

# Cálculo III

Alexandre N. Carvalho, Wagner V. L. Nunes e Sérgio L. Zani

Primeiro Semestre de 2001



# Sumário

1	A Fórmula de Taylor	5
2	Máximos e mínimos	13
3	O problema de um vínculo	29
4	O problema de dois vínculos	35
5	Transformações	39
6	Teorema da Função Inversa	51
7	Funções Definidas Implicitamente	55
8	Integrais Múltiplas	65
9	Apêndice	103
10	Campos Vetoriais	105
11	Integrais de Linha	109
12	Teorema de Green	133
13	Integrais de Superfície	141
14	Fluxo	149
15	Os Teoremas de Gauss e Stokes	153
16	Listas de Exercícios	163



# Capítulo 1

## A Fórmula de Taylor

### 1.1 Fórmula e polinômio de Taylor para funções de uma variável

Nesta seção recordaremos a fórmula de Taylor para funções de uma variável como vista em Cálculo I.

**Teorema 1.1.1** *Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{n-1}$  e  $n$  vezes diferenciável em  $(a, b)$ . Então existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b - a) + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{g^{(n)}(c)}{n!}(b - a)^n.$$

**Definição 1.1.1** *Dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida num intervalo  $I$  e  $n$  vezes derivável no ponto  $a \in I$ , o polinômio de Taylor de  $f$  em  $a$  é definido por*

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Observe que nas condições do teorema (1.1.1) com  $b = a + h$  temos a seguinte igualdade

$$g(a + h) = p_{n-1}(a + h) + R_n(h)$$

onde  $R_n(h) = f^{(n)}(c)h^n/n!$  satisfaz  $\lim_{h \rightarrow 0} R_n(h)/h^{n-1} = 0$ .

### 1.2 Fórmula e polinômio de Taylor para funções de duas variáveis

Sejam  $A \subset \mathbb{R}^2$  um aberto,  $P_o = (x_o, y_o) \in A$  e  $(h, k)$  tal que  $(x_o, y_o) + t(h, k) \in A$  para todo  $0 \leq t \leq 1$ . Considere uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  e, a partir dela, defina a função de uma variável  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = f(x_o + th, y_o + tk)$ , ou seja,  $g$  é a composta da função  $\varphi(t) = (x_o + th, y_o + tk)$  (qual a imagem de  $\varphi$ ?) com  $f$  e, portanto, também é uma função de classe  $C^{n+1}$ . Podemos assim aplicar o teorema (1.1.1) para  $g$  e obter a fórmula

de Taylor correspondente, usando  $a = 0$  e  $b = 1$ . Entretanto, estamos interessados em ver o comportamento do polinômio de Taylor de  $g$  calculado em  $t = 1$ . Note que  $g(0) = f(P_o)$  e fazendo uso da regra da cadeia podemos ver que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)h + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)k, \\ g''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_o)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o)k^2, \\ g'''(0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_o)h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(P_o)h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(P_o)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(P_o)k^3, \\ &\vdots \\ g^{(n)}(0) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(P_o)h^{n-j}k^j. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x_o + h, y_o + k) &= f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)k \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o, y_o)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_o, y_o)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o, y_o)k^2 \right) \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(P_o)h^{n-j}k^j + R_{n+1}(h, k) \end{aligned}$$

onde

$$R_{n+1}(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(x_o + ch, y_o + ck)h^{n+1-j}k^j,$$

para algum  $c \in (0, 1)$ . Note que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(x_o + ch, y_o + ck) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(x_o, y_o), \quad (1.1)$$

pois  $f$  é de classe  $C^{n+1}$ . Além do mais, para  $0 \leq j \leq n$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{h^{n+1-j}k^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} \right| &= \frac{|h|^{n+1-j}}{(h^2 + k^2)^{\frac{n-j}{2}}} \frac{|k|^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{j}{2}}} \leq \frac{|h|^{n+1-j}}{(h^2)^{\frac{n-j}{2}}} \frac{|k|^j}{(k^2)^{\frac{j}{2}}} \\ &= \frac{|h|^{n+1-j}}{|h|^{n-j}} \frac{|k|^j}{|k|^j} = |h| \end{aligned}$$

e para  $j = n + 1$

$$\left| \frac{h^{n+1-j}k^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} \right| = \frac{|k|^{n+1}}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} \leq \frac{|k|^{n+1}}{(k^2)^{\frac{n}{2}}} = |k|.$$

## 1.2. FÓRMULA E POLINÔMIO DE TAYLOR PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS 7

Assim, para  $0 \leq j \leq n + 1$ , temos

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{h^{n+1-j} k^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} = 0. \quad (1.2)$$

Combinando 1.1 e 1.2 vemos que  $R_{n+1}(h, k)$  satisfaz

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{R_{n+1}(h, k)}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} = 0.$$

Fazendo  $h = x - x_o$  e  $k = y - y_o$  obtemos o polinômio de Taylor de grau (no máximo)  $n$  de  $f$  em  $P_o = (x_o, y_o)$  como

$$\begin{aligned} p_n(x, y) &= f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o, y_o)(x - x_o)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)(x - x_o)(y - y_o) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o, y_o)(y - y_o)^2 \right) + \\ &\dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_o, y_o)(x - x_o)^{n-j}(y - y_o)^j \end{aligned}$$

Note que o polinômio de Taylor de grau um nada mais é do que a equação do *plano tangente* ao gráfico de  $f$  em  $(x_o, y_o)$ . Já o de grau dois representa a *quádrlica* que melhor aproxima o gráfico de  $f$  em torno de  $(x_o, y_o)$ .

Nos exemplos que seguiremos procuraremos identificar o comportamento do gráfico da função próximo ao ponto  $(x_o, y_o)$  analisando o gráfico do seu polinômio de Taylor de grau 2. Vejamos

**Exemplo 1.2.1** *Encontre o polinômio de Taylor  $p_2(x, y)$  da função  $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$  em torno de  $(x_o, y_o) = (0, 0)$ .*

A função acima é claramente suave, isto é, de classe  $C^k$  para todo  $k$ . Precisamos calcular todas as derivadas até a segunda ordem. Temos

	$(x, y)$	$(0, 0)$
$f$	$x \operatorname{sen} y$	0
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\operatorname{sen} y$	0
$\frac{\partial f}{\partial y}$	$x \cos y$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	0	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\cos y$	1
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$-x \operatorname{sen} y$	0

Assim,

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2}(2xy) = xy,$$

cujo gráfico representa uma *sela*. A figura abaixo representa os gráficos de  $f$  e de  $p_2$  sobre um quadrado centrado na origem de lado três. O gráfico de  $f$  se encontra abaixo do gráfico de  $p_2$ .



Figura 1.1: gráficos de  $f$  e  $p_2$  próximos à origem

A figura (1.2) procura mostrar que a aproximação é boa nas proximidades da origem, deixando de possuir utilidade para pontos mais afastados.



Figura 1.2: gráficos de  $f$  e  $p_2$  numa visão *global*

**Exemplo 1.2.2** Encontre o polinômio de Taylor  $p_2(x, y)$  da função  $f(x, y) = x \operatorname{sen} x + y \operatorname{sen} y$  em torno de  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

Como no exemplo acima, a função é claramente suave. As suas derivadas até a segunda ordem são

	$(x, y)$	$(0, 0)$
$f$	$x \operatorname{sen} x + y \operatorname{sen} y$	0
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\operatorname{sen} x + x \cos x$	0
$\frac{\partial f}{\partial y}$	$\operatorname{sen} y + y \cos y$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$2 \cos x - x \operatorname{sen} x$	2
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	0	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$2 \cos y - y \operatorname{sen} y$	2



## 1.2. FÓRMULA E POLINÔMIO DE TAYLOR PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS<sup>9</sup>

Assim,

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2,$$

cujo gráfico é um *parabolóide*. A figura abaixo (1.3) representa o os gráficos de  $f$  e de  $p_2$  numa vizinhança da origem.



Figura 1.3: gráficos de  $f$  e  $p_2$  próximos à origem

A próxima figura (1.4) procura mostrar que a aproximação é boa nas proximidades da origem, deixando de possuir utilidade para pontos mais afastados.

Vejamos o último exemplo

**Exemplo 1.2.3** *Encontre o polinômio de Taylor  $p_2(x, y)$  da função  $f(x, y) = \text{sen}(x^4 + y^4)$  em torno da origem.*

Como no exemplo acima, a função é claramente suave. As suas derivadas até a segunda ordem são

	$(x, y)$	$(0, 0)$
$f$	$\text{sen}(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$4x^3 \cos(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial f}{\partial y}$	$4y^3 \cos(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$12x^2 \cos(x^4 + y^4) - 16x^6 \text{sen}(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$-16x^3 y^3 \text{sen}(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$12y^2 \cos(x^4 + y^4) - 16y^6 \text{sen}(x^4 + y^4)$	0

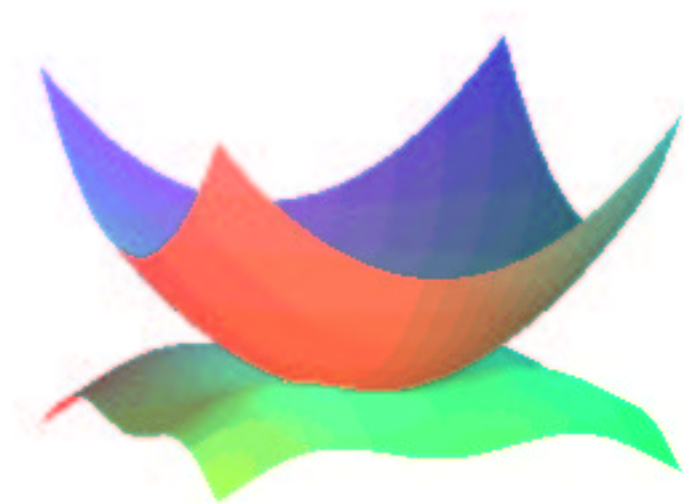


Figura 1.4: gráficos de  $f$  e  $p_2$  numa visão *global*

Assim,

$$p_2(x, y) = 0,$$

cujo gráfico representa um plano horizontal, na verdade, o próprio plano tangente ao gráfico de  $f$  na origem. Este exemplo ilustra que  $p_2$  pode não ser suficiente para sabermos mais informações sobre o gráfico de  $f$  próximo a  $P_o$ . Deixamos como exercício ao leitor descobrir qual o menor inteiro  $n$  tal que  $p_n(x, y)$  é diferente do polinômio nulo.

A figura abaixo (1.5) representa os gráficos de  $f$  e de  $p_2$  próximos à origem.

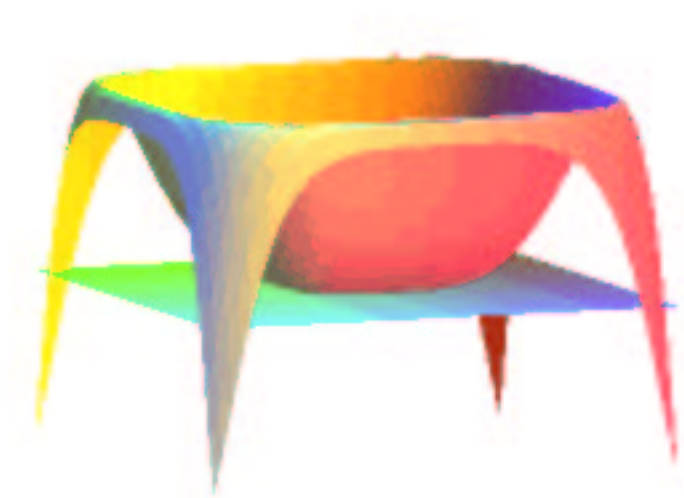


Figura 1.5: gráficos de  $f$  e  $p_2$  próximos à origem

## 1.2. FÓRMULA E POLINÔMIO DE TAYLOR PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS<sup>11</sup>

**Observação 1.2.1** *Note que existem funções suaves que não são identicamente nula mas têm todos  $p_n$  nulos.*



# Capítulo 2

## Máximos e mínimos

### 2.1 Definição e resultados gerais

**Definição 2.1.1** *Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $P_o \in A$  é um ponto de máximo (resp., mínimo) de  $f$  se  $f(P) \leq f(P_o)$  (resp.,  $f(P) \geq f(P_o)$ ) para todo  $P \in A$ .*

**Definição 2.1.2** *Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $P_o \in A$  é um ponto de máximo local (resp., mínimo local) de  $f$  se existir uma bola  $B$  centrada em  $P_o$  tal  $f(P) \leq f(P_o)$  (resp.,  $f(P) \geq f(P_o)$ ) para todo  $P \in A \cap B$ .*

**Observação 2.1.1** *Às vezes usaremos a denominação de máximo (mínimo) global no caso da definição (2.1.1) para ressaltar a diferença entre as duas definições acima.*

*É comum também empregarmos o termo extremo (local) para designarmos um ponto que é de máximo ou de mínimo (local).*

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.1.1** *Considere a função definida em  $\mathbb{R}^2$  dada por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Como  $f(x, y) \geq 0$  e  $f(0, 0) = 0$  é claro que  $(0, 0)$  é ponto de mínimo de  $f$ . Note que o gráfico de  $f$  representa um parabolóide com vértice na origem e concavidade voltada para cima.*

Antes de apresentarmos o próximo exemplo vamos lembrar que o gradiente de uma função aponta na direção de maior crescimento desta.

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável definida num aberto  $A$ . Seja  $\vec{u}$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^n$ . A derivada direcional de  $f$  num ponto  $P_o \in A$  na direção  $\vec{u}$  é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_o) = D_{\vec{u}}f(P_o) = \nabla f(P_o) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(P_o)\| \cos \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\nabla f(P_o)$  e  $\vec{u}$ . Deste modo, a derivada direcional será máxima quando  $\cos \theta = 1$ , ou seja, quando  $\theta = 0$ . Isto nos diz que  $\vec{u}$  deve ter a mesma direção e sentido de  $\nabla f(P_o)$ .

**Exemplo 2.1.2** *Considere o conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3 \text{ e } y \geq x\}$ . Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = 2x - y$ .*

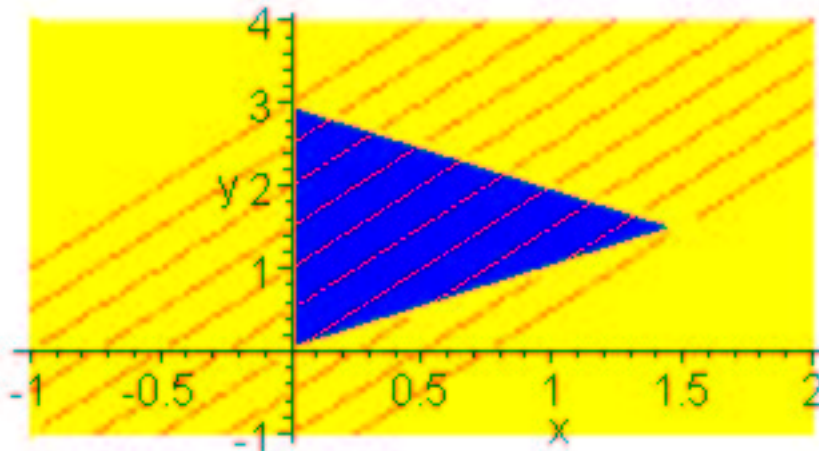


Figura 2.1: A região onde procuramos os extremos de  $f$  e algumas de suas curvas de nível

Como os valores de  $f$  crescem à medida que se avança na direção do vetor  $2\vec{i} - \vec{j} = \nabla f$ , pela ilustração podemos perceber que o mínimo de  $f$  é atingido no ponto  $(0, 3)$  e o seu máximo no ponto  $(3/2, 3/2)$ .

Vamos verificar que isto de fato ocorre. Se  $(x, y) \in A$ , temos

$$f(x, y) - f(3/2, 3/2) = 2x - y - 3/2 = (x - 3/2) + (x - y) \leq 0$$

pois, como  $(x, y) \in A$ , temos  $x + y \leq 3$  e  $x \leq y$ . Somando estas duas desigualdades obtemos  $2x + y \leq 3 + y$  que é equivalente a  $x \leq 3/2$ . Portanto,  $f(x, y) \leq f(3/2, 3/2)$  para todo  $(x, y) \in A$  e  $(3/2, 3/2)$  é, de fato, ponto de máximo de  $f$  em  $A$ . O valor máximo é  $f(3/2, 3/2) = 3/2$ .

Agora vamos verificar que  $(0, 3)$  é ponto de mínimo de  $f$  em  $A$ . Seja  $(x, y) \in A$ , temos

$$f(x, y) - f(0, 3) = 2x - y + 3 = 3x + (3 - x - y) \geq 0.$$

Ou seja,  $f(x, y) \geq f(0, 3)$  para todo  $(x, y) \in A$ , isto é,  $(0, 3)$  é ponto de mínimo de  $f$  em  $A$ . O valor de mínimo é  $f(0, 3) = -3$ .

**Teorema 2.1.1** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que tem máximo (resp., mínimo) local em  $P_o \in A$ . Se as derivadas parciais de  $f$  existem em  $P_o$  então elas são iguais a zero neste ponto.*

**Prova** Provaremos o caso em que  $P_o$  é ponto de máximo local (o caso de mínimo local fica demonstrado a partir deste tomando-se a função  $g = -f$ ; fica como exercício completar este detalhe). Seja  $e_i$  o vetor do  $\mathbb{R}^n$  que possui a  $i$ -ésima coordenada igual a 1 e as restantes iguais a 0. Como  $A$  é aberto e  $P_o$  é um ponto de máximo local existe uma bola aberta  $B$  de raio  $\varepsilon > 0$  e centrada em  $P_o$  que está contida em  $A$  tal que  $f(P) \leq f(P_o)$  para todo  $P \in B$ . Desse modo, a função de uma variável  $g(t) = f(P_o + te_i)$  fica bem definida para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  pois  $P_o + te_i \in B \subset A$  e, além do mais,  $g(t) = f(P_o + te_i) \leq f(P_o) = g(0)$ . Ou seja  $t = 0$  é um ponto de máximo local para a função de uma variável  $g$ .

Temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_o + te_i) - f(P_o)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_o),$$

ou seja,  $g$  possui derivada em  $t = 0$  e  $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_o)$ . Como  $t = 0$  é ponto de máximo local de  $g$ , por um teorema de Cálculo I, devemos ter  $g'(0) = 0$  e, portanto,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_o) = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Em outras palavras, o teorema anterior diz que se uma função atinge um máximo (ou mínimo) local em um *ponto interior* do seu domínio e suas derivadas parciais existem neste ponto, então o seu gradiente é nulo neste ponto. Deste modo, o teorema acima fornece uma *condição necessária* para que um ponto interior no domínio de uma função que tenha derivadas parciais seja um extremo local.

Os pontos  $P \in A$  tais que  $\nabla f(P) = 0$  são chamados de *pontos críticos* de  $f$ . Note que nem todo ponto crítico é ponto de máximo ou mínimo local. Basta considerar  $f(x, y) = x^2 - y^2$  cujo gradiente se anula na origem que, contudo, não é ponto nem de máximo nem de mínimo local, pois para todo  $\varepsilon > 0$  temos  $f(0, \varepsilon) < 0 < f(\varepsilon, 0)$ .

**Definição 2.1.3** *Um ponto crítico que não é máximo local nem mínimo local é chamado de ponto de sela.*

Ou seja, um ponto crítico  $P_o$  é um ponto de sela de uma função  $f$  se toda bola centrada em  $P_o$  contiver dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  tais que  $f(P_1) < f(P_o) < f(P_2)$ .

Note que pelo teorema acima para localizar extremos locais de uma função com derivadas parciais no interior do seu domínio basta restringirmos nossa atenção aos pontos críticos de  $f$ .

## 2.2 Teste do hessiano

O teorema a seguir fornece uma *condição suficiente*, sob determinadas condições, para decidir se um ponto crítico é ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela. Apresentaremos o teste para funções de **duas** variáveis. O caso de função de mais de duas variáveis será brevemente explicado a seguir (veja o teorema 2.2.2). Antes, porém, faremos a seguinte definição.

**Definição 2.2.1** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  definida num aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . A matriz hessiana de  $f$  num ponto  $P \in A$  é definida como*

$$\text{Hess}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz acima será denotado por  $H(P)$  e denominado de o hessiano de  $f$  em  $P$ .

Note que  $\text{Hess}(P)$  é uma matriz simétrica. No caso  $n = 2$  o hessiano é dado por

$$H(P) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \right)^2$$

**Teorema 2.2.1** *Seja  $f$  como acima. Se  $P_o$  é um ponto crítico de  $f$  então*

1. se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) > 0$  e  $H(P_o) > 0$  então  $P_o$  é um ponto de mínimo local de  $f$ ;
2. se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) < 0$  e  $H(P_o) > 0$  então  $P_o$  é um ponto de máximo local de  $f$ ;
3. se  $H(P_o) < 0$  então  $P_o$  é um ponto de sela de  $f$ ;
4. se  $H(P_o) = 0$  não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico  $P_o$ .

**Prova**

1. Como  $A$  é aberto e as derivadas parciais até segunda ordem são contínuas, existe uma bola aberta  $B_o$  centrada em  $P_o$  de raio  $\varepsilon > 0$  tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$  e  $H(x, y) > 0$  para todo  $(x, y) \in B$ . Colocando  $P_o = (x_o, y_o)$ , defina  $h = x - x_o$  e  $k = y - y_o$  onde  $(x, y) \in B_o$ .

Como  $\nabla f(x_o, y_o) = 0$ , a fórmula de Taylor para  $f$  fica

$$f(x, y) - f(x_o, y_o) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{P})h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{P})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{P})k^2 \right],$$

onde  $\bar{P} \in B_o$  é da forma  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_o + ch, y_o + ck)$  com  $0 < c < 1$ . Coloque

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{P}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{P}) \quad \text{e} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{P}).$$

Temos  $H(\bar{P}) = AC - B^2 > 0$  e para  $k \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_o, y_o) &= \frac{1}{2} [Ah^2 + 2Bhk + Ck^2] \\ &= \frac{k^2}{2} \left[ A \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 2B \frac{h}{k} + C \right]. \end{aligned}$$

Assim se pusermos  $v = h/k$  vemos que

$$f(x, y) - f(x_o, y_o) = \frac{k^2}{2} [Av^2 + 2Bv + C] > 0$$

pois  $\Delta = (2B)^2 - 4AC = 4(B^2 - AC) = 4H(\bar{P}) < 0$  e  $A > 0$ .

Se  $k = 0$  então

$$f(x, y) - f(x_o, y_o) = \frac{1}{2} Ah^2 \geq 0.$$

Portanto, para todo  $(x, y) \in B_o$  temos  $f(x, y) - f(x_o, y_o) \geq 0$ , isto é,  $f(x, y) \geq f(x_o, y_o)$ . Isto demonstra 1.



2. Considere a função  $g(x, y) = -f(x, y)$ . Temos  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P_o) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) > 0$  e o hessiano de  $g$  é igual ao hessiano de  $f$  (os sinais se cancelam nas multiplicações que aparecem no determinante) e, portanto, pela parte anterior  $g$  tem um ponto de mínimo local em  $P_o$ ; conseqüentemente  $f$  tem um ponto de máximo local em  $P_o$ .

3. Dado  $\vec{v} = (h, k)$  considere a função  $\varphi_{\vec{v}}(t) = f(P_o + t\vec{v}) = f(x_o + ht, y_o + kt)$  onde  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  como no item 1. Observe que  $\varphi_{\vec{v}}$  é a restrição de  $f$  sobre o segmento de extremos  $P_o - \varepsilon\vec{v}$  e  $P_o + \varepsilon\vec{v}$ . Esta restrição nos fornece a informação de como é o gráfico de  $f$  quando cortado por um plano vertical paralelo ao vetor  $\vec{v}$  e passando por  $(P_o, f(P_o))$ . Usando a regra da cadeia obtemos  $\varphi'_{\vec{v}}(0) = \nabla f(P_o) \cdot \vec{v}$  e

$$\varphi''_{\vec{v}}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_o)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o)k^2.$$

Coloque

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_o) \quad \text{e} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o).$$

Note que neste caso temos  $B^2 - AC > 0$ . Defina

$$Q(\vec{v}) = Q(h, k) = \varphi''_{\vec{v}}(0) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

O que vamos mostrar a seguir é que é sempre possível escolher direções  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tais que  $\varphi''_{\vec{u}}(0)$  e  $\varphi''_{\vec{v}}(0)$  têm sinais opostos. Desse modo, pelo teste da derivada segunda para funções de uma variável, a restrição de  $f$  numa direção terá um mínimo em  $P_o$  numa direção e um máximo na outra. Com isto em mãos é fácil ver que existem pontos arbitrariamente próximos de  $P_o$  cujos valores de  $f$  são maiores do que  $f(P_o)$  (na direção de mínimo) e outros pontos onde valores são menores do que  $f(P_o)$  (na direção de máximo). Isto é o que caracteriza uma sela. Veja a figura (2.2).

*Caso 1:*  $A = 0$  e  $C = 0$  e, portanto,  $B \neq 0$ . Temos que  $Q(1, -1) = -2B$  e  $Q(1, 1) = 2B$  têm sinais diferentes.

*Caso 2:*  $A = 0$  e  $C \neq 0$  e, portanto,  $B \neq 0$ . Temos que  $Q(-C/4B, 1) = C/2$  e  $Q(-3C/2B, 1) = -2C$  têm sinais diferentes.

*Caso 3:*  $A \neq 0$ . Temos que  $Q(1, 0) = A$  e  $Q(B/A, -1) = -[B^2 - AC]A^{-1}$  têm sinais diferentes pois  $-[B^2 - AC] < 0$ .

Deste modo, em qualquer um dos casos é possível encontrar duas direções  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tais que  $\varphi''_{\vec{u}}(0)$  e  $\varphi''_{\vec{v}}(0)$  têm sinais opostos. Para isto, basta tomar os *versores* (vetores unitários) dos vetores obtidos em cada caso. Por exemplo, no caso (1) tomamos  $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$  e  $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  e assim por diante.

4. Basta considerar as seguintes funções  $f(x, y) = x^4 + y^4$ ,  $g(x, y) = -x^4 - y^4$ ,  $h(x, y) = x^4 - y^4$ . A origem é ponto crítico para todas elas e o hessiano também se anula em todos os três casos. Entretanto, a origem é um mínimo para  $f$ , um máximo para  $g$  e um ponto de sela para  $h$ . Isto termina a demonstração deste teorema.

**Observação 2.2.1** Note que se  $A, B$  e  $C$  são números reais tais que  $AC - B^2 > 0$  e  $A > 0$  então  $C > 0$ , pois caso contrário teríamos  $AC \leq 0$  e, portanto,  $AC - B^2 \leq -B^2 \leq 0$ , o que contradiz o fato de  $AC - B^2 > 0$ . Do mesmo modo se prova que se  $AC - B^2 > 0$  e  $A < 0$  então  $C < 0$ . Assim, os itens 1 e 2 do teorema acima podem ser reescritos substituindo-se as hipóteses  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0$  por  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) < 0$ , respectivamente.

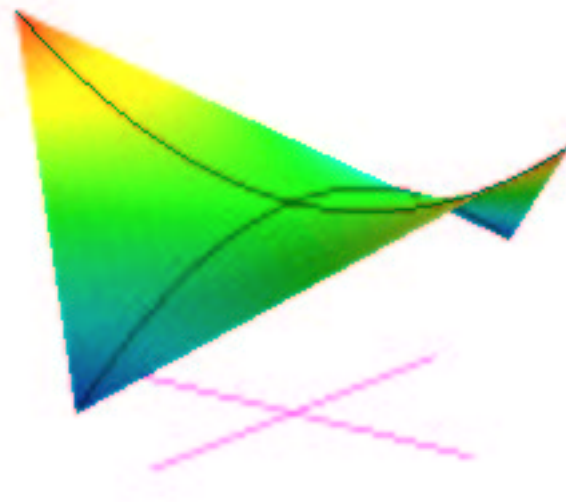


Figura 2.2: Um ponto de sela com as direções de máximo e de mínimo

Antes de enunciarmos o caso geral, relembremos o seguinte fato de Álgebra Linear:

**Proposição 2.2.1** *Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz com coeficientes reais simétrica. Então  $A$  possui  $n$  autovalores reais (contados conforme a sua multiplicidade). Além do mais, podemos escolher os  $n$  autovetores de modo que formem uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Em suma, existem números reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e vetores  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  tais que  $A\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j$ , e  $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$ , onde  $A\vec{v}_j$  deve ser entendido como o produto da matriz  $A$  pelo vetor coluna  $\vec{v}_j^t$ .*

**Teorema 2.2.2 (Caso geral)** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  definida num aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $P_o \in A$  seja um ponto crítico de  $f$ . Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores da matriz hessiana de  $f$  em  $P_o$  e  $H(P_o)$  o hessiano de  $f$  em  $P_o$ . Temos*

1. se  $\lambda_j > 0$  para todo  $1 \leq j \leq n$  então  $P_o$  é um ponto de mínimo local de  $f$ ;
2. se  $\lambda_j < 0$  para todo  $1 \leq j \leq n$  então  $P_o$  é um ponto de máximo local de  $f$ ;
3. se existirem dois autovalores  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  com sinais opostos então  $P_o$  é um ponto de sela de  $f$ ;
4. nos demais casos, isto é,

(a)  $\lambda_j \geq 0$ , para todo  $1 \leq j \leq n$  e existe um autovalor  $\lambda_i = 0$  ou

(b)  $\lambda_j \leq 0$ , para todo  $1 \leq j \leq n$  e existe um autovalor  $\lambda_i = 0$

não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico  $P_o$ .

**Esboço da prova** Ao invés de usarmos a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  usaremos a base ortonormal  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  formada pelos autovetores da matriz hessiana de  $f$  em  $P_o$ . Considere a função  $g(t) = f(P_o + t\vec{u})$ , onde  $0 \leq t \leq 1$ , e  $\vec{u}$  é um vetor com norma suficientemente pequena. Use a regra da cadeia e confira que  $g'(0) = \nabla(P_o) \cdot \vec{u} = 0$  e  $g''(0) = (\text{Hess}(P_o)\vec{u}) \cdot \vec{u}$ . O ponto a ser observado é que quando  $\vec{u}$  é pequeno o bastante, o valor de  $f(P)$ , onde  $P = P_o + \vec{u}$ , fica próximo a  $f(P_o) + \frac{1}{2}(\text{Hess}(P_o)\vec{u}) \cdot \vec{u}$  (pense como ficaria a fórmula de Taylor para várias variáveis).

Com relação à base adotada, escrevemos  $\vec{u} = h_1\vec{v}_1 + \dots + h_n\vec{v}_n$  e, deste modo,

$$\begin{aligned} 2[f(P) - f(P_o)] &\approx (\text{Hess}(P_o)\vec{u}) \cdot \vec{u} = (\text{Hess}(P_o)(h_1\vec{v}_1 + \dots + h_n\vec{v}_n)) \cdot (h_1\vec{v}_1 + \dots + h_n\vec{v}_n) \\ &= (h_1\text{Hess}(P_o)\vec{v}_1 + \dots + h_n\text{Hess}(P_o)\vec{v}_n) \cdot (h_1\vec{v}_1 + \dots + h_n\vec{v}_n) \\ &= (h_1\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + h_n\lambda_n\vec{v}_n) \cdot (h_1\vec{v}_1 + \dots + h_n\vec{v}_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i h_i h_j \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2 = \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2, \end{aligned}$$

pelo fato dos vetores serem ortonormais.

Agora, se  $\lambda_j > 0$ , para todo  $1 \leq j \leq n$  temos que  $\lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 > 0$  se  $\vec{u} = h_1\vec{v}_1 + \dots + h_n\vec{v}_n \neq \vec{0}$ . Se  $\lambda_j < 0$ , para todo  $1 \leq j \leq n$  temos que  $\lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 < 0$  se  $\vec{u} = h_1\vec{v}_1 + \dots + h_n\vec{v}_n \neq \vec{0}$ . Isto leva às conclusões 1 e 2.

Suponha agora que existam  $\lambda_i < 0$  e  $\lambda_j > 0$ . Tome  $P_1 = P_o + h_i\vec{v}_i$ ,  $h_i \neq 0$  e  $P_2 = P_o + h_j\vec{v}_j$ ,  $h_j \neq 0$ . Temos

$$2[f(P_1) - f(P_o)] \approx (\text{Hess}(P_o)h_i\vec{v}_i) \cdot (h_i\vec{v}_i) = \lambda_i h_i^2 < 0$$

e

$$2[f(P_2) - f(P_o)] \approx (\text{Hess}(P_o)h_j\vec{v}_j) \cdot (h_j\vec{v}_j) = \lambda_j h_j^2 > 0.$$

A partir daí, segue-se 3.

O caso 4 segue de exemplos como no teorema do caso bidimensional. Por exemplo, considere as funções  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^4 + x_2^4$ ,  $g(x_1, \dots, x_n) = -x_1^4 - x_2^4$  e  $h(x_1, \dots, x_n) = x_1^4 - x_2^4$  que têm a origem como ponto de mínimo, máximo e sela, respectivamente. Note que nos três casos, os autovalores são todos nulos.

**Exemplo 2.2.1** *Classifique os pontos críticos de*

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x + y^2 + z^2 - 2z.$$

Temos que

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 - 3, 2y, 2z - 2) = (0, 0, 0)$$

se e somente se  $(x, y, z) = (1, 0, 1) = P_1$  ou  $(x, y, z) = (-1, 0, 1) = P_2$ .

A matriz hessiana de  $f$  é

$$\text{Hess}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Desta forma,

$$\text{Hess}(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e daí segue-se que todos os autovalores são positivos. Portanto,  $P_1$  é ponto de mínimo local.

Quanto a  $P_2$ , temos

$$\text{Hess}(P_2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deste modo,  $P_2$  é ponto de sela pois a matriz hessiana possui um autovalor positivo e um negativo

**Exemplo 2.2.2** *Classifique os pontos críticos de*

$$f(x, y, z, w) = 2xy + 2yz + y^2 + z^2 - 2w^2.$$

Temos que

$$\nabla f(x, y, z, w) = (2y, 2x + 2y + 2z, 2y + 2z, -4w) = (0, 0, 0, 0)$$

se e somente se  $(x, y, z) = (0, 0, 0) = P_0$ . Temos

$$\text{Hess}(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico desta matriz é

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = (4 + \lambda)(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 8).$$

Note que  $\lambda_1 = -4 < 0$  é um autovalor da matriz acima. Como  $p(1) = 5 > 0$  e  $p(2) = -48 < 0$ , vemos que existe  $\lambda_2 \in (1, 2)$  tal que  $p(\lambda_2) = 0$ , ou seja, existe também um autovalor positivo. Portanto,  $P_0$  é um ponto de sela.

