SOLUÇÃO A expressão para $f(x, y, z)$ é definida desde que $z - y > 0$, de modo que o domínio de f é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Isso é o **semi-espaço** constituído por todos os pontos que estão acima do plano $z = y$. □

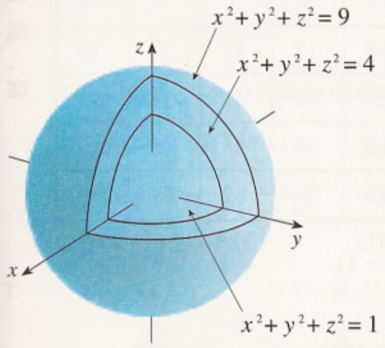


FIGURA 20

EXEMPLO 15 □ Determine as curvas de superfície da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUÇÃO As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geqslant 0$. Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio $\sqrt{k}$. (Veja a Figura 20.) Então, quando (x, y, z) varia sobre uma das esferas com centro O, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo. □

Funções com qualquer número de variáveis também podem ser consideradas. Uma **função com n variáveis** é uma regra que associa um número real $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n-uplas. Por exemplo, se uma fábrica de alimentos usa n ingredientes diferentes para manufaturar um determinado alimento, sendo c_i seu custo por unidade do i-ésimo ingrediente, e se são necessárias x_i unidades do i-ésimo ingrediente, então o custo total C dos ingredientes é uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\boxed{3} \qquad C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

A função f é uma função real cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Algumas vezes utilizaremos a notação vetorial para escrever essas funções de forma mais compacta: se $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, freqüentemente escreveremos $f(\mathbf{x})$ no lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Com essa notação podemos reescrever a função definida na Equação 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ e $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto escalar dos vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{x}$ em V_n.

Tendo em vista a correspondência biunívoca entre os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e os vetores de posição $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ em V_n, podemos olhar de três formas diferentes para a função f definida num subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como uma função de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. Como uma função de um único ponto variável $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3. Como uma função de um vetor variável $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Veremos que todos os três pontos de vista têm sua utilidade.

14.1 Exercícios

1. No Exemplo 2 consideramos a função $I = f(T, v)$, onde I era o índice de efeito de frio ocasionado pelo vento, T era a temperatura real e v era a rapidez do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
   (a) Qual o valor de $f(8, 60)$? Qual seu significado?
   (b) Descreva em palavras o significado da questão "Para que valores de v é $f(-12, v) = -26$?" Em seguida, responda à questão.
   (c) Descreva em palavras o significado da questão "Para que valores de T vale $f(T, 80) = -14$?" Em seguida, responda à questão.
   (d) Qual o significado da função $I = f(-4, v)$? Descreva o comportamento dessa função.
   (e) Qual o significado da função $I = f(T, 50)$? Descreva o comportamento dessa função.

2. O índice de temperatura em função da umidade I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com os valores de I foi extraída de uma tabela do Serviço de Administração Nacional de Oceanos e Atmosfera dos Estados Unidos.

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°F) T \ h	20	30	40	50	60	70
80	77	78	79	81	82	83
85	82	84	86	88	90	93
90	87	90	93	96	100	106
95	93	96	101	107	114	124
100	99	104	110	120	132	144

(a) Qual é o valor de $f(95, 70)$? Qual seu significado?
(b) Para que valor de h temos $f(90, h) = 100$?
(c) Para que valor de T temos $f(T, 50) = 88$?
(d) Qual o significado de $I = f(80, h)$ e $I = f(100, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

3. Verifique que para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

discutida na Exemplo 3 a produção dobrará se a quantidade de trabalho e a de capital investido forem dobradas. É verdade também para uma função de produção genérica

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

4. O índice de temperatura em função da umidade I discutido no Exercício 2 foi modelado como o seguinte polinômio de quarto grau:

$$\begin{aligned} I(T, h) = &-42{,}379 + 2{,}04901523T \\ &+ 10{,}14333127h - 0{,}22475541Th \\ &- 0{,}00683783T^2 - 0{,}05481717h^2 \\ &+ 0{,}00122874T^2h + 0{,}00085282Th^2 \\ &- 0{,}00000199T^2h^2 \end{aligned}$$

Verifique quão próximo o modelo está da Tabela 3 para alguns valores de T e h. Como você prefere a representação dessa função: numérica ou algébrica?

