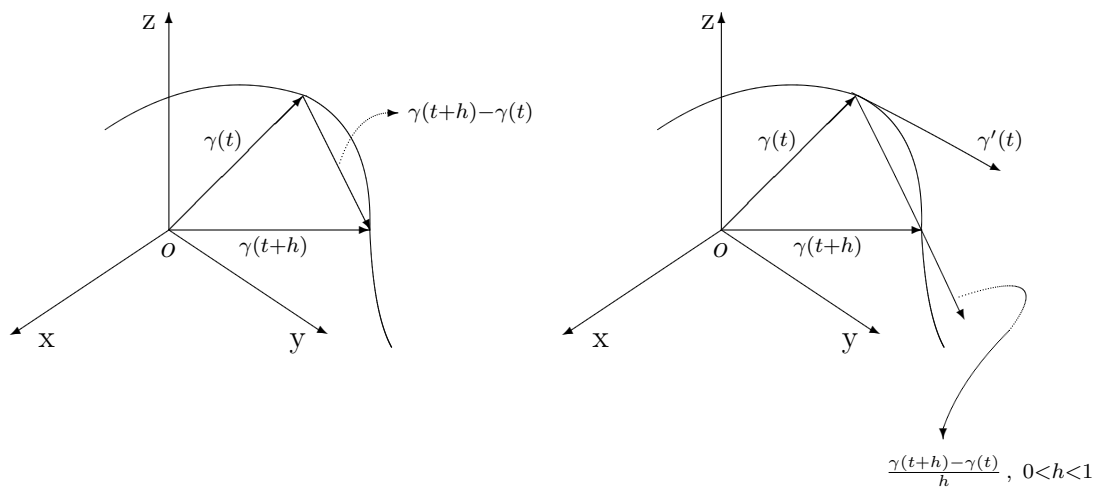
Como vimos, a função vetorial γ tem derivada $\gamma'(t)$ em $t \in I$ se

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

Lembre-se: $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t))$.

Definição 1.2.2. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. **Traço de γ** é a imagem do intervalo I por γ . γ é dita **diferenciável de classe C^r** se $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ o forem em I .

A figura a seguir mostra que o vetor $\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$ tem a direção que, conforme h tende a zero, aproxima-se da direção que costumamos chamar a direção tangente à curva γ em $\gamma(t)$.



A derivada $\gamma'(t)$ se existe e é diferente do vetor nulo é chamada o **vetor tangente** a γ em $\gamma(t)$. Ele é usualmente representado com a origem em $\gamma(t)$, como na figura.

Exemplos:

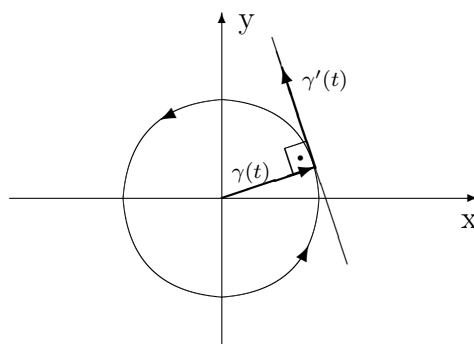
1. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Temos $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

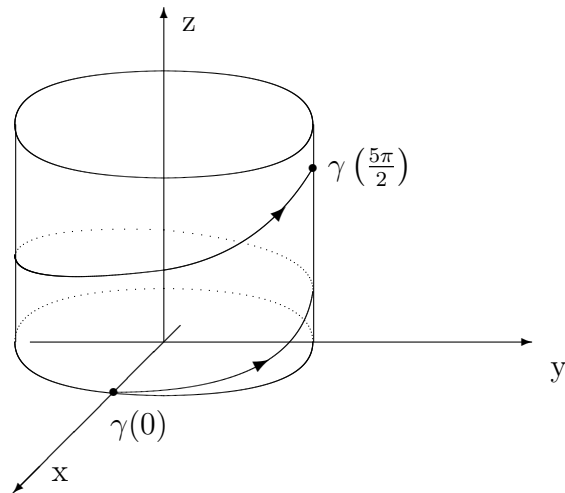
Notemos que:

(i) $\|\gamma'(t)\| = 1$

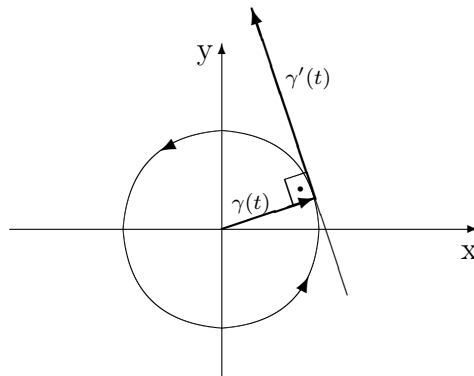
(ii) $\gamma'(t) \cdot \gamma(t) = 0$



2. $\gamma : \left[0, \frac{5\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.