Vejamus que o teorema 2.2.2 no caso  $n = 2$  é equivalente ao teorema 2.2.1. Para tanto, usaremos a notação

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} P_o, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} P_o, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} P_o \quad \text{e} \quad H = AB - C^2.$$

Coloque

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$$

e, portanto, o seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (A + B)\lambda + AB - C^2 = \lambda^2 - (A + B)\lambda + H$$

e tem como raízes os números reais

$$\lambda_1 = \frac{A + B + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{A + B - \sqrt{\Delta}}{2}$$

onde  $\Delta = (A + B)^2 - 4H = (A - B)^2 + 4C^2 \geq 0$ .

Vamos supor que a hipótese de 1 do teorema 2.2.1 seja válida, isto é,  $A > 0$  e  $H > 0$ . Queremos mostrar que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivos. Como  $H = AB - C^2 > 0$  devemos ter  $AB > C^2 \geq 0$ . Como  $A > 0$  então  $B > 0$ . Logo,

$$\lambda_1 \geq \frac{A + B}{2} > 0.$$

Também,

$$\begin{aligned} H > 0 &\Rightarrow AB > C^2 \Rightarrow 4AB > 4C^2 \Rightarrow 2AB > 4C^2 - 2AB \\ &\Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB > A^2 + B^2 + 4C^2 - 2AB = (A - B)^2 + 4C^2 \Rightarrow (A + B)^2 > \Delta \\ &\Rightarrow A + B = |A + B| > \sqrt{\Delta} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{A + B - \sqrt{\Delta}}{2} > 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivos

$$-A - B < \sqrt{\Delta} < A + B \Rightarrow \sqrt{\Delta} < |A + B| \Rightarrow \Delta = (A + B)^2 - 4H < (A + B)^2 \Rightarrow H > 0.$$

Daí,  $AB > C^2 \geq 0$  e, portanto  $A$  e  $B$  têm o mesmo sinal. Se fosse  $A < 0$  então  $B < 0$  e teríamos

$$\lambda_2 = \frac{A + B - \sqrt{\Delta}}{2} \leq \frac{A + B}{2} < 0,$$

um absurdo. Portanto, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivos devemos ter  $A > 0$  e  $H > 0$ , que são as hipóteses de 1 do teorema 2.2.1.

Agora, se  $H > 0$  e  $A < 0$  então, como anteriormente, vemos que devemos ter  $B < 0$ , e daí segue que

$$\lambda_2 = \frac{A + B - \sqrt{\Delta}}{2} \leq \frac{A + B}{2} < 0.$$

Também, como antes,

$$H > 0 \Rightarrow (A + B)^2 > \Delta \Rightarrow -(A + B) = |A + B| > \sqrt{\Delta} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{A + B + \sqrt{\Delta}}{2} < 0.$$

Reciprocamente, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativos também temos

$$\sqrt{\Delta} < |A + B| \Rightarrow H > 0$$

e, portanto,  $A$  e  $B$  têm o mesmo sinal. Se fosse  $A > 0$  deveríamos ter  $B > 0$  e isto implicaria que

$$\lambda_1 \geq \frac{A+B}{2} > 0,$$

uma contradição. Isto mostra a equivalência das hipóteses entre os segundos itens dos dois teoremas.

Suponha agora que  $H < 0$ . Temos

$$\begin{aligned} AB < C^2 &\Rightarrow \dots \Rightarrow (A+B)^2 < \sqrt{\Delta} \Rightarrow |A+B| < \sqrt{\Delta} \Rightarrow -\sqrt{\Delta} < A+B < \sqrt{\Delta} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{A+B+\sqrt{\Delta}}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{A+B-\sqrt{\Delta}}{2} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ .

Reciprocamente, se  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  então

$$A+B-\sqrt{\Delta} < 0 < A+B+\sqrt{\Delta} \Rightarrow |A+B| < \sqrt{\Delta} \Rightarrow (A+B)^2 < \Delta = (A+B)^2 - 4H \Rightarrow H < 0.$$

Agora,

$$H = 0 \Leftrightarrow \Delta = (A+B)^2 - 4H = (A+B)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = |A+B| \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = 0.$$

Isto termina a prova da equivalência entre os teoremas 2.2.1 e 2.2.2 no caso bidimensional.

O teorema a seguir, que é um resultado de Álgebra Linear, fornece uma condição necessária e suficiente para decidir se uma matriz simétrica apresenta todos os autovalores positivos ou todos negativos.

**Definição 2.2.2** *Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz de ordem  $n$ . O menor principal de ordem  $1 \leq k \leq n$  da matriz é definido como o determinante da sub-matriz  $A_k = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$  e denotado por  $m_k(A)$ .*

**Teorema 2.2.3** *Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz simétrica de ordem  $n$ .*

1. *A fim de que todos os autovalores de  $A$  sejam positivos é necessário e suficiente que  $m_k(A) > 0$  para todo  $1 \leq k \leq n$ .*
2. *A fim de que todos os autovalores de  $A$  sejam negativos é necessário e suficiente que  $m_k(A) < 0$  para todo  $k$  ímpar,  $1 \leq k \leq n$  e  $m_k(A) > 0$  para todo  $k$  par,  $1 \leq k \leq n$ .*

**Obs.** A parte 2. segue de 1. notando que  $m_k(-A) = (-1)^k m_k(A)$ .

## 2.3 Exemplos

**Exemplo 2.3.1** *Deseja-se construir uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo retangular com um certo volume  $V$ . Determine as dimensões da caixa para que se gaste o mínimo de material possível.*

Denotemos por  $x$  e  $z$  as dimensões da base da caixa e por  $y$  a sua altura. Desta forma  $V = xyz$  e a área total da caixa é  $A = 2xy + 2yz + xz$ . Logo, como  $V$  é dado, temos

$$A(x, y) = 2xy + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y}.$$

Nosso problema se resume em achar o ponto de mínimo de  $A$ . Note que a região em que estamos trabalhando é  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Vamos procurar os pontos críticos de  $A$  :

$$\begin{cases} 2y - 2\frac{V}{x^2} = 0 \\ 2x - \frac{V}{y^2} = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} yx^2 = V \\ 2xy^2 = V \end{cases}.$$

Logo  $2y = x$  e voltando às equações, obtemos  $x = \sqrt[3]{2V}$ ,  $y = \sqrt[3]{V/4}$  e  $z = \sqrt[3]{2V}$ .

Agora,

$$H(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{2V}{y^3} \end{pmatrix} = \frac{8V^2}{x^3 y^3} - 4.$$

Assim  $H(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4}) = 12 > 0$  e  $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4}) = 2 > 0$ . Logo, pelo critério do hessiano vemos que  $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4})$  é um ponto de mínimo local de  $A$ . Na verdade, trata-se de um mínimo global. A verificação pode ser vista da seguinte maneira. Para cada  $y > 0$  fixo a função

$$A_y(x) = A(x, y) = 2xy + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y}$$

possui um mínimo global pois  $\lim_{x \rightarrow 0^+} A_y(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A_y(x) = +\infty$  e ele ocorre em  $x = \sqrt{V/y}$  (note que esta é a única solução de  $\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) = A'_y(x) = 0$ ). O valor mínimo é  $m(y) = A_y(\sqrt{V/y}) = A(\sqrt{V/y}, y) = 4\sqrt{Vy} + V/y$ . Logo,

$$A(x, y) = A_y(x) \geq m(y).$$

Por outro lado, a função  $m(y)$ , que representa o mínimo de  $A_y$  para cada  $y > 0$  fixado, também possui um mínimo global, pois  $\lim_{y \rightarrow 0^+} m(y) = +\infty$  e  $\lim_{y \rightarrow +\infty} m(y) = +\infty$  e este mínimo ocorre para  $y$  tal que  $m'(y) = 0$ , isto é, quando  $2\sqrt{V/y} - V/y^2 = 0$ , ou seja, quando  $y = \sqrt[3]{V/4}$ . Isto nos dá  $x = \sqrt{V/y} = \sqrt{V/(\sqrt[3]{V/4})} = \sqrt[3]{2V}$ . Assim, para todo  $x > 0$  e  $y > 0$ , temos

$$A(x, y) = A_y(x) \geq m(y) \geq m(\sqrt[3]{V/4}) = A(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4}).$$

Portanto,  $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4})$  é um ponto de mínimo global. Finalmente, as dimensões da caixa são

$$x = \sqrt[3]{2V}, \quad y = \sqrt[3]{V/4} \quad \text{e} \quad z = \sqrt[3]{2V}.$$

**Exemplo 2.3.2** *Classifique os pontos críticos da função*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2.$$

Vamos procurar os pontos críticos de  $f$  :

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) = 0 \\ 4y^3 - 4y = 4y(y-1)(y+1) = 0 \end{cases},$$

que nos fornece as seguintes soluções

$$\begin{array}{lll} P_1 = (0, 0) & P_2 = (0, 1) & P_3 = (0, -1) \\ P_4 = (1, 0) & P_5 = (1, 1) & P_6 = (1, -1) \\ P_7 = (-1, 0) & P_8 = (-1, 1) & P_9 = (-1, -1). \end{array}$$

O hessiano de  $f$  em  $(x, y)$  é dado por

$$H(x, y) = \det \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix} = 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1).$$

$P$	$H(P)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$P$ é	$f(P)$
$P_1$	16	-4	max. loc.	0
$P_2$	-32		sela	-1
$P_3$	-32		sela	-1
$P_4$	-32		sela	-1
$P_5$	64	8	min. loc.	-2
$P_6$	64	8	min. loc.	-2
$P_7$	-32		sela	-1
$P_8$	64	8	min. loc.	-2
$P_9$	64	8	min. loc.	-2

A figura (2.3) mostra os pontos críticos de  $f$  e a curva de nível  $-1$  referente aos pontos de sela.

A figura (2.4) mostra o gráfico de  $f$ .

Observe que  $P_1$  é apenas um ponto de máximo local pois, por exemplo  $f(2, 0) = 8 > 0 = f(P_1)$ . Porém, os pontos de mínimo local são na verdade pontos de mínimo global. Nestes pontos  $f$  tem o valor  $-2$  e assim para todo  $(x, y)$  temos

$$f(x, y) + 2 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2 = (x^4 - 2x^2 + 1) + (y^4 - 2y^2 + 1) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 \geq 0,$$

portanto,  $f(x, y) \geq -2$ .

## 2.4 Extremos de funções em regiões fechadas e limitadas

Assim como ocorre com funções de uma variável, uma função de várias variáveis não precisa atingir pontos de máximo ou de mínimo. Um exemplo bem simples é dado pela função



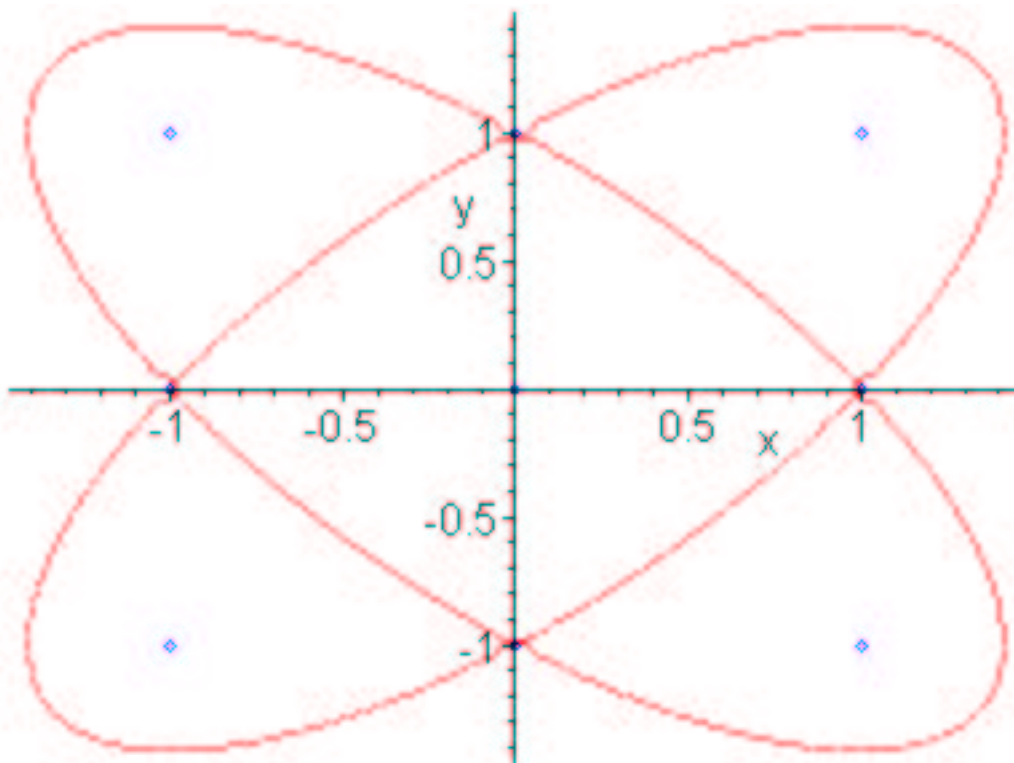


Figura 2.3: pontos críticos de  $f$  e a curva de nível  $-1$

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x + y$ . Esta função não possui máximo nem mínimo e, a bem da verdade, nem possui pontos críticos. O próximo teorema que será apenas enunciado sem demonstração garante em que condições uma função atinge seu máximo e seu mínimo. Antes de enunciá-lo lembremos que um subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  é chamado de compacto se for limitado (isto é, se “couber” dentro de uma bola) e fechado (isto é, se todos os pontos da sua *fronteira* pertencerem a ele).

**Teorema 2.4.1** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um compacto. Se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua então existem pontos  $P_1, P_2 \in K$  tais que  $f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$  para todo  $P \in K$ . Em outras palavras,  $P_1$  é ponto de mínimo de  $f$  em  $K$  e  $P_2$  é ponto de máximo de  $f$  em  $K$ .*

**Observação 2.4.1** *Nem  $P_1$  nem  $P_2$  precisam ser únicos com tais propriedades.*

**Observação 2.4.2** *Se  $K$  é compacto e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável então pelo teorema 2.4.1 existem pontos de máximo e mínimo e para localizá-los podemos procurar os pontos críticos no **interior** de  $K$  (isto é, nos pontos de  $K$  que não fazem parte da *fronteira*) e analisar numa maneira conveniente os valores de  $f$  sobre a *fronteira* de  $K$ . Note que não há necessidade de utilizarmos o teste do hessiano nos pontos críticos se estivermos interessados em localizar os pontos de máximo e mínimo (globais) pois, basta testar a função em todos os pontos críticos (que estão no interior de  $K$ ) e sobre aqueles extremos que foram encontrados sobre a *fronteira* de  $K$ . **Enfatizamos que podem ocorrer extremos de  $f$  na *fronteira* e estes extremos não serem pontos críticos de  $f$ .***

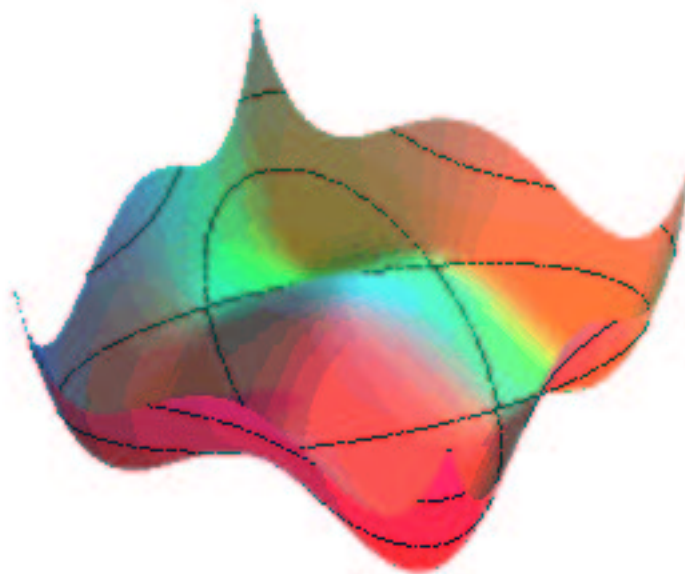


Figura 2.4: gráfico de  $f$

Veamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.4.1** Determine os extremos de  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$  sobre o conjunto  $K = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$ .

Note que  $K$  é compacto,  $f$  suave ( $C^\infty$ ) e pelo teorema 2.4.1 atinge máximo e mínimo.

A região  $K$  é um retângulo como mostra a figura 2.5.

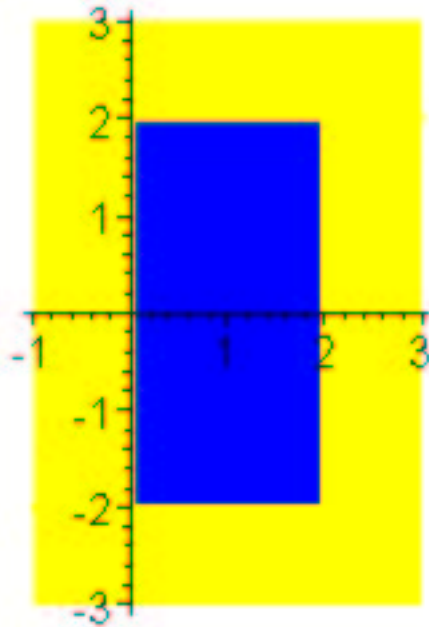
Vamos procurar os pontos críticos de  $f$  : no interior de  $K$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} ,$$

cujas soluções são

$P$	$(x, y)$	interior $K$	$f(P)$
$P_1$	$(1, -1)$	$\in$	0
$P_2$	$(1, 1)$	$\in$	-4
$P_3$	$(-1, 1)$	$\notin$	
$P_4$	$(-1, -1)$	$\notin$	

Desse modo, devemos considerar como soluções apenas os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

Figura 2.5: região  $K$ 

Passemos agora à análise de dos valores de  $f$  sobre a fronteira de  $K$ . Dividiremos em quatro casos, cada qual contemplando um lado do retângulo (ver figura 2.5.)

*caso 1:* Lado  $\ell_1 = \{(0, y); -2 \leq y \leq 2\}$ . Neste lado a função a ser estudada é  $g_1(y) = f(0, y) = y^3 - 3y$  com  $-2 \leq y \leq 2$ . Note que  $g_1'(y) = 3y^2 - 3 = 0$  implica em  $y = -1$  ou  $y = 1$ . Temos  $f(0, -1) = g_1(-1) = 2$  e  $f(0, 1) = g_1(1) = -2$ . Não podemos esquecer de testar  $g_1$  nos extremos do intervalo de variação de  $y$ , isto é, nos pontos  $-2$  e  $2$ , obtendo  $f(0, -2) = g_1(-2) = -2$  e  $f(0, 2) = g_1(2) = 2$ .

*caso 2:* Lado  $\ell_2 = \{(2, y); -2 \leq y \leq 2\}$ . Neste lado a função a ser estudada é  $g_2(y) = f(2, y) = 2 + y^3 - 3y$  com  $-2 \leq y \leq 2$ . Como  $g_2 = 2 + g_1$  obtemos os mesmos valores de  $y$ , porém lembre que aqui  $x = 2$ . Deste modo,  $f(2, -1) = g_2(-1) = 4$ ,  $f(2, 1) = g_2(1) = 0$ ,  $f(2, -2) = g_2(-2) = 0$ ,  $f(2, 2) = g_2(2) = 4$ .

*caso 3:* Lado  $\ell_3 = \{(x, 2); 0 \leq x \leq 2\}$ . Neste lado a função a ser estudada é  $g_3(x) = x^3 - 3x + 2$   $0 \leq x \leq 2$  que tem a mesma representação da função do *caso 2* mas está definida num domínio distinto. Assim, devemos descartar o ponto  $x = -1$  que embora seja solução de  $g_3'(x) = 0$ , não pertence a intervalo  $[0, 2]$ . Ficamos com  $f(1, 2) = g_3(1) = 0$ ,  $f(0, 2) = g_3(0) = 2$  e  $f(2, 2) = g_3(2) = 4$ .

*caso 4:* Lado  $\ell_4 = \{(x, -2); 0 \leq x \leq 2\}$ . Neste lado a função a ser estudada é  $g_4(x) = x^3 - 3x - 2$   $0 \leq x \leq 2$ . Como  $g_4 = g_3 - 4$  obtemos os mesmos valores de  $x$ , porém lembre que aqui  $y = -2$ . Deste modo,  $f(1, -2) = g_4(1) = -4$ ,  $f(0, -2) = g_4(0) = -2$  e  $f(2, -2) = g_4(2) = 0$ .

Resumindo,

$(x, y)$	$f(x, y)$
$(1, -1)$	0
$(1, 1)$	-4
$(0, -1)$	2
$(0, 1)$	-2
$(0, -2)$	-2
$(0, 2)$	2
$(2, -1)$	4
$(2, 1)$	0
$(2, -2)$	0
$(2, 2)$	4
$(1, 2)$	0
$(1, -2)$	-4

obtemos que o máximo de  $f$  é 4 e ocorre nos pontos  $(2, -1)$  e  $(2, 2)$ , ambos na fronteira de  $K$ , e o mínimo é  $-4$  e ocorre nos pontos  $(1, 1)$ , no interior de  $K$ , e  $(1, -2)$ , na fronteira de  $K$ .

**Exemplo 2.4.2** *Determine os extremos de  $f(x, y) = xy$  sobre o conjunto  $K = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ .*

Como no exemplo anterior,  $K$  é compacto (um disco fechado),  $f$  suave ( $C^\infty$ ) e pelo teorema 2.4.1 atinge máximo e mínimo.

Os pontos críticos de  $f$  no interior de  $K$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

cuja única solução é  $(0, 0)$  e o valor de  $f$  neste ponto é 0.

Analisaremos na fronteira de  $K$  :

$$\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos t, \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Assim, a função a ser considerada é  $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Note que as raízes  $g'(t) = \cos 2t = 0$  com  $0 \leq t \leq 2\pi$  são  $\pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/4$  e  $7\pi/4$ . Temos  $g(\pi/4) = 1/2 = g(5\pi/4)$  e  $g(3\pi/4) = -1/2 = g(7\pi/4)$ . Além do mais, nos extremos temos  $g(0) = g(2\pi) = 0$ .

Reunindo os resultados encontrados no interior e na fronteira de  $K$  vemos que o máximo de  $f$  é  $1/2$  e o mínimo é  $-1/2$ . O valor máximo é atingido nos pontos referentes aos valores de  $t = \pi/4$  e  $t = 5\pi/4$  que correspondem aos pontos  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  e  $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ , respectivamente. O valor mínimo é atingido nos pontos referentes aos valores de  $t = 3\pi/4$  e  $t = 7\pi/4$  que correspondem aos pontos  $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  e  $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ , respectivamente. Todos estes pontos se encontram na fronteira de  $K$ .

# Capítulo 3

## O problema de um vínculo

### 3.1 Introdução

Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções de duas variáveis com derivadas parciais contínuas em um aberto de  $A \subset \mathbb{R}^2$ . O problema que passaremos a estudar é encontrar os extremos da função  $f$  quando esta está sujeita à condição que  $g(x, y) = 0$ . Isto é, queremos encontrar os pontos  $(x, y)$  dentro do domínio de  $f$  e restritos ao *vínculo* (ou *condição lateral*)  $g(x, y) = 0$  que maximizem ou minimizem os valores de  $f$ .

Note que o vínculo  $g(x, y) = 0$  representa uma curva de nível da função  $g$ , que assumiremos ser tal que  $\nabla g \neq 0$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$  a equação  $f(x, y) = t$  também representa uma curva de nível da função  $f$  e variando  $t$  obteremos uma família de curvas de nível de  $f$ . Se uma tal curva de nível de  $f$ , digamos de nível  $t_o$ , intercepta a curva  $g(x, y) = 0$  transversalmente, isto é, de modo que uma não seja tangente à outra, ou ainda, os vetores  $\nabla f(x, y)$  e  $\nabla g(x, y)$  são linearmente independentes no ponto de intersecção, então para valores de  $t$  próximos a  $t_o$  a curva de nível  $f(x, y) = t$  também interceptará  $g(x, y) = 0$ . Isto significa que  $t_o$  não pode ser valor de mínimo nem de máximo de  $f$  sobre o vínculo. Desta maneira,  $f$  só pode atingir um valor extremo (máximo ou mínimo) sobre a curva  $g(x, y) = 0$  num determinado ponto  $P_o = (x_o, y_o)$  se a curva de nível  $f(x, y) = f(P_o)$  for tangente a  $g(x, y) = 0$  em  $P_o$ , ou seja, se  $\nabla f(P_o) = \lambda \nabla g(P_o)$  para algum  $\lambda$ .

Note que as observações acima podem ser verificadas da seguinte forma: Suponha que a curva  $g(x, y) = 0$  seja representada na forma paramétrica por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , tal que  $\gamma'(t) \neq 0$ . Sobre esta curva, a função  $f$  é dada por  $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ . Deste modo, para analisar os extremos de  $f$  sobre  $g(x, y) = 0$  basta encontrar os extremos de  $\varphi$  que é uma função de uma variável. Supondo que  $t \in (a, b)$  então um extremo de  $\varphi$ , caso exista, deve ocorrer em algum  $t_o$  tal que  $\varphi'(t_o) = 0$ . Mas

$$\varphi'(t) = \partial_x f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t))y'(t) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Assim, substituindo em  $t = t_o$  e colocando  $P_o = (x(t_o), y(t_o))$ , vemos que  $\nabla f(P_o) \cdot \gamma'(t_o) = 0$ , ou seja,  $\gamma'(t_o)$  deve ser ortogonal a  $\nabla f(P_o)$ . Como  $\nabla f$  é ortogonal às curvas de nível de  $f$ , segue-se que em  $P_o$  as curvas de nível  $g(x, y) = 0$  e  $f(x, y) = f(x_o, y_o)$  devem ser tangentes e, portanto,  $\nabla f(P_o) = \lambda \nabla g(P_o)$  para algum  $\lambda$ .

Observe que as condições  $\nabla f(x_o, y_o) = \lambda_o \nabla g(x_o, y_o)$  para algum  $\lambda_o$  e  $g(x_o, y_o) = 0$  são equivalentes a que  $(x_o, y_o, \lambda_o)$  seja um ponto crítico da função de três variáveis dada por

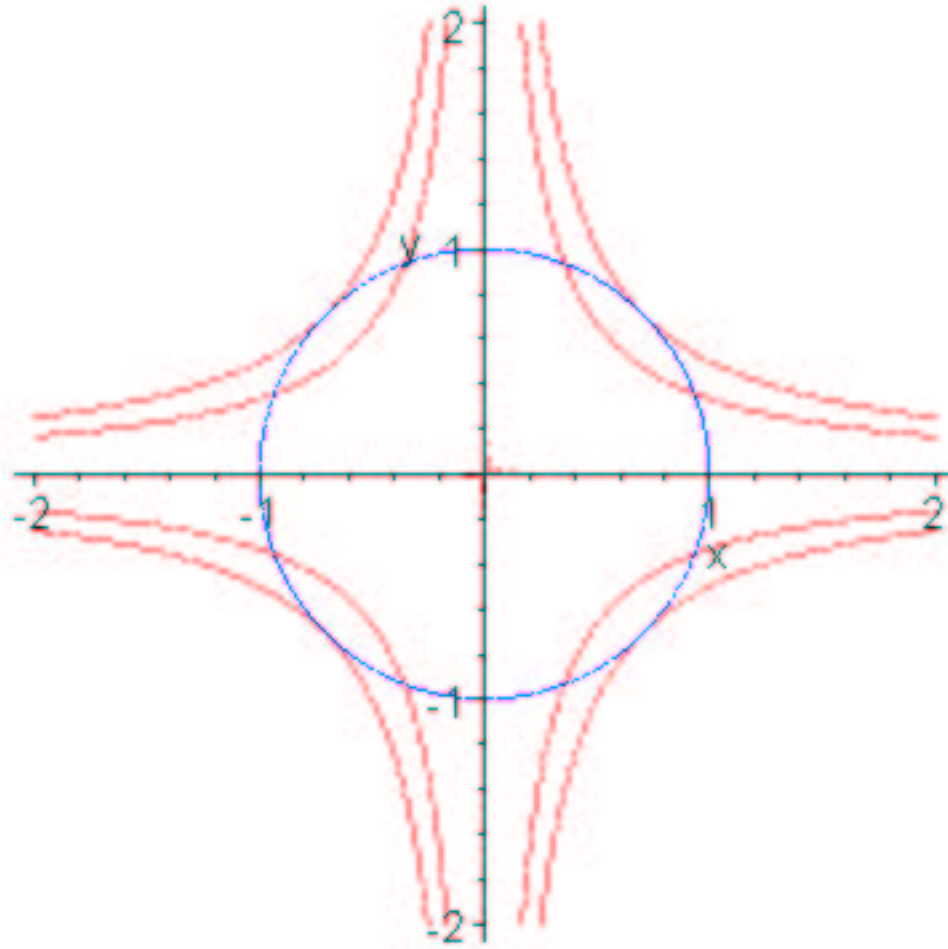


Figura 3.1:  $g(x, y) = 0$  representada em azul e algumas curvas de nível de  $f(x, y) = t$

$h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ . De fato,  $(x_o, y_o, \lambda_o)$  é um ponto crítico de  $h$  se e somente se

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x_o, y_o, \lambda_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) - \lambda_o \frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x_o, y_o, \lambda_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) - \lambda_o \frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_o, y_o, \lambda_o) = -g(x_o, y_o) = 0 \end{cases}$$

mas as duas primeiras equações acima são equivalentes a  $\nabla f(x_o, y_o) = \lambda_o \nabla g(x_o, y_o)$  e a terceira a  $g(x_o, y_o) = 0$ .

O raciocínio acima pode ser aproveitado para o caso de mais variáveis. Vejamos quando  $f$  e  $g$  são funções de três variáveis satisfazendo as mesmas hipóteses anteriores, isto é, são funções de classe  $C^1$  e  $\nabla g \neq 0$ . Esta última condição garante que  $g(x, y, z) = 0$  define uma superfície nível  $S$  tal que para cada  $P_o \in S$  existem duas curvas  $\gamma_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ ,  $j = 1, 2$ , tais que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P_o$  e  $\gamma_1'(0)$  e  $\gamma_2'(0)$  são linearmente independentes (veja a figura 3.2).

Se  $P_o = (x_o, y_o, z_o)$  é um extremo de  $f$  restrita à condição  $g(x, y, z) = 0$  então as funções  $\varphi_1(t) = f(\gamma_1(t))$  e  $\varphi_2(t) = f(\gamma_2(t))$  também alcançarão um extremo quando  $t = 0$ , corres-

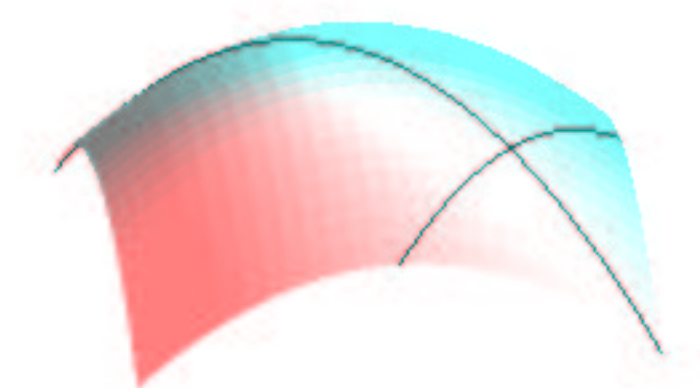


Figura 3.2: Superfície de nível  $g(x, y, z) = 0$  contendo duas curvas cujos vetores tangentes são linearmente independentes.

pondente a  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P_o$ . Derivando obtemos as relações

$$\nabla f(P_o) \cdot \gamma_1'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla f(P_o) \cdot \gamma_2'(0) = 0.$$

Como  $\gamma_1'(0)$  e  $\gamma_2'(0)$  são linearmente independentes, vemos que  $\nabla f(P_o)$  deve ser ortogonal ao plano gerado por estes dois vetores em  $P_o$ , que nada mais é senão o plano tangente à superfície  $g(x, y, z) = 0$  em  $P_o$ . Como  $\nabla g(P_o) \neq 0$  é ortogonal a este plano, segue-se que  $\nabla f(P_o) = \lambda_o \nabla g(P_o)$  para algum  $\lambda_o \in \mathbb{R}$ . Este resultado se estende para  $n$  variáveis e o argumento a ser usado é análogo, bastando tomar  $n - 1$  curvas contidas  $g(P) = 0$  passando por um mesmo ponto e cujos  $n - 1$  vetores tangentes formam um conjunto linearmente independente.

## 3.2 Teorema do multiplicador de Lagrange

**Teorema 3.2.1 (Multiplicador de Lagrange)** *Sejam  $f$  e  $g$  funções de classe  $C^1$  definidas num aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\nabla g(P) \neq 0$ ,  $P \in A$ . A fim de que  $P_o \in A$  seja um extremo de  $f$  restrita ao vínculo  $g(P) = 0$  é necessário que exista  $\lambda_o \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f(P_o) = \lambda_o \nabla g(P_o)$  e  $g(P_o) = 0$ , ou seja, o ponto  $(P_o, \lambda_o) \in A \times \mathbb{R}$  é um ponto crítico da função  $h(P, \lambda) = f(P) - \lambda g(P)$ .*

### 3.3 Exemplos

**Exemplo 3.3.1** Encontre o ponto sobre o ramo de hipérbole  $xy = 1$ ,  $x > 0$  mais próximo à origem.

A função a ser minimizada é  $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  sujeita ao vínculo  $g(x, y) = xy - 1 = 0$ . Um fato simples é que se  $(x, y)$  é um ponto que satisfaz o vínculo e minimiza a função  $h$  então este mesmo ponto minimiza a função  $f = h^2$ , e reciprocamente. Esta pequena observação facilita nos cálculos das derivadas parciais, pois basta trabalharmos com  $f(x, y) = x^2 + y^2$  que não envolve radicais. Nosso problema se resume a encontrar o mínimo de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sujeita à condição  $g(x, y) = xy - 1 = 0$ . Pelo teorema 3.2.1 um ponto que satisfaz estas duas condições deve satisfazer, para algum  $\lambda$ , as equações

$$\begin{aligned} \begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy = 1, x > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x = \lambda^2 x / 2 \\ 2y = \lambda x \\ xy = 1, x > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 2 \\ 2y = \lambda x \\ xy = 1, x > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = y \\ xy = 1, x > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = -y \\ xy = 1, x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

mas o último caso não possui solução pois deveríamos ter  $-x^2 = 1$ . Assim, a única solução corresponde a  $\lambda = 2$  e é  $(x, y) = (1, 1)$ .

