14.5 Exercícios

1–6 □ Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2y + xy^2, \quad x = 2 + t^4, \quad y = 1 - t^3$
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{2t}, \quad y = e^{-2t}$
3. $z = \operatorname{sen} x \cos y, \quad x = \pi t, \quad y = \sqrt{t}$
4. $z = x \ln(x + 2y), \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t$
5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$
6. $w = xy + yz^2, \quad x = e^t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad z = e^t \cos t$

7–12 □ Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2 + xy + y^2, \quad x = s + t, \quad y = st$
8. $z = x/y, \quad x = se^t, \quad y = 1 + se^{-t}$
9. $z = \operatorname{arctg}(2x + y), \quad x = s^2t, \quad y = s \ln t$
10. $z = e^{xy} \operatorname{tg} y, \quad x = s + 2t, \quad y = s/t$
11. $z = e^r \cos \theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$
12. $z = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad \alpha = 3s + t, \quad \beta = s - t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde $x = g(t)$, $y = h(t)$, $g(3) = 2$, $g'(3) = 5$, $h(3) = 7$, $h'(3) = -4$, $f_x(2, 7) = 6$, e $f_y(2, 7) = -8$, determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde $u(1, 0) = 2$, $u_s(1, 0) = -2$, $u_t(1, 0) = 6$, $v(1, 0) = 3$, $v_s(1, 0) = 5$, $v_t(1, 0) = 4$, $F_u(2, 3) = -1$ e $F_v(2, 3) = 10$. Determine $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

15–18 □ Utilize o grafo da árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Assuma que todas as funções sejam diferenciáveis.

15. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$
16. $w = f(x, y, z)$, onde $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$, $z = z(t, u)$
17. $v = f(p, q, r)$, onde $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$, $r = r(x, y, z)$
18. $u = f(s, t)$, onde $s = s(w, x, y, z)$, $t = t(w, x, y, z)$

19–24 □ Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

19. $w = x^2 + y^2 + z^2, \; x = st, \; y = s \cos t, \; z = s \operatorname{sen} t$;
$\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$ quando $s = 1, t = 0$

20. $u = xy + yz + zx, \; x = st, \; y = e^{st}, \; z = t^2$;
$\dfrac{\partial u}{\partial s}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $s = 0, t = 1$

21. $z = y^2 \operatorname{tg} x, \; x = t^2uv, \; y = u + tv^2$;
$\dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ quando $t = 2, u = 1, v = 0$

22. $z = \dfrac{x}{y}, \; x = re^{st}, \; y = rse^t$;
$\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$ quando $r = 1, s = 2, t = 0$

23. $u = \dfrac{x + y}{y + z}, \; x = p + r + t, \; y = p - r + t, \; z = p + r - t$;
$\dfrac{\partial u}{\partial p}, \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$

24. $t = z \sec(xy), \; x = uv, \; y = vw, \; z = wu; \quad \dfrac{\partial t}{\partial u}, \dfrac{\partial t}{\partial v}, \dfrac{\partial t}{\partial w}$

25–28 □ Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

25. $x^2 - xy + y^3 = 8$
26. $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$
27. $\cos(x - y) = xe^y$
28. $x \cos y + y \cos x = 1$

29–32 □ Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

29. $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 3$
30. $xyz = \cos(x + y + z)$
31. $xe^y + yz + ze^x = 0$
32. $\ln(x + yz) = 1 + xy^2z^3$

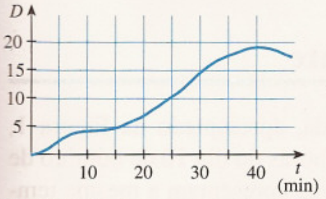
33. A temperatura num ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de 3 segundos?

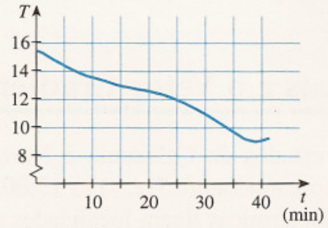
34. A produção de trigo em um determinado ano W depende da temperatura média T e da quantidade anual de chuva R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano, e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que no corrente nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

35. A rapidez da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a rapidez do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranqüilo nas águas oceânicas, e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são anotadas (veja o gráfico). Estime a taxa de variação (com relação ao tempo) da rapidez do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do mergulho. Quais são as unidades?





36. O raio de um cone circular reto aumenta a uma taxa de 1,8 pol/s, ao passo que sua altura está decrescendo à taxa de 2,5 pol/s. A que taxa o volume do cone está mudando quando o raio vale 120 pol e a altura 140 pol?

37. O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. A certo instante as dimensões da caixa são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, e ℓ e w estão aumentando a uma taxa de 2 m/s, ao passo que h está diminuindo à taxa de 3 m/s. Nesse instante, determine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando.

(a) O volume (b) A área da superfície

(c) O comprimento da diagonal

38. A voltagem V num circuito elétrico simples está decrescendo devagar à medida que a bateria se descarrega. A resistência R está aumentando devagar com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400\ \Omega$, $I = 0{,}08$ A, $dV/dt = -0{,}01$ V/s e $dR/dt = 0{,}03\ \Omega$/s.

39. A pressão de um mol de um gás ideal é aumentada à taxa de 0,05 kPa/s, e a temperatura é aumentada à taxa de 0,15 K/s. Utilize a equação do Exemplo 2 para achar a taxa de variação do volume quando a pressão é 20 kPa e a temperatura é 320 K.

40. Um carro A está viajando para norte na auto-estrada 16, e um carro B está viajando para oeste na auto-estrada 83. Os dois carros se aproximam da intersecção dessas auto-estradas. Num certo momento, o carro A está a 0,3 km da intersecção viajando a 90 km/h, ao passo que o carro B está a 0,4 km da intersecção viajando a 80 km/h. Qual a taxa de variação da distância entre os carros nesse instante?

41–44 □ Assuma que todas as funções dadas são diferenciáveis.

41. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$ e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

42. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\text{sen}\,t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

43. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

44. Se $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

45–50 □ Assuma que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

45. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Dica*: Seja $u = x + at$, $v = x - at$.]

46. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\text{sen}\,t$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

47. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. (Compare com o Exemplo 7.)

48. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$ e (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

49. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

50. Suponha $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.

(a) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine uma fórmula semelhante para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

51. Uma função f é dita **homogênea de grau n** se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo valor de t, onde n é um inteiro positivo e f tem segunda derivada parcial contínua.

(a) Verifique que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Dica*: Utilize a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t.]

52. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n - 1)f(x, y)$$