3. $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$; dada por $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$.
 Aqui temos $\gamma'(t) = 2(-\sin 2t, \cos 2t)$.



Compare com o exemplo 1. Note que diferentes curvas podem ter o mesmo traço.

4. Curvas podem ser, em geral, muito arbitrárias. Por exemplo, existe uma curva contínua, a curva de Peano, cujo traço é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ (Para maiores detalhes o leitor pode consultar o Livro de Elon Lages Lima, Elementos de Topologia Geral , pg. 252)

Muitas vezes chamamos o vetor $\gamma'(t)$ como o **vetor velocidade**. Isto tem sentido pois estamos entendendo uma curva como o movimento de uma partícula no espaço. Esse movimento é descrito em função do tempo por $\gamma(t)$. Observe que o número $\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{|h|}$,

para h pequeno, é a velocidade média de γ no intervalo de t a $t+h$. Se $\gamma'(t)$ existe, não é difícil provar que

$$\|\gamma'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{|h|}.$$

De fato: Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{|h|} - \|\gamma'(t)\| \right| \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\leq \left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{|h|} - \gamma'(t) \right\| \rightarrow 0, \text{ com } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

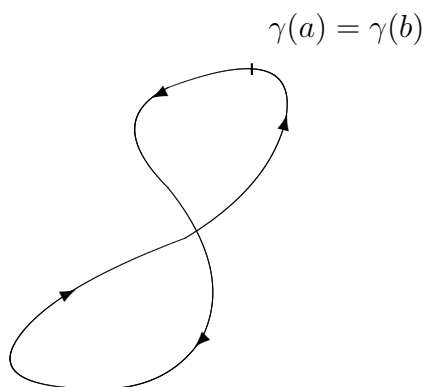
Logo $\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{|h|} \rightarrow \|\gamma'(t)\|$, com $h \rightarrow 0$.

(*) Usamos a propriedade $\left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

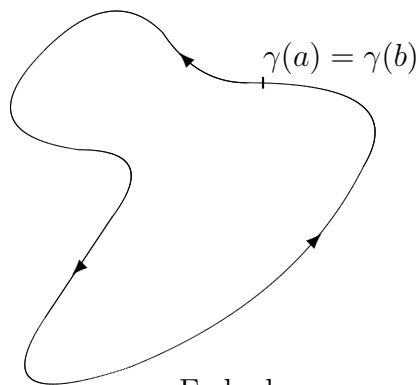
Assim $\|\gamma'(t)\|$ é um limite de velocidades médias sobre intervalos arbitrariamente pequenos. Por esta razão $\|\gamma'(t)\|$ é chamado a velocidade de γ no ponto $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ é dito o vetor velocidade de γ no ponto $\gamma(t)$.

Definição 1.2.3. Uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **regular (ou suave)** se for diferenciável de classe C^1 e se $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t)) \neq (0, 0, 0)$, $\forall t \in I$.

Definição 1.2.4. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **regular por partes (ou suave por partes)** se existir uma partição finita de $[a, b]$ em subintervalos tal que a restrição de γ a cada subintervalo seja regular. γ é dita **fechada** se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Se γ é fechada e o seu traço não se intercepta em nenhum outro ponto então γ é dita **curva fechada simples**.



Fechada não
simples

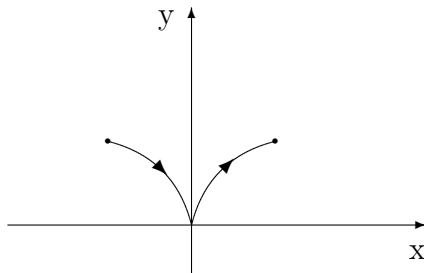


Fechada
simples

Exemplos:

1. $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3, t^2)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = t^2 = (t^3)^{2/3} = x^{2/3} \\ \text{Assim o traço da curva está contido no gráfico da função } y = x^{2/3}. \end{array} \right.$$



Notemos que $\gamma \in C^\infty$. Ainda $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$, $t \in (-1, 1)$.