5. A altura das ondas h num mar aberto depende da rapidez do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ dados em pés, são apresentados na tabela que se segue.
(a) Qual é o valor de $f(40, 15)$? Qual seu significado?
(b) Qual o significado da função $h = f(30, t)$? Descreva seu comportamento.
(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (nós) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

6. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
(a) Estime $f(1, 1)$.
(b) Estime $f(e, 1)$.
(c) Determine o domínio de f.
(d) Determine a imagem de f.

7. Seja $f(x, y) = e^{x^2 - y}$.
(a) Estime $f(2, 4)$.
(b) Determine o domínio de f.
(c) Determine a imagem de f.

8. Seja $g(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$.
(a) Estime $g(1, 2)$.
(b) Determine o domínio de g.
(c) Determine a imagem de g.

9. Seja $f(x, y, z) = x^2\ln(x - y + z)$.
(a) Estime $f(3, 6, 4)$.
(b) Determine o domínio de f.
(c) Determine a imagem de f.

10. Seja $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$.
(a) Estime $f(1, 3, -4)$.
(b) Determine o domínio de f.
(c) Determine a imagem de f.

11–20 □ Determine e faça o esboço do domínio da função.

11. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

12. $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

13. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

14. $f(x, y) = \dfrac{x - 3y}{x + 3y}$

15. $f(x, y) = \dfrac{3x + 5y}{x^2 + y^2 - 4}$

16. $f(x, y) = \sqrt{y - x}\,\ln(y + x)$

17. $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y}$

18. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

20. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

21–29 □ Esboce o gráfico da função.

21. $f(x, y) = 3$

22. $f(x, y) = x$

23. $f(x, y) = 1 - x - y$

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} y$

25. $f(x, y) = 1 - x^2$

26. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

27. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

28. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

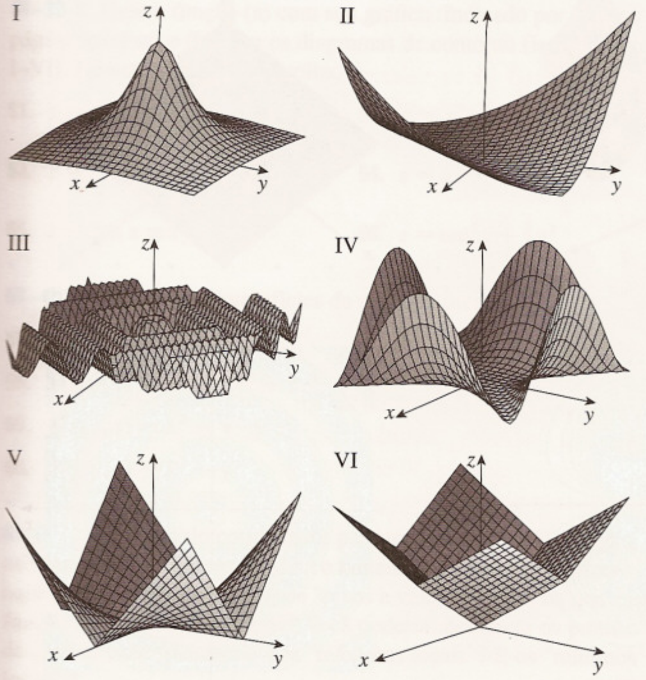
29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. Case a função com o gráfico (indicado por I–VI). Dê razões para sua escolha.

