onde b é uma constante independente de L e de K. A hipótese (i) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Note da Equação 8 que, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m, temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m. Isso porque Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$ e portanto

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção discutida na Seção 14.1.

14.3 Exercícios

1. A temperatura T de uma localidade do hemisfério norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas do princípio de janeiro.

(a) Qual é o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulu tem longitude de 158 °W e latitude de 21 °N. Suponha que às 9:00 horas em 1º de janeiro esteja ventando do noroeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja frio. Você esperaria $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ serem positivos ou negativos? Explique.

2. No começo desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde I era o índice de calor, T era a temperatura e H era a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(92, 60)$ e $f_H(92, 60)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

3. O índice I que mede a temperatura devida ao vento dá a sensação de temperatura quando a temperatura real é T e a rapidez do vento é v, e podemos escrever $I = f(T, v)$. A seguinte tabela de valores de I foi extraída de uma tabela do Serviço de Administração Nacional de Atmosfera e Oceanos dos Estados Unidos.

(a) Estime os valores de $f_T(12, 20)$ e $f_v(12, 20)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) — T \ v	10	20	30	40	50
20	18	16	14	13	13
16	14	11	9	7	7
12	9	5	3	1	0
8	5	0	−3	−5	−6

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) — T \ v	60	70	80	90	100
20	12	12	12	12	12
16	6	6	5	5	5
12	0	−1	−1	−1	−1
8	−7	−7	−8	−8	−8

(b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial I/\partial T$ e $\partial I/\partial v$?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\partial I}{\partial v}$$

4. A altura h das ondas em mar aberto depende da rapidez v do vento e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados em pés na tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (nós) — v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

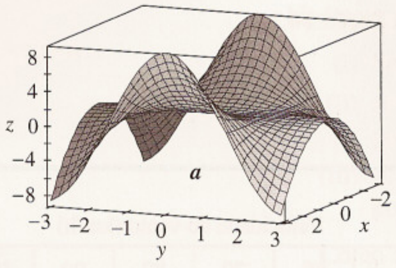
(a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?

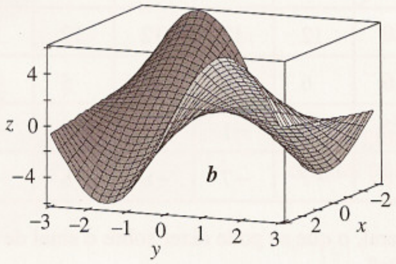
(b) Estime os valores de $f_v(40, 15)$ e $f_t(40, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

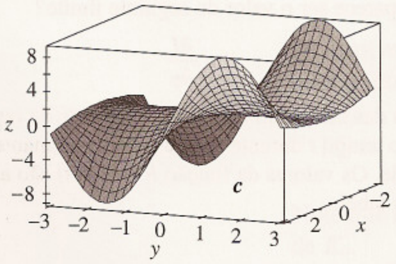
(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

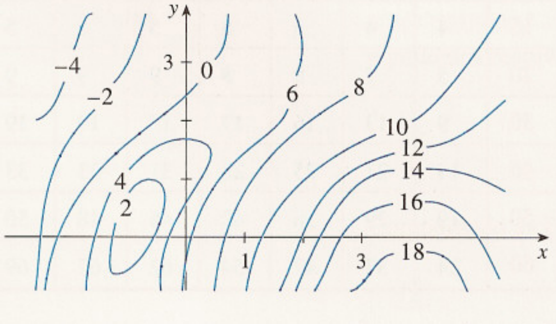
5. As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c, são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.







6. É dado o mapa de contorno de uma função f. Use-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



7. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço a mão ou utilizando computador.

8. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço a mão ou utilizando computador.

9–10 □ Determine f_x e f_y e faça o gráfico de f, f_x e f_y com domínios e pontos de vista que permitam ver a relação entre eles.

9. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y$

10. $f(x, y) = xe^{-x^2 - y^2}$

11–32 □ Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

11. $f(x, y) = 3x - 2y^4$

12. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

13. $z = xe^{3y}$

14. $z = y \ln x$

15. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

16. $f(x, y) = x^y$

17. $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

18. $f(s, t) = st^2/(s^2 + t^2)$

19. $f(u, v) = \operatorname{tg}^{-1}(u/v)$

20. $f(x, t) = e^{\operatorname{sen}(t/x)}$

21. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

22. $f(x, y) = \displaystyle\int_y^x \cos(t^2)\, dt$

23. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3yz$

24. $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$

25. $w = \ln(x + 2y + 3z)$

26. $w = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$

27. $u = xe^{-t} \operatorname{sen} \theta$

28. $u = x^{y/z}$

29. $f(x, y, z, t) = \dfrac{x - y}{z - t}$

30. $f(x, y, z, t) = xy^2z^3t^4$

31. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

32. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

33–36 □ Determine as derivadas parciais indicadas.

33. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f_x(3, 4)$

34. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$; $f_y(-6, 4)$

35. $f(x, y, z) = x/(y + z)$; $f_z(3, 2, 1)$

36. $f(u, v, w) = w \operatorname{tg}(uv)$; $f_v(2, 0, 3)$

37–38 □ Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para achar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

37. $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$

38. $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$

39–42 □ Use diferenciação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

39. $xy + yz = xz$

40. $xyz = \cos(x + y + z)$

41. $x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y + z)$

42. $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$

43–44 □ Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

43. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

44. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

45–50 □ Determine as derivadas parciais de segunda ordem.

45. $f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3$

46. $f(x, y) = \ln(3x + 5y)$

47. $z = x/(x + y)$

48. $z = y \text{ tg } 2x$

49. $u = e^{-s} \operatorname{sen} t$

50. $v = \sqrt{x + y^2}$

51–54 □ Verifique se as conclusões do Teorema de Clairaut são verdadeiras, isto é, se $u_{xy} = u_{yx}$.

51. $u = x^5y^4 - 3x^2y^3 + 2x^2$

52. $u = \operatorname{sen}^2 x \cos y$

53. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

54. $u = xye^y$

55–62 □ Determine as derivadas parciais indicadas.

55. $f(x, y) = x^2y^3 - 2x^4y$; f_{xxx}

56. $f(x, y) = e^{xy^2}$; f_{xxy}

57. $f(x, y, z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2$; f_{xyz}

58. $f(x, y, z) = e^{xyz}$; f_{yzy}

59. $z = x \operatorname{sen} y$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\, \partial x}$

60. $z = \ln \operatorname{sen}(x - y)$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}$

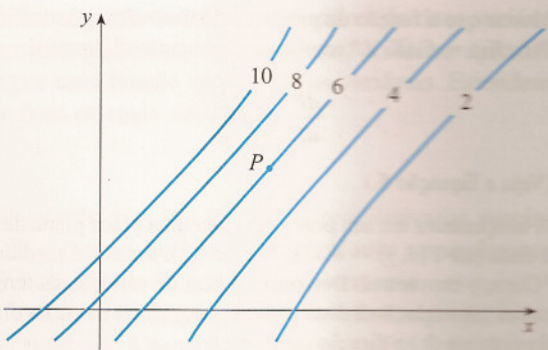
61. $u = \ln(x + 2y^2 + 3z^3)$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$

62. $u = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z^3}$

63. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2{,}2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

64. São mostradas curvas de nível de uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.
(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
(d) f_{xy} (e) f_{yy}



65. Verifique se a função $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ é solução da equação de condução do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

66. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
(a) $u = x^2 + y^2$
(b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$
(d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
(f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

67. Verifique se a função $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

68. Mostre que cada uma das seguintes funções é solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.
(a) $u = \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(akt)$
(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

69. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 68.

70. Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

71. Mostre que a função $z = xe^y + ye^x$ é uma solução da equação

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}$$

72. Mostre que a função de produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

73. Mostre que a função de produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 5.)

74. A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa plana de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em °C e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura com relação à distância no ponto $(2, 1)$ em (a) a direção do eixo x e (b) a direção do eixo y.

75. A resistência total R produzida por três condutores com resistência R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo num circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

76. A lei dos gases para um massa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

77. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

78. Se a, b e c são os lados de um triângulo e A, B e C são os ângulos opostos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$ e $\partial A/\partial c$ pela diferenciação implícita da Lei dos Cossenos.

79. Foi dito que existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$ e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?

80. O parabolóide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ intercepta o plano $x = 1$ numa parábola. Determine as equações paramétricas dessa parábola e a reta tangente na mesma tela.

81. O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente à elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

82. No estudo de penetração do congelamento achou-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma profundidade x (medida em pés) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x}\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

onde $\omega = 2\pi/365$ e λ é uma constante positiva.

(a) Determine $\partial T/\partial x$. Qual seu significado físico?

(b) Determine $\partial T/\partial t$. Qual seu significado físico?

(c) Mostre que T satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ para uma certa constante k.

(d) Se $\lambda = 0{,}2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, use um computador para traçar o gráfico de $T(x, t)$.

(e) Qual é o significado físico do termo $-\lambda x$ na expressão $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

83. Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que se a derivada parcial de terceira ordem de f é contínua, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

84. (a) Quantas derivadas de n-ésima ordem tem uma função de duas variáveis?

(b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas distintas existirão?

(c) Responda à parte (a) da questão para uma função de três variáveis.

85. Se $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, determine $f_x(1, 0)$. [*Dica*: Em vez de achar $f_x(x, y)$ primeiro, note que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

86. Se $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

87. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use um computador para traçar o gráfico de f.

(b) Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Determine $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ usando as Equações 2 e 3.

(d) Mostre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ e $f_{yx}(0, 0) = 1$.

(e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de f_{xy} e f_{yx} para ilustrar sua resposta.

14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Uma das idéias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que à medida que ampliamos o gráfico de uma função diferenciável perto de um ponto, vendo cada vez uma região menor do todo, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.10 do Volume I). Desenvolveremos idéias semelhantes em três dimensões. À medida que ampliamos um campo em torno de um ponto, isto é, damos um *zoom* de um ponto pertencente