γ não é regular, uma vez que $\gamma'(0) = (0, 0)$.

γ é regular por partes.

Obs. Note a diferença entre traço de curva e gráfico de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$.

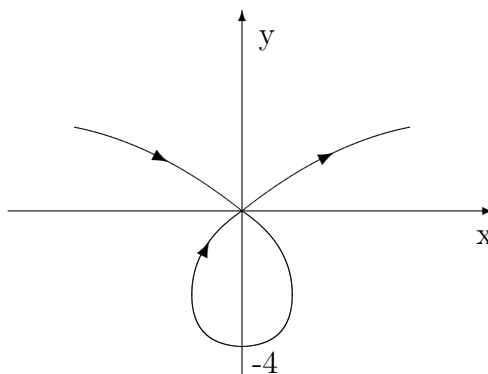
$$\gamma'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq (0, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma \in C^\infty.$$

Assim γ é regular.

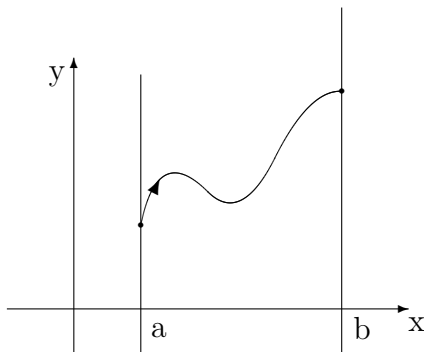
Note: $\gamma(-2) = \gamma(2) = (0, 0)$

$$\gamma'(-2) = (8, -4) \quad \text{e} \quad \gamma'(2) = (8, 4)$$



3. O gráfico de uma função contínua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, pode ser parametrizado assim:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

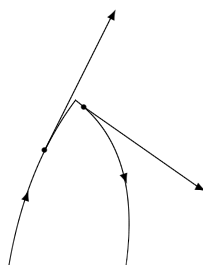


Um resultado que temos é o seguinte: uma curva regular (ou suave) não tem bicos (quinas).

De fato:

Uma curva regular é tal que o vetor tangente varia de maneira contínua.

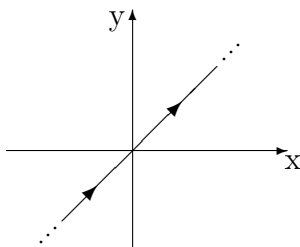
Em um bico (quina) a mudança do vetor tangente só pode ser contínua se no bico ele for nulo (contra a regularidade da curva).



A recíproca deste resultado não é verdadeira. Para tanto consideremos o exemplo:

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t^3, t^3).$$

Neste caso $\gamma'(0) = (0, 0)$ e assim γ não é regular, mas o seu traço não forma bico.

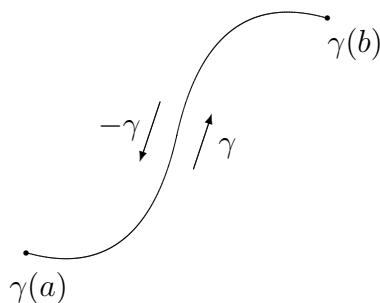


Iremos agora fazer uma **convenção**:

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Iremos denotar por $-\gamma$ a curva definida como:

$$-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad -\gamma(t) = \gamma(a + b - t).$$



Exercícios:

1. Mostre que se $\|\gamma(t)\|$ é constante então $\gamma'(t)$ é ortogonal a $\gamma(t)$, $\forall t \in I$.

Resolução:

Temos $(\gamma \cdot \gamma)(t) = \gamma(t) \cdot \gamma(t) = \|\gamma(t)\|^2 = C$.

Derivando obtemos $(\gamma \cdot \gamma)'(t) = 0$.