Afirmamos que  $(1, 1)$  é realmente um ponto de mínimo de  $f$  sobre o ramo de hipérbole. De fato, se  $xy = 1$  e  $x > 0$  então

$$f(x, y) - f(1, 1) = x^2 + y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} \geq 0,$$

isto é,  $f(x, y) \geq f(1, 1) = 2$ , para todo ponto  $(x, y)$  sobre o ramo de hipérbole  $xy = 1$ ,  $x > 0$ . Note, porém, que a *distância mínima*, é  $\sqrt{2}$ , ou seja, é dada por  $g(1, 1) = \sqrt{f(1, 1)}$ .

**Exemplo 3.3.2** Determine o ponto sobre a a reta  $x + 2y = 1$  cujas coordenadas tenham o produto máximo.

A função a ser maximizada é  $f(x, y) = xy$  sujeita ao vínculo  $g(x, y) = x + 2y - 1 = 0$ . Pelo teorema 3.2.1 um ponto que satisfaz estas duas condições deve satisfazer, para algum  $\lambda$ , as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda \\ x = 2\lambda \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = x \\ x = 2\lambda \\ 4\lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1/4 \\ x = 1/2 \\ y = 1/4 \end{cases}.$$

Logo, o ponto procurado é  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ .



Afirmamos que  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  é realmente um ponto de máximo de  $f$  sobre reta. De fato, se  $x + 2y = 1$  então

$$f(x, y) - f(1/2, 1/4) = xy - 1/8 = (1 - 2y)y - 1/8 = -2y^2 + y - 1/8 = -2(y - 1/4)^2 \leq 0,$$

isto é,  $f(x, y) \leq f(1/2, 1/4)$  para todo  $(x, y)$  sobre a reta  $x + 2y = 1$ .

**Exemplo 3.3.3** *Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Representando por  $(x, y, z)$  o vértice do paralelepípedo no primeiro octante ( $x, y, z > 0$ ) vemos que o seu volume é expresso por  $V(x, y, z) = 8xyz$ . Assim, devemos encontrar o máximo da função  $V$  restrita à condição  $g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$ . Como o elipsóide é um conjunto fechado e limitado de  $\mathbb{R}^3$ , isto é, é um conjunto compacto, então já sabemos que  $V$  atingirá um máximo e um mínimo sobre ele. Desta forma, basta utilizarmos o teorema dos multiplicadores de Lagrange e dentre os possíveis pontos que encontrarmos ao resolver o sistema, tomar aquele que dê o maior valor para  $V$ . Lembrando que basta considerar  $x, y, z > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \begin{cases} 8yz = \frac{\lambda x}{2} \\ 8xz = \frac{2\lambda y}{9} \\ 8xy = \frac{\lambda z}{8} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{9x}{2y} \\ \frac{z}{x} = \frac{4x}{z} \\ \frac{z}{2y} = \frac{8y}{9z} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4} \\ z^2 = 4x^2 \\ \frac{z^2}{16} = \frac{y^2}{9} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4} \\ z^2 = 4x^2 \\ \frac{z^2}{16} = \frac{y^2}{9} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4} \\ z^2 = 4x^2 \\ \frac{z^2}{16} = \frac{y^2}{9} \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} &\iff (x, y, z) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right). \end{aligned}$$

Portanto, o paralelepípedo procurado tem com vértices os pontos

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right), & P_2 &= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right), \\ P_3 &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right), & P_4 &= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right), \\ P_5 &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right), & P_6 &= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right), \\ P_7 &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right), & P_8 &= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right), \end{aligned}$$

com volume igual a  $V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = 8 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}$  unidades de volume.

**Exemplo 3.3.4** *Encontre o ponto sobre o plano  $ax + by + cz + d = 0$  mais próximo ao ponto  $P_o(x_o, y_o, z_o)$ . Encontre também esta distância.*

Como no exemplo 3.3.1 basta minimizar a função  $f(x, y, z) = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2$  sujeita à condição  $g(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$ .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2(x - x_o) = \lambda a \\ 2(y - y_o) = \lambda b \\ 2(z - z_o) = \lambda c \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\lambda a}{2} + x_o \\ y = \frac{\lambda b}{2} + y_o \\ z = \frac{\lambda c}{2} + z_o \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = \frac{\lambda a}{2} + x_o \\ y = \frac{\lambda b}{2} + y_o \\ z = \frac{\lambda c}{2} + z_o \\ \frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + ax_o + by_o + cz_o + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\lambda a}{2} + x_o \\ y = \frac{\lambda b}{2} + y_o \\ z = \frac{\lambda c}{2} + z_o \\ \frac{\lambda}{2} = -\frac{ax_o + by_o + cz_o + d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = x_o - \frac{a^2 x_o + a b y_o + a c z_o + a d}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y = y_o - \frac{b a x_o + b^2 y_o + b c z_o + b d}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z = z_o - \frac{c a x_o + c b y_o + c^2 z_o + c d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{b(b x_o - a y_o) + c(c x_o - a z_o) - a d}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y = \frac{a(a y_o - b x_o) + c(c y_o - b z_o) - b d}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z = \frac{a(a z_o - c x_o) + b(b z_o - c y_o) - c d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \end{aligned}$$

e a distância é dada por

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x, y, z)} &= \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2} = \\ &= \frac{|\lambda|}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## O problema de dois vínculos

### 4.1 Teorema dos multiplicadores de Lagrange

Vamos considerar o problema de achar os extremos de uma função de três variáveis  $f(x, y, z)$  sujeita às condições  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$ .

**Teorema 4.1.1** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^3$  um aberto. Suponha que as funções  $f, g$  e  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$  sejam de classe  $C^1$ . Seja  $B = \{(x, y, z) \in A; g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$  e suponha que os vetores  $\nabla g(x, y, z)$  e  $\nabla h(x, y, z)$  sejam linearmente independentes em  $B$ . Então, se  $(x_o, y_o, z_o)$  é um extremo de  $f$  restrita a  $B$ , existem constantes  $\lambda$  e  $\mu$  tais que*

$$\nabla f(x_o, y_o, z_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o, z_o) + \mu \nabla h(x_o, y_o, z_o).$$

**Prova:** Seja  $P_o = (x_o, y_o, z_o)$  um extremo de  $f$  sobre  $B$ . Vamos assumir que  $P_o$  é um ponto de máximo de  $f$  sobre  $B$ . A condição que os gradientes de  $g$  e  $h$  são linearmente independentes em  $B$  garante que os pontos de  $B$  próximos a  $P_o$  podem ser descritos por uma curva sua suave  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  com  $-\varepsilon < t < \varepsilon$  satisfazendo  $\gamma(0) = P_o$ ,  $\gamma'(0) \neq \vec{0}$  e  $g(t) = f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(0)) = f(P_o)$ . Assim, a função  $g$  que é escalar e de uma variável atinge um máximo em  $t = 0$  e, portanto, devemos ter  $g'(0) = 0$ . Mas, pela regra da cadeia,  $g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  e, assim,  $g'(0) = \nabla f(P_o) \cdot \gamma'(0) = 0$ . Como a  $\gamma(t) \in B$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , temos que  $g(\gamma(t)) = 0 = h(\gamma(t))$ . Derivando estas duas últimas igualdades (use a regra da cadeia) e colocando  $t = 0$ , obtemos que  $\nabla g(P_o) \cdot \gamma'(0) = 0$  e  $\nabla h(P_o) \cdot \gamma'(0) = 0$ . Desta forma, vemos que o vetor não nulo  $\gamma'(0)$  é ortogonal aos vetores  $\nabla g(P_o)$  e  $\nabla h(P_o)$  e como estes dois últimos são linearmente independentes, o conjunto  $\{\gamma'(0), \nabla g(P_o), \nabla h(P_o)\}$  forma uma base para o  $\mathbb{R}^3$ . Logo, existem constantes  $\lambda, \mu$  e  $\nu$  tais que

$$\nabla f(P_o) = \lambda \nabla g(P_o) + \mu \nabla h(P_o) + \nu \gamma'(0)$$

o que implica em

$$0 = \nabla f(P_o) \cdot \gamma'(0) = \lambda \nabla g(P_o) \cdot \gamma'(0) + \mu \nabla h(P_o) \cdot \gamma'(0) + \nu \gamma'(0) \cdot \gamma'(0) = \nu \|\gamma'(0)\|^2,$$

onde  $\|\gamma'(0)\|$  denota o comprimento do vetor  $\gamma'(0)$  que é não nulo. Portanto,  $\nu = 0$  e obtemos o que queríamos provar, isto é,

$$\nabla f(P_o) = \lambda \nabla g(P_o) + \mu \nabla h(P_o).$$



Figura 4.1: Intersecção das duas superfícies  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$  com os vetores normais

**Exemplo 4.1.1** *Determine os semi-eixos da elipse dada pela intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano  $x + y + z = 0$ . (veja a figura 4.2).*

Como plano passa pela origem e o eixo do cilindro é dado por  $x = y = 0$ , vemos que o centro da elipse é a origem. Assim, precisamos encontrar os pontos sobre a elipse que estão mais próximos e mais afastados da origem. Tendo em vista observações anteriores, basta encontrarmos os extremos de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  (o quadrado da distância) sujeita aos vínculos  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  e  $h(x, y, z) = x + y + z = 0$ . Note que  $\nabla h(x, y, z) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  e  $\nabla g(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$  são claramente linearmente independentes: basta observar a componente de  $\vec{k}$  dos dois vetores.

Pelo teorema 4.1.1 os extremos de  $f$  sujeita aos vínculos devem satisfazer para algum  $\lambda$  e algum  $\mu$  as equações

1

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 2y = 2\lambda y + \mu \\ 2z = \mu \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1 - \lambda)x = \mu \\ 2(1 - \lambda)y = \mu \\ 2z = \mu \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Assim,  $(1 - \lambda)x = (1 - \lambda)y$  que para  $\lambda \neq 1$  nos fornece  $x = y$ . Pelas restrições (vínculos) obtemos  $z = -2x$  e  $2x^2 = 1$  que resultam nos pontos  $P_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$  e  $P_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ .



Figura 4.2: Intersecção de um cilindro com um plano

Agora, se  $\lambda = 1$  então  $\mu = 0$  e, portanto,  $z = 0$ . Desta forma, os vínculos se reduzem a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ y = -x \end{cases} \iff (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad (x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

dando os pontos  $P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$  e  $P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ . Temos  $f(P_1) = f(P_2) = 3$  e  $f(P_3) = f(P_4) = 1$ . Assim, o semi-eixo maior é dado pelo segmento  $\overline{OP_1}$  ou  $\overline{OP_2}$  e tem comprimento igual a  $\sqrt{3}$  e o menor é dado pelo segmento  $\overline{OP_3}$  ou  $\overline{OP_4}$  e tem comprimento igual a 1. Os vértices da elipse são os pontos  $P_1$  a  $P_4$ .

**Exercício 4.1.1** *Considere dois planos concorrentes dados pelas equações  $ax+by+cz+d=0$  e  $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ . Note que a condição de serem concorrentes se traduz em que os vetores normais aos planos  $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$  e  $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$  são linearmente independentes. Dado um ponto  $P_o=(x_o, y_o, z_o)$  utilize o teorema 4.1.1 para encontrar o ponto  $(x, y, z)$  contido na intersecção dos planos dados (uma reta) que está mais próximo a ele. Encontre também esta distância.*



# Capítulo 5

## Transformações

### 5.1 Definição e Propriedades Básicas

Chamaremos de transformação a uma função definida em um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  e que assume *valores* em  $\mathbb{R}^m$ . Assim, uma transformação pode ser pensada como uma função de várias variáveis a valores vetoriais. Escreveremos  $T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  com

$$T(x_1, \dots, x_n) = (T_1(x_1, \dots, x_n), \dots, T_m(x_1, \dots, x_n))$$

ou, de forma abreviada,

$$T(P) = (T_1(P), \dots, T_m(P))$$

As funções  $T_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  são chamadas de funções coordenadas da transformação  $T$ .

A soma e multiplicação por um escalar são definidas de maneira natural.

**Definição 5.1.1** *Se  $T$  e  $S$  são transformações definidas num domínio comum  $A \subset \mathbb{R}^n$  e assumem valores em  $\mathbb{R}^m$ , definimos  $(T + S)(P) = T(P) + S(P)$  e, para cada escalar  $\lambda$ ,  $(\lambda T)(P) = \lambda T(P)$ .*

**Definição 5.1.2** *A composta de duas transformações  $T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $S : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  tais que  $T(A) \subset B$  é definida como sendo a transformação  $S \circ T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  dada por  $S \circ T(P) = S(T(P))$ ,  $P \in A$ .*

**Definição 5.1.3** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$ . Dizemos que a transformação  $T : A \rightarrow B$  é invertível se existir uma transformação  $S : B \rightarrow A$  tal que  $S \circ T(x) = x$  para todo  $x \in A$  e  $T \circ S(y) = y$  para todo  $y \in B$ .*

**Exercício 5.1.1** *Prove que se  $T$  é invertível então sua inversa é única.*

**Definição 5.1.4** *A inversa de uma transformação invertível  $T$  é denotada por  $T^{-1}$ .*

**Exercício 5.1.2** *Mostre que se  $T : A \rightarrow B$  e  $S : B \rightarrow C$  são invertíveis então a composta  $S \circ T : A \rightarrow C$  é invertível e sua inversa é dada por  $T^{-1} \circ S^{-1}$ .*

**Proposição 5.1.1** *Uma transformação é invertível se e somente se for bijetora, isto é, injetora e sobrejetora.*

**Prova:** Exercício. ■

**Definição 5.1.5** *Seja  $T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dizemos que  $T$  é contínua em  $P_o \in A$  se para cada  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que para todo  $P \in A$  satisfazendo  $\|P - P_o\| < \delta$  implicar em  $\|T(P) - T(P_o)\| < \varepsilon$ .*

*Se  $T$  for contínua em todos os pontos de  $A$  dizemos que  $T$  é contínua em  $A$ .*

Note na definição acima o símbolo  $\|\cdot\|$  representa tanto a distância em  $\mathbb{R}^n$  quanto no  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposição 5.1.2** *Sejam  $T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $S : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  tais que  $T(A) \subset B$ . Se  $T$  é contínua em  $P_o \in A$  e  $S$  é contínua em  $T(P_o) \in B$  então a composta  $S \circ T$  é contínua em  $P_o$ .*

**Prova:** Como  $S$  é contínua em  $T(P_o)$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que para todo  $Q \in B$  satisfazendo  $\|Q - T(P_o)\| < \delta_1$  tem-se  $\|S(Q) - S(T(P_o))\| < \varepsilon$ . Como  $T$  é contínua em  $P_o$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $P \in A$  satisfazendo  $\|P - P_o\| < \delta$  tem-se  $\|T(P) - T(P_o)\| < \delta_1$ . Combinando as desigualdades obtemos que  $\|S(T(P)) - S(T(P_o))\| < \varepsilon$  para todo  $P \in A$  satisfazendo  $\|P - P_o\| < \delta$ . ■

**Proposição 5.1.3** *A fim de que uma transformação  $T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  seja contínua em  $P_o \in A$  é necessário e suficiente que cada função coordenada  $T_j : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  seja contínua em  $P_o$ .*

**Prova:** Suponha que  $T$  seja contínua em  $P_o$ . Considere, para cada  $j = 1, \dots, m$ , a função  $\pi_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\pi_j(y_1, \dots, y_m) = y_j$ .  $\pi_j$  é claramente contínua pois é linear. Note que  $T_j = \pi_j \circ T$  e pela proposição 5.1.2 segue-se que  $T_j$  é contínua.

Suponha agora que cada  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  seja contínua. Assim, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_j > 0$  tal que para todo  $P \in A$  satisfazendo  $\|P - P_o\| < \delta_j$  tem-se  $|T_j(P) - T_j(P_o)| < \varepsilon/\sqrt{m}$ . Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ . Se  $P \in A$  é tal que  $\|P - P_o\| < \delta$  então

$$\|T(P) - T(P_o)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (T_j(P) - T_j(P_o))^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Ou seja,  $T$  é contínua em  $P_o$ . ■

**Proposição 5.1.4** *Se  $T, S : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são contínuas em  $P_o \in A$  então a soma  $T + S$  também é contínua em  $P_o$ . Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  então  $\lambda T$  também é contínua em  $P_o$ .*

**Prova:** Exercício. ■

Sabemos que uma função  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de várias variáveis é diferenciável em  $P_o$  se existirem as suas derivadas parciais e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_o + h) - f(P_o) - \nabla f(P_o) \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Observe que fixado o ponto  $P_o$ , vemos que  $h \mapsto \nabla f(P_o) \cdot h$  define uma transformação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ . Esta noção se estende de maneira análoga para transformações conforme a definição a seguir.



**Definição 5.1.6** *Seja  $T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dizemos que  $T$  é diferenciável em  $P_o \in A$  existirem as derivadas parciais das funções coordenadas  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  e além disso,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|T(P_o + h) - T(P_o) - J_T(P_o)h\|}{\|h\|} = 0,$$

onde  $J_T(P_o)$  é a matriz jacobiana de  $T$  dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(P_o) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(P_o) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_m}{\partial x_1}(P_o) & \cdots & \frac{\partial T_m}{\partial x_n}(P_o) \end{pmatrix}$$

e

$$J_T(P_o)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(P_o) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(P_o) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_m}{\partial x_1}(P_o) & \cdots & \frac{\partial T_m}{\partial x_n}(P_o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

onde  $h = (h_1, \dots, h_n)$ .

A seguir enunciaremos, sem demonstrá-los, alguns resultados relativos à diferenciabilidade de transformações.

**Proposição 5.1.5 (Regra da cadeia)** *Sejam  $T : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $S : B \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  tais que  $T(A) \subset B$ . Se  $T$  é diferenciável em  $P_o \in A$  e  $S$  é diferenciável em  $T(P_o) \in B$  então a composta  $S \circ T$  é diferenciável em  $P_o$ . Além do mais, a matriz jacobiana de  $S \circ T$  em  $P_o$  é dada por*

$$J_{S \circ T}(P_o) = J_S(T(P_o))J_T(P_o).$$

**Proposição 5.1.6** *A fim de que uma transformação  $T : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  seja diferenciável em  $P_o \in A$  é necessário e suficiente que cada função coordenada  $T_j : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  seja diferenciável em  $P_o$ .*

**Proposição 5.1.7** *Se  $T, S : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são diferenciáveis em  $P_o \in A$  então a soma  $T + S$  também é diferenciável em  $P_o$ . Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  então  $\lambda T$  também é diferenciável em  $P_o$ .*

## 5.2 Exemplos

**Exemplo 5.2.1 [Coordenadas Polares]** *Seja  $A = [0, \infty) \times [0, 2\pi)$  e defina  $T : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .*

Como cada função coordenada de  $T$  é diferenciável, vemos que  $T$  também o é. A sua matriz jacobiana é dada por

$$J_T(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a matriz é quadrada e vê-se facilmente que seu determinante é dado por  $r$ .

Note que a imagem pela transformação  $T$  do segmento  $\{r_o\} \times [0, 2\pi)$  é o círculo centrado na origem de raio  $r_o$ . Já a imagem da semi-reta  $[0, \infty) \times \{\theta_o\}$  é uma outra semi-reta com origem em  $(0, 0)$  e direção  $(\cos \theta_o, \sin \theta_o)$ .

**Exemplo 5.2.2 (Coordenadas Cilíndricas)** Seja  $A = \{(r, \theta, z); r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$  e defina  $T : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ .

Vê-se que  $T$  é uma transformação diferenciável com matriz jacobiana dada por

$$J_T(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e o seu determinante é  $r$ .

Note que  $T$  transforma a faixa ilimitada  $\{r_o\} \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  no cilindro  $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = r_o^2\}$  e leva o semi-plano  $[0, \infty) \times \{\theta_o\} \times \mathbb{R}$  no semi-plano

$$\{(x, y, z); \sin \theta_o x - \cos \theta_o y = 0 \text{ e } x \cos \theta_o + y \sin \theta_o \geq 0\}$$

**Exemplo 5.2.3 (Coordenadas Esféricas)** Seja  $A = \{(\rho, \theta, \varphi); \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$  e defina  $T : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $T(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$ .

A transformação acima é diferenciável e sua matriz jacobiana é dada por

$$J_T(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

e o seu determinante é

$$\begin{aligned} & \cos \varphi (-\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta - \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta) \\ & -\rho \sin \varphi (\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) \\ & = -\rho^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \rho^2 \sin^3 \varphi \\ & = -\rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Vejamos agora como esta transformação age sobre os conjuntos a seguir. Para isto usaremos a seguinte notação para as funções coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Observe que valem as relações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi \end{cases}$$

1.  $A_{\rho_o} = \{(\rho, \theta, \varphi) \in A; \rho = \rho_o > 0\}$  : Uma simples verificação nos dá que  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_o^2$ , isto é, o conjunto  $A_{\rho_o}$ , que representa nas variáveis  $\rho, \theta$  e  $\varphi$  uma porção de um plano, é levado sobre uma esfera centrada na origem de raio  $\rho_o$ . Na verdade, a imagem é toda a esfera.

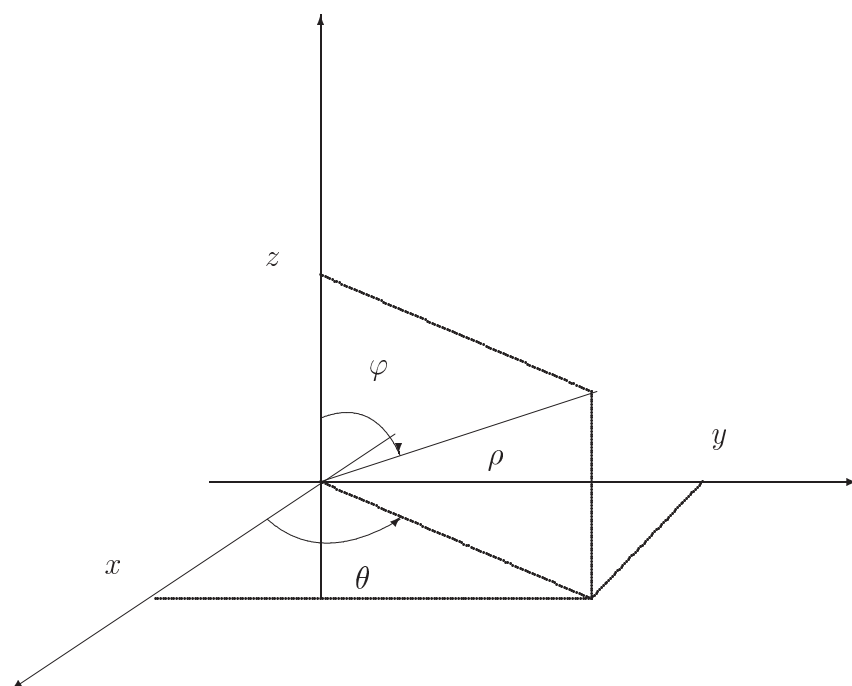


Figura 5.1: Coordenadas Esféricas

2.  $A_{\theta_o} = \{(\rho, \theta, \varphi) \in A; \theta = \theta_o\}$  : Neste caso vale a seguinte igualdade  $x \operatorname{sen} \theta_o - y \operatorname{cos} \theta_o = 0$ , que representa a equação de um plano vertical (contendo o eixo  $z$ ). Note porém que  $x \operatorname{cos} \theta_o + y \operatorname{sen} \theta_o = \rho \operatorname{sen} \varphi \geq 0$ , pois  $\rho \geq 0$  e  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Assim, a imagem de  $A_{\theta_o}$  é um semi-plano.
3.  $A_{\varphi_o} = \{(\rho, \theta, \varphi) \in A; \varphi = \varphi_o \in (0, \pi)\}$  : Temos

$$z^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi_o = \frac{x^2 + y^2}{\operatorname{sen}^2 \varphi_o} \cos^2 \varphi_o = \cot^2 \varphi_o (x^2 + y^2).$$

Note porém que  $z = \rho \cos \varphi_o$  e, portanto, o sinal de  $z$  é o mesmo de  $\cos \varphi_o$ , que coincide com o de  $\cot \varphi_o$  quando  $0 < \varphi_o < \pi$ , que é o nosso caso. Logo,

$$z = \cot \varphi_o \sqrt{x^2 + y^2}.$$

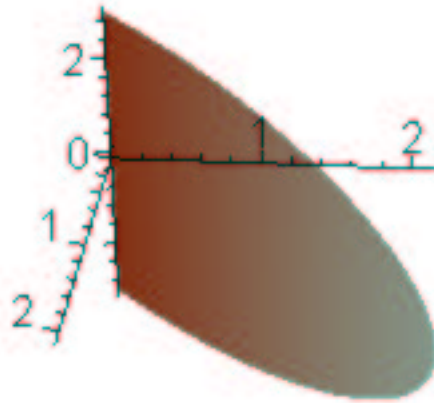
Esta última equação representa um cone de abertura  $\varphi_o$ . Note que ele se *degenera* no plano  $z = 0$  quando  $\varphi_o = \pi/2$ . Observe também que o cone é voltado para cima no caso em que  $0 < \varphi_o < \pi/2$  e voltado para baixo quando  $\pi/2 < \varphi_o < \pi$ .

1

**Exemplo 5.2.4** Considere os conjuntos

$$A = \{(x, y); 0 < x < 2\pi, -1 < y < 1\},$$

$$B\{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1, (x, y) \neq (1, 0)\}$$

Figura 5.2:  $\theta = \theta_0$ 

e

$$C = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \neq -1, z \neq 1, x \neq \sqrt{1 - z^2}\}.$$

O conjunto  $A$  representa obviamente um retângulo em  $\mathbb{R}^2$ ,  $B$  representa um cilindro do qual foi subtraído o segmento  $\{(1, 0)\} \times (-1, 1)$  e, finalmente,  $C$  representa a esfera unitária centrada na origem menos um meridiano. Considere as transformações  $T : A \rightarrow B$  e  $S : B \rightarrow C$  dadas por

$$T(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$$

e

$$S(x, y, z) = (x\sqrt{1 - z^2}, y\sqrt{1 - z^2}, z).$$

Deixamos a cargo do leitor que verifique que realmente a transformação  $T$  leva o conjunto  $A$  no conjunto  $B$  enquanto que  $S$  leva  $B$  em  $C$ .

Vamos verificar que estas transformações são invertíveis. Seja  $(u, v, w) \in B$ . Como  $u^2 + v^2 = 1$  e  $(u, v) \neq (1, 0)$ , existe apenas um número  $x = x(u, v) \in (0, 2\pi)$  tal que  $u = \cos x$  e  $v = \sin x$ . Desse modo, podemos definir  $H : B \rightarrow A$  por

$$H(u, v, w) = (x, w), \quad \text{onde } x \text{ é como acima.}$$

Desse modo,

$$H(T(x, y)) = H(\cos x, \sin x, y) = (x, y), \quad \text{para todo } (x, y) \in A$$

e

$$T(H(u, v, w)) = T(x(u, v), w) = (\cos x(u, v), \sin x(u, v), w) = (u, v, w)$$

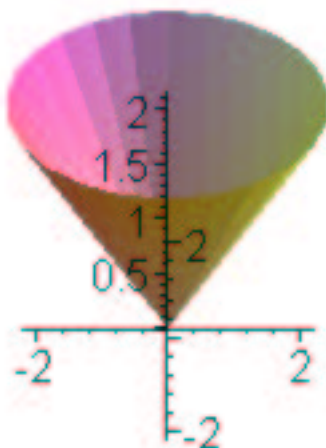
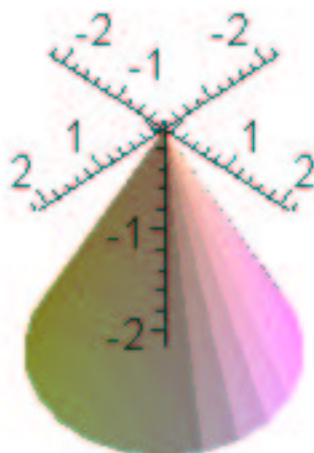
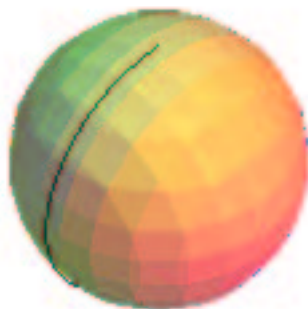
Figura 5.3:  $\varphi = \varphi_o \in (0, \pi/2)$ Figura 5.4:  $\varphi = \varphi_o \in (\pi/2, \pi)$

Figura 5.5: *A*Figura 5.6: *B*

Figura 5.7:  $C$ 

para todo  $(u, v, w) \in B$ . Portanto,  $H$  é a inversa de  $T$ .

Geometricamente, o que a transformação  $T$  faz é *enrolar* o retângulo  $A$  de modo que ele fique com o forma do cilindro  $B$  sem *colar* as bordas. Obviamente,  $H$  faz o oposto.

Considere agora  $R : C \rightarrow B$  dada por

$$R(u, v, w) = \left( \frac{u}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-w^2}}, w \right).$$

Note que realmente temos  $R(u, v, w) \in B$  se  $(u, v, w) \in C$ . Além do mais,

$$\begin{aligned} R(S(x, y, z)) &= R(x\sqrt{1-z^2}, y\sqrt{1-z^2}, z) \\ &= \left( \frac{x\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}}, z \right) = (x, y, z) \end{aligned}$$

para todo  $(x, y, z) \in B$  e também

$$\begin{aligned} S(R(u, v, w)) &= S\left(\frac{u}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-w^2}}, w\right) \\ &= \left(\frac{u}{\sqrt{1-w^2}}\sqrt{1-w^2}, \frac{v}{\sqrt{1-w^2}}\sqrt{1-w^2}, w\right) = (u, v, w) \end{aligned}$$

para todo  $(u, v, w) \in C$ .

Geometricamente, a transformação  $R$  projeta o cilindro  $B$  sobre a esfera  $C$  preservando a altura do ponto projetado.

Note que como  $T$  e  $S$  são ambas invertíveis, a composta  $H = S \circ T : A \rightarrow C$  também o é. Vamos denotar por  $G$  a inversa de  $H$  e, desse modo,  $G$  está definida em  $C$  e tomando valores em  $A$ . Pense no conjunto  $C$  como se fosse o globo terrestre e em  $A$  um mapa-múndi.

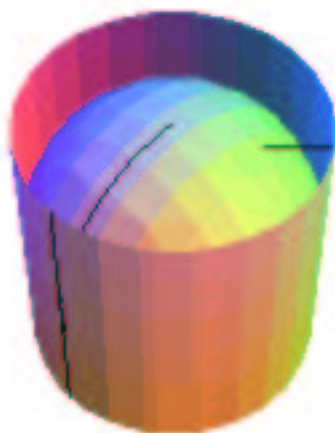


Figura 5.8: Projeção de  $B$  em  $C$

Os meridianos do globo são levados pela transformação  $G$  em segmentos verticais no mapa  $A$  enquanto que os paralelos são levados em segmentos horizontais. Verifique analiticamente, a título de exercício, que o *equador* de  $C$  corresponde ao segmento  $\{(x, 0); x \in (0, 2\pi)\}$ . Note que regiões no globo próximas ao pólo norte, por exemplo, são levadas por  $G$  em regiões localizadas próximas à parte superior do mapa. É interessante notar a distorção que ocorre neste caso, isto é, uma pequena calota ao redor deste pólo corresponde a uma faixa extensa no mapa. Veja a figura 5.9. A mesma análise é válida para o pólo oposto. Entretanto, a representação é mais *fiel*, no sentido de preservar o tamanho entre regiões correspondentes, quando as regiões de  $C$  se encontram mais próximas do equador. Mais surpreendente ainda é que em qualquer caso (regiões próximas aos pólos, equador, etc.) as áreas das regiões correspondentes, isto é, a área de uma região  $A_1 \subset A$  e a de sua imagem  $H(A_1) \subset C$  são as **mesmas**. Essa afirmação, entretanto, só poderá ser verificada quando estudarmos *integrais de superfícies*. Por ora, verifique que a área de  $A$  e de  $C$  são iguais a  $4\pi$ .



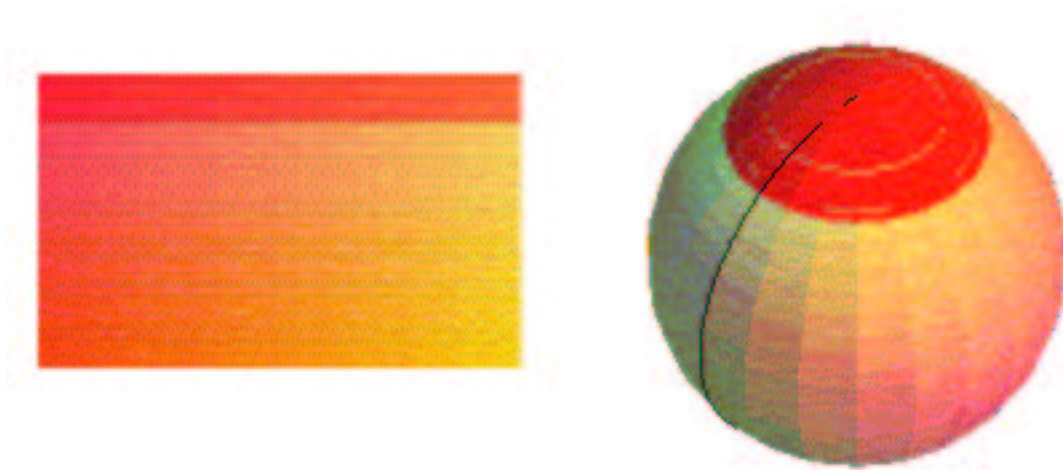


Figura 5.9: Faixa correspondente no *mapa* a uma região do *globo* próxima ao *pólo norte*.



