SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como sendo a origem temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\,\nabla u = -KC(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 5, observamos que o vetor normal para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

e então

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas sobre S temos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Portanto a taxa de fluxo de calor através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -2aKC \iint_S dS$$

$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3$$ □

16.7 Exercícios

1. Seja S o cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Aproxime $\iint_S \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}\, dS$ usando as somas de Riemann como na Definição 1, tomando os retalhos S_{ij} como sendo os quadrados que são as faces do cubo e o centros desses quadrados como os pontos P_{ij}^*.

2. Uma superfície S é formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, e por discos no fundo e no topo. Suponha que você saiba que f é uma função contínua com $f(\pm1, 0, 0) = 2$, $f(0, \pm1, 0) = 3$ e $f(0, 0, \pm1) = 4$. Estime o valor de $\iint_S f(x, y, z)\, dS$ usando a soma de Riemann, tomando retalhos S_{ij} como sendo os discos do fundo e do topo, e a lateral dividida em quatro partes.

3. Seja H o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geqslant 0$, e suponha que f seja uma função contínua com $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ e $f(-3, -4, 5) = 12$. Dividindo H em quatro retalhos, estime o valor de $\iint_H f(x, y, z)\, dS$.

4. Suponha que $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, onde g é uma função de uma variável tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x, y, z)\, dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5–18 □ Calcule a integral de superfície.

5. $\iint_S x^2yz\, dS$, S é o pedaço do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$.

6. $\iint_S xy\, dS$, S é a região triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

7. $\iint_S yz\, dS$, S é o pedaço do plano $x + y + z = 1$ que está no primeiro octante.

8. $\iint_S y\, dS$, S é a superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

9. $\iint_S x\, dS$, S é a superfície $y = x^2 + 4z$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$

10. $\iint_S (y^2 + z^2)\, dS$, S é a parte do parabolóide $x = 4 - y^2 - z^2$ que está em frente ao plano $x = 0$

11. $\iint_S yz\, dS$, S é a parte do plano $z = y + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

12. $\iint_S xy\, dS$, S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$

13. $\iint_S (x^2z + y^2z)\, dS$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$

14. $\iint_S xyz\, dS$,
S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

15. $\iint_S (x^2 y + z^2)\, dS$,
S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$

16. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$,
S formada pelo cilindro do Exercício 15, além dos discos que formam o fundo e o topo.

17. $\iint_S yz\, dS$,
S é a superfície com equações paramétricas $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$

18. $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS$,
S é o helicóide com equação vetorial
$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + v\, \mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

19–28 □ Calcule a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial $\mathbf{F}$ e superfície orientada S. Em outras palavras, determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S. Para superfícies fechadas, use a orientação (para fora) positiva.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + yz\, \mathbf{j} + zx\, \mathbf{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, com orientação para cima.

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + 4x^2\, \mathbf{j} + yz\, \mathbf{k}$, S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, com orientação para cima.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = xze^y\, \mathbf{i} - xze^y\, \mathbf{j} + z\, \mathbf{k}$,
S é a parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante, com orientação para baixo.

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + z^4\, \mathbf{k}$,
S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 1$ com orientação para baixo.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + z\, \mathbf{k}$,
S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} + 3z\, \mathbf{k}$, S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ com orientação para cima.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\, \mathbf{j} - z\, \mathbf{k}$,
S é formado pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, e pelo disco $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + 5\, \mathbf{k}$, S é a superfície do Exercício 12.

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + 2y\, \mathbf{j} + 3z\, \mathbf{k}$,
S é o cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$,
S é o helicóide do Exercício 18, com orientação para cima.

CAS **29.** Calcule $\iint_S xyz\, dS$ preciso até a quarta casa decimal, onde S é a superfície $z = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

CAS **30.** Determine o valor exato de $\iint_S x^2 yz\, dS$, onde S é a superfície do Exercício 29.

CAS **31.** Determine o valor de $\iint_S x^2 y^2 z^2\, dS$ correto até a quarta casa decimal, onde S é a parte do parabolóide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está acima do plano xy.

CAS **32.** Determine o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)\, \mathbf{i} + x^2 y\, \mathbf{j} + z^2 e^{x/5}\, \mathbf{k}$ através da parte do cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e entre os planos $x = -2$ e $x = 2$ com orientação para cima. Ilustre usando um sistema algébrico computacional para desenhar o cilindro e o campo vetorial na mesma tela.

33. Determine a fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 8 para o caso onde S é dada por $y = h(x, z)$ e $\mathbf{n}$ é o versor normal que aponta para a esquerda.

34. Determine a fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 8 para o caso onde S é dada por $x = k(y, z)$ e $\mathbf{n}$ é o versor normal que aponta para frente (ou seja, para o observador quando os eixos estão desenhados na posição usual).

35. Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, se ele tiver densidade constante.

36. Determine a massa de um funil fino com o formato do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

37. (a) Dê uma expressão integral para o momento de inércia I_z em torno do eixo z de uma folha fina no formato da superfície S se a função densidade é ρ.
(b) Determine o momento de inércia em torno do eixo z do funil do Exercício 36.

38. A superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant a$, tem densidade constante k. Determine (a) o centro de massa e (b) o momento de inércia em torno do eixo z.

39. Um fluido com densidade 1200 flui com velocidade $\mathbf{v} = y\, \mathbf{i} + \mathbf{j} + z\, \mathbf{k}$. Determine a taxa de vazão do fluido através do parabolóide $z = 9 - (x^2 + y^2)/4$, $x^2 + y^2 \leqslant 36$.

40. Um fluido com densidade 1500 e campo de velocidade velocidade $\mathbf{v} = -y\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} + 2z\, \mathbf{k}$. Determine a taxa de vazão do fluido saindo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

41. Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, se o campo elétrico é $\mathbf{E}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + 2z\, \mathbf{k}$.

42. Use a Lei de Gauss para achar a carga dentro de um cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ se o campo elétrico é $\mathbf{E}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + z\, \mathbf{k}$.

43. A temperatura em um ponto (x, y, z) em uma substância com condutividade $K = 6{,}5$ é $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa de transmissão de calor nessa substância através da superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

44. A temperatura em um ponto de uma bola com condutividade K é inversamente proporcional à distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.