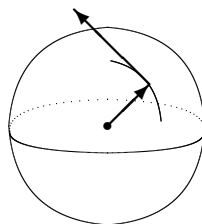
Usando a propriedade da derivada do produto escalar obtemos:

$$(\gamma \cdot \gamma)'(t) = 2\gamma'(t) \cdot \gamma(t).$$

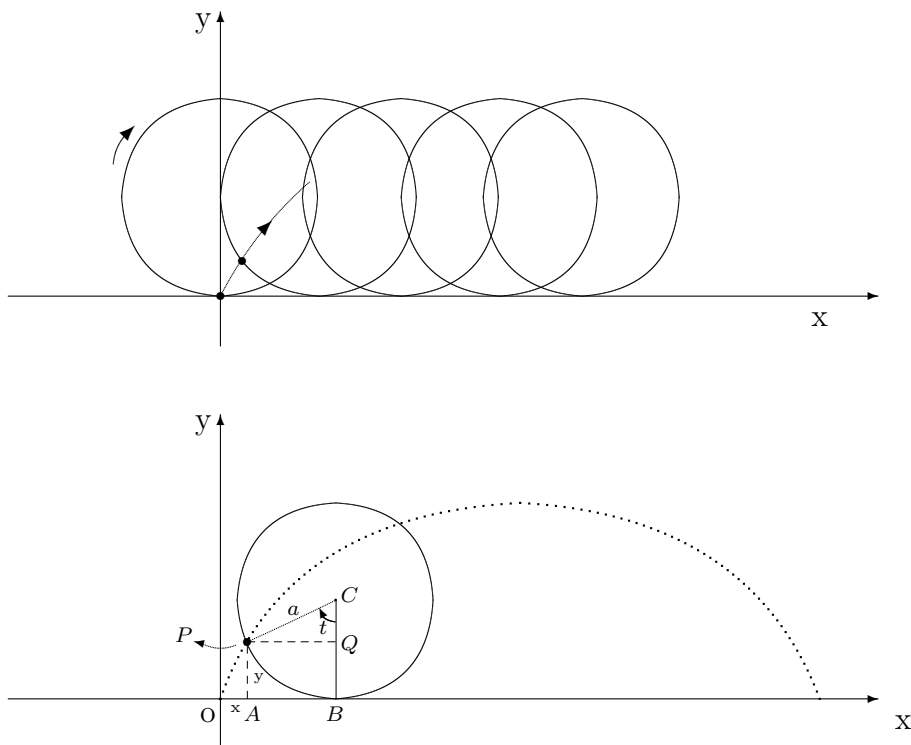
Logo $\gamma'(t) \cdot \gamma(t) = 0$.

Assim $\gamma'(t)$ é ortogonal a $\gamma(t)$, $\forall t \in I$.

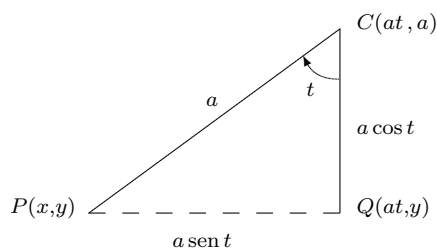
Observe: Se $\|\gamma(t)\|$ é constante então a extremidade de $\gamma(t)$ se desloca sobre uma superfície esférica de centro na origem. O vetor tangente $\gamma'(t)$ é sempre ortogonal a um raio da esfera.



2. A figura abaixo é descrita por um ponto P sobre uma circunferência de raio a que rola sobre o eixo x . Esta curva é chamada **ciclóide**. Determinar uma parametrização dela.



Seja $P(x, y)$. Dando um "zoom":



O giro da circunferência implica que $OB = \text{arco } BP = a \cdot t$.

Logo: $x = OB - AB = OB - PQ = at - a \text{ sen } t = a(t - \text{sen } t)$.

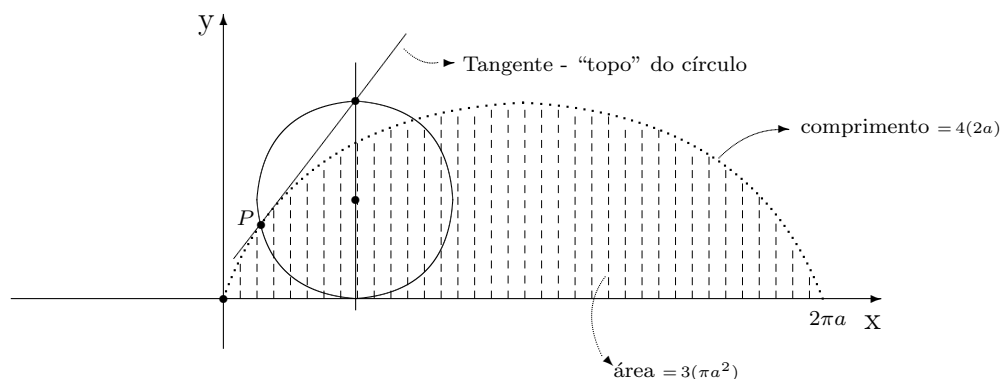
Também $y = BC - QC = a - a \text{ cos } t = a(1 - \text{cos } t)$.