# Capítulo 6

## Teorema da Função Inversa

### 6.1 Introdução

Recordemos que se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de uma variável de classe  $C^1$  tal que  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então, pelo teorema da conservação do sinal temos que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$  ou  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Suponhamos que  $f' > 0$ . Assim, se  $a < x < y < b$  então, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\xi \in (x, y)$  tal que  $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) > 0$ , isto é,  $f(x) < f(y)$  e, portanto,  $f$  é crescente. Daí se conclui que  $f$  possui inversa definida na sua imagem. Nossa intenção é obter um resultado análogo para transformações. Note que o primeiro empecilho a caminho de uma tal generalização é encontrar uma relação adequada que envolva as derivadas das funções coordenadas da transformação em questão. Vejamos o que o seguinte exemplo de uma simples transformação linear nos pode dizer.

**Exemplo 6.1.1** *Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes.*

É claro que  $T$  possui inversa se e somente se o seguinte sistema possuir uma única solução

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

para cada par  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Equivalentemente,  $T$  possui inversa se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

for diferente de zero. Como a matriz acima é a jacobiana de  $T$ , podemos afirmar que para que uma transformação linear seja invertível é necessário e suficiente que o determinante da sua matriz jacobiana seja diferente de zero. Este caso se estende de maneira óbvia para transformações lineares  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Vejamos mais um exemplo.

**Exemplo 6.1.2** *Considere  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ .*

O determinante de sua matriz jacobiana é

$$\det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

No entanto, uma simples verificação nos mostra que  $T(x, y) = T(x, y + 2\pi)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e, portanto,  $T$  não é injetiva. Deste modo, a informação de que o determinante da matriz jacobiana é diferente de zero *não* nos dá garantia de que a transformação seja invertível. Contudo, neste mesmo exemplo, se ao invés de  $\mathbb{R}^2$  tomarmos como domínio de  $T$  a região  $A = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, 0 < y < 2\pi\}$  podemos ver que  $T$  possui inversa definida no complementar de  $\{(x, 0); x \geq 0\}$  em  $\mathbb{R}^2$ .

## 6.2 O Teorema da função inversa

A seguir enunciaremos sem demonstração o teorema que engloba o exemplo 6.1.2.

**Teorema 6.2.1 (Teorema da Função Inversa)** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $T : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação de classe  $C^1$ . Se  $P_o \in A$  é tal que  $\det J_T(P_o) \neq 0$  então existem uma bola aberta  $B \subset A$  centrada em  $P_o$  e um aberto  $C$  contendo  $T(P_o)$  tais que  $T : B \rightarrow C$  é invertível e sua inversa  $T^{-1} : C \rightarrow B$  é uma função de classe  $C^1$ . Além do mais, a matriz jacobiana de  $T^{-1}$  em  $T(P_o)$  é dada por*

$$J_{T^{-1}}(T(P_o)) = [J_T(P_o)]^{-1}. \quad (6.1)$$

**Observação 6.2.1** *Note que uma vez provada a existência de  $T^{-1}$  e que  $T^{-1}$  é uma transformação de classe  $C^1$ , a fórmula 6.1 segue da regra da cadeia e do fato que  $T^{-1}(T(x)) = x$  para todo  $x \in B$ .*

**Definição 6.2.1** *Se  $T$  satisfizer as hipóteses do teorema 6.2.1, diremos que  $T$  é localmente invertível em torno do ponto  $P_o$ .*

**Exercício 6.2.1** *Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x, y) = (x - xy, xy)$ .*

1. Calcule  $T(0, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .
2.  $T$  é invertível? Justifique.
3.  $T$  é localmente invertível em torno de  $(x, y) \in A = \{(x, y); x \neq 0\}$ ?

### Resolução

1.  $T(0, y) = (0 - 0y, 0y) = (0, 0)$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ .
2.  $T$  não é invertível pois não é injetora:  $T(0, 1) = T(0, 0)$ , por exemplo.

3. Como  $T$  é claramente de classe  $C^1$  e

$$\det \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{pmatrix} = x - xy + xy = x \neq 0$$

pois  $(x, y) \in A$ , vemos que  $T$  satisfaz as hipóteses do teorema 6.2.1 e, portanto, é localmente invertível em torno de  $(x, y) \in A$ .

No exercício acima é possível encontrar a inversa de  $T$  quando tomamos  $A$  para o seu domínio. Basta resolvermos, para cada  $(u, v)$  tal que  $u + v \neq 0$ , o seguinte sistema

$$\begin{cases} x - xy = u \\ xy = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \neq 0 \\ y = \frac{v}{u+v}. \end{cases}$$

Assim, colocando  $B = \{(u, v); u + v \neq 0\}$  e definindo  $S : B \rightarrow A$  por  $S(u, v) = (u + v, \frac{v}{u+v})$  podemos verificar que

$$T(S(u, v)) = T(u + v, \frac{v}{u+v}) = (u + v - (u + v)\frac{v}{u+v}, (u + v)\frac{v}{u+v}) = (u, v)$$

para todo  $(u, v) \in B$  e

$$S(T(x, y)) = S(x - xy, xy) = (x - xy + xy, \frac{xy}{x - xy + xy}) = (x, y)$$

para todo  $(x, y) \in A$ , verificando, assim, que  $S$  é a inversa de  $T : A \rightarrow B$ .

**Exemplo 6.2.1** Note que nos exemplos de transformações de coordenadas polares (5.2.1) (para  $r \neq 0$ ), coordenadas cilíndricas (5.2.2) ( $r \neq 0$ ) e coordenadas esféricas (5.2.3) ( $\rho \neq 0$  e  $0 < \varphi < \pi$ ) se verifica que o determinante da matriz jacobiana é diferente de zero.



# Capítulo 7

## Funções Definidas Implicitamente

### 7.1 Derivação de Funções Definidas Implicitamente

Muitas vezes uma função  $y = g(x)$  é definida implicitamente pela equação  $f(x, y) = 0$ ; isto é, se para todo  $x \in D(g)$ ,

$$f(x, g(x)) = 0$$

e supondo que  $f$  e  $g$  sejam diferenciáveis vamos tentar calcular  $g'(x)$  para aqueles  $x \in D(g)$  satisfazendo  $f_y(x, g(x)) \neq 0$ . Assim,

$$\frac{d}{dx} f(x, g(x)) = 0$$

ou

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) \frac{dg}{dx}(x) = 0$$

e daí

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

desde que  $f_y(x, g(x)) \neq 0$ .

Do mesmo modo, se  $x = h(y)$  é definida implicitamente e por  $f(x, y) = 0$ ; isto é, se para todo  $y \in D(h)$

$$f(h(y), y) = 0$$

com  $f$  e  $h$  diferenciáveis, então, para cada  $x \in D(h)$  tal que  $f_x(h(y), y) \neq 0$ , temos:

$$h'(y) = -\frac{f_y(h(y), y)}{f_x(h(y), y)}.$$

**Exemplo 7.1.1** A função  $y = y(x)$  é definida implicitamente pela equação

$$y^3 + xy + x^3 = 3.$$

Expresse  $\frac{dy}{dx}$  em termos de  $x$  e  $y$ .

**Solução:**  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y+3x^2}{3y^2+x}$ , sempre que  $3y^2 + x \neq 0$  e  $x \in D(y)$ .

**Exemplo 7.1.2** Suponha que a função diferenciável  $z = g(x, y)$  seja dada implicitamente pela equação  $f(x, y, z) = 0$  onde  $f$  é diferenciável em um aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Verifique que

$$a) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)} \text{ em } (x, y) \in D(g) \text{ e } z = g(x, y), \text{ com } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0.$$

$$b) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)} \text{ em } (x, y) \in D(g) \text{ e } z = g(x, y), \text{ com } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0.$$

**Solução:** a) Para todo  $(x, y) \in D(g)$

$$f(x, y, g(x, y)) = 0.$$

Daí,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, g(x, y)) = f_x(x, y, g(x, y)) + f_z(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))}$$

para  $(x, y) \in D(g)$ ,  $z = g(x, y)$  e  $f_z(x, y, g(x, y)) \neq 0$

b) Segue de forma semelhante.

**Exemplo 7.1.3** Seja  $z = z(x, y)$  dada por  $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 5$ . Expresse  $\frac{\partial z}{\partial x}$  em termos de  $x, y$  e  $z$ .

**Solução:**  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz+3x^2}{xy+3z^2}$  para os  $(x, y) \in D(z)$  tal que  $xy + 3z(x, y)^2 \neq 0$ .

**Exemplo 7.1.4** As funções diferenciáveis  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ , definidas no intervalo aberto  $I$  são dadas implicitamente por

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde  $F$  e  $G$  são funções diferenciáveis em um aberto do  $\mathbb{R}^3$ . Expresse  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$  em termos das derivadas parciais de  $F$  e  $G$ .

**Solução:** Como

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Isto significa que a curva  $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$  está contida na intersecção das superfícies  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$ .

Para obter  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$  derivamos (7.1) em relação a  $x$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$



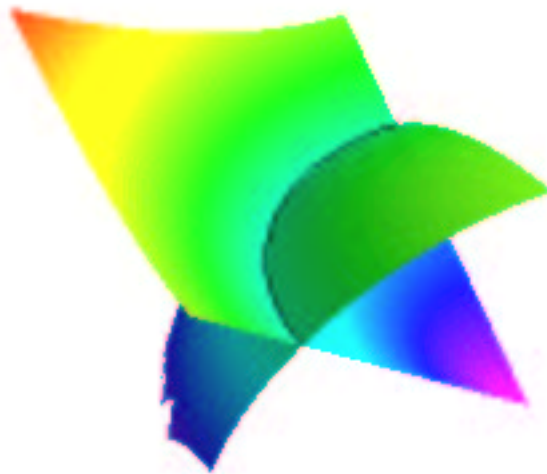


Figura 7.1: Intersecção de duas superfícies

isto é

$$\begin{cases} -\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} \\ -\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} \end{cases}$$

Daí, para todo  $x \in I$ , com

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

em  $(x, y(x), z(x))$ . Temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

**Notações:**  $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$  é usado para indicar o que chamamos determinante Jacobiano de  $F$  e  $G$  em relação a  $y$  e  $z$ .

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

**Exemplo 7.1.5** *Sejam  $y(x)$  e  $z(x)$  diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  e dadas implicitamente por*

$$a) \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}, \quad z(x) > 0.$$

Calcule  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$ .

## 7.2 O Teorema da função implícita (caso $F(x, y) = 0$ ).

A partir daqui vamos iniciar a demonstração do teorema das funções implícitas (caso  $F(x, y) = 0$ ). Este teorema trata do seguinte problema: Dada uma equação  $F(x, y) = 0$ ,  $F$  diferenciável, quando é que podemos dizer que esta equação define uma função diferenciável  $y = y(x)$ ? Dito de outra forma, quando é que podemos explicitar  $y$ , na equação  $F(x, y) = 0$ , como uma função diferenciável de  $x$ ? Além disso qual é o valor da derivada de  $y$  relativamente a  $x$ ?

**Lema 7.2.1** *Seja  $F(x, y)$  uma função de classe  $C^1$  em um aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0) \in A$ , com  $F(x_0, y_0) = 0$ . Suponha que  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ . Então, existem intervalos abertos  $I$  e  $J$ , com  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ , tais que, para cada  $x \in I$  existe um único  $g(x) \in J$ , com  $F(x, g(x)) = 0$ .*

**Prova:** Sabemos que  $\frac{\partial F}{\partial y}$  é uma função contínua, pois, por hipótese  $F$  é de classe  $C^1$ . Como  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , devemos ter que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$  ou que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$ .

Assuma primeiramente que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ . Do *Teorema da Conservação do Sinal* existe uma bola aberta  $B$  de centro em  $(x_0, y_0)$ , que podemos supor contida em  $A$ , já que  $A$  é aberto, tal que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in B.$$

Sejam  $y_1$  e  $y_2$  tais que  $y_1 < y_0 < y_2$  com  $(x_0, y_1)$  e  $(x_0, y_2)$  em  $B$ .

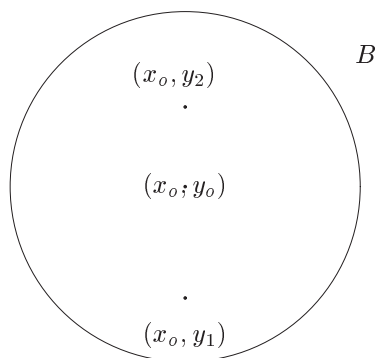


Figura 7.2: Bola  $B$

Fixado  $x_0$ , consideremos

$$z = F(x_0, y), \quad y \in [y_1, y_2]. \quad (7.2)$$

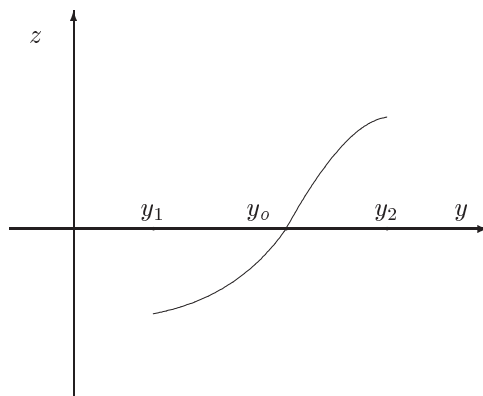


Figura 7.3: Um corte de parte do gráfico de  $F$  com o plano  $x = x_0$

Como  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0$  para todo  $y \in [y_1, y_2]$  temos que a função (7.2) é estritamente crescente em  $[y_1, y_2]$ . Sabendo que  $F(x_0, y_0) = 0$  devemos ter que  $F(x_0, y_1) < 0$  e  $F(x_0, y_2) > 0$ .

Seja  $J = (y_1, y_2)$  e observe que  $y_0 = g(x_0)$  é o único número em  $J$  tal que  $F(x_0, g(x_0)) = 0$ . Como  $F(x_0, y_1) < 0$  e  $F(x_0, y_2) > 0$  segue novamente do *Teorema da Conservação do Sinal* que existe um intervalo aberto  $I$ ,  $x_0 \in I$ , tal que  $(x, y_1)$  e  $(x, y_2)$  estão em  $B$  para todo  $x \in I$  e  $F(x, y_1) < 0$ ,  $F(x, y_2) > 0$ , para todo  $x \in I$ .

Como  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$  em  $B$  temos que para cada  $x \in I$  a função

$$z = F(x, y), \quad (x \text{ fixo}) \quad (7.3)$$

é estritamente crescente em  $[y_1, y_2]$ ; tendo em vista que  $F(x, y_1) < 0$  e  $F(x, y_2) > 0$ , pelo *Teorema do Valor Intermediário* e pelo fato que (7.3) é estritamente crescente em  $[y_1, y_2]$ , existirá um único  $g(x) \in (y_1, y_2)$  tal que  $F(x, g(x)) = 0$ .

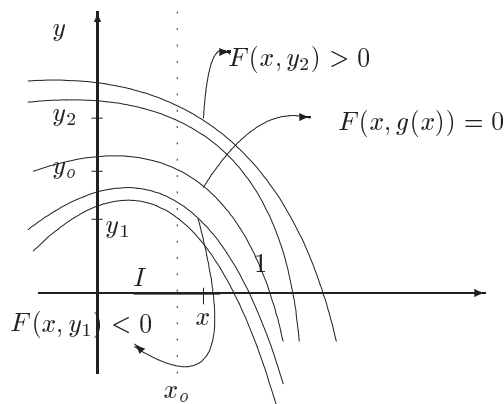


Figura 7.4: Curvas de nível de  $F$  pelos pontos  $(x_0, y_j)$  e  $(x, y_j)$ ,  $x \in I$ ,  $j = 0, 1, 2$

Deste modo está unicamente determinada a função  $g : I \rightarrow J$  definida implicitamente pela equação  $F(x, y) = 0$ . ■

A seguir começamos a investigar a diferenciabilidade da função  $g$  obtida no Lema 7.2.1.

**Lema 7.2.2** *Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, uma função diferenciável em  $(x_0, y_0) \in A$ . Então existem funções  $\varphi_1(x, y)$  e  $\varphi_2(x, y)$ , definidas em  $D(F)$ , tais que*

$$\begin{aligned} F(x, y) = F(x_0, y_0) &+ F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \varphi_1(x, y)(x - x_0) + \varphi_2(x, y)(y - y_0) \end{aligned} \quad (7.4)$$

com

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varphi_i(x, y) = 0 = \varphi_i(x_0, y_0), \quad i = 1, 2. \quad (7.5)$$

**Prova:** A prova deste lema é uma aplicação imediata da definição de diferenciabilidade e é deixada como exercício para o leitor.

**Lema 7.2.3** *A função  $g$  do Lema 7.2.1 é diferenciável em  $x_0$  e*

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}. \quad (7.6)$$

**Prova:** Colocando  $y = g(x)$  e  $y_0 = g(x_0)$  em (7.4) (lembrando que  $F(x, g(x)) = 0$  e  $F(x_0, g(x_0)) = 0$ ) e dividindo por  $(x - x_0) \neq 0$  temos:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \varphi_1(x, g(x)) + \varphi_2(x, g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Daí,

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0)) + \varphi_2(x, g(x)) \right) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) + \varphi_1(x, g(x)).$$

Fazendo  $x \rightarrow x_0$ , obtemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0)) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))$$

já que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0)) \neq 0$ . Disto segue que  $g$  é diferenciável em  $x_0$  e que

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}.$$

■

Sintetizamos estes resultados no teorema a seguir.

**Teorema 7.2.1 (Teorema das Funções Implícitas)** *Caso  $F(x, y) = 0$  Seja  $F(x, y)$  uma função de classe  $C^1$  definida em um aberto  $A$  do  $\mathbb{R}^2$  e  $(x_0, y_0) \in A$ , com  $F(x_0, y_0) = 0$ . Nestas condições, se  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , então existirão intervalos abertos  $J$  e  $I$ , com  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ , tais que para cada  $x \in I$ , existe um único  $g(x) \in J$ , com  $F(x, g(x)) = 0$ . A função  $g : I \rightarrow J$  é diferenciável e*

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}.$$

**Observação 7.2.1** Se a hipótese  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  for substituída por  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$  então existirão intervalos  $I$  e  $J$ , como acima, tais que para cada  $y \in J$  existe um único  $h(y) \in I$  com  $F(h(y), y) = 0$ . A função  $h : J \rightarrow I$  é diferenciável e

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)}.$$

**Observação 7.2.2** A função  $g(x)$  do teorema anterior é continuamente diferenciável.

**Exercício 7.2.1** Seja  $F(x, y) = y^3 + xy + x^3 - 3$ . Mostre que existe uma função  $y = y(x)$  definida em uma vizinhança de  $x = 1$  tal que  $y(1) = 1$  e calcule  $y'(1)$ .

## 7.3 O Teorema das funções implícitas: Caso Geral

**Teorema 7.3.1 (Teorema das Funções Implícitas: Caso Geral)** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos abertos e  $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação de classe  $C^1$ . Coloque  $x = (x_1, \dots, x_m)$  para denotar os elementos de  $A$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  os de  $B$ . Suponha que exista  $(x_o, y_o) \in A \times B$  tal que  $F(x_o, y_o) = 0$  e que o determinante jacobiano

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{n \times n} \neq 0 \quad \text{em } (x_o, y_o) \in A \times B.$$

Então, existem um conjunto aberto  $A' \subset A$  contendo  $x_o$  e uma transformação de classe  $C^1$   $G : A' \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $F(x, G(x)) = 0$  para todo  $x \in A'$ .

**Prova:** Considere a transformação  $T : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  dada por

$$T(x, y) = (x, F(x, y)) = (x_1, \dots, x_m, F_1(x, y), \dots, F_n(x, y)).$$

A matriz jacobiana de  $T$  no ponto  $(x_o, y_o)$  é dada por

$$J_T(x_o, y_o) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{(x_o, y_o)}$$

que é exatamente  $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(x_o, y_o) \neq 0$ . Logo, pelo Teorema da Função Inversa (6.2.1)  $T$  é localmente invertível em torno de  $(x_o, y_o)$ . Assim, existem abertos  $A_o \subset A$  e  $B_o \subset B$  tais que  $x_o \in A_o$ ,  $y_o \in B_o$  e  $T$  restrita a  $A_o \times B_o$  possui uma inversa  $S : V \rightarrow A_o \times B_o$  onde  $V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é imagem de  $A_o \times B_o$  pela  $T$ . Temos que para  $(u, v) = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n) \in V$ ,

$$(u, v) = T(S(u, v)) = T((S_1(u, v), \dots, S_m(u, v)), (S_{m+1}(u, v), \dots, S_{m+n}(u, v)))$$

$$= ((S_1(u, v), \dots, S_m(u, v)), F((S_1(u, v), \dots, S_m(u, v)), (S_{m+1}(u, v), \dots, S_{m+n}(u, v))))$$

Como  $T(x_o, y_o) = (x_o, F(x_o, y_o)) = (x_o, 0)$ , segue-se que  $(x_o, 0) \in V$  e, assim, como  $V$  é aberto existe  $A' \subset A_o$  tal que  $(x, 0) \in V$  para todo  $x = (x_1, \dots, x_m) \in A'$ . Desse modo,

$$(x, 0) = ((S_1(x, 0), \dots, S_m(x, 0)), F((S_1(x, 0), \dots, S_m(x, 0)), (S_{m+1}(x, 0), \dots, S_{m+n}(x, 0))))$$

ou seja,

$$x_1 = S_1(x, 0), \dots, x_m = S_m(x, 0)$$

e

$$F((x_1, \dots, x_m), (S_{m+1}(x, 0), \dots, S_{m+n}(x, 0))) = (0, \dots, 0).$$

Podemos então definir  $G : A' \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $G(x) = (S_{m+1}(x, 0), \dots, S_{m+n}(x, 0))$  e, finalmente, obtemos  $F(x, G(x)) = 0$ .

□

Escreveremos a seguir dois casos particulares do teorema anterior.

**Teorema 7.3.2 (Teorema das Funções Implícitas)** *Caso  $F(x, y, z) = 0$ . Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ ,  $A$  aberto e  $(x_0, y_0, z_0) \in A$ , com  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Nestas condições, se  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , então existirá uma bola aberta  $B$  de centro em  $(x_0, y_0)$  e um intervalo  $J$  com  $z_0 \in J$ , tais que para cada  $(x, y) \in B$ , existe um único  $g(x, y) \in J$ , com  $F(x, y, g(x, y)) = 0$ . A função  $g : B \rightarrow J$  é diferenciável e*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}.$$

**Observação 7.3.1** *A função  $g : B \rightarrow J$  é uma função de classe  $C^1$  pois as suas derivadas parciais são contínuas.*

**Exercício 7.3.1** *Seja  $F(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 4$ . Mostre que a equação  $F(x, y, z) = 0$  define uma função  $z = g(x, y)$  em uma vizinhança de  $(1, 1)$  e tal que  $g(1, 1) = 1$ .*

**Teorema 7.3.3 (Teorema das Funções Implícitas)** *Caso  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$ . Seja  $F, G : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$ ,  $A$  aberto e  $(x_0, y_0, z_0) \in A$ , com  $F(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Nestas condições, se  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , então existirão um intervalo aberto  $I$ , com  $x_0 \in I$ , e um par de funções  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  definidas e de classe  $C^1$  em  $I$ , tais que, para todo  $x \in I$ ,  $F(x, y(x), z(x)) = 0$ , além disso  $y_0 = y(x_0)$ ,  $z_0 = z(x_0)$ . Tem-se ainda*

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}(x, y(x), z(x))}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x, y(x), z(x))} \quad e \quad \frac{dz}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}(x, y(x), z(x))}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x, y(x), z(x))}.$$

**Exercício 7.3.2** *Sejam  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$  e  $G(x, y, z) = x + y - 2$ . Mostre que as equações  $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$  definem funções  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  em uma vizinhança de  $x_0 = 1$  e tais que  $y(1) = z(1) = 1$ .*

**Exemplo 7.3.1** Mostre que a equação

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z = 5/2 \quad (7.7)$$

define implicitamente uma função  $z = g(x, y)$  tal que  $g(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$ . Verifique que  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  é um ponto de mínimo local de  $g$ .

Considere  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, y, z) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z - 5/2$ . Note que  $F$  é suave e  $F(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = 0$ . Também,  $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2 \operatorname{sen} z \cos z = \operatorname{sen} 2z$  e  $\frac{\partial F}{\partial z}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = 1 \neq 0$ . Assim, pelo teorema das funções implícitas, a equação 7.7 define  $z = g(x, y)$  para  $(x, y)$  próximo a  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  com  $g(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$ .

Passemos agora a verificar que este ponto é de mínimo local. Temos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} = -\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}(2g(x, y))}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} = -\frac{\operatorname{sen} 2y}{\operatorname{sen}(2g(x, y))}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

verificando assim que  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  é um ponto crítico. As derivadas de segunda ordem de  $g$  são calculadas a partir das fórmulas acima e são dadas por

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2 \operatorname{sen}(2g(x, y)) \cos 2x - 2 \cos(2g(x, y)) \operatorname{sen} 2x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{\operatorname{sen}^2(2g(x, y))},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{2 \operatorname{sen}(2g(x, y)) \cos 2y - 2 \cos(2g(x, y)) \operatorname{sen} 2y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{\operatorname{sen}^2(2g(x, y))}$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos(2g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{\operatorname{sen}^2(2g(x, y))}.$$

Calculando no ponto  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  obtemos a matriz hessiana da  $g$ :

$$\operatorname{Hess}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é 4. Como  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2 > 0$ , segue-se do teste da hessiana que  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  é um ponto de mínimo local de  $g$ .





# Capítulo 8

## Integrais Múltiplas

### 8.1 Integrais Iteradas

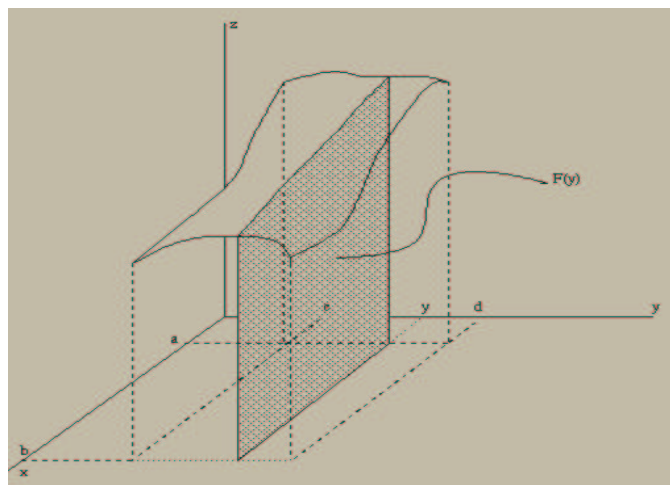
Suponha que  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua, onde  $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ . Conforme já vimos

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

é contínua em  $[c, d]$ . Logo

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

faz sentido.

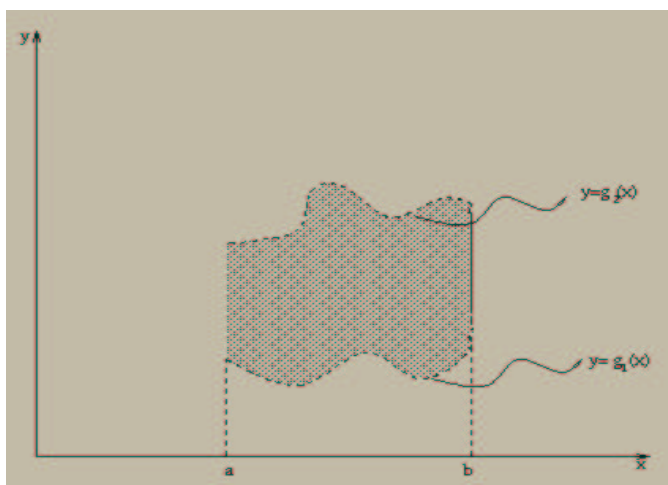


Uma integral deste tipo é chamada integral iterada e representa (se  $f \geq 0$ ) o volume sob o gráfico da  $f$ .

A região de integração das integrais não precisa ser um retângulo.

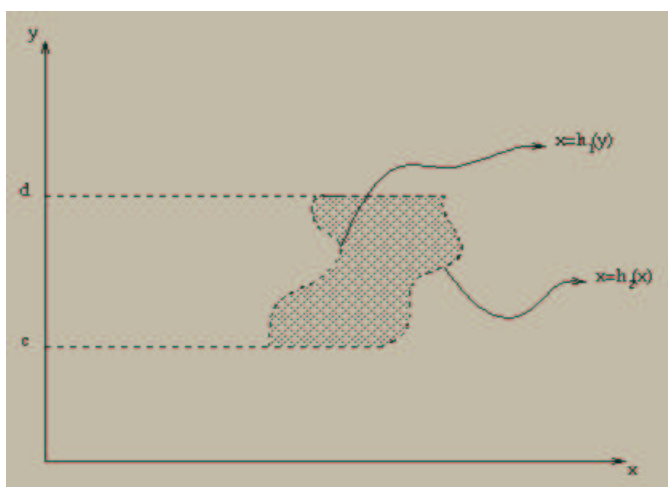
**Exemplo 8.1.1** Considere a região  $R_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ . Então podemos formar a seguinte integral iterada

$$\int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



**Exemplo 8.1.2** Considere a região  $R_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ . Então podemos formar a seguinte integral iterada

$$\int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



**Exemplo 8.1.3** Desenhe as regiões de integração e calcule as integrais

- $$\int_0^1 \left( \int_0^2 (x^2 + y^2) dy \right) dx = 10/3$$

- $$\int_0^2 \left( \int_0^u 5u^2 v dv \right) du$$

$$3. \quad \int_1^3 \left( \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos(x) dx \right) dy = \cos(1) - \cos(9) - 4$$

Outra notação para integrais iteradas

$$\int_a^b dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx \quad \text{ou} \quad \int_c^d dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

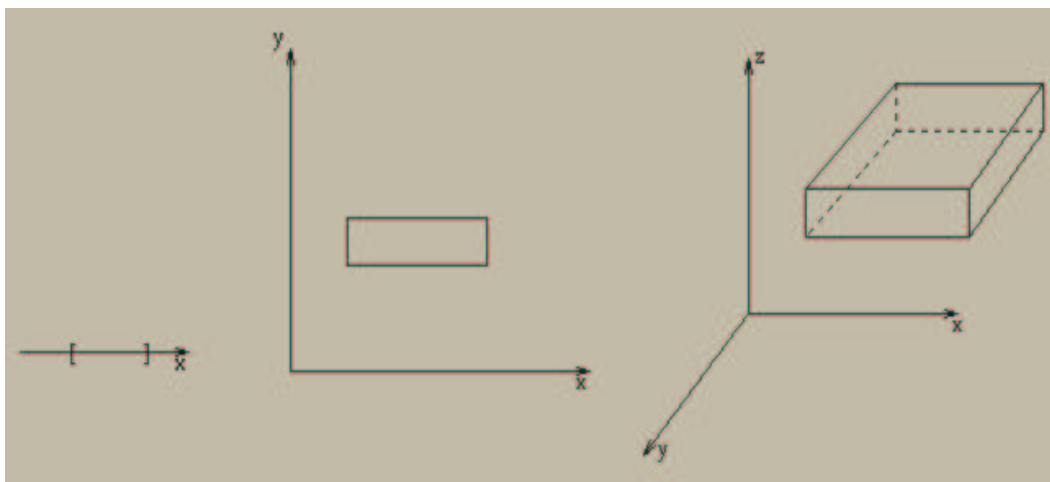
## 8.2 Integrais Múltiplas

Consideremos agora  $F : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Problema:** Definir de modo análogo ao do Cálculo I a integral de  $f$  sobre  $B$ .

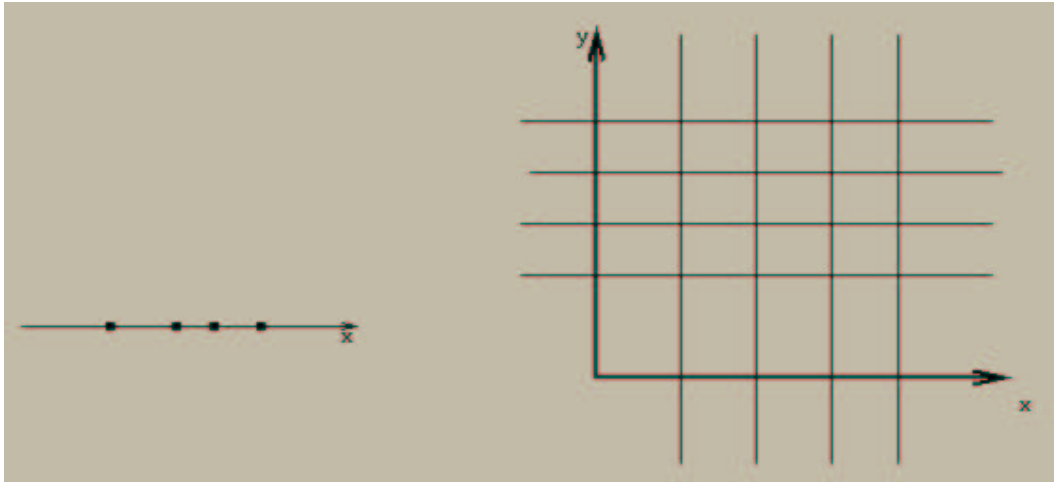
Um *retângulo fechado*  $R$  no  $\mathbb{R}^n$  é um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  constituído de todos os pontos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  que satisfazem as desigualdades

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$



O volume de  $R$ , denotado por  $V(R)$ , é definido como  $V(R) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$ . Se para algum  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i = b_i$ ,  $V(R) = 0$ .

Um número finito de planos  $n - 1$  dimensionais no  $\mathbb{R}^n$  paralelos aos planos coordenados é chamado uma rede.

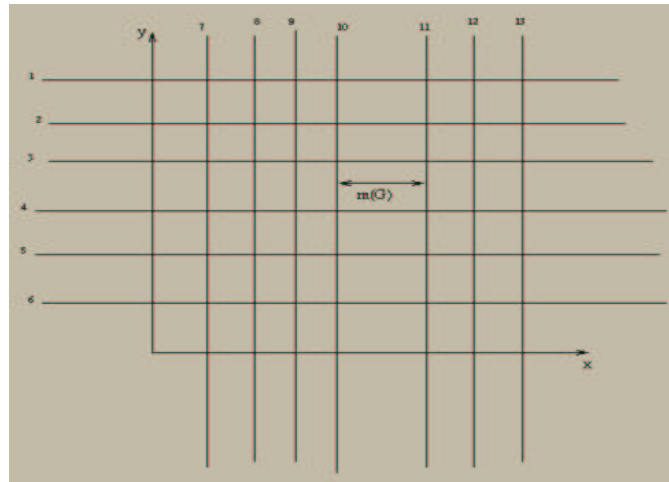


Uma rede divide o  $\mathbb{R}^n$  em um número finito de conjuntos limitados (retângulos) e um número finito de conjuntos não limitados.

