16.4 Exercícios

1–4 □ Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C xy^2\,dx + x^3\,dy$,
C é o retângulo com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$ e $(0, 3)$.

2. $\oint_C y\,dx - x\,dy$,
C é o círculo com centro na origem e raio 1.

3. $\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$,
C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.

4. $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, C é formado pelo arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(2, 4)$ e pelos segmentos de reta de $(2, 4)$ a $(0, 4)$ e de $(0, 4)$ a $(0, 0)$.

CAS **5–6** □ Verifique o Teorema de Green usando um sistema algébrico computacional para calcular tanto a integral de linha quanto a integral dupla.

5. $P(x, y) = x^4y^5$, $Q(x, y) = -x^7y^6$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$

6. $P(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x$, $Q(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$,
C formado pelo arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(0, 0)$.

7–16 □ Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

7. $\int_C e^y\,dx + 2xe^y\,dy$,
C é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$

8. $\int_C x^2y^2\,dx + 4xy^3\,dy$,
C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$ e $(0, 3)$.

9. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right)dx + (2x + \cos y^2)\,dy$,
C é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

10. $\int_C (y^2 - \operatorname{tg}^{-1} x)\,dx + (3x + \operatorname{sen} y)\,dy$,
C é a fronteira da região delimitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = 4$

11. $\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

12. $\int_C \operatorname{sen} y\,dx + x\cos y\,dy$, C é a elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$

13. $\int_C xy\,dx + 2x^2\,dy$,
C consiste no segmento de reta de $(-2, 0)$ a $(2, 0)$ e da metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 4$

14. $\int_C (x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy$,
C é a fronteira da região contida entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$

15. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - x^2y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$, e C consiste no círculo $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e nos segmentos de reta de $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(2, 0)$

16. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = y^6\,\mathbf{i} + xy^5\,\mathbf{j}$, e C é a elipse $4x^2 + y^2 = 1$

17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x até $(1, 0)$, em seguida ao longo de um segmento de reta até $(0, 1)$, e então de volta à origem ao longo do eixo y.

18. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo x até $(2, 0)$, e então ao longo do semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2 \rangle$.

19–20 □ Determine a área da região dada usando uma das fórmulas da Equação 5.

19. A região limitada pela hipociclóide com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

20. A região limitada pela curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

21. (a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), mostre que

$$\int_C x\,dy - y\,dx = x_1y_2 - x_2y_1$$

(b) Se os vértices de um polígono, na ordem anti-horária, são (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), mostre que a área do polígono é

$$A = \tfrac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)]$$

(c) Determine a área do pentágono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

22. Seja D a região limitada por um caminho simples fechado C no plano xy. Utilize o Teorema de Green para provar que as coordenadas do centróide $(\bar{x}, \bar{y})$ de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

onde A é a área de D.

23. Utilize o Exercício 22 para achar o centróide do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

24. Utilize o Exercício 22 para achar o centróide de uma região semicircular de raio a.

25. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C. Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_C y^3\,dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3}\oint_C x^3\,dy$$

Teorema da Divergência de Gauss no plano

pelo Teorema de Green. Mas o integrando na integral dupla é a divergência de **F**. Logo temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

13
$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA}$$

Essa versão diz que a integral de linha do componente normal de **F** ao longo de C é igual à integral dupla da divergência de **F** sobre a região D delimitada por C.

16.5 Exercícios

1–8 □ Determine (a) o rotacional e (b) a divergência do campo vetorial.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2z)\,\mathbf{i} + (x + y + z)\,\mathbf{j} + (x - 2y)\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^y\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{z}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{z}\,\mathbf{j} - \dfrac{1}{z}\,\mathbf{k}$

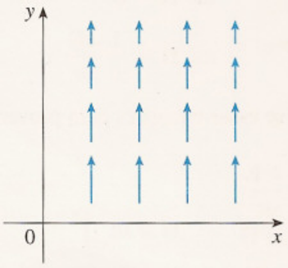
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^{yz}\,\mathbf{i} + ye^{xz}\,\mathbf{j} + ze^{xy}\,\mathbf{k}$

9–11 □ O campo vetorial **F** é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais. (Em outras palavras, **F** é independente de z e seu componente z é 0.)

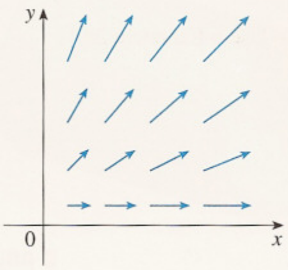
(a) O div **F** será positivo, negativo ou nulo? Explique.

(b) Determine se o rot **F** = **0**. Se não, em que direção rot **F** aponta?