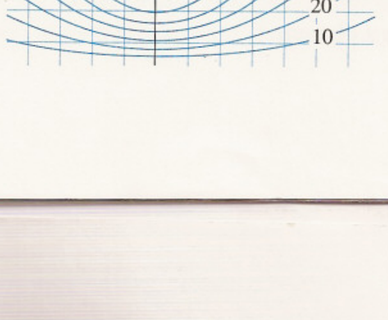
(a) $f(x, y) = |x| + |y|$ (b) $f(x, y) = |xy|$

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ (d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

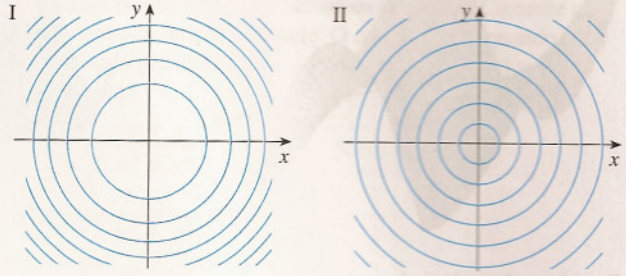
(e) $f(x, y) = (x - y)^2$ (f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$



31. É mostrado o mapa de contorno para a função f. Use-o para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

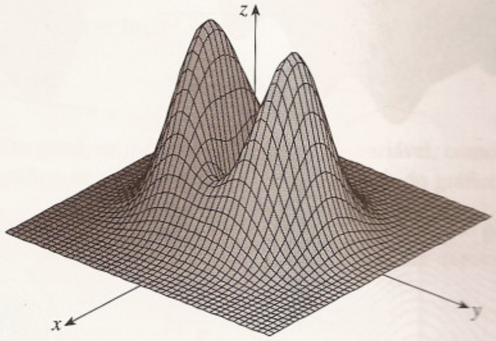


32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é da função f cujo gráfico é um cone. O outro é para uma função g cujo gráfico é um parabolóide. Qual é qual? Por quê?



33. Localize os pontos A e B no mapa das Montanhas de Lonesome (Figura 12). Qual a descrição do terreno perto de A? E perto de B?

34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.



35–42 □ Faça o mapa de contornos da função mostrando várias curvas de nível.