Dizemos que uma rede  *cobre um conjunto*  $B \subset \mathbb{R}^n$ , se este estiver contido em uma reunião de retângulos fechados e limitados  $R_1, \dots, R_n$  por ela determinados.

Claramente um conjunto pode ser coberto por uma rede se e somente se ele é limitado.

A *Malha da Rede* será o maior comprimento dos lados dos retângulos limitados por ela determinados.



Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$ , tais que:

- a)  $B$  é limitado;
- b)  $f$  é limitada sobre  $B$ .

Seja

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Seja  $G$  uma rede que cobre  $B$  e que tenha malha  $m(G)$ . Em cada dos retângulos  $R_i$  determinados por  $G$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , escolhemos um ponto arbitrário  $P_i$ .

A soma

$$\sum_{i=1}^n f_B(P_i)V(R_i)$$

é chamada soma de Riemann de  $f$  sobre  $B$ , relativa à rede  $G$ . Se variando as redes  $G$ , com  $m(G)$  tendendo a zero o

$$\lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f_B(P_i)V(R_i)$$

existe ele é chamado integral de  $F$  sobre  $B$ , sendo denotada por

$$\int_B f dv.$$

Se a integral existe,  $f$  é dita *integrável sobre  $B$* .

O limite

$$\int_B f dv = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f_B(P_i)V(R_i)$$

significa que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, se  $G$  é qualquer rede que cobre  $B$  e tem malha menor que  $\delta$  uma soma de Riemann  $S$  de  $f$  sobre  $B$  relativa a rede  $G$  é tal que

$$|S - \int_B f dv| < \epsilon$$

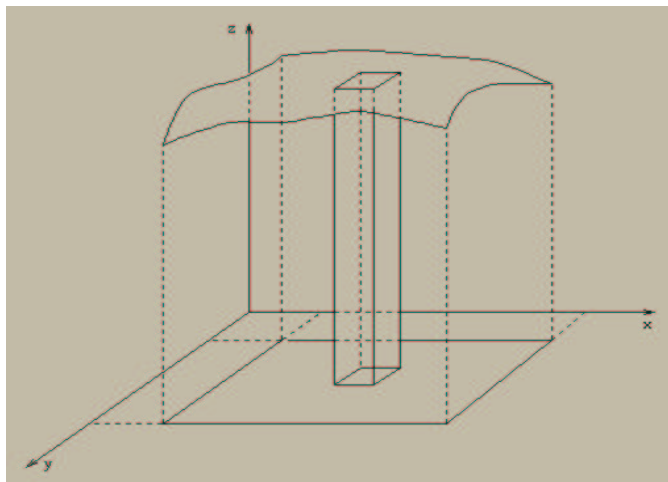
**Notações:**

$$\int_B f dv \quad \text{ou} \quad \int_B f(x, y) dx dy, \quad n = 2,$$

$$\int_B f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{ou} \quad \int_B f dv, \quad n = 3.$$

Vamos interpretar geometricamente a integral dupla  $\int_B f(x, y) dx dy$ . Suponha que  $f$  seja contínua e positiva sobre  $B$ . Uma soma de Riemann aproxima o volume sob o gráfico de  $f$ , desta forma se  $S$  é o sólido sob o gráfico de  $f$  temos que

$$V(S) = \int_B f(x, y) dx dy$$



**Propriedades da Integral:** Se  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  são funções integráveis e  $c \in \mathbb{R}$  então,

i)  $f + g$  é integrável e

$$\int_D (f + g)(x, y) \, dx \, dy = \int_D f(x, y) \, dx \, dy + \int_D g(x, y) \, dx \, dy$$

ii)  $cf$  é integrável e

$$\int_D cf(x, y) \, dx \, dy = c \int_D f(x, y) \, dx \, dy$$

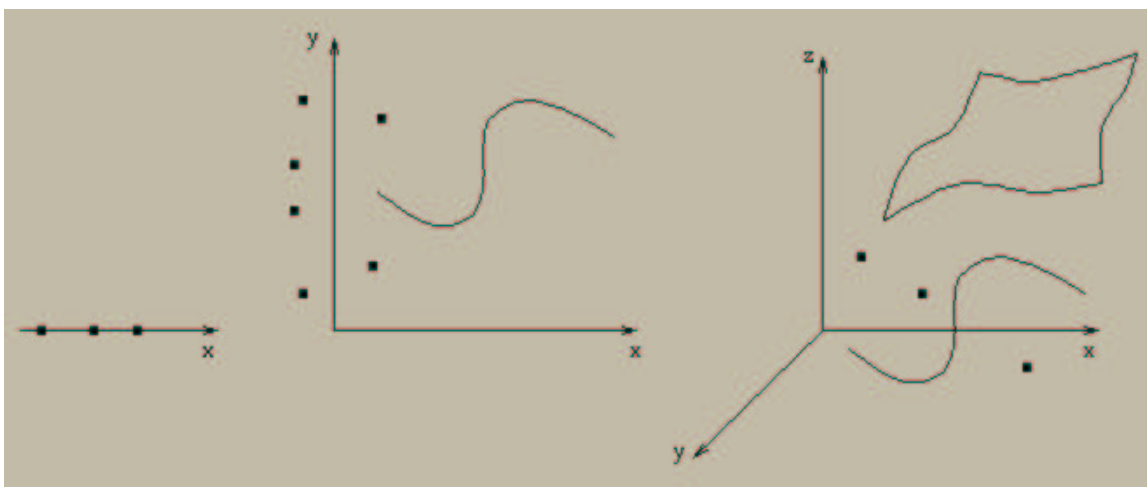
iii) Se  $f \leq g$  então

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy \leq \int_D g(x, y) \, dx \, dy$$

**Pergunta:** O que dizer das integrais iteradas relativamente à integral quando ambas estão definidas.

**Definição 8.2.1** Um conjunto suave em  $\mathbb{R}^n$  é a imagem de um conjunto compacto sob uma função  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n > m$  e  $\phi$  de classe  $C^1$ .

**Idéia Geométrica:** (Conjunto de Volume Nulo)



**Teorema 8.2.1** Seja  $B \subset \mathbb{R}^n$ , limitado, tal que a fronteira de  $B$  esteja contida em um número finito de conjuntos suaves e  $f$  uma função definida e limitada em  $B$ .

Se  $f$  é contínua em  $B$ , exceto possivelmente em uma reunião finita de conjuntos suaves, então  $f$  é integrável sobre  $B$ . O valor

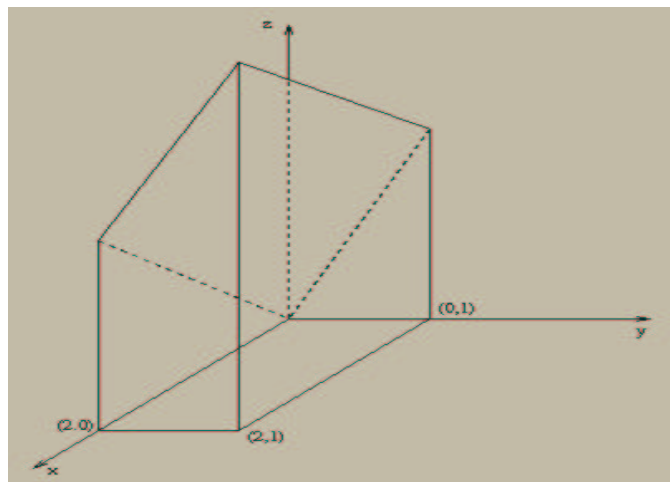
$$\int_B f \, dv$$

não se altera por troca dos valores de  $f$  sobre qualquer conjunto suave.

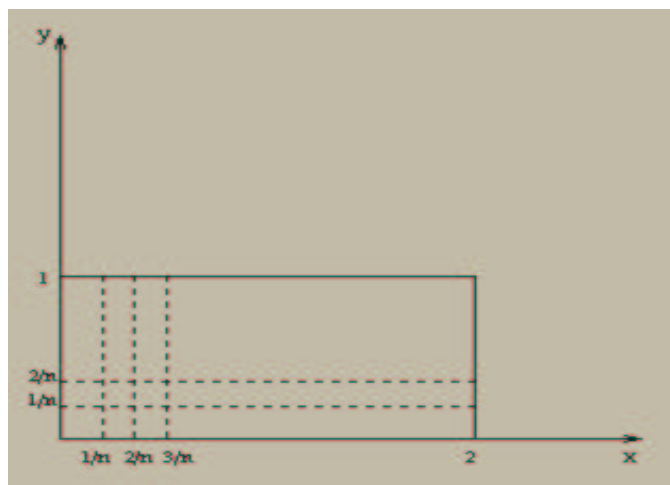
**Exemplo 8.2.1**

$$\int_B (2y + x) dx dy$$

onde  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ .



O teorema anterior assegura a existência da integral. Assim qualquer seqüência de somas de Riemann associadas as redes que tem malha tendendo a zero pode ser usada para avaliar a integral.



Considere  $G_n$  a rede constituída pelas retas  $x_i = \frac{i}{n}$ ,  $0 \leq i \leq 2n$  e  $y_j = \frac{j}{n}$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Seus retângulos são  $R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ ,  $1 \leq i \leq 2n$  e  $1 \leq j \leq n$ . Cada dos retângulos  $R_{ij}$  tem malha  $m(G_n) = \frac{1}{n}$ . Em cada dos retângulos  $R_{ij}$  escolhemos o ponto  $(x_i, y_j) = (\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ ,  $1 \leq i \leq 2n$  e  $1 \leq j \leq n$ . Então

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n n \left( \frac{i}{n} + \frac{2j}{n} \right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n n(i + 2j) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} (ni + 2n \frac{n+1}{2}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} (i + (n+1)) = \frac{1}{n^2} (2n \frac{1+2n}{2} + 2n(n+1)) \rightarrow 4 \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$

Uma avaliação deste tipo é bastante trabalhosa, mesmo em casos em que a função e o conjunto envolvidos no cálculo da integral sejam bastante simples. Para sanar estas dificuldades temos o seguinte resultado

**Teorema 8.2.2 (Fubini)** *Seja  $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável sobre  $R$ . Então, para qualquer permutação  $p : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  as integrais iteradas*

$$\int_{a_{p(1)}}^{b_{p(1)}} dx_{p(1)} \int_{a_{p(2)}}^{b_{p(2)}} dx_{p(2)} \cdots \int_{a_{p(n)}}^{b_{p(n)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{p(n)}$$

existem e

$$\int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_{p(1)}}^{a_{p(1)}} dx_{p(1)} \int_{a_{p(2)}}^{a_{p(2)}} dx_{p(2)} \cdots \int_{a_{p(n)}}^{a_{p(n)}} f dx_{p(n)}$$

**Observação 8.2.1** *Se  $f$  é integrável em  $R$ , as integrais iteradas em ordens distintas existem e todas elas coincidem com a integral múltipla da  $f$  em  $R$ .*

**Exemplo 8.2.2** 1) *Se  $R = [a, b] \times [c, d]$  e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  é  $f \equiv 1$  então*

$$\int_R 1 dx dy = (b - a)(d - c)$$

2) *Se  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  é  $f \equiv 1$  então*

$$\int_R 1 dx dy = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

**Exemplo 8.2.3** *Calcular a integral*

$$\int_B (2y + x) dx dy, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

**Solução:** Note que, pelo teorema acima

$$\int_B (2y + x) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^1 (2y + x) dy = \int_0^2 (1 + x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^2 = 2 + 2 = 4.$$

**Exemplo 8.2.4** *Calcular a integral*

$$\int_R xyz dx dy dz, \quad R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}.$$

**Solução:** Note que, pelo teorema acima

$$\int_R xyz dx dy dz = \int_{-1}^2 dx \int_0^1 dy \int_1^2 xyz dz = \frac{9}{8}.$$



**Observação 8.2.2** *Pode acontecer que as integrais iteradas existam sem que exista a integral múltipla.*

**Contra Exemplo:** Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \text{ é racional} \\ 2y, & x \text{ é irracional} \end{cases}$$

definida em  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Então

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 1 dx = 1$$

mas a integral  $\int_R f dx dy$  não existe.

**Exercício 8.2.1** *Mostre que  $\int_R f(x, y) dx dy$  não existe.*

**Sugestão:** Escolha os pontos  $(x_i, y_j)$  racionais então  $S_1 = 1$ . Em seguida escolha até  $y = \frac{1}{2}$ ,  $(x_i, y_j)$  de tal forma que  $x_i$  é irracional e para  $y > \frac{1}{2}$  escolhamos  $(x_i, y_j)$  racionais.

O teorema a seguir é bastante útil quando queremos determinar a integral de uma função em regiões complicadas (como veremos adiante).

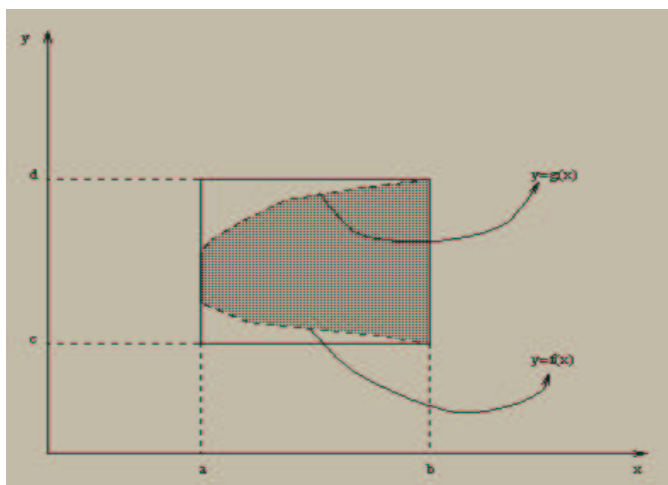
**Teorema 8.2.3** *Seja  $D$  como no teorema anterior e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Se  $D = D_1 \cup D_2$  onde  $D_1$  e  $D_2$  são como acima e  $\text{Int}D_1 \cap \text{Int}D_2 = \emptyset$ , então*

$$\int_D f dv = \int_{D_1} f dv + \int_{D_2} f dv.$$

Como observamos anteriormente, o cálculo da integral múltipla de uma função de várias variáveis reais a valores reais é (mesmo nos casos mais simples) uma tarefa difícil. O Teorema de Fubini parece ser a ferramenta que tornará menos árdua a tarefa de calcular tais integrais, no entanto, a sua utilização está restrita ao cálculo de integrais em retângulos. Vamos agora observar que o Teorema de Fubini (na forma apresentada) pode de fato ser utilizado para um número bastante grande de regiões. Faremos isto através de exemplos em  $\mathbb{R}^2$  que facilmente se estende a dimensões mais altas.

**Exemplo 8.2.5** *Seja  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções reais limitadas com  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  e  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ . Então,*

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y) dy$$

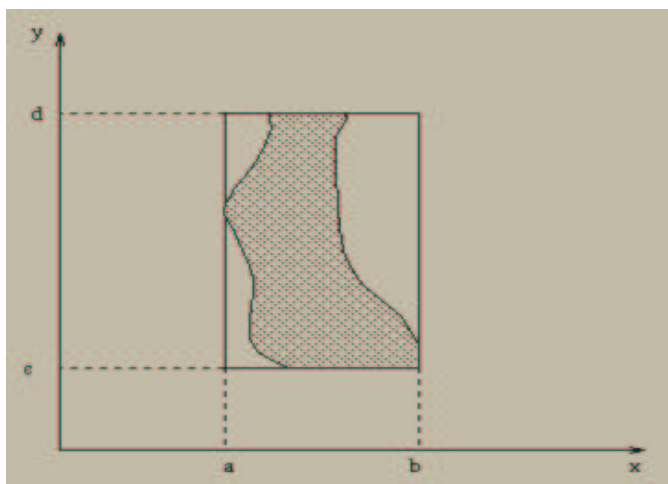


Para verificar que este é o caso basta considerar as constantes  $d = \sup_{x \in [a,b]} g(x)$  e  $c = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$  e definir  $\tilde{f}$  da seguinte forma  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$  se  $(x, y) \in D$  e  $\tilde{f}(x, y) = 0$  se  $(x, y) \in R \setminus D$  onde  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Segue daí que  $\tilde{f}$  é integrável em  $R = D \cup R \setminus D$  e

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y) dx dy.$$

**Exemplo 8.2.6** Seja  $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções reais limitadas com  $h_1(y) \leq h_2(y)$  para todo  $y \in [c, d]$  e  $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ . Então,

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$



A verificação deste fato é similar a verificação do exemplo anterior.

**Exemplo 8.2.7** Seja a função  $f \equiv 1$  integrável sobre um conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Então definimos o volume de  $B$  como sendo:

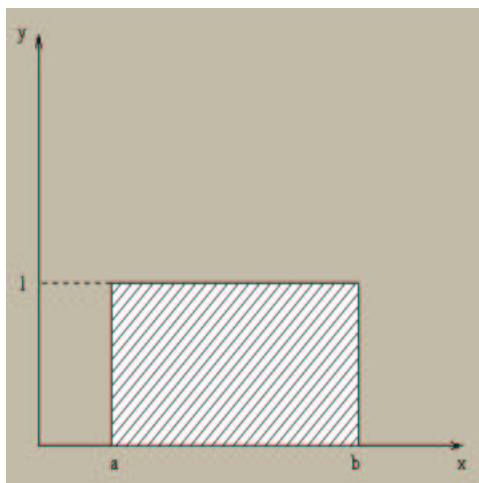
$$V(B) = \int_B 1 dv = \int_B dv.$$

No caso  $n = 2$  o volume acima referido é a área. Então escrevemos  $A(B)$ .

Motivação geométrica:

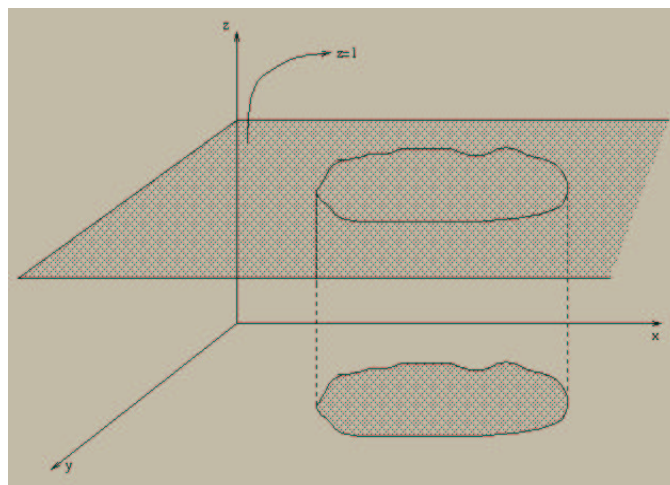
Caso  $n = 1$ :

$$\int_a^b 1 \, dx \, dy = b - a = \text{área de um retângulo de altura 1 tendo como base o intervalo } [a, b]$$



Caso  $n = 2$ :

$$\int_B 1 \, dx \, dy = A(B).1 = \text{volume sob o gráfico da função } f \equiv 1 \text{ definida em } B \subset \mathbb{R}^2$$



**Observação 8.2.3** Suponha que  $S$  é um subconjunto suave do  $\mathbb{R}^n$  então

$$V(S) = \int_S 1 \, dv = \int_S 0 \, dv = 0$$

onde a penúltima igualdade é obtida trocando-se os valores da função  $f \equiv 1$  sobre o conjunto  $S$ , fazendo-os iguais a zero.

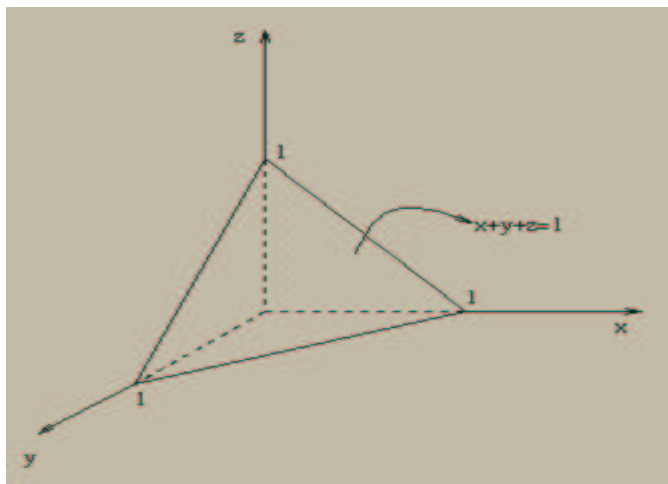
Para alguns tipos de conjuntos a integral  $\int_B 1 \, dv$  não existe, neste caso o volume de  $B$  não está definido.

**Exemplo 8.2.8**  $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  não tem seu volume definido.

**Exemplo 8.2.9** Se  $R$  é um retângulo então

$$V(R) = \Pi(\text{lad os}) = \int_R 1 \, dv.$$

**Exemplo 8.2.10** Ache o volume da região  $B \subset \mathbb{R}^3$  limitada pelos planos coordenados  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e pelo plano  $x + y + z = 1$ .



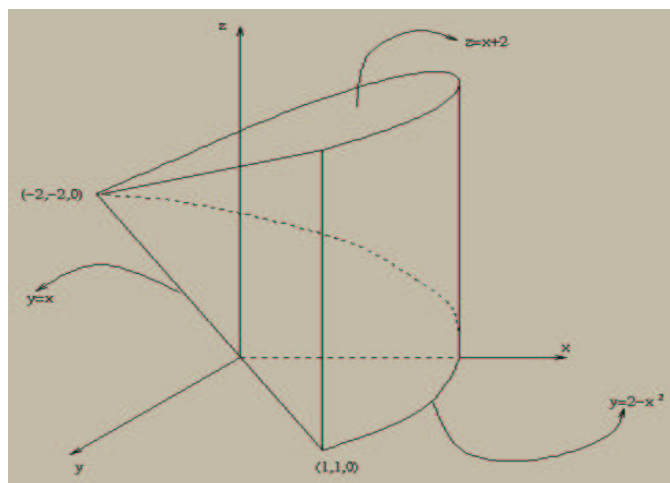
**Solução:**

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 1/6.$$

De outro modo, poderíamos fazer o cálculo do volume do sólido sob o gráfico da função  $f(x, y) = 1 - x - y$

$$V(B) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = 1/6.$$

**Exemplo 8.2.11** Determine o volume do sólido cuja base é a região do plano  $xy$  delimitada pela parábola  $y = 2 - x^2$  e pela reta  $y = x$  e cuja parte superior está contida no plano  $z = x + 2$ .

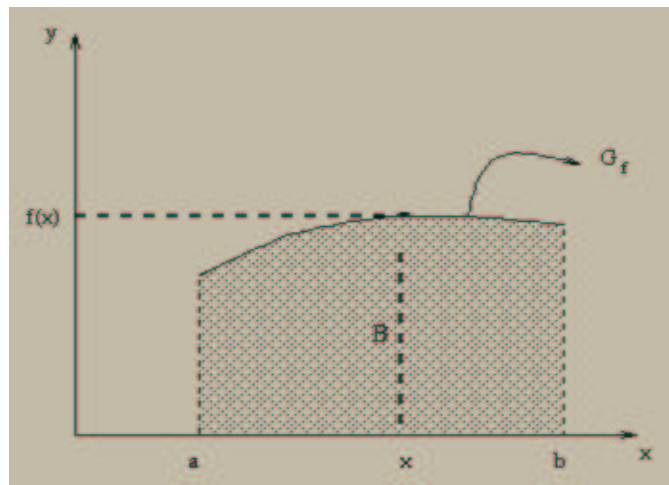


$$V = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} dy \int_0^{x+2} dz = 27/4$$

ou

$$V = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} x + 2 dy = 27/4.$$

**Exemplo 8.2.12** Seja  $B$  a região do plano representada abaixo. Calcule a área de  $B$ .



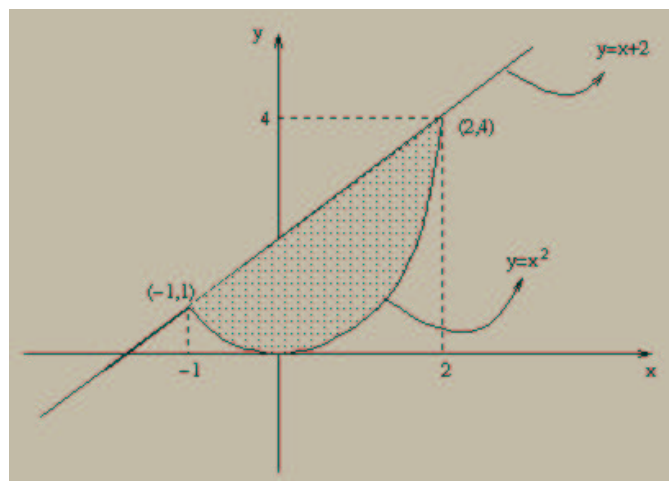
**Solução:**

$$A(B) = \int_B dx dy = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x) dx.$$

**Exemplo 8.2.13** Em  $\mathbb{R}^2$ , calcular a área entre a parábola  $y = x^2$  e a reta  $y = x + 2$ .

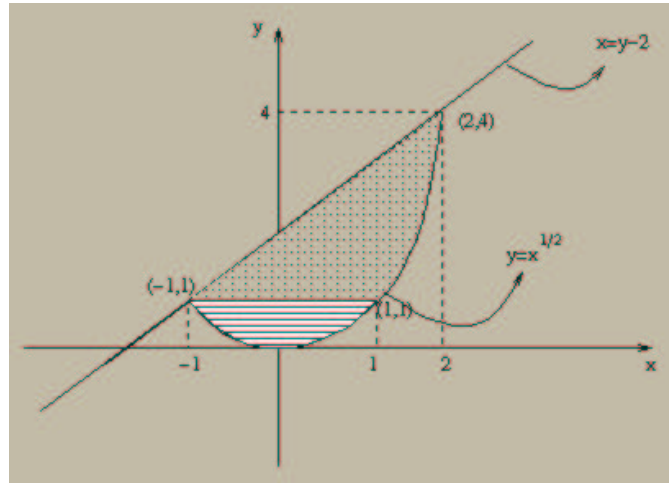
**Solução:**

$$A = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy$$



ou

$$A = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$$

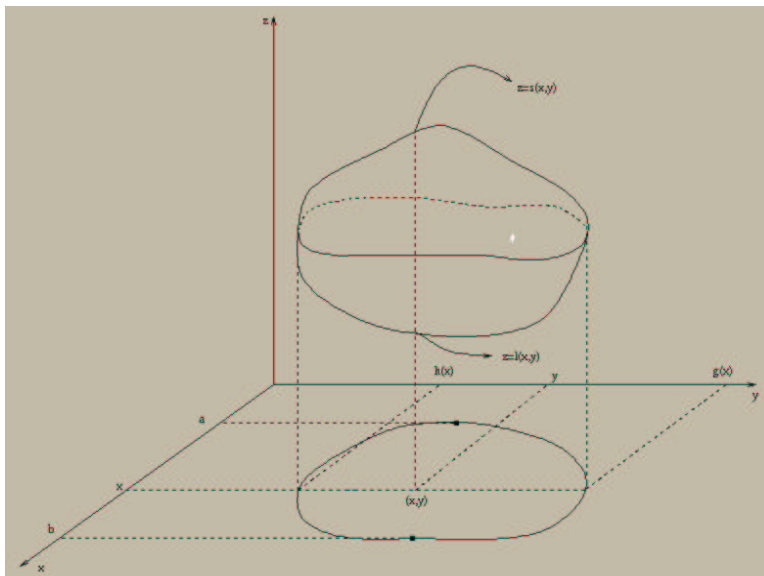


**Observação 8.2.4** *Este último exemplo, dá uma idéia de como é importante escolher adequadamente a ordem de integração.*

### 8.2.1 Regras para estabelecer limites de integração para integrais iteradas

**Primeira Etapa:** Achar os valores extremos da variável externa. Por exemplo

$$\int_a^b dx \int dy \int f(x, y, z) dz.$$



**Segunda Etapa:** Fixe a variável externa em um valor genérico (ex.  $x$ ), determinando um corte na região sólida. Determine os valores extremos da variável intermediária neste corte. Por exemplo

$$\int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy \int f(x, y, z) dz.$$

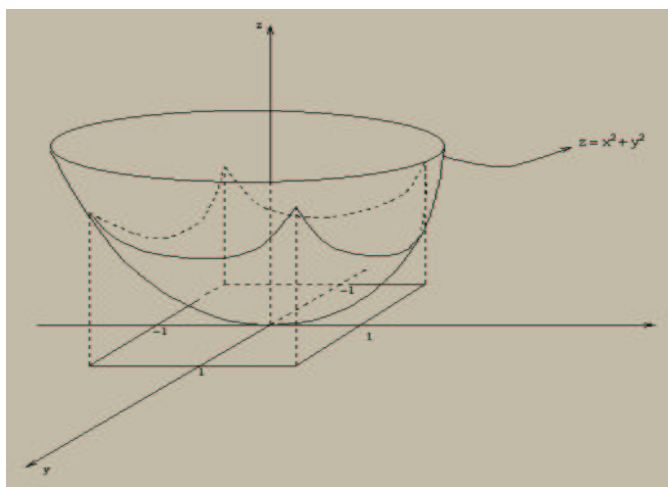
**Terceira Etapa:** Fixe agora neste corte a variável intermediária. Determine os valores extremos da variável interna. Por exemplo

$$\int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy \int_{l(x,y)}^{s(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

### Exemplo 8.2.14

$$\int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} dy \int_0^{x+2} dz$$

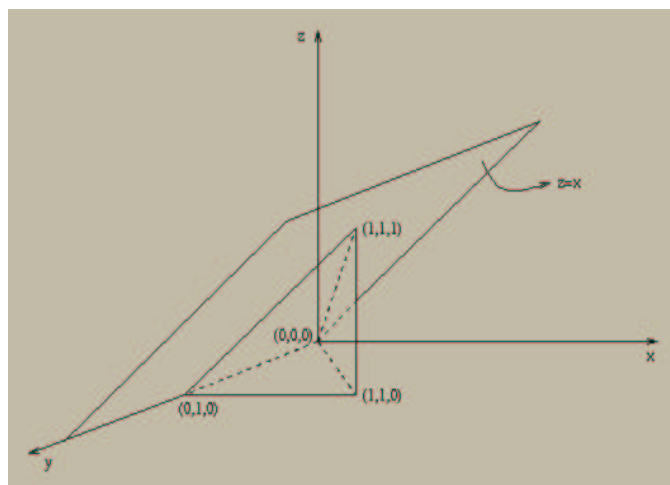
**Exemplo 8.2.15** Encontre o volume sob o gráfico do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e acima da região  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$  do plano  $xy$ .



**Solução:**

$$V = \int_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy = 8/3.$$

**Exemplo 8.2.16** Calcular  $\int_D x dx dy$  onde  $D$  é um triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(0, 1)$ .



**Solução:**

$$\int_D x \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_x^1 x \, dy = \int_0^1 x(1-x) \, dx = 1/6$$

ou

$$\int_D x \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^y x \, dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \, dy = 1/6.$$

**Exemplo 8.2.17** Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ . Calcule a integral

$$\int_D e^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy$$

**Solução:**

$$\begin{aligned} \int_D e^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} \, dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} \, dx = \int_0^1 ye^{\frac{x}{y}} \Big|_{x=0}^{x=y^2} \, dx = \int_0^1 (ye^y - y) \, dy = -\frac{1}{2} + (y-1)e^y \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 8.2.18** Calcule a integral

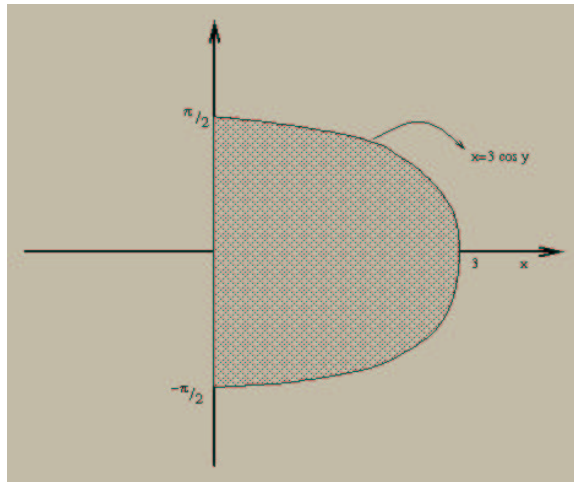
$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y \, dx$$

e desenhe o domínio de integração.