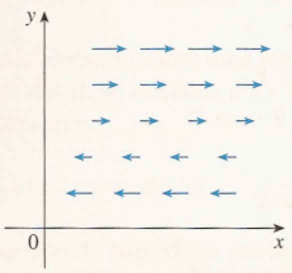
9.



10.



11.



12. Seja f um campo escalar e **F** um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

(a) rot f	(b) grad f
(c) div **F**	(d) rot(grad f)
(e) grad **F**	(f) grad(div **F**)
(g) div(grad f)	(h) grad(div f)
(i) rot(rot **F**)	(j) div(div **F**)
(k) (grad f) × (div **F**)	(l) div(rot(grad f))

grad || gradiente

13–18 □ Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^3\,\mathbf{i} + 2x^2yz^3\,\mathbf{j} + 3x^2y^2z^2\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\,\mathbf{i} + e^z\,\mathbf{j} + e^y\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz}\,\mathbf{i} + e^{xz}\,\mathbf{j} + xye^{xz}\,\mathbf{k}$

19. Existe um campo vetorial **G** em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = xy^2\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + zx^2\,\mathbf{k}$? Explique.

20. Existe um campo vetorial **G** em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = yz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$? Explique.

21. Mostre que qualquer campo vetorial da forma
$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$$
onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

22. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\,\mathbf{i} + g(x, z)\,\mathbf{j} + h(x, y)\,\mathbf{k}$$

é incompressível.

23–29 □ Prove a identidade, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existam e sejam contínuas. Se f for um campo escalar e $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ forem campos vetoriais, então $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ e $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ são definidos por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\cdot\mathbf{G}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\times\mathbf{G}(x, y, z)$$

23. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

24. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{rot}\ \mathbf{F} + \operatorname{rot}\ \mathbf{G}$

25. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$

26. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\ \operatorname{rot}\mathbf{F} + (\nabla f)\times\mathbf{F}$

27. $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\ \mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\ \mathbf{G}$

28. $\operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g) = 0$

29. $\operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\ \mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}$

30–32 □ Seja $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique as identidades.
(a) $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla\cdot(r\mathbf{r}) = 4r$
(c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

31. Verifique as identidades.
(a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$ (b) $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$
(c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ (d) $\nabla\ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Se $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, ache div $\mathbf{F}$. Existe um valor de p para o qual div $\mathbf{F} = 0$?

33. Use o Teorema de Green na forma da Equação 13 para provar a **primeira identidade de Green**:

$$\iint_D f\nabla^2 g\,dA = \oint_C f(\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,ds - \iint_D \nabla f\cdot\nabla g\,dA$$

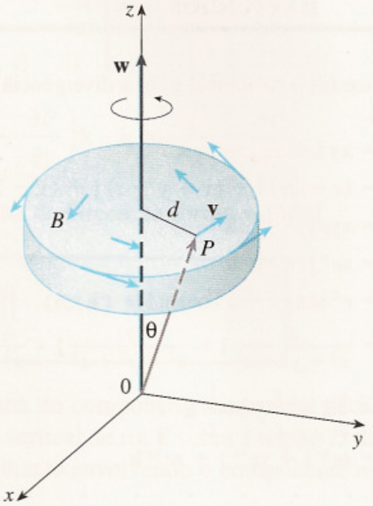
onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. (A quantidade $\nabla g\cdot\mathbf{n} = D_{\mathbf{n}}g$ aparece na integral de linha. Esta é a derivada direcional na direção do vetor normal $\mathbf{n}$ e é chamada **derivada normal** de g.)

34. Use a primeira identidade de Green (Exercício 33) para provar a **segunda identidade de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,ds$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

35. Este exercício demonstra a conexão entre vetor rotacional e rotações. Seja B um corpo rígido girando em torno do eixo z. A rotação pode ser descrita pelo vetor $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$, onde ω é a rapidez angular de B, ou seja, a rapidez tangencial de qualquer ponto P em B dividido pela distância d do eixo de rotação. Seja $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ o vetor de posição de P.
(a) Considerando o ângulo θ da figura, mostre que o campo de velocidade de B é dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}$.
(b) Mostre que $\mathbf{v} = -\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j}$.
(c) Mostre que rot $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



36. As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico $\mathbf{E}$ e o campo magnético $\mathbf{H}$ quando eles variam com o tempo numa região que não contenha nem carga nem corrente, como se segue:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\ \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

onde c é a rapidez da luz. Use essas equações para provar o seguinte:

(a) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$

(b) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

(c) $\nabla^2\mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$ [*Dica:* Use o Exercício 29.]

(d) $\nabla^2\mathbf{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$