15.8 Exercícios

1–4 □ Faça o esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule essa integral.

1. $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$

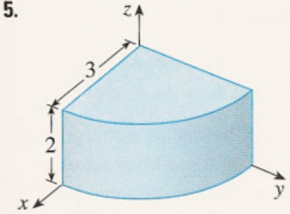
2. $\int_1^3 \int_0^{\pi/2} \int_r^3 r\, dz\, d\theta\, dr$

3. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

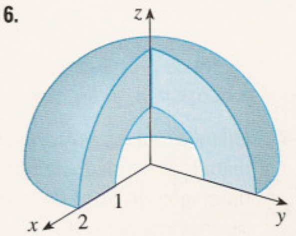
4. $\int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

5–6 □ Estabeleça a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

5.



6.



7–16 □ Utilize coordenadas cilíndricas.

7. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, onde E é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

8. Calcule $\iiint_E (x^3 + xy^2)\, dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

9. Calcule $\iiint_E y\, dV$, onde E é o sólido que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do plano $z = x + 2$.

10. Calcule $\iiint_E xz\, dV$, onde E é limitado pelos planos $z = 0$, $z = y$, e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ no semi-espaço $y \geqslant 0$.

11. Calcule $\iiint_E x^2\, dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

12. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
(b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.

13. Determine o volume da região E limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

14. Determine o centróide da região E do Exercício 13.

15. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a\ (a > 0)$ se S tem densidade constante K.

16. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional a sua distância ao eixo z.

17–28 □ Utilize coordenadas esféricas.

17. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

18. Calcule $\iiint_H (x^2 + y^2)\, dV$, onde H é a região hemisférica que está acima do plano xy e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

19. Calcule $\iiint_E z\, dV$, onde E está contido entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.

20. Calcule $\iiint_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV$, onde E é o sólido que está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.

21. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, onde E é limitado abaixo pelo cone $\phi = \pi/6$ e acima pela esfera $\rho = 2$.

22. Calcule $\iiint_E xyz\, dV$, onde E está entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

23. Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4 \cos \phi$.

24. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

25. Determine o centróide do sólido do Exercício 23.

26. Seja H um hemisfério de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
(a) Determine a massa de H.
(b) Determine o centro de massa de H.
(c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.

27. (a) Determine o centróide do hemisfério sólido homogêneo de raio a.
(b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação ao diâmetro de sua base.

28. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional a sua distância à base.

29–32 □ Utilize coordenadas cilíndricas ou esféricas.

29. Determine o volume e o centróide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

30. Determine o volume da menor cunha esférica de uma esfera de raio a cortada por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

31. Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E está acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize ou a Tabela de Integrais (veja a *contracapa*) ou um sistema computacional algébrico para calcular a integral.

32. (a) Determine o volume contido pelo toro $\rho = \text{sen}\,\phi$.
(b) Utilize um computador para desenhar o toro.

33–34 □ Calcule a integral transformando para coordenadas cilíndricas.

33. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

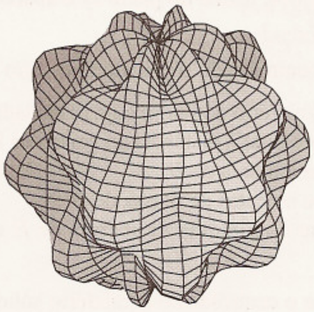
34. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,dz\,dx\,dy$

35–36 □ Calcule a integral transformando para coordenadas esféricas.

35. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx\,dy$

37. No Projeto de Laboratório do Capítulo 12 investigamos a família de superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,m\theta\,\text{sen}\,n\phi$ que foram usadas para modelar tumores. A "esfera rugosa" com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



38. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio aumenta indefinidamente.)

39. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = \text{cotg}\,\phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduza que o volume da semicunha esférica dada por $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2,\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ \phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ é

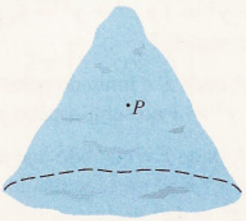
$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2\,\text{sen}\,\tilde{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

onde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2, $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, e $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

40. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho requerida para levantar uma montanha do nível do mar. Considere uma montanha que tem essencialmente o formato de um cone reto circular. Suponha que a densidade de peso do material na vizinhança de um ponto P é $g(P)$ e a altura é $h(P)$.
(a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.
(b) Assuma que o Monte Fuji no Japão tenha o formato de um cone circular reto com raio de 62.000 pés, altura de 12.400 pés e densidade constante de 200 lb/pé³. Quanto trabalho teria sido exercido para formar o Monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?



Projeto Aplicado — Corrida na Rampa

Suponha que uma bola sólida (de gude), uma bola oca (de *squash*), um cilindro sólido (uma barra de aço) e um cilindro oco (um cano de chumbo) rolam em um plano inclinado. Qual desses objetos chegará mais depressa em baixo? (Dê seu palpite antes de continuar.)

Para responder a essa questão consideramos a bola ou o cilindro com massa m, raio r e momento de inércia I (em relação a seu eixo de rotação). Se a queda vertical é h, a energia potencial no topo é mgh. Suponha que o objeto chegue embaixo com velocidade v e velocidade angular ω, e assim $v = \omega r$.