**Solução:** A região é dada por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 3 \cos y\}$$





Vamos agora calcular a integral.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int_0^{3 \cos y} x^2 \operatorname{sen}^2 y dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9(\cos y)^3 (\operatorname{sen} y)^2 dy \\ &= 18 \int_0^{\pi/2} \cos y [1 - (\operatorname{sen} y)^2] (\operatorname{sen} y)^2 dy = 18 \int_0^1 (1 - u^2) u^2 du = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

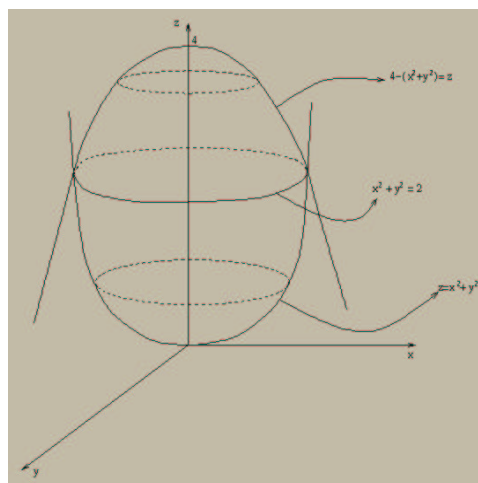
**Definição 8.2.2** Se  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  são funções integráveis e  $f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in D$ , então o volume de

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ e } f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

é

$$\int_D [g(x, y) - f(x, y)] dx dy.$$

**Exemplo 8.2.19** Calcule o volume do sólido compreendido entre os parabolóides  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 4 - x^2 - y^2$



**Solução:** Note que os dois parabolóides se interceptam para pontos da circunferência  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\}$ . O volume do sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_D [4 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2] dx dy = 2 \int_D [2 - x^2 - y^2] dx dy \\ &= 2 \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - y^2) dy = 8 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - y^2) dy \\ &= 8 \int_0^2 [2y - x^2 y - \frac{y^3}{3}] \Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = 8 \int_0^2 [2\sqrt{2-x^2} - x^2\sqrt{2-x^2} - \frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}] dx \end{aligned}$$

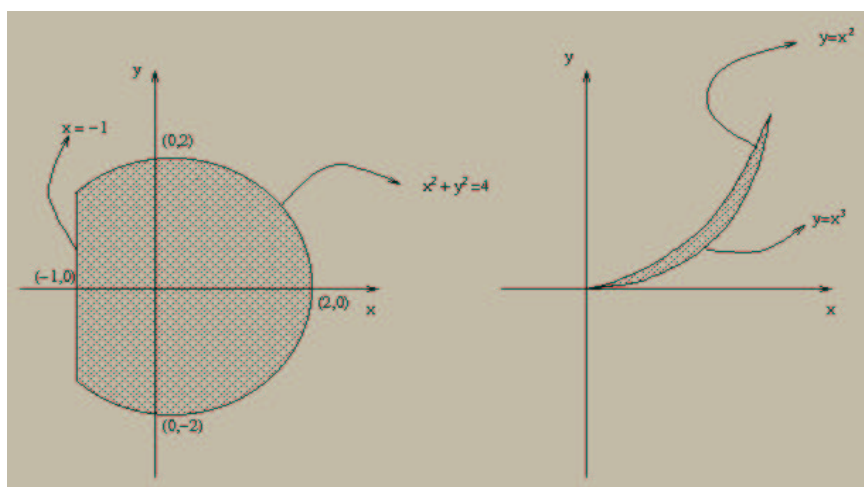
Fazendo a mudança de variável  $x = \sqrt{2}\operatorname{senu}$  temos que

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4 \cos u - 4(\operatorname{senu})^2 \cos u - \frac{4}{3}(\cos u)^3] \cos u du \\ &= 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos u)^2 - (\operatorname{senu})^2(\cos u)^2 - \frac{1}{3}(\cos u)^4] du = 4\pi \end{aligned}$$

onde para resolver a última integral acima utilizamos as fórmulas trigonométricas de arco duplo.

**Exemplo 8.2.20** *Desenhe as regiões de integração para as integrais iteradas:*

$$a) \int_{-1}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \quad b) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$$



**Exercício 8.2.2** *Calcule  $\int_R f dv$  para as seguintes escolhas de  $f$  e  $R$ .*

- $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$ ,  $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .
- $f(x, y, z) = x^2 y z$ ,  $R$  é o tetraedro de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ .

## 8.3 Mudança de Variáveis

Para integrais de funções de uma variável temos o seguinte resultado de mudança de variáveis

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(u))\phi'(u)du, \quad (x = \phi(u))$$

sempre que  $\phi'(u) \neq 0$  para  $u \in [a, b]$  (de fato a condição  $\phi'(0) \neq 0$  não é necessária, veja 9.1.3). Como vimos anteriormente podemos transformar regiões relativamente complicadas em regiões simples usando transformações e como a complexidade da região é uma das dificuldades no cálculo de integrais múltiplas um resultado análogo ao resultado acima para funções de várias variáveis pode ser extremamente útil (este é de fato o caso como veremos a seguir).

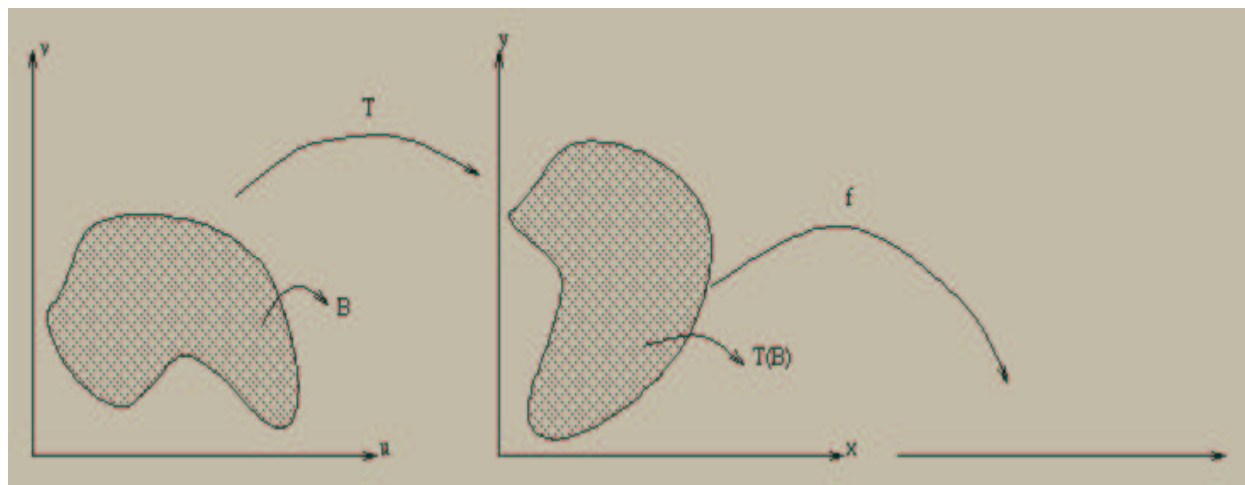
No  $\mathbb{R}^n$  um troca de variáveis corresponde a uma transformação do  $\mathbb{R}^n$  no  $\mathbb{R}^n$  que vimos anteriormente; isto é,  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Temos então o seguinte resultado

**Teorema 8.3.1 (Mudança de Variáveis)** *Seja  $T : D(T) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação de classe  $C^1$ . Seja  $B \subset D(T)$  um conjunto limitado com fronteira contida em um número finito de conjuntos suaves. Suponhamos que  $B$  e sua fronteira estão contidos no interior de  $D(T)$  e que:*

- i)  $T$  é injetora em  $B$ ,
- ii)  $\det J(T) \neq 0$  em todo ponto de  $B$ .

Então, se a função  $f$  é limitada e contínua sobre  $T(B)$ , temos:

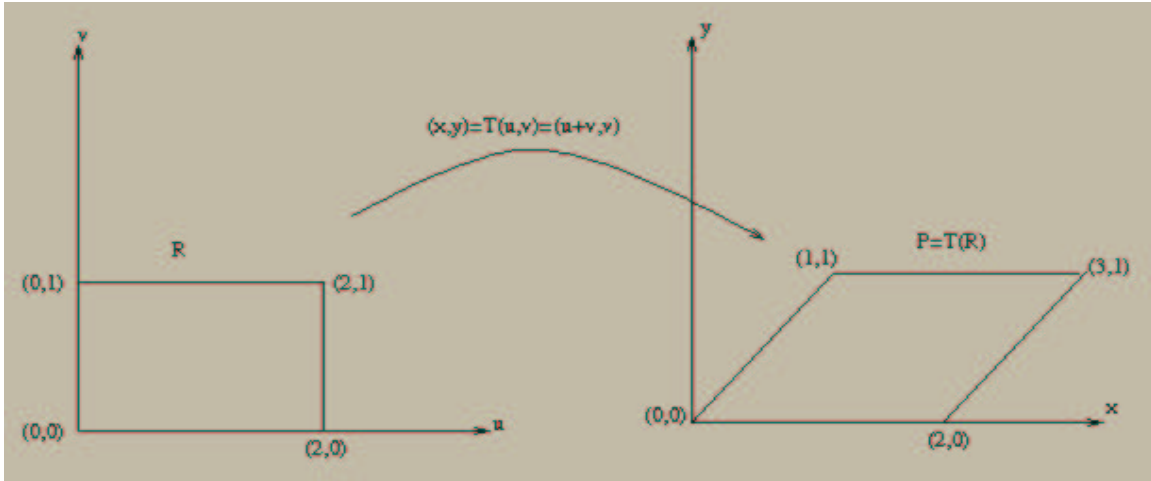
$$\int_{T(B)} f dv = \int_B (f \circ T) |\det J(T)| dv$$



**Observação 8.3.1** *O teorema ainda é verdadeiro de i) e ii) deixam de ser verdadeiros em conjuntos suaves.*

**Exemplo 8.3.1** Seja  $P \subset \mathbb{R}^2$  o paralelogramo determinado pelos pontos  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(3,1)$  e  $(2,0)$ . Calcule a integral

$$\int_P (x+y) dx dy.$$



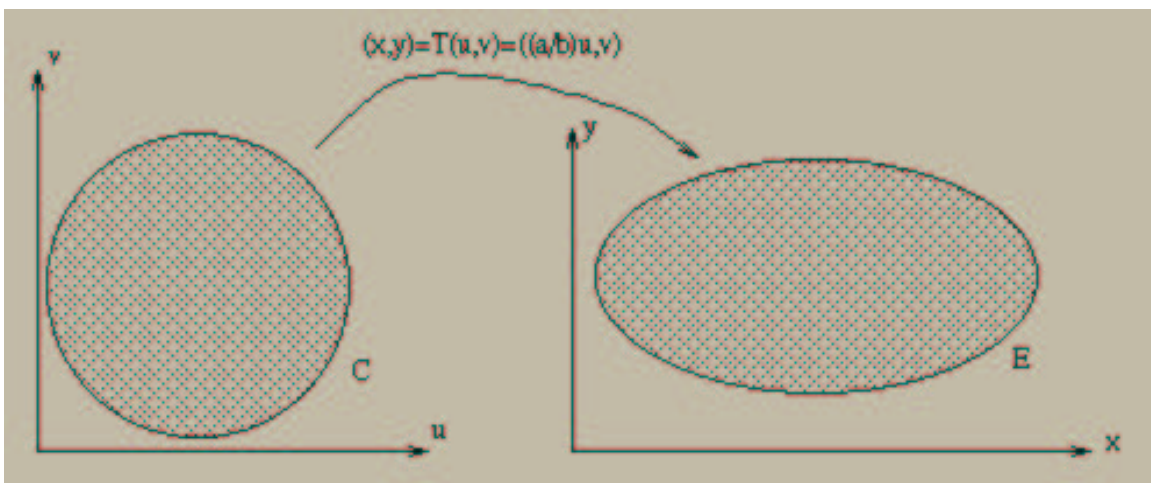
**Solução:** Note que a transformação  $T(u,v) = (u+v, u)$  transforma o retângulo  $R = [0,2] \times [0,1]$  e que

$$J(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então  $\det J(T) = 1 \neq 0$ ,  $T$  é  $C^1$  e  $T$  é injetora com  $T(R) = P$ . Segue do teorema que

$$\int_{P=T(R)} (x+y) dx dy = \int_R (u+2v) \cdot 1 \cdot du dv = \int_0^2 du \int_0^1 (u+2v) dv = 4.$$

**Exemplo 8.3.2** Calcule a área da região  $E$  limitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , conhecida a área do círculo  $C = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq b^2\}$



**Solução:** Considere a transformação

$$(x, y) = T(u, v) = \left(\frac{a}{b}u, v\right).$$

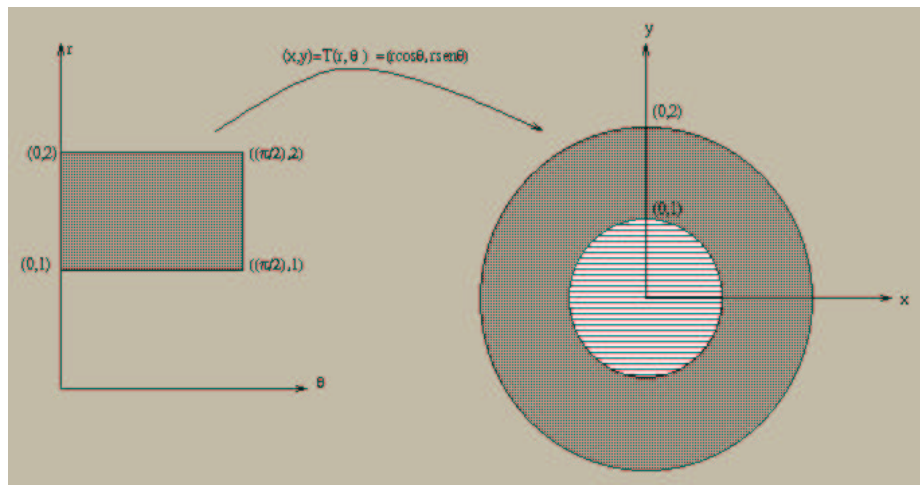
Té injetora, de classe  $C^1$  e  $T(C) = E$

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a}{b} > 0.$$

Pelo teorema anterior

$$\int_{T(C)=E} dA = \int_C \frac{a}{b} dA = \frac{a}{b} \int_C dA = \frac{a}{b} \pi b^2 = \pi ab.$$

**Exemplo 8.3.3** Calcular a área da região plana  $P$  no primeiro quadrante compreendida entre as circunferências de raios 1 e 2.



**Solução:** Considere a transformação

$$(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

$T$  é injetora, de classe  $C^1$  e  $T(C) = E$

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r > 0.$$

Então, se  $R = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ , temos que  $T(R) = P$  e pelo teorema anterior

$$\int_{T(R)=P} dA = \int_C r dA = \int_C r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_1^2 = \frac{3}{4}\pi.$$

### 8.3.1 Coordenadas Polares

Um ponto  $P = (x, y)$  do plano fica completamente determinado se sabemos a distância  $r$  de  $P$  a origem  $O = (0, 0)$  e o ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , medido no sentido anti-horário e a partir do semi-eixo positivo das abscissas, entre este semi-eixo e a reta determinada por  $P$  e por  $(0, 0)$ . Definimos a seguinte transformação de coordenadas

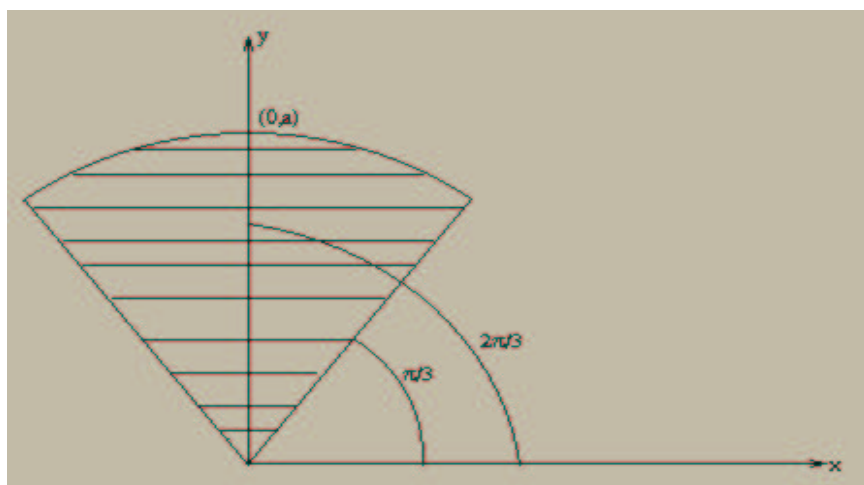
$$(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Esta transformação é conhecida como Transformação de Coordenadas “Polar” e é injetora, de classe  $C^1$  com  $\det J(T) = r$ .

Assim,

$$\int_{T(B)} f(x, y) dx dy = \int_B (f \circ T) |\det J(T)| dr d\theta = \int_B f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

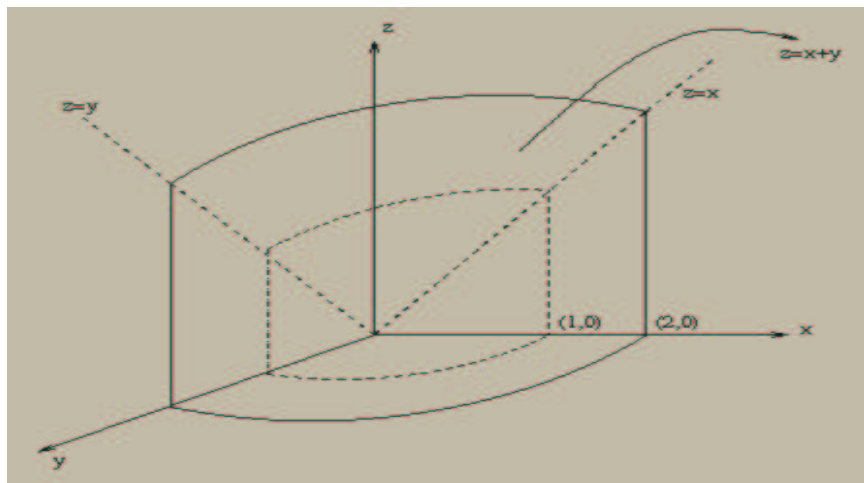
**Exemplo 8.3.4** Determinar  $\int_D y dx dy$  onde  $D$  é o setor  $\{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 2\frac{\pi}{3}\}$



**Solução:** Seja  $R = [\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}] \times [0, a]$  e note que a transformação  $T : R \rightarrow D$  dada por  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  (Transformação de Coordenadas “Polar”) é bijetora e  $\det J(T) = r$ . Então

$$\int_D y dx dy = \int_R r r \sin \theta dr d\theta = \int_R r^2 \sin \theta dr d\theta = \int_0^a r^2 dr \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta = \int_0^a r^2 dr = \frac{a^3}{3}.$$

**Exemplo 8.3.5** Calcule o volume do sólido  $D$  cuja base  $B$  está no primeiro quadrante do plano  $xy$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), sendo delimitada pelas curvas  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$  e cuja parte superior está no plano  $z = x + y$ , tendo faces laterais ortogonais ao plano  $xy$ .



**Solução:** Note que, usando o Teorema de Fubini, temos

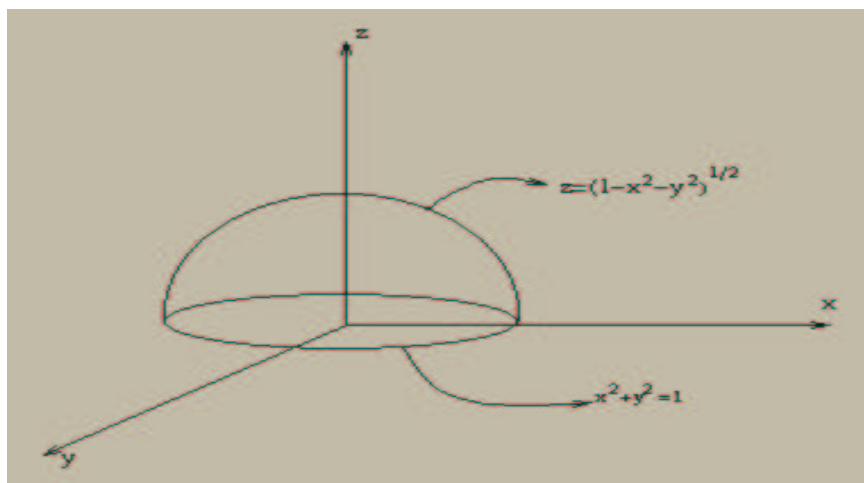
$$\begin{aligned} V &= \int_D (x+y) dx dy = \int_B dx dy \int_0^{x+y} dz = \int_B (x+y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

**Exemplo 8.3.6** Calcular  $\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , onde  $D$  é a região do plano compreendida entre as curvas  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 9$ .

**Solução:** Utilizando coordenadas polares, temos que se  $R = [2, 3] \times [0, 2\pi]$ , então:

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_R r r dr d\theta = \int_2^3 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{r^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{38}{3}\pi$$

**Exemplo 8.3.7** Determinar os extremos de integração para as integrais iteradas associadas a  $\int_R f(x, y, z) dx dy dz$ , onde  $R$  é o hemisfério  $x^2 + y^2 + z^1 \leq 1$ ,  $z \geq 1$



**Solução:**

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$

**Exemplo 8.3.8** Determine o volume do sólido compreendido entre as superfícies  $z = 8 - x^2 - y^2$  e  $z = x^2 + 3y^2$ .

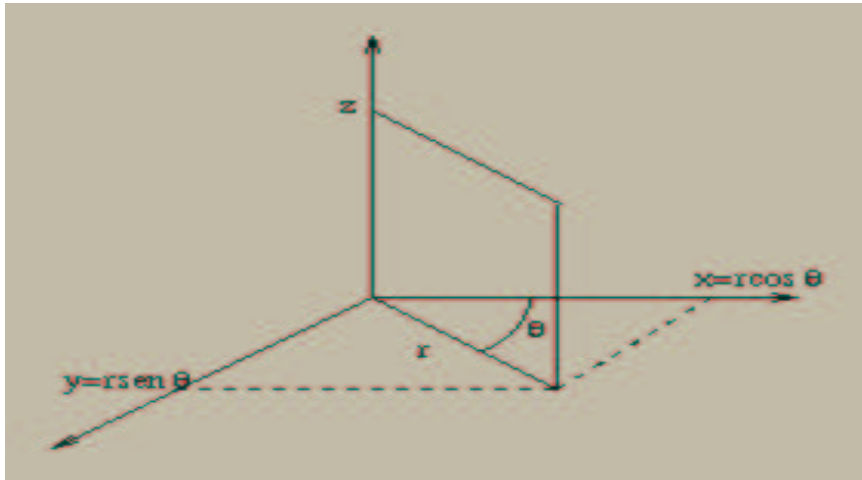
**Solução:** Se um ponto  $(x, y, z)$  está na intersecção das superfícies então  $z = 8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$  e portanto  $x^2 + 2y^2 = 4$

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz = 8\pi\sqrt{2}.$$

### 8.3.2 Coordenadas Cilíndricas

Um ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço fica completamente determinado se sabemos a distância  $r$  de  $P_1 = (x, y, 0)$  a origem  $O = (0, 0, 0)$  o ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , medido no sentido anti-horário e a partir do semi-eixo positivo das abscissas, entre este semi-eixo e a reta determinada por  $P$  e por  $(0, 0, 0)$  e a cota  $z$ . Definimos a seguinte transformação de coordenadas

$$(x, y, z) = T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z), \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$



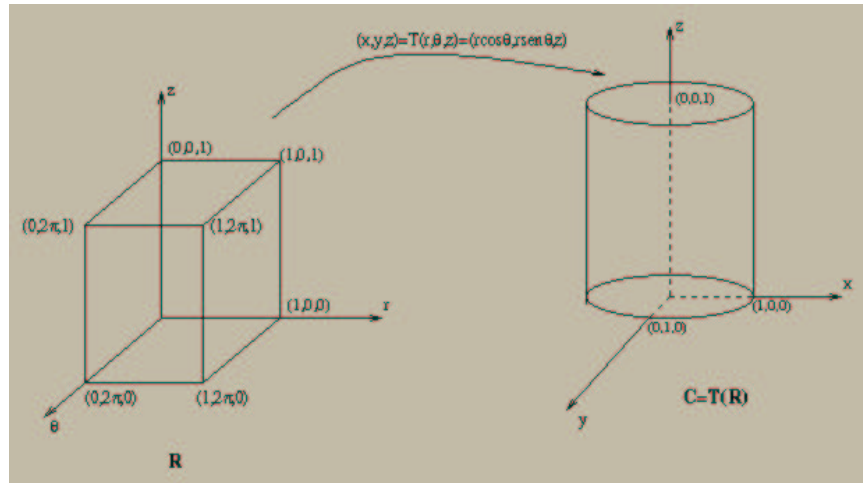
Esta transformação é conhecida como Transformação de Coordenadas “Cilíndricas” e é injetora, de classe  $C^1$  com  $\det J(T) = r$ . De fato:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z$$

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$



**Exemplo 8.3.9** Calcular  $\int_C f(x, y, z) dx dy dz$  onde  $f(x, y, z) = 4xy$  e  $C$  é a região cilíndrica  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .



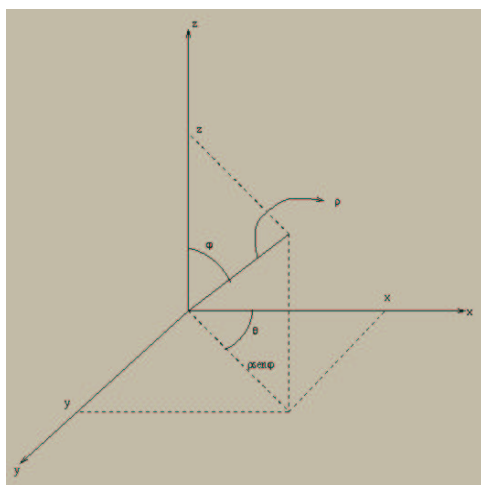
**Solução:** Note que a transformação de coordenadas cilíndricas leva o retângulo  $R = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  na região  $C$ . Logo, dos Teorema 8.3.1 e Teorema 8.2.2, temos

$$\begin{aligned} \int_{C=T(R)} 4xy dx dy dz &= \int_R 4r^3 \cos \theta \operatorname{sen} \theta dr d\theta dz = \int_0^1 4r^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} d\theta \\ &= \int_0^1 4r^3 dr (-\cos 2\theta) \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

### 8.3.3 Coordenadas Esféricas

Um ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço fica completamente determinado se sabemos a distância  $\rho$  de  $P = (x, y, z)$  a origem  $O = (0, 0, 0)$  o ângulo  $\varphi \in [0, \pi]$  medido no sentido horário, entre o semi-eixo positivo das cotas e a reta determinada por  $P$  e  $(0, 0, 0)$  e o ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , medido no sentido anti-horário entre o semi-eixo positivo das abscissas, e a reta determinada por  $P_1 = (x, y, 0)$  e por  $(0, 0, 0)$ . Definimos a seguinte transformação de coordenadas

$$(x, y, z) = T(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi), \quad \rho > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi.$$



Esta transformação é conhecida como Transformação de Coordenadas “Esféricas” e é injetora, de classe  $C^1$  com  $\det J(T) = \rho^2 \sin \varphi$ . De fato:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

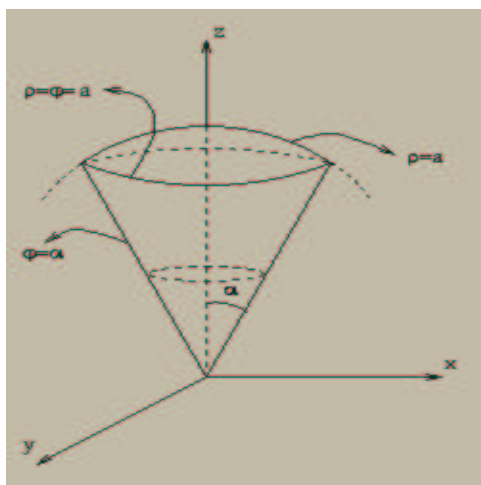
$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi.$$

**Exemplo 8.3.10** Calcular  $\int_B f(x, y, z) dx dy dz$ , onde  $f(x, y, z) = z^2$  e  $B$  é a seguinte região  $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

**Solução:** Note que  $T$  leva o retângulo  $R = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  e  $B$ . Logo, dos Teorema 8.3.1 e Teorema 8.2.2, temos

$$\begin{aligned} \int_{B=T(R)} z^2 dx dy dz &= \int_R \rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

**Exemplo 8.3.11** Calcular o volume da região  $C$  comum à esfera  $\rho \leq a$  e ao cone  $\varphi \leq \alpha$ .



**Solução:** Note que  $T$  leva o retângulo  $R = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  e  $C$ . Logo, dos Teorema 8.3.1 e Teorema 8.2.2, temos

$$\begin{aligned} V(C) &= \int_{C=T(R)} dx dy dz = \int_R \rho \operatorname{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha d\varphi \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen} \varphi d\theta = 2\pi \frac{\alpha^3}{3} (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

### 8.3.4 Densidade e Centro de Massa

Considere a seguinte situação



$m_1$  e  $m_2$  são as massas de partículas pontuais sobre  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente. Então  $m_1 x_1 = m_2 |x_2|$  ou seja  $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$ .

Em geral se  $m_1, \dots, m_n$  são as massas de partículas pontuais localizadas em  $\ell$  sobre  $x_1, \dots, x_n$ , o sistema estará em equilíbrio se

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0.$$

A soma  $\sum_{i=1}^n m_i x_i$  é chamada *momento do sistema* em relação à origem. Seja  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ , definimos

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad \text{ou} \quad m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Fisicamente  $\bar{x}$  é o ponto sobre o qual poderíamos concentrar toda a massa do sistema sem alterar o momento do sistema.

O ponto  $P$  com coordenada  $\bar{x}$  é chamado *centro de massa* do sistema.

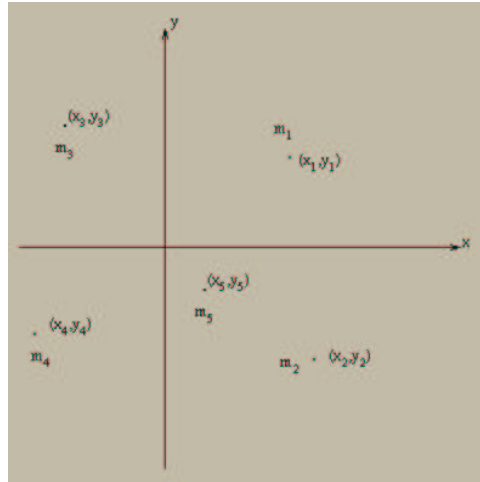
Consideremos agora uma situação um pouco mais geral, qual seja:  $m_1, \dots, m_n$  são as massas de partículas pontuais localizadas em pontos  $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$  sobre um plano coordenado. Os momentos  $M_x$  e  $M_y$  do sistema em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , são definidos por

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Se  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  então o centro de massa dos sistema é o ponto  $P = (\bar{x}, \bar{y})$ , dado por:

$$m\bar{x} = M_y \quad \text{e} \quad m\bar{y} = M_x.$$

$P$  é o ponto sobre o qual poderíamos concentrar toda a massa do sistema sem que os momentos do sistema se alterem.



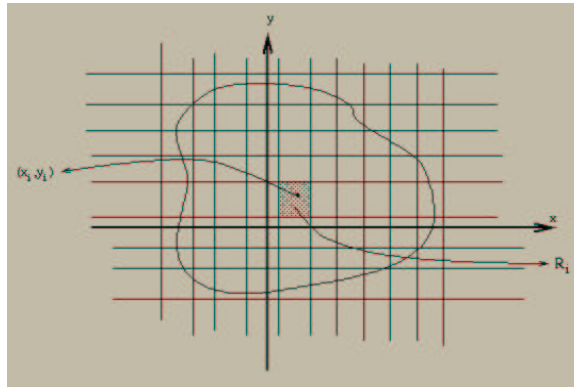
Suponha que a origem  $P = O$  do sistema coincida com o centro de massa, então

$$m\bar{x} = m \cdot 0 = M_y = 0$$

$$m\bar{y} = m \cdot 0 = M_x = 0$$

e o sistema está em equilíbrio. Logo o centro de massa é o ponto pelo qual poderíamos pendurar o sistema de modo que ele fique em equilíbrio na horizontal.

Considere agora uma lâmina  $L$  com a forma da região  $D$  da figura abaixo



Suponha que para cada ponto  $(x, y)$  da superfície a densidade seja dada por  $\rho(x, y)$ , onde  $\rho$  é uma função contínua sobre  $D$ .

Considere uma rede  $G$  cobrindo  $D$ . Escolhamos  $(x_i, y_i)$  em cada retângulo  $R_i$  de  $G$ . Se  $m(G)$  é pequena, do fato que  $\rho$  é contínua, podemos aproximar a massa da lâmina  $L_i$  correspondente à  $R_i$  por

$$m(L_i) = \rho(x_i, y_i)A(R_i).$$

Ainda

$$\sum_i \rho(x_i, y_i)A(R_i).$$

aproxima a massa da lâmina  $L$ . A massa  $M$  de  $L$  é definida como

$$M = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i \rho(x_i, y_i)A(R_i) = \int_D \rho(x, y) dx dy$$

Em particular se  $\rho(x, y) = c$ , então

$$M = c \int_D dA = cA(D).$$

A densidade média da lâmina  $L$  é

$$\bar{\rho} = \frac{\text{massa}}{\text{área}} = \frac{\int_D \rho(x, y) dA}{\int_D dA}.$$

Se a massa de  $L_i$  é suposta concentrada em  $(x_i, y_i)$  então o momento de  $L_i$  em relação ao eixo  $x$  é  $y_i \rho(x_i, y_i) A(R_i)$  e o momento de  $L_i$  em relação ao eixo  $y$  é  $x_i \rho(x_i, y_i) A(R_i)$ . Os momentos de  $L$  em relação ao eixo  $x$ ,  $M_x$  e  $y$  e  $M_y$  são então definidos por

$$M_x = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i y_i \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D y \rho(x, y) dA$$

e

$$M_y = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i x_i \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D x \rho(x, y) dA.$$

Ainda, o centro de massa da lâmina  $L$  é o ponto  $P = (\bar{x}, \bar{y})$  dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

ou seja

$$\bar{x} = \frac{\int_D x \rho(x, y) dA}{\int_D \rho(x, y) dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int_D y \rho(x, y) dA}{\int_D \rho(x, y) dA}.$$

No caso particular em que  $\rho(x, y)$  é constante temos que

$$\bar{x} = \frac{\int_D x dA}{\int_D dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int_D y dA}{\int_D dA}.$$

Neste caso o ponto  $P$  é chamado centróide e não depende da densidade, dependendo somente da forma da região  $D$ .

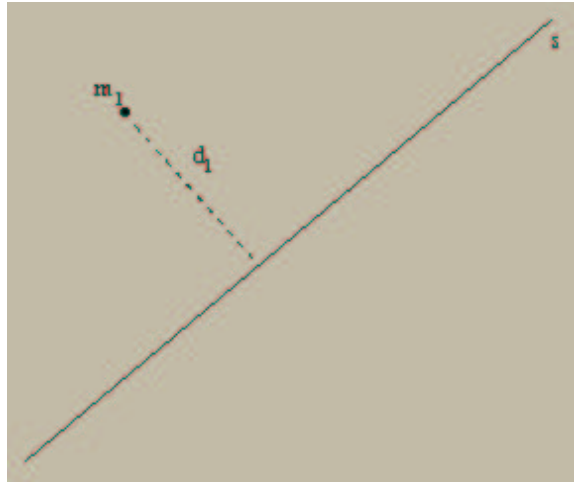
**Exemplo 8.3.12** *Seja  $D$  a região do plano entre a parábola  $y = 6 - x^2$  e  $y + 2x - 3$ . Calcule  $A(D)$  e o centro de massa de uma lâmina com a forma de  $D$  e densidade constante.*

### 8.3.5 Momento de Inércia

O sistema formado por uma partícula de massa  $m_1$  tem *momento de inércia relativo* à reta  $s$  dado por

$$I = m_1 d_1^2,$$

onde  $d_1$  é a distância da partícula à reta  $s$ .