35. $f(x, y) = xy$

36. $f(x, y) = x^2 - y^2$

37. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

38. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

39. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

40. $f(x, y) = y - \cos x$

41. $f(x, y) = x - y^2$

42. $f(x, y) = e^{1/(x^2+y^2)}$

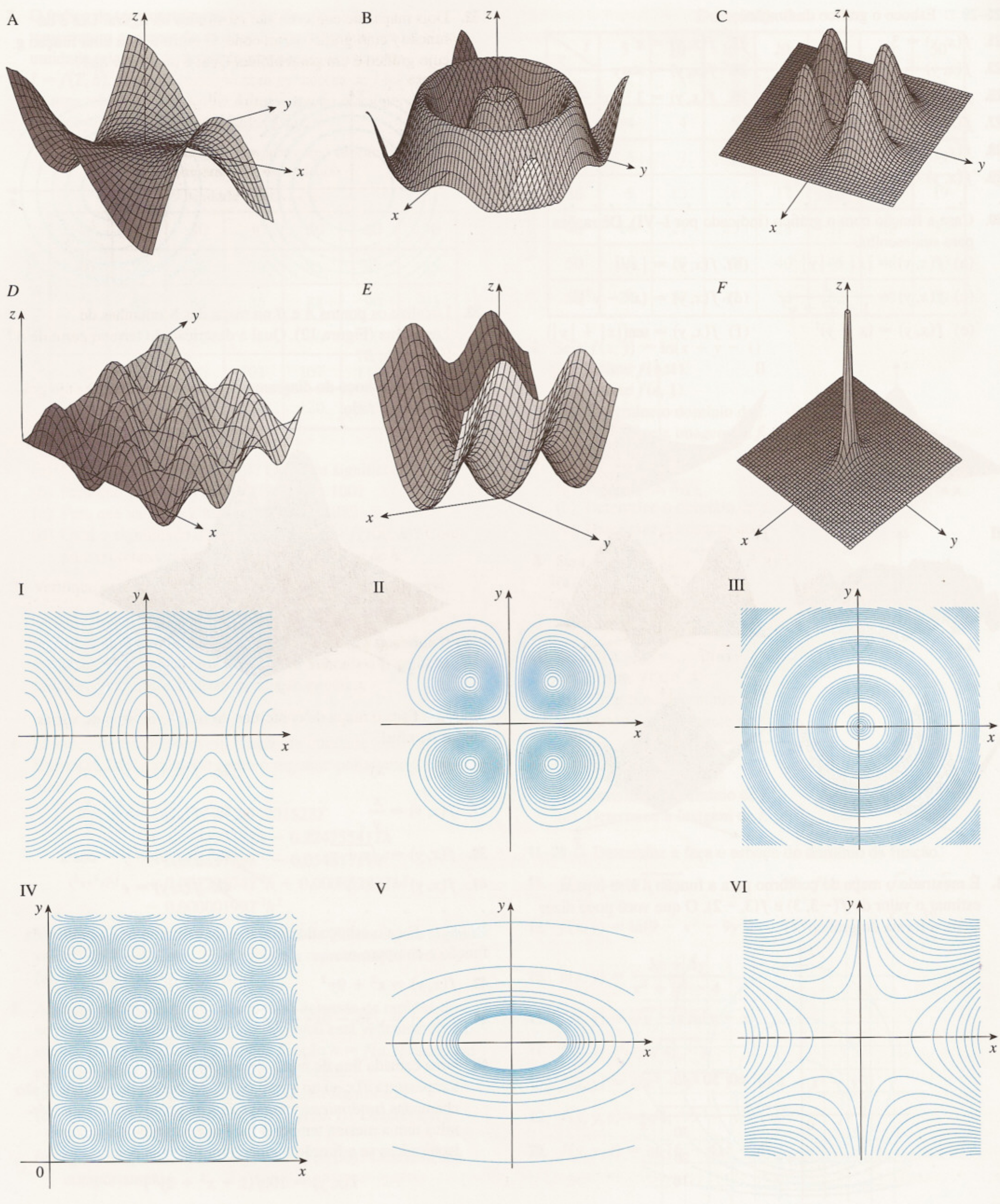
43–44 □ Faça o esboço do diagrama de contornos e do gráfico da função e compare-os.

43. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

44. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

45. Uma camada fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$


A
B
C
D
E
F
I
II
III
IV
V
VI

46. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy, as curvas de nível de V são chamadas de *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

47–50 □ Use um computador para traçar o gráfico da função utilizando vários pontos de vista diferentes e mexendo no tamanho da janela. Imprima a que, em sua opinião, saiu melhor. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o diagrama de contornos da mesma função e compare.

47. $f(x, y) = x^3 + y^3$

48. $f(x, y) = \text{sen}(ye^{-x})$

49. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (macaco)

50. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (cachorro)

51–56 □ Case a função (a) com seu gráfico (indicado por A-F na página anterior) e (b) com os diagramas de contorno (indicado por I–VI). Dê razões para sua escolha.

51. $z = \text{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$

52. $z = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$

53. $z = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2}$

54. $z = x^3 - 3xy^2$

55. $z = \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$

56. $z = \text{sen}^2 x + \frac{1}{4}y^2$

57–60 □ Descreva as superfícies de nível da função.

57. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

58. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

59. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

60. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

61–62 □ Faça uso do computador para traçar o gráfico da função, utilizando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E os "mínimos locais"?

61. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

62. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

63–64 □ Utilize computador para traçar o gráfico da função, usando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

63. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

64. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

65. Utilize o computador para estudar o comportamento da família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. Como a forma da função é afetada por uma mudança do valor de c?

66. Esboce o gráfico das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \text{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

e
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se g é uma função de uma variável, como obter o gráfico de $f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ a partir do gráfico de g?

67. (a) Mostre que, tomando logaritmos, uma função generalizada de Cobb Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Se tomarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação da parte (a) se tornará uma equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Utilize a Tabela 2 (do Exemplo 3) para fazer uma tabela de valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos de 1899-1922. Use então um computador ou calculadora gráfica para achar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta de regressão através dos pontos $(\ln(L/K)$ e $\ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

14.2 Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando x e y se aproximam de 0 [e portanto o ponto (x, y) se aproxima da origem].