Portanto a ciclóide tem a representação paramétrica:

$$\begin{cases} x = a(t - \text{sen } t) \\ y = a(1 - \text{cos } t) \end{cases}$$

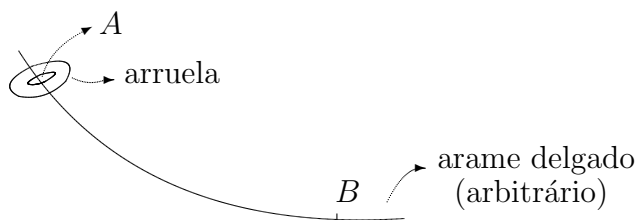
Assim: $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ e $\frac{dy}{dt} = a \sin t$, que são funções contínuas. Ainda, estas se anulam em $t = 2n\pi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo a cicloide não é suave.

Nota 1: Vamos registrar aqui algumas propriedades da cicloide. Para maiores detalhes o leitor pode consultar o Livro Cálculo com Geometria Analítica - Vol. 2 - Simmons - pg. 259.



Nota 2: Vamos aqui também apresentar algumas curiosidades à respeito desta curva. O leitor interessado em maiores detalhes pode consultar o Livro citado anteriormente na Nota 1, pg. 264.

Na situação representada a seguir, consideremos o problema de deslizar arruela sob ação da gravidade somente.



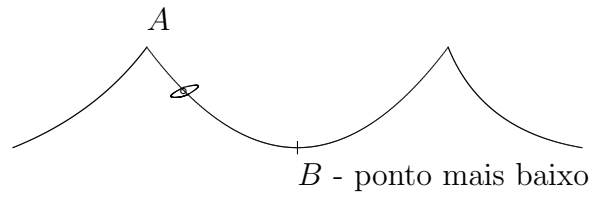
Qual deve ser a forma do arame (trajetória) que permita a arruela ir de A até B no menor tempo possível?

A resposta é uma cicloide (invertida) com A na origem.

Não é o segmento de reta.

(Menor tempo: braquistócrona)

Outra propriedade:



Soltando-se a arruela em **qualquer** ponto entre A e B o tempo levado até chegar a B é o mesmo.

(Tempos iguais: Tautócrona)

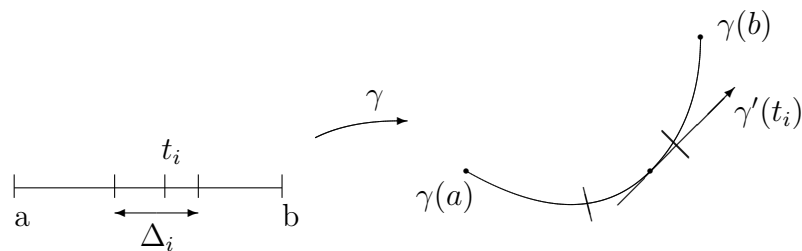
Ambos problemas foram resolvidos no sec. XVII pelos Irmãos Bernouilli.



O **comprimento de uma curva** é a distância total percorrida pela partícula móvel. Prova-se que dada uma curva diferenciável de classe C^1 , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, seu comprimento é dado por

$$c(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Vejamos uma interpretação:



$\|\gamma'(t_i)\| \cdot \Delta_i \simeq$ comprimento do arco destacado, melhorando a aproximação quando $\Delta_i \rightarrow 0$.

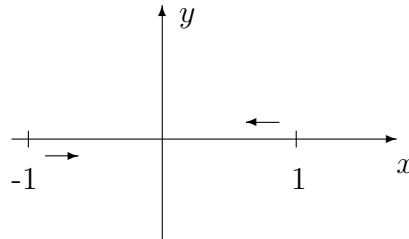
Assim:

$$c(\gamma) = \lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\gamma'_i(t_i)\| \cdot \Delta_i = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Observação: O Leitor interessado na dedução desta fórmula pode consultar, por exemplo, o livro *Advanced Calculus - Buck* - pg. 321.