Se o sistema é constituído de  $n$  partículas de massas  $m_1, \dots, m_n$  distando  $d_1, \dots, d_n$  de uma reta  $s$  tem momento de inércia relativo a  $s$  dado por

$$I_s = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2.$$

Se as partículas estão localizadas nos pontos  $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$  do plano  $xy$  então o momento de inércia dos sistema em relação ao eixo  $x$  e ao eixo  $y$  dados por

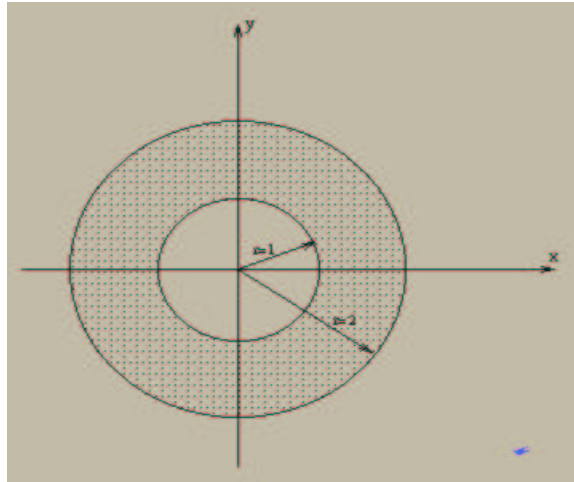
$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \quad \text{e} \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2.$$

Exatamente como no caso do momento, estendemos o conceito de momento de inércia em relação ao eixo  $x$  e ao eixo  $y$  por

$$I_x = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i y_i^2 \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D y^2 \rho(x, y) dA$$

$$I_y = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i x_i^2 \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D x^2 \rho(x, y) dA$$

**Exemplo 8.3.13** *Seja  $L$  uma lâmina com densidade constante  $\rho$  com a forma da região anelar  $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Calcular  $I_x$  e  $I_y$ .*



**Solução:** Note que a mudança de coordenadas polares  $T$  leva a região  $R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ . Segue agora do Teorema 8.3.1 e do Teorema 8.2.2 que

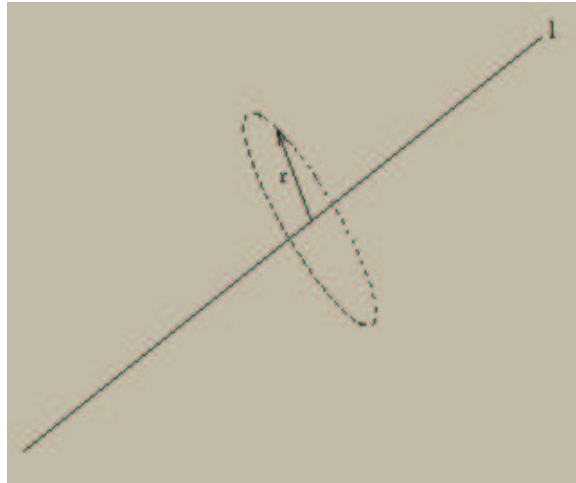
$$I_x = \int_{A=T(R)} \rho x^2 dx dy = \rho \int_R r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \rho \int_1^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \rho \int_1^2 r^3 \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4} dr = \rho \pi \int_1^2 r^3 dr = \rho \pi \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{15\rho\pi}{4}$$

$$I_y = \int_A \rho y^2 dx dy = \frac{15\rho\pi}{4}.$$

### 8.3.6 Momento Angular

Suponha que uma partícula pontual de massa  $m$  gira ao redor de um eixo  $\ell$ , num círculo de raio  $r$ , com velocidade angular  $\omega$ .



A energia cinética desta partícula é

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \omega r$$

$$E_c = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

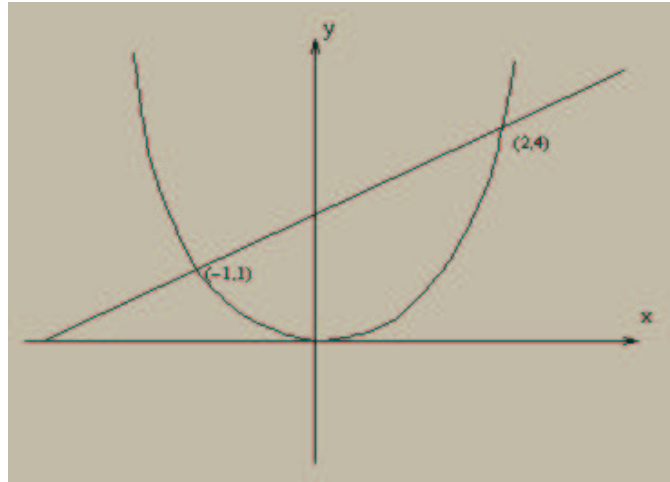
Suponha agora um sistema de  $n$  partículas girando em torno de um eixo  $\ell$  com velocidade angular  $\omega$ . Se  $r_1, \dots, r_n$  são as distâncias de  $m_1, \dots, m_n$  a  $\ell$ , então a energia cinética do sistema

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i \\ &= \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

### 8.3.7 Miscelânea de Exemplos

**Exemplo 8.3.14** *Uma chapa de densidade  $\delta$  tem a forma da região do plano  $xy$  que está entre a parábola  $y = x^2$  e a reta  $y = x + 2$ . Calcular o momento de inércia da chapa em relação ao eixo  $y$ .*

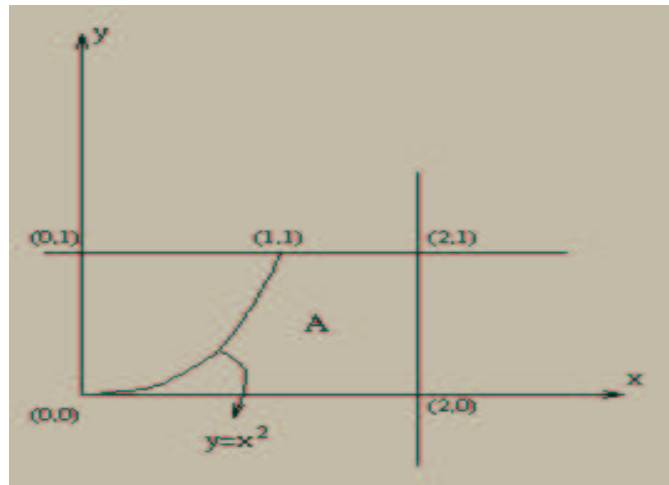




**Solução:** Primeiramente devemos encontrar os pontos de intersecção da reta e da parábola. Note que nesses pontos devemos ter  $y = x^2 = x + 2$  e portanto  $(x, y) = (-1, 1)$  ou  $(x, y) = (2, 4)$ . Segue que

$$I_y = \delta \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} x^2 dy = \frac{63}{20} \delta$$

**Exemplo 8.3.15** Determinar o centro de massa de uma placa delgada, de espessura e densidade uniformes, que está sobre a região  $A$  do plano  $xy$  entre as retas  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$  e a parábola  $y = x^2$ .



**Solução:** Cálculo da massa

$$M = \int_A \rho dA = \rho \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 dx = \rho \int_0^1 (2 - \sqrt{y}) dy = \frac{4}{3} \rho.$$

Cálculo do momento

$$M_y = \int_A x \rho dA = \rho \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 x dx = \rho \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{\sqrt{y}}^2 dy = \rho \int_0^1 (2 - \frac{y}{2}) dy = \frac{7}{4} \rho.$$

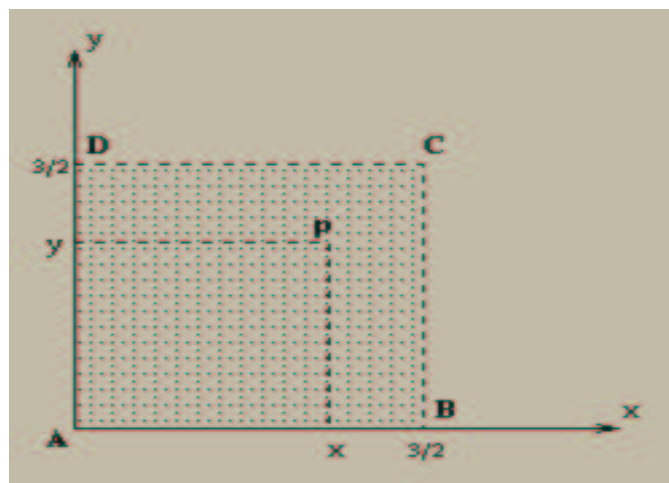
Com isto podemos calcular a coordenada  $\bar{x}$  do centro de massa da seguinte forma

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{21}{16}.$$

De forma semelhante obtemos a coordenada  $\bar{y}$  do centro de massa

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{9}{20}.$$

**Exemplo 8.3.16** Ache o centro de massa de uma lâmina quadrada  $ABCD$  de lado  $3/2$  sabendo que a densidade de qualquer ponto  $P$  é o produto das distâncias de  $P$  a  $AB$  e a  $AD$ .



**Solução:** Vamos calcular a massa e os momentos relativos aos eixos  $x$  e  $y$  da lâmina. Note que  $\rho(x, y) = xy$ , então

$$M = \int_0^{3/2} dx \int_0^{3/2} xy dy = 81/64,$$

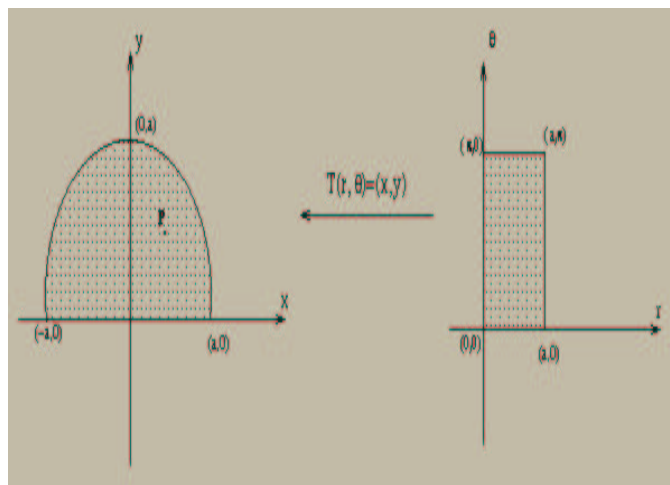
$$M_x = \int_0^{3/2} \int_0^{3/2} xy^2 dy = 81/64$$

e

$$M_y = \int_0^{3/2} \int_0^{3/2} x^2 y dy = 81/64.$$

Segue que as coordenadas do centro de massa da lâmina são  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ .

**Exemplo 8.3.17** Ache o centro de massa de uma lâmina semicircular, sendo a densidade de qualquer ponto proporcional à distância de  $P$  ao centro do círculo.



**Solução:** A lâmina ocupa a região  $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a, x \geq 0\}$  que em coordenadas polares é  $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ . Note que  $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ ; ou seja,  $\rho(r, \theta) = kr$ . Com isto calculamos a massa e os momentos relativos aos eixos coordenados da lâmina,

$$M = \int_{C=T(R)} \rho(x, y) dx dy = \int_R kr^2 dr d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_0^a kr^2 dr = \frac{\pi k a^3}{3}$$

$$M_x = \int_{C=T(R)} y \rho(x, y) dx dy = \int_R kr^3 \sin\theta dr d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_0^a kr^3 \sin\theta dr = \frac{k a^4}{2}$$

e

$$M_y = \int_{C=T(R)} x \rho(x, y) dx dy = \int_R kr^3 \cos\theta dr d\theta = k \int_0^\pi r^3 \int_0^\pi \cos\theta d\theta = 0.$$

Segue que as coordenadas do centro de massa são  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{3a}{2\pi})$ .

**Exercício 8.3.1** Encontre o centro de massa da lâmina que tem a forma da região limitada pelas retas  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $x + y = a$  e que tem densidade  $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ .

**Exercício 8.3.2** Calcular o momento relativo ao eixo  $x$  da lâmina que tem o formato da região limitada pelas parábolas  $x = y^2$  e  $x = 2y - y^2$ , sendo a densidade  $\rho(x, y) = y + 1$ .

### 8.3.8 Aplicações no Espaço $\mathbb{R}^3$

As idéias vistas até agora nas aplicações podem ser generalizadas para três dimensões.

#### Massa e Momento Linear

Se um sólido tem o formato de uma região  $Q$  do  $\mathbb{R}^3$  se a densidade no ponto  $(x, y, z)$  é  $\rho(x, y, z)$ , então de forma análoga ao visto anteriormente

$$M = \int_Q \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Se temos uma partícula pontual de massa  $m$  localizada no ponto  $(x, y, z)$  do espaço, então seus momentos relativos aos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  são definidos como  $mz$ ,  $my$  e  $mx$ , respectivamente. Utilizando os mesmos argumentos já vistos definimos os momentos de um sólido em relação aos planos coordenados como sendo:

$$M_{xy} = \int_Q z \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xz} = \int_Q y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

e

$$M_{yz} = \int_Q x \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

o centro de massa é o ponto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , onde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Quando a densidade é constante; isto é,  $\rho(x, y, z) = c$ , então o centro de massa é dito *centróide*.

#### Momento de Inércia

Se uma partícula de massa  $m$  está no ponto  $(x, y, z)$ , então seu momento de inércia em relação ao eixo  $z$  é  $m(x^2 + y^2)$ .

Logo somos levados a definir

$$I_x = \int_Q (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \int_Q (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

e

$$I_z = \int_Q (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

**Exemplo 8.3.18** Considere o sólido  $S$  limitado pelo cone  $z^2 = x^2 + y^2$  e pelo plano  $z = 1$  cuja densidade é  $\rho(x, y, z) = 1$ . Ache o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  do sólido  $S$ .

**Solução:** Note que utilizando coordenadas cilíndricas temos:

$$M = \int_S dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r dz = \frac{\pi}{3}$$

e

$$M_{xy} = \int_S z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 z r dz = \frac{\pi}{4}.$$

Segue que  $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{3}{4}$ . Por simetria  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Finalmente

$$I_z = \int_S (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r^3 dz = \frac{\pi}{10}.$$



# Capítulo 9

## Apêndice

### 9.1 Substituição e Integração por Partes (Cálculo I)

Dois dos teoremas mais importantes do cálculo diferencial são a regra da cadeia e a regra do produto, que passamos a enunciar:

**Teorema 9.1.1 (Regra da Cadeia)** *Se  $I, J$  são intervalos abertos e  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow J$  funções de classe  $C^1$  temos que*

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \forall x \in I.$$

**Teorema 9.1.2 (Regra do Produto)** *Se  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$  temos que*

$$\frac{d}{dx}(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Estes teoremas, juntamente com o Teorema Fundamental do Cálculo, dão origem a dois teoremas fundamentais do cálculo integral. A integração por partes e o método da substituição, são sem dúvida, os resultados mais importantes no que se refere ao cálculo de integrais de funções de uma variável. No que se segue, vamos obter estes teoremas a partir da regra do produto e da regra da cadeia, respectivamente.

**Teorema 9.1.3 (Método da Substituição)** *Sejam  $I = [a, b]$ ,  $J$  intervalos,  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $\phi : I \rightarrow J$  uma função continuamente diferenciável. Então,*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(s))\phi'(s)ds.$$

**Prova:** Seja  $c \in J$  e  $V(x) = \int_c^x f(\theta)d\theta$ . Então da regra da cadeia

$$\frac{d}{ds}(V \circ \phi)(s) = f(\phi(s))\phi'(s).$$

O resultado agora segue do Teorema Fundamental do Cálculo. ■

**Observação:** Note que não é necessário assumir que a função  $\phi$  seja uma mudança de variáveis ( $\phi'(s) \neq 0, \forall s \in [a, b]$ ).

**Teorema 9.1.4** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções continuamente diferenciáveis. Então*

$$\int_a^b f(s)g'(s)ds = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(s)g(s)ds.$$

**Prova:** Da regra do produto temos que

$$\frac{d}{ds}(fg)(s) = f'(s)g(s) + f(s)g'(s).$$

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(s)g(s)ds + \int_a^b f(s)g'(s)ds$$

e o resultado segue. ■



# Capítulo 10

## Campos Vetoriais

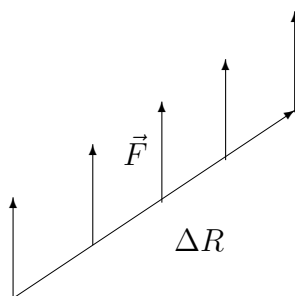
### 10.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos um conceito que é de grande utilidade em vários problemas relacionados a Física e Engenharia.

Para motivarmos a introdução de tal objeto lembremos, da Física elementar, que se deslocarmos uma partícula ao longo de um caminho reto com uma força  $\vec{F}$  (constante) o trabalho realizado por essa força é o produto da componente se  $F$  na direção e sentido do movimento, pela distância percorrida pela partícula, ou ainda,

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{R}$$

onde  $\Delta\vec{R}$  é o vetor que vai da posição inicial da partícula a sua posição final.

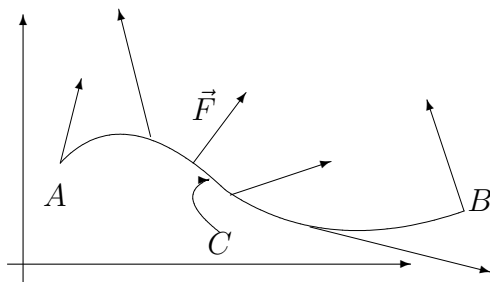


Agora suponha que a força não seja constante, isto é, seja uma função vetorial, que varia de ponto a ponto em uma região do plano, como por exemplo

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}.$$

Suponha que seta força desloque uma partícula ao longo de uma curva suave  $C$  do plano, onde  $C$  tem equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$



Pergunta-se: qual o trabalho realizado por essa força quando a partícula move-se ao longo da curva do ponto inicial  $A = (x(t_1), y(t_1))$  até o ponto final  $B = (x(t_2), y(t_2))$ ?

Antes de mais nada, observemos que a função  $F$  a valores vetoriais será denominada campo de forças ou campo vetorial. Em geral, um campo vetorial (ou campo de forças) no plano é uma função que associa a cada ponto  $(x, y)$  de uma região do plano um vetor. Uma função que cujos valores são números será dita campo escalar.

Todo campo escalar  $f = f(x, y)$  determinada um correspondente campo vetorial

$$\nabla f(x, y) = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

denominado campo gradiente. Observemos que alguns campos vetoriais são campos gradientes, mas em geral não são, isto é, existem campos vetoriais  $F(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$  tais que não existe  $f = f(x, y)$  tal que  $\nabla f = F$  (tente encontrar uma tal campo).

Retornemos ao problema inicial de encontrar o trabalho realizado pela força  $F(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$  ao longo da curva suave  $C$ . Se a curva for um segmento de reta horizontal, isto é,  $C = \{(x_0, y_0) + t(x_1, y_0) : 0 \leq t \leq 1\}$  então, do Cálculo 1, sabemos que o trabalho será

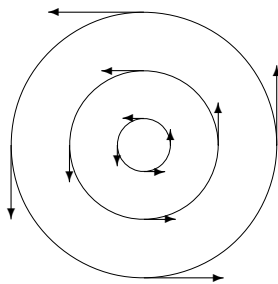
$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0) dx = \int_C F dR$$

onde  $dR$  é vetor elemento deslocamento (no caso acima um escalar, pois o deslocamento só ocorre na direção do eixo dos  $x$ 's). Logo somos levados, em geral, a trabalhar com integrais de funções de mais de uma variável ao longo de curvas. Isto na verdade é o objetivo desta seção.

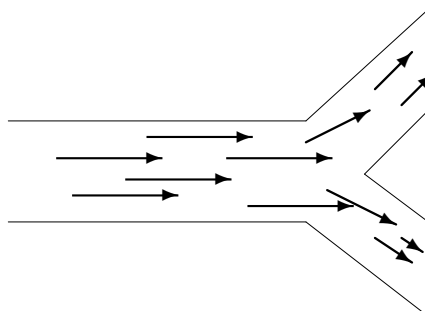
## 10.2 Exemplos

Começaremos com alguns exemplos de campos vetoriais:

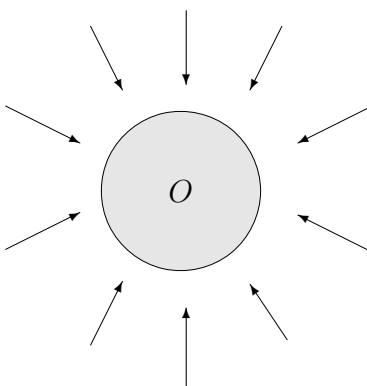
1 Campo de velocidades determinado pela rotação em torno de um ponto fixo.



2 Campo de velocidades determinado pelo movimento de um fluido.



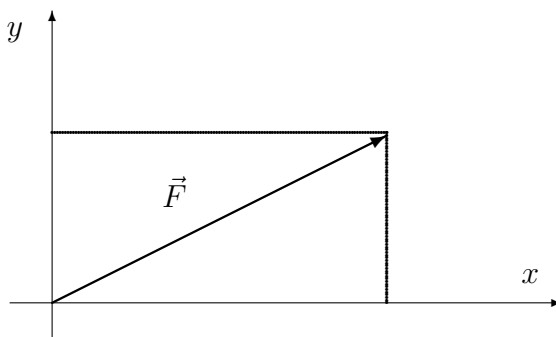
3 Campo gravitacional.



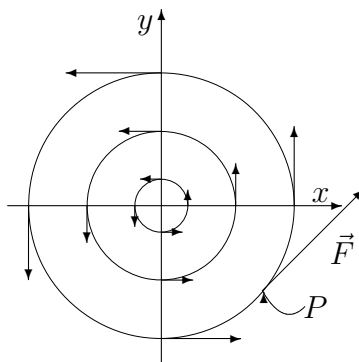
Quando um campo vetorial não depende do tempo diremos que ele é um campo estacionário.

**Exemplos:**

1.  $F(x, y) = 2x\vec{i} + y\vec{j} = (2x, y)$



2. O campo vetorial  $F(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j} = (-y, x)$  geometricamente é da seguinte forma:



De fato pois,  $\langle F(P), \vec{OP} \rangle = \langle -y, x \rangle, (x, y) \rangle = 0$ , logo  $F(P) \perp \vec{OP}$ .

3. Dado  $c < 0$ , o campo vetorial

$$T(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z), \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

é um campo vetorial paralelo a  $(x, y, z)$ , com sentido contrário ao de  $(x, y, z)$  e

$$\|T(x, y, z)\| = \frac{|c|}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{|c|}{x^2 + y^2 + z^2},$$

isto é,  $\|T(x, y, z)\|$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância de  $(x, y, z)$  a  $(0, 0, 0)$ .

Estes tipos de campos aparecem em muitas situações, como por exemplo:

Considere uma partícula de massa  $M$  na origem. A força de atração gravitacional que age sobre uma partícula de massa unitária colocada em  $P = (x, y, z)$  é de módulo igual a

$$\frac{gM}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Logo

$$F(x, y, z) = \frac{gM}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{-(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{-gM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z).$$

Um tipo importante de campo vetorial é o campo proveniente de uma função escalar, isto é, o campo gradiente. Se  $f = f(x, y, z)$  então o campo gradiente de  $f$  é dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}.$$

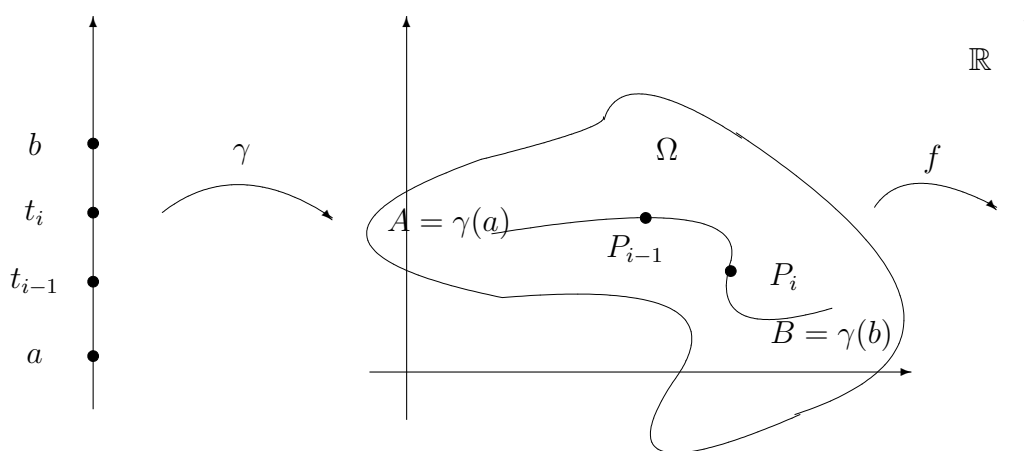
# Capítulo 11

## Integrais de Linha

### 11.1 Introdução

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos um caminho suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , isto é,  $\gamma'(t)$  é contínuo e  $\gamma'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ .

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $\gamma \subset \Omega$ , isto é,  $\gamma(t) \in \Omega$ , para todo  $t \in [a, b]$ ; neste caso diremos que  $\gamma$  é um caminho suave em  $\Omega$ .



Sejam  $A = \gamma(a)$ ,  $B = \gamma(b)$  e  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ .

Esta partição determina uma partição do arco  $\widehat{AB}$  em arcos  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  onde  $P_i = \gamma(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Defina  $\Delta S_i =$  comprimento do arco  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  e  $\|\Delta\| = \max_{i=1, \dots, n} \Delta S_i$ .

Em cada arco  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  escolhamos um ponto  $(x_i^*, y_i^*)$  e consideremos a soma  $\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$ .

**Definição 11.1.1** A integral curvilínea de  $f$  sobre  $\gamma$  de  $A$  até  $B$  é definida (e denotada) por :

$$\int_{\gamma} f ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$$

desde que o limite exista independente da escolha do ponto  $(x_i^*, y_i^*) \in \widehat{P_{i-1}P_i}$

**Observação 11.1.1** A integral acima também é conhecida como integral de linha relativa ao comprimento de arco.

Uma condição suficiente para garantir a existência da integral curvilínea acima é dada no seguinte resultado.

**Teorema 11.1.1** Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $\Omega$ , então existe  $\int_{\gamma} f(x, y) ds$  e

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt.$$

A demonstração desde resultado será omitida.

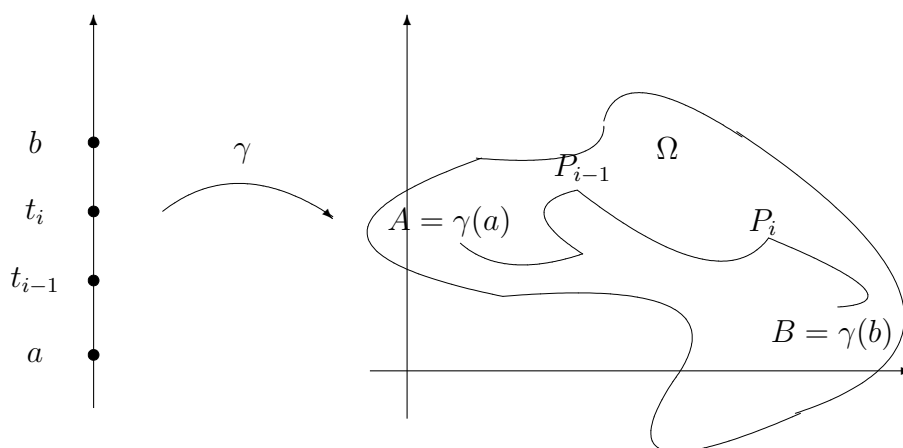
Observemos que definindo-se  $\vec{r}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j}$  então  $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}$ . Logo, a expressão acima tornar-se-á

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

No caso particular de  $f(x, y) = 1, \forall x \in \Omega$  temos

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \text{comprimento de } \gamma.$$

Diremos que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua é suave por partes se existe uma partição de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , tal que a restrição de  $\gamma$  a cada um dos subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$  é um caminho suave.



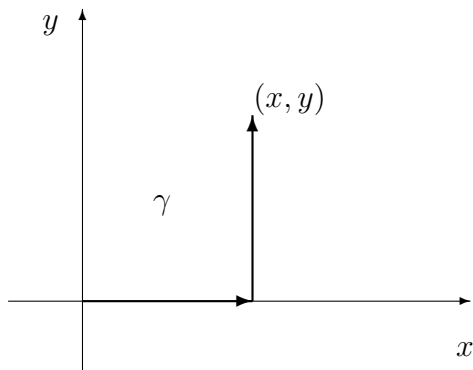
Deste modo podemos definir a integral curvilínea de  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  sobre o caminho suave por partes  $\gamma \subseteq \Omega$  como sendo a soma das integrais curvilíneas de  $f$  às restrições de  $\gamma$  a cada um dos subintervalos onde ela é suave, isto é

$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f ds$$

onde  $\gamma_i$  é o caminho obtido da restrição de do caminho  $\gamma$  ao subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Podemos dar a seguinte interpretação geométrica para a integral curvilínea: suponha que  $f$  é contínua e não negativa em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ .

A área do retângulo tendo como base  $P_{i-1}$  e  $P_i$  e altura igual a  $f(x_i^*, y_i^*)$  como na figura abaixo é aproximadamente igual a  $f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i$ . Logo é natural pensarmos que  $\int_{\gamma} f ds$  como sendo a área da superfície que tem como base curva  $\gamma$  e altura determinada pelo gráfico da função  $f$ .



## 11.2 Aplicação

Olhemos  $\gamma$  como um fio delgado e  $f(x, y)$  como sendo a densidade em  $(x, y)$ . Com isto temos que  $f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i \simeq$  massa de  $\widehat{P_{i-1}P_i} = \Delta m_i$ .

Mas  $\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$  é aproximadamente a massa total do fio. Logo  $M = \int_{\gamma} f ds$  nos dá a massa total no fio.

**Exemplo 11.2.1** Calcular  $\int_{\gamma} f(x, y) ds$  onde  $f(x, y) = x^3 + y$  e  $\gamma$  dada por  $\gamma(t) = (3t, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Neste caso  $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = (3t, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y) ds &= \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt = \int_0^1 (27t^3 + t^3) \sqrt{9 + 9t^4} dt \\ &= \int_0^1 84t^3 \sqrt{1 + t^4} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + t^4 \longrightarrow du = 4t^3 dt \\ t = 0 \longrightarrow u = 1 \\ t = 1 \longrightarrow u = 2 \end{array} \right\} = \int_1^2 21\sqrt{u} du = 14(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

**Exemplo 11.2.2** Calcular a área da superfície vertical delimitada superiormente pelo gráfico do parabolóide  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e inferiormente pelo arco do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Se considerarmos  $\gamma : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  como sendo a curva suave  $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$  então a área  $A$  da superfície descrita acima será dada por

$$A = \int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + 2 \sin^2(t)) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2 t) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) \right] dt = \frac{3\pi}{4} \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

### 11.3 Integral de linha de um campo vetorial

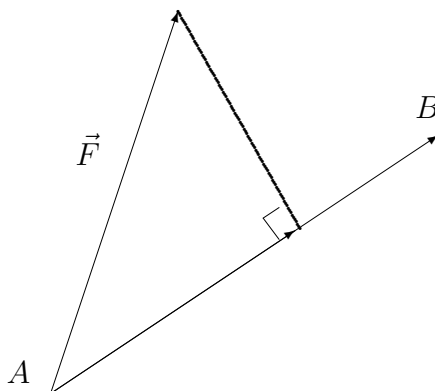
Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$  uma curva suave dada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$  e

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \vec{i} + F_2(x, y, z) \vec{j} + F_3(x, y, z) \vec{k}$$

um campo contínuo definido  $\Omega$ .

Suponhamos que  $\gamma$  seja trajetória de uma partícula sujeita ao campo de forças  $\vec{F}$ .

Se  $\vec{F}$  é constante e  $\gamma$  é um segmento de reta, temos que Trabalho =  $\vec{F} \cdot$ vetor deslocamento



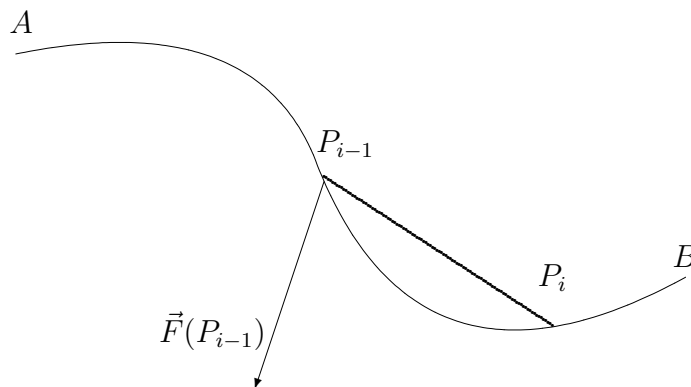
Se  $\vec{F}$  não for constante ou  $\gamma$  não for uma reta, particionamos  $\gamma$  num número finito de arcos, isto é, considere uma partição  $P$ , de  $[a, b]$   $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e tome  $P_i = \gamma(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Se  $\|P\|$  é pequeno, o trabalho realizado por  $\vec{F}$  ao longo do arco  $\widehat{P_{i-1}P_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  pode ser aproximado por

$$\Delta w_i = \vec{F}(P_{i-1}) \cdot (P_i - P_{i-1}) = \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})).$$

Mas,  $\gamma(t_{i-1}) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) = \gamma'(\bar{t}_i) \Delta_i t$ , para algum  $\bar{t}_i$  entre  $t_{i-1}$  e  $t_i$ . Desta forma,

$$\Delta w_i = \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(\bar{t}_i) \Delta_i t.$$





O trabalho  $W$  realizado por  $\vec{F}$  ao longo de  $\gamma$  é, por definição,

$$W = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta w_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(\bar{t}_i) \Delta_i t.$$

Embora a soma acima não seja uma soma de Riemann, pode ser mostrado que o limite exista e é igual a

$$W = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

que será denotada por

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e chamada de *integral de linha de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$* .