Exemplos:

1. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, 0)$



O comprimento da curva é 4. Calcule pela definição.

2. Calcular o comprimento da hélice circular $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$c(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2} \pi$$

3. Calcular o comprimento do gráfico da função de classe C^1 , $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Podemos pensar na parametrização $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$.

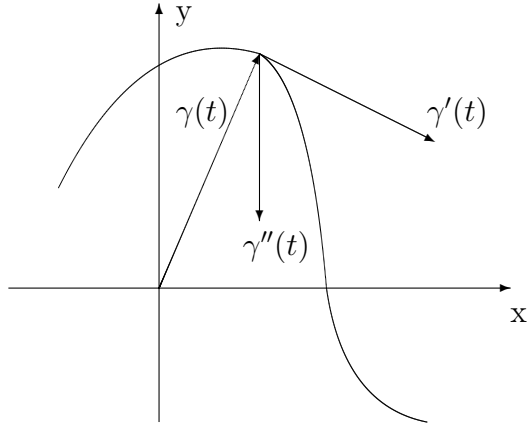
$$c(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt \text{ - fórmula já deduzida anteriormente.}$$

Definição 1.2.5. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dizemos: $\gamma(t)$ - vetor posição.*

$\gamma'(t)$ - vetor velocidade. $\gamma''(t)$ - vetor aceleração.

Exemplos:

1. Consideremos a situação:



Conclua que $\gamma''(t)$ aponta para o lado c\u00f4ncavo de γ , como ilustrado acima.

2. Uma part\u00edcula desloca-se num plano obedecendo a lei:

$$\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^2 - t)\vec{i} + t\vec{j}$$

Determine a velocidade e a acelera\u00e7\u00e3o no instante t . Esboce a trajet\u00f3ria e represente geometricamente $\gamma'(1)$ e $\gamma''(1)$.

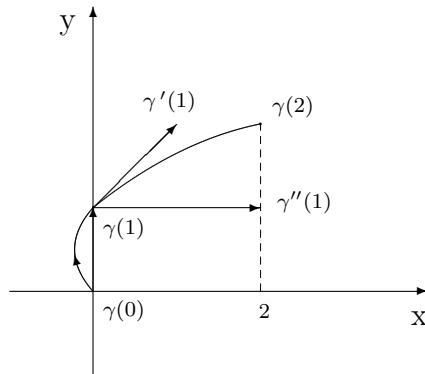
$$\gamma'(t) = (2t - 1)\vec{i} + \vec{j}$$

$$\gamma''(t) = 2\vec{i}$$

$$\gamma(1) = (0, 1)$$

$$\gamma'(1) = \vec{i} + \vec{j}$$

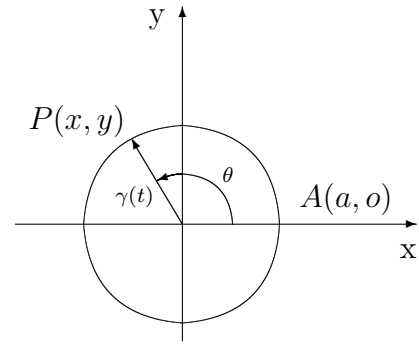
$$\gamma''(1) = 2\vec{i}$$



3. Uma part\u00edcula percorre uma circunfer\u00eancia com velocidade angular constante. Mostre que a acelera\u00e7\u00e3o \u00e9 representada por um vetor de m\u00f3dulo constante, orientado para o centro da circunfer\u00eancia (este vetor \u00e9 chamado **acelera\u00e7\u00e3o centr\u00edpeta**).

Sem perda de generalidade, podemos supor:

θ = ângulo formado por
 \vec{OP} no instante t .



Temos: velocidade angular $w = \text{constante}$.

Assim: $\theta = w \cdot t$.

Logo:
$$\begin{cases} x = a \cos (wt) \\ y = a \text{ sen } (wt) . \end{cases}$$

$$\gamma(t) = a \cos(wt)\vec{i} + a \text{ sen}(wt)\vec{j} .$$

$$\gamma'(t) = -a w \text{ sen}(wt)\vec{i} + a w \cos(wt)\vec{j} .$$

$$\gamma''(t) = -a w^2 \cos(wt)\vec{i} - a w^2 \text{ sen}(wt)\vec{j} .$$

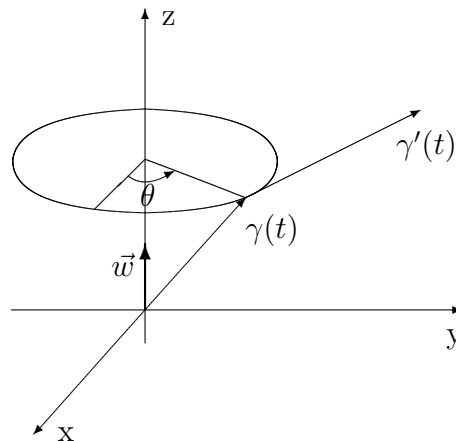
Temos então que:

$$\|\gamma''(t)\| = a w^2 \quad \text{e} \quad \gamma''(t) = -w^2 \gamma(t)$$

o que comprova que $\gamma''(t)$ aponta para o centro da circunferência.

4. Consideremos o movimento dado por:

$$\gamma(t) = a \cos(wt)\vec{i} + a \text{ sen}(wt)\vec{j} + h \vec{k}$$

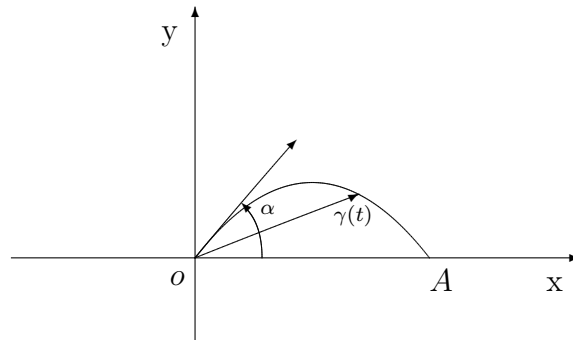


Definimos $\vec{w} = w \vec{k}$ - chamado **velocidade angular** de γ .

$$\vec{w} \times \gamma(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & w \\ a \cos(wt) & a \sin(wt) & h \end{vmatrix} = -aw \sin(wt) \vec{i} + aw \cos(wt) \vec{j} = \gamma'(t).$$

Portanto: o vetor velocidade é o produto vetorial da velocidade angular \vec{w} pelo vetor posição $\gamma(t)$.

5. Vamos agora examinar o comportamento de um projétil disparado por um canhão. Introduzimos o sistema de coordenadas.



Vamos desprezar a resistência do ar, considerando apenas a força da gravidade.

Seja $\|\vec{v}_0\| = v_0$

$\vec{g} = -g \vec{j}$, onde $\|\vec{g}\| = g = 9,8 m/s^2$

Pela 2ª Lei de Newton ($\vec{F} = m \vec{a}$) temos:

$$m \vec{a} = m \vec{g}$$

ou

$$\gamma''(t) = \vec{g}$$

Integrando:

$$\gamma'(t) = t \cdot \vec{g} + \vec{c}$$

Temos que $\vec{v}_0 = \gamma'(0) = \vec{c}$

Logo $\gamma'(t) = t \vec{g} + \vec{v}_0$

Integrando novamente:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} t^2 \vec{g} + t \vec{v}_0 + \vec{d}$$

Ainda: $\vec{0} = \gamma(0) = \vec{d}$

Logo: $\gamma(t) = \frac{1}{2} t^2 \vec{g} + t \vec{v}_0 = -\frac{1}{2} t^2 g \vec{j} + t(v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{j})$

Temos então as equações paramétricas:

$$(*) \quad \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha)t \\ y = -\frac{1}{2} t^2 g + (v_0 \sin \alpha)t \end{cases}$$

Eliminando t , temos:

$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\operatorname{tg} \alpha)x$ - o que mostra que a trajetória é uma parábola.

Alcance (ou ponto A):

Fazemos $y = 0$ em (*)

$$t\left(-\frac{1}{2} g t + v_0 \sin \alpha\right) = 0$$

$t = 0$ - corresponde ao ponto O ou $t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$ - corresponde ao ponto A .

Substituindo na 1ª equação de (*) obtemos:

$$x = v_0 \cos \alpha \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g} .$$

Em particular: alcance máximo se $\operatorname{sen}(2\alpha) = 1$ ou seja $\alpha = 45^\circ$.

Altura Máxima:

$$y' = -\operatorname{tg} + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Assim a altura máxima ocorre em $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ e $h_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$.