Note também que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t))(x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}) dt \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \\ &= \int_a^b [F_1(\gamma(t))x'(t) + F_2(\gamma(t))y'(t) + F_3(\gamma(t))z'(t)] dt \\ &= \int_a^b [(F_1 \circ \gamma)x' + (F_2 \circ \gamma)y' + (F_3 \circ \gamma)z'] dt \end{aligned}$$

A expressão acima sugere a seguinte notação:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

**Exercício 11.3.1** Calcule

$$\int_{\gamma} 2x dx + dy + dz,$$

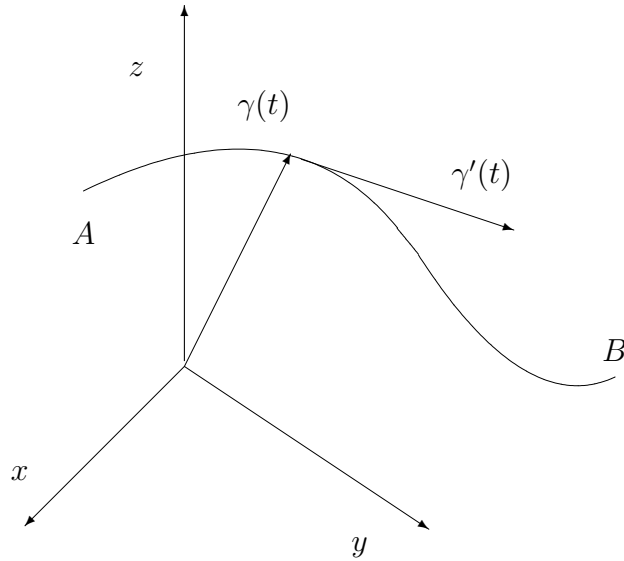
onde  $\gamma$  é a intersecção do cilindro  $y = x^2$ , do parabolóide  $z = 2 - x^2 - y^2$  contida no octante  $x, y, z \geq 0$ . O caminho deve ser percorrido de  $(1, 1, 0)$  a  $(0, 0, 2)$ .

**Resolução:** Uma parametrização de  $\gamma$  é

$$\gamma(t) = (t, t^2, 2 - t^2 - t^4), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Temos

$$\int_{\gamma} 2x dx + dy + dz = \int_0^1 [2t + 2t - 2t - 4t^3] dt = \int_0^1 [2t - 4t^3] dt = t^2 - t^4 \Big|_0^1 = -3.$$



Vejam agora uma relação entre a integral de linha de um campo vetorial e a integral de linha com relação ao comprimento de arco.

Dada uma curva suave  $\gamma$ , considere  $\vec{T}(P)$  o vetor unitário tangente a  $\gamma$  em  $P$ . Lembre que estamos assumindo que  $\gamma'(t) \neq 0$ .

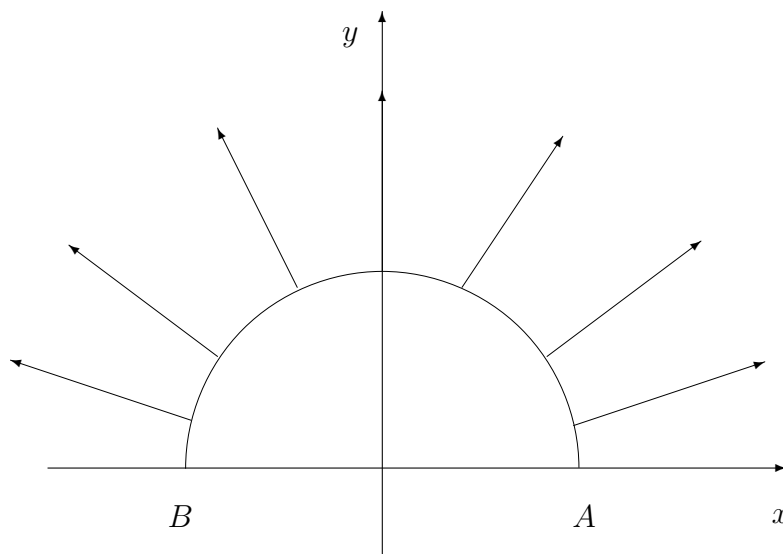
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(\gamma(t)) ds = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \end{aligned}$$

Resumindo,

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Note que  $\vec{F} \cdot \vec{T}$  é a componente tangencial de  $\vec{F}$  com relação à curva.

**Exercício 11.3.2** Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  onde  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  e  $\gamma : t \in [0, \pi] \rightarrow (\cos t, \sin t)$



**Resolução:** Vale observar que deveremos ter a integral igual a zero.

De fato,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) dt = \int_0^{\pi} 0 dt = 0.$$

**Exercício 11.3.3** Calcular o trabalho realizado por  $\vec{F}$  ao longo do caminho  $\gamma$ , onde  $\vec{F}(x, y) = (x, y)$  e  $\gamma(t) = (t, |t|)$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

**Resolução:**

Neste caso temos:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{-1}^0 \vec{F}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 (t, |t|)(1, -1) dt + \int_0^1 (t, |t|)(1, 1) dt = \int_{-1}^0 2t dt + \int_0^1 2t dt = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

**Teorema 11.3.1** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dado por  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  um caminho suave,  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma mudança de parâmetros (isto é,  $h$  é invertível) e  $\lambda = \gamma \circ h$  reparametrização de  $\gamma$ . Então

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ se } h'(\tau) > 0 \text{ ou}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ se } h'(\tau) < 0.$$

**Prova** Suponhamos que  $h'(\tau) < 0$ . Neste caso,  $h(c) = b$  e  $h(d) = a$ . Pela regra da cadeia,  $\lambda'(\tau) = \gamma'(h(\tau))h'(\tau)$ . Fazendo a mudança  $t = h(\tau)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_d^c \vec{F}(\gamma(h(\tau))) \cdot \gamma'(h(\tau)) h'(\tau) d\tau \\ &= - \int_c^d \vec{F}(\gamma(h(\tau))) \cdot \gamma'(h(\tau)) h'(\tau) d\tau = \int_c^d \vec{F}(\lambda(\tau)) \cdot \lambda'(\tau) d\tau = - \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

O caso  $h'(\tau)$  é semelhante.

**Observação 11.3.1** Note que a integral  $\int_{\gamma} f ds$  independe do sentido de percurso.

De fato, com a notação do teorema acima, no caso  $h'(\tau) < 0$ , temos

$$\|\lambda'(\tau)\| = \|\gamma'(h(\tau))\| |h'(\tau)| = -\|\gamma'(\tau)\| h'(\tau)$$

e, daí,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_d^c f(\gamma(h(\tau))) \|\gamma'(h(\tau))\| |h'(\tau)| d\tau \\ &= - \int_c^d f(\gamma(h(\tau))) \|\gamma'(h(\tau))\| |h'(\tau)| d\tau = \int_c^d f(\lambda(\tau)) \|\lambda'(\tau)\| d\tau = \int_{\lambda} f ds. \end{aligned}$$

**Exercício 11.3.4** Calcular  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  onde  $\vec{F}(x, y) = (x^2y, x^2y)$  nos seguintes casos:

- (a)  $\gamma$  é o segmento de reta que liga  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .
- (b)  $\gamma$  é a parábola  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
- (c)  $\gamma$  é o segmento de reta que liga  $(1, 1)$  a  $(0, 0)$ .

**Resolução:**

(a) Uma parametrização da curva é  $\gamma(t) = (t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

$$\text{Assim, } \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^3, t^3) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 2t^3 dt = \frac{1}{2}.$$

(b) Uma parametrização da curva é  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

$$\text{Assim, } \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^4, t^4) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^5) dt = \frac{8}{15}.$$

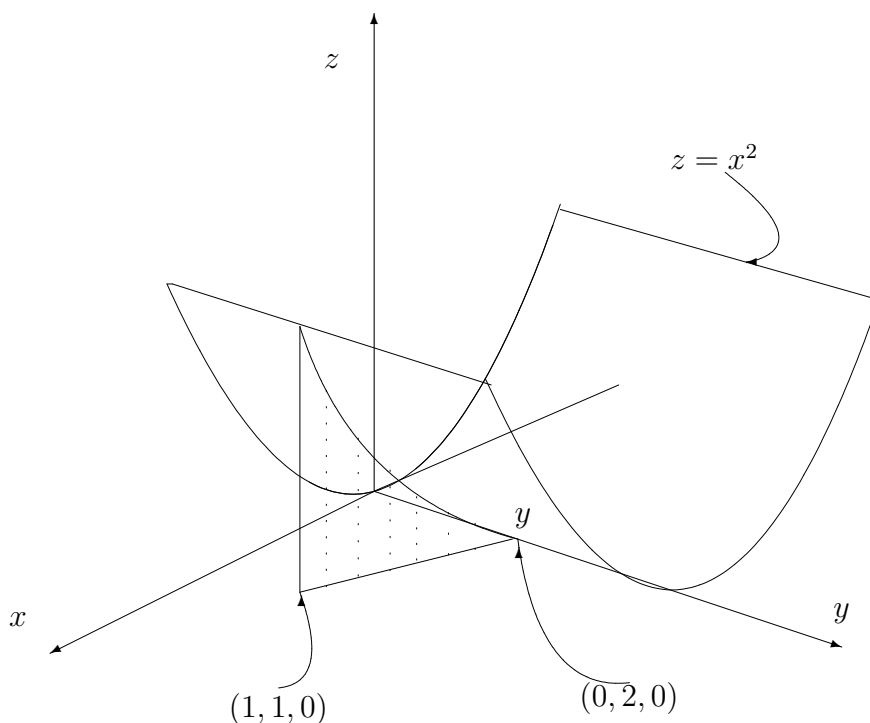
Observe que os valores das integrais ao longo das duas curvas acima que ligam  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$  são diferentes.

(c) Uma parametrização da curva é  $\gamma(t) = (1 - t, 1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 ((1-t)^3, (1-t)^3) \cdot (-1, -1) dt = \\ &= \int_0^1 -2(1-t)^3 dt = \left. \frac{(1-t)^4}{2} \right|_0^1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) Calcular a área da região  $\mathcal{R}$  abaixo.

**Resolução:**

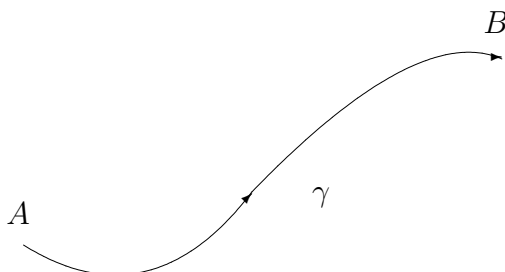
Neste caso temos  $z = f(x, y) = x^2$  e  $\gamma(t) = (t, 2 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Assim, a área da região  $\mathcal{R}$  será dada por:  $\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_0^1 t^2 \sqrt{2} = \sqrt{2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ u.a.}$

## 11.4 Campos conservativos e integrais de linha

**Proposição 11.4.1** *Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  em  $\Omega$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ ,  $t \in [a, b]$  uma curva suave por partes tal que  $\gamma(a) = A$  e  $\gamma(b) = B$ . Então, se  $\vec{F} = \nabla f$ , temos*

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A).$$



**Prova:** (i) Se  $\gamma$  é suave então

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Pela regra da cadeia temos

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t))\gamma'_2(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\gamma'_n(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

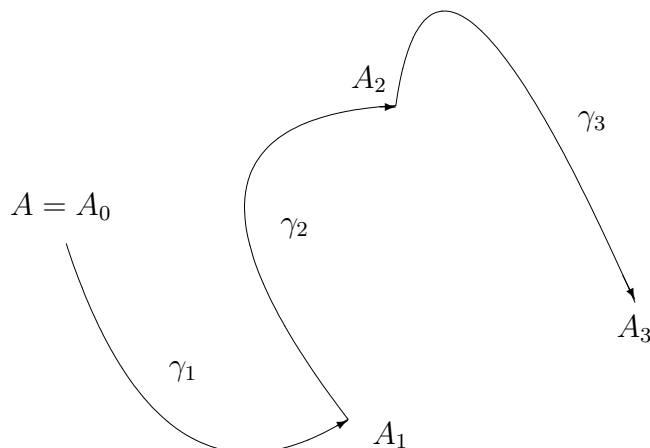
Do Teorema Fundamental do Cálculo segue que:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A).$$

(ii) Se  $\gamma$  é suave por partes escrevemos  $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_m$  onde  $\gamma_i$  é suave,  $i = 1, \dots, m$  e liga  $A_i$  a  $A_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , com  $A_0 = A$  e  $A_m = B$ .

Usando (i) em cada  $\gamma_i$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \nabla f \cdot d\vec{r} \\ &= f(A_1) - f(A_0) + f(A_2) - f(A_1) + \cdots + f(A_m) - f(A_{m-1}) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$



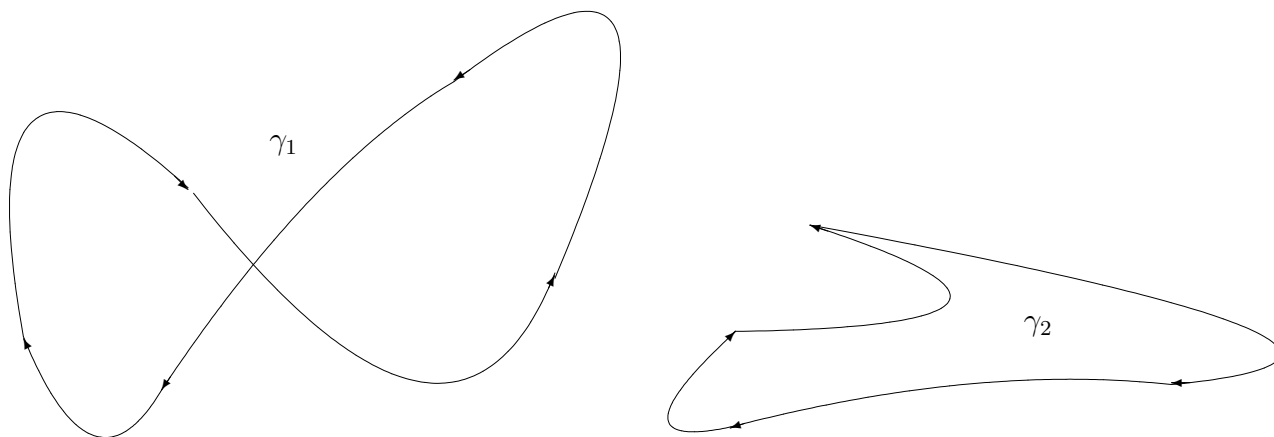
**Definição 11.4.1** Se  $\vec{F}$  é um campo vetorial contínuo definido em  $\Omega$ , dizemos que a integral de  $\vec{F}$  independe do caminho se para quaisquer curvas suaves por partes  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$  tais que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$  tem-se

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

**Observação 11.4.1** A proposição 11.4.1 afirma que a integral de linha de um campo gradiente independe do caminho, isto é, só depende dos pontos extremos.

**Definição 11.4.2** Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita fechada se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Neste caso a integral sobre  $\gamma$  será indicada por  $\oint_{\gamma}$ .

**Definição 11.4.3** Se  $\vec{F}$  é um campo vetorial contínuo definido em  $\Omega$ , dizemos que a integral de  $\vec{F}$  ao longo de qualquer curva fechada é zero se  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  para toda curva fechada suave por partes,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ .



Exemplos de curvas fechadas

**Corolário 11.4.1** Se  $\vec{F} = \nabla f$  onde  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é suave e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é suave por partes e fechada então  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ .

**Prova:** Como  $\vec{F} = \nabla f$  e  $f(B) = f(A)$ , segue da proposição 11.4.1 que  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ .

**Proposição 11.4.2** Seja  $\vec{F}$  um campo contínuo definido em  $\Omega$ . A fim de que a integral de  $\vec{F}$  ao longo de toda curva fechada seja zero é necessário e suficiente que a integral de  $\vec{F}$  seja independente do caminho.

**Prova:** Suponhamos que a integral de  $\vec{F}$  ao longo de qualquer curva fechada seja zero. Sejam  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$  curvas suaves por partes tais que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ . Defina  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t - a), & \text{se } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ \gamma_2(a + 2b - 2t), & \text{se } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

Note que  $\gamma$  é fechada e suave por partes. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \vec{F}(\gamma_1(2t - a)) \cdot (2\gamma_1'(2t - a)) dt \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \vec{F}(\gamma_2(a + 2b - 2t)) \cdot (-2\gamma_2'(2a + b - 2t)) dt. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Usando a mudança  $u = 2t - a$  temos

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \vec{F}(\gamma_1(2t - a)) \cdot (2\gamma_1'(2t - a)) dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma_1(u)) \cdot \gamma_1'(u) du = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Usando a mudança  $v = a + 2b - 2t$  temos

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b \vec{F}(\gamma_2(a + 2b - 2t)) \cdot (-2\gamma_2'(2a + b - 2t)) dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma_2(v)) \cdot \gamma_2'(v) dv = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Como  $\gamma$  é fechada, de 11.1 obtemos

$$0 = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

isto é,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Suponhamos agora que a integral de  $\vec{F}$  seja independente do caminho. Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva fechada suave por partes e defina  $\lambda : [a, b] \rightarrow \Omega$  por  $\lambda(t) = \gamma(a + b - t)$ . Note que como  $\gamma$  é fechada, temos  $\gamma(a) = \gamma(b) = \lambda(a) = \lambda(b)$ . Como a integral independe do caminho,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

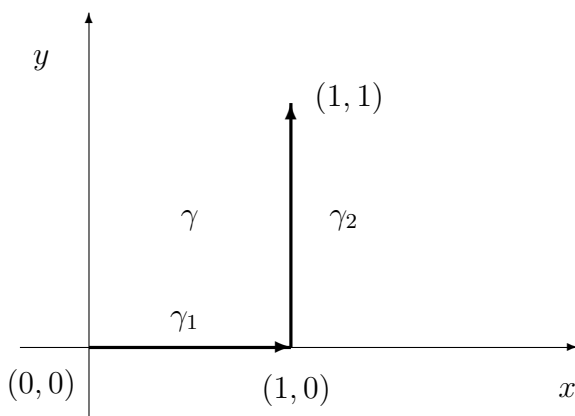
Agora, usando  $t = a + b - u$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_b^a \vec{F}(\gamma(a + b - u)) \cdot \gamma'(a + b - u) du \\ &= \int_b^a \vec{F}(\lambda(u)) \cdot \lambda'(u) du = - \int_a^b \vec{F}(\lambda(u)) \cdot \lambda'(u) du = - \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ .

**Exemplo 11.4.1** Calcular  $\int_{\gamma} x dx + y dy$  em cada um dos itens abaixo:

- (i)  $\gamma$  é o segmento de reta que liga  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .
- (ii)  $\gamma$  é a parábola  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
- (iii)  $\gamma$  é a curva indicada abaixo.
- (iv)  $\gamma$  é a circunferência  $(\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .





**Resolução:** Temos que

$$\int_{\gamma} x dx + y dy = \int_{\gamma_1} x dx + y dy + \int_{\gamma_2} x dx + y dy,$$

onde

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad \gamma_2(t) = (1, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim,

$$\int_{\gamma} x dx + \int_{\gamma} y dy = \int_0^1 (t \cdot 1 + 0 \cdot 0) dt + \int_0^1 (1 \cdot 0 + t \cdot 1) dt = 1.$$

Por outro lado, é fácil verificar que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

é tal que  $\nabla f(x, y) = (x, y)$ . Logo

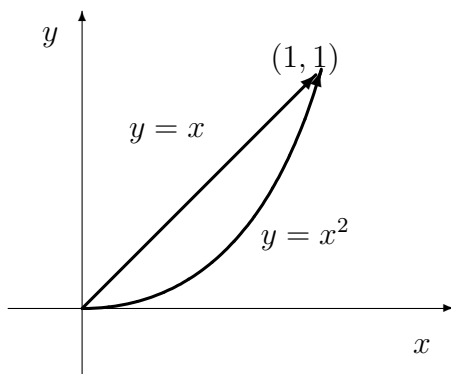
$$\int_{\gamma} x dx + \int_{\gamma} y dy = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r}.$$

Da proposição 11.4.1 segue que (i), (ii) e (iii) são iguais a  $f(1, 1) - f(0, 0) = 1$ . Quanto a (iv) o resultado é 0 pois a curva é fechada.

Nem todas as integrais de linha têm esta propriedade, como por exemplo:

$$\int_{\gamma} (xy, xy) \cdot d\vec{r} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \int_{\gamma'} (xy, xy) \cdot d\vec{r} = \frac{13}{20},$$

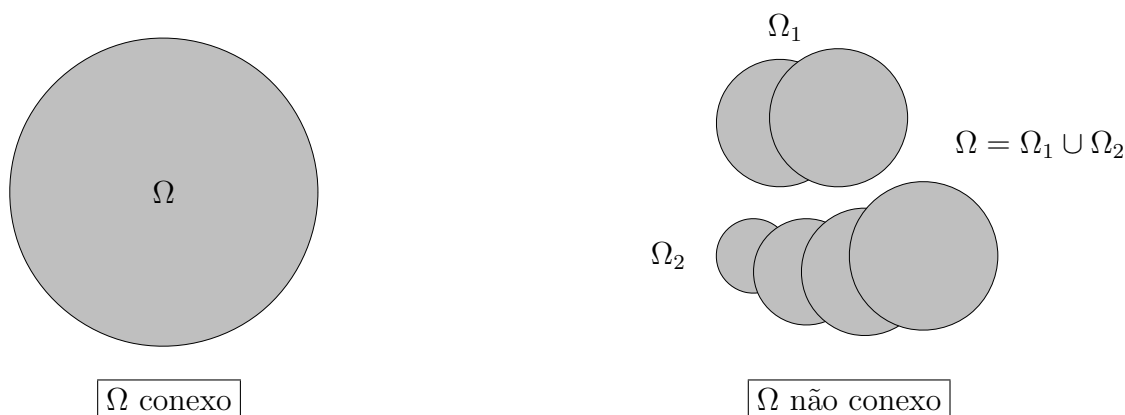
onde  $\gamma$  e  $\gamma'$  são os segmentos de reta e de parábola abaixo, respectivamente.



**Definição 11.4.4** Diremos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é conexo (por caminhos) se quaisquer dois pontos de  $\Omega$  podem ser ligados por um caminho suave, inteiramente contido em  $\Omega$ . Diremos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é uma região se for aberto e conexo.

**Exemplo 11.4.2** Nos casos abaixo, 1) é uma região (pois é aberto e conexo) e 2) não é região (pois não é conexo).

- 1)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ .
- 2)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 > 2\}$ .



**Teorema 11.4.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  uma região e  $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo. Se a integral de  $\vec{F}$  independe do caminho, então fixado  $A \in \Omega$ , a função dada por*

$$f(X) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde  $\gamma$  é uma curva suave por partes cuja imagem está contida em  $\Omega$  e liga  $A$  a  $X \in \Omega$ , é de classe  $C^1$  e satisfaz  $\nabla f = \vec{F}$  em  $\Omega$ .

**Prova:** Como a integral independe do caminho, usaremos a notação

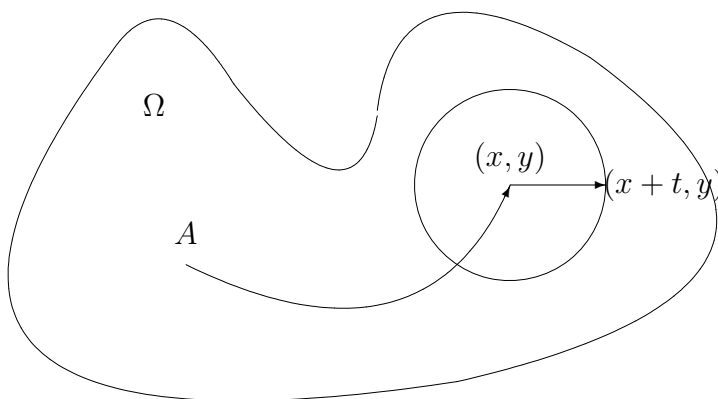
$$f(X) = \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Para simplificar vamos fazer a prova para  $n = 2$ .

Precisamos mostrar que  $\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y)$ . Colocando  $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ , precisamos mostrar que

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Escolhemos curva suave por partes ligando  $A$  a  $X = (x, y)$  contida em  $\Omega$  (que existe pois  $\Omega$  é conexo) e a estendemos até o ponto  $(x + t, y)$  através de um segmento horizontal (podemos fazer isto pois  $\Omega$  é aberto).



Assim temos

$$\begin{aligned} f(x+t, y) - f(x, y) &= \int_A^{(x+t, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_A^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(x, y)}^{(x+t, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^t \vec{F}(x+\tau, y) \cdot (1, 0) d\tau = \int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left( \int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau \right) \Big|_{t=0} = F_1(x, y), \end{aligned}$$

onde usamos nas identidades acima a definição de derivada de função de uma variável e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y).$$

Portanto,

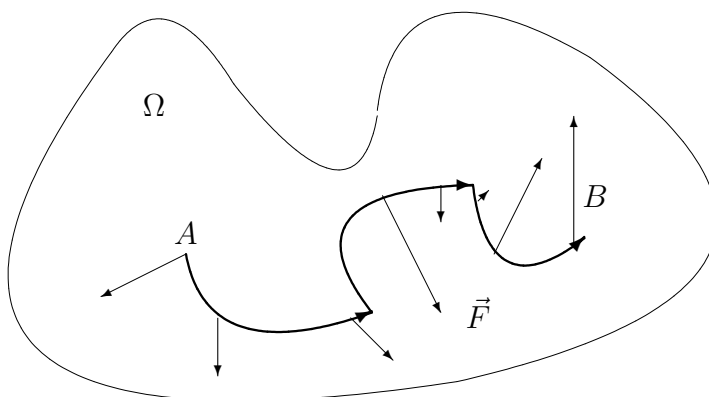
$$\nabla f(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \vec{F}(x, y).$$

**Definição 11.4.5** *Um campo vetorial gradiente também é chamado de campo conservativo. Se  $\vec{F} = \nabla f$  a função  $f$  é chamada de um potencial de  $\vec{F}$ .*

**Observação 11.4.2** *Segue das proposições 11.4.1, 11.4.2 e do teorema acima que se  $\Omega$  é uma região e  $\vec{F}$  é um campo contínuo definido em  $\Omega$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $\vec{F}$  é conservativo;
2. a integral de  $\vec{F}$  independe do caminho;
3. a integral de  $\vec{F}$  ao longo de qualquer curva fechada é zero.

A motivação para chamarmos um campo gradiente por conservativo pode ser explicada pelo que segue. Suponhamos que uma partícula de massa  $m$  percorra um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  suave por partes, sob ação da força resultante  $\vec{F}$ .



Usaremos aqui a notação  $\vec{r}(t) = \gamma(t)$  para descrever a posição da partícula no instante  $t$ . Temos

$$W \text{ (trabalho)} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Da segunda Lei de Newton temos:

$$\vec{F}(\gamma(t)) = m\vec{r}''(t).$$

Mas

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{r}'(t) = m\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t) \right] =$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(t)\|^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m v^2(t) \right],$$

onde  $v(t) = \|\vec{r}'(t)\|$  é a velocidade escalar da partícula. Portanto,

$$W = \int_a^b \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m v^2(t) \right] dt = \frac{1}{2} m v^2(b) - \frac{1}{2} m v^2(a) = K(b) - K(a),$$

onde

$$K(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$$

é a energia cinética da partícula no instante  $t$ . Portanto,

trabalho = variação da energia cinética.

Suponhamos agora que  $\vec{F} = \nabla f$ , isto é, que  $\vec{F}$  seja conservativo. Da proposição 11.4.1 segue que  $W = f(B) - f(A)$ . Comparando com a fórmula acima temos que:  $f(B) - f(A) = K(b) - K(a)$ , ou seja,  $K(b) - f(B) = K(a) - f(A)$ .

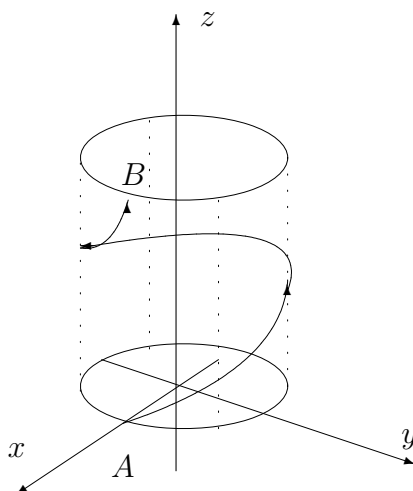
A quantidade  $U(P) = -f(P)$  será chamada de energia potencial da partícula na posição  $P$ .

Assim,

$$K(a) + U(A) = K(b) + U(B),$$

ou seja, a soma da energia potencial com a energia cinética permanece constante, isto é, se conserva.

**Exemplo 11.4.3** Encontrar o trabalho realizado pelo campo  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$  ao longo da curva  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ .



**Resolução:** Poderíamos resolver usando a definição, porém usaremos a proposição anterior.

Para isto procuremos  $f = f(x, y, z)$  tal que

1.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{Kx}{x^2 + y^2 + z^2}$
2.  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{Ky}{x^2 + y^2 + z^2}$
3.  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{Kz}{x^2 + y^2 + z^2}$

Integrando (1) em relação a  $x$  obtemos

$$f(x, y, z) = \int \frac{Kx}{x^2 + y^2 + z^2} dx + \phi(y, z) = \frac{K}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \phi(y, z).$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{Ky}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, z) \stackrel{(2)}{=} \frac{Ky}{x^2 + y^2 + z^2} \implies \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, z) = 0 \implies \phi(y, z) = \phi(z),$$

isto é  $\phi$  não depende de  $y$ . Calculando,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{Kz}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z) \stackrel{(3)}{=} \frac{Kz}{x^2 + y^2 + z^2} \implies \frac{\partial \phi}{\partial z}(z) = 0 \implies \phi(z) = C,$$

isto é,  $\phi$  também não depende de  $x, y, z$ .

Se tomarmos  $\phi = 0$  termos  $f(x, y, z) = \frac{K}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ , portanto,

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = \frac{K}{2} \ln(1 + 4\pi^2).$$

O teorema a seguir fornece uma condição simples que é necessária e suficiente para decidir se um campo é conservativo em um retângulo de  $\mathbb{R}^2$ .

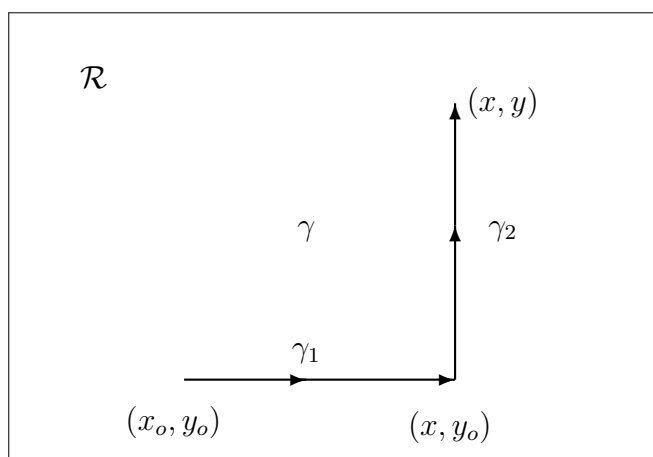
**Teorema 11.4.2** *Seja  $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$ , onde  $A$  e  $B$  são de classe  $C^1$  num retângulo  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ . Então  $\vec{F}$  é conservativo em  $\mathcal{R}$  se e somente se*

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad \text{em} \quad \mathcal{R}. \quad (11.2)$$

**Prova:** Se  $\nabla f = \vec{F}$  então  $A = \frac{\partial f}{\partial x}$  e  $B = \frac{\partial f}{\partial y}$ . Logo,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \stackrel{\text{(Teor. Schwarz)}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Reciprocamente, suponhamos que 11.2 seja verificada. Fixemos  $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ . Seja  $f$  definida em  $\mathcal{R}$  por  $f(x, y) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\gamma$  é a curva indicada na figura abaixo.



Consideremos as parametrizações  $\gamma_1 : [x_0, x] \rightarrow \mathcal{R}$  dada por  $\gamma_1(t) = (t, y_0)$  e  $\gamma_2 : [y_0, y] \rightarrow \mathcal{R}$  dada por  $\gamma_2(t) = (x, t)$ . Com isto, temos:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x A(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y B(x, t) dt.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \stackrel{\text{(Teo. Fund. Calc.)}}{=} B(x, y)$$

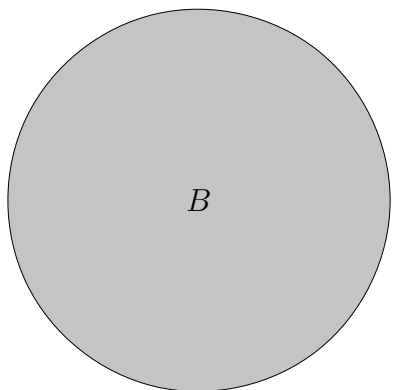
e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \stackrel{\text{(Teo. Fund.+ Der. sob Sinal de Int.)}}{=} A(x, x_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial B}{\partial x}(x, t) dt$$

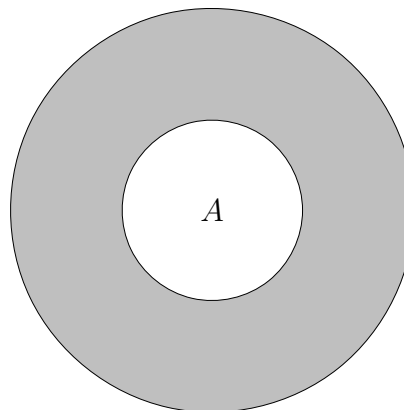
$$\stackrel{\text{(hipótese)}}{=} A(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial A}{\partial y}(x, t) dt \stackrel{\text{(Teor. Fund. Calc.)}}{=} A(x, y_0) + A(x, y) - A(x, y_0) = A(x, y).$$

Portanto,  $\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y)$ .

**Observação 11.4.3** O teorema acima continua válido se ao invés do retângulo  $\mathcal{R}$  considerarmos um domínio  $\Omega$  simplesmente conexo, isto é,  $\Omega$  não apresenta “buracos”. Mais, precisamente, um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é simplesmente conexo se toda curva fechada contida em  $\Omega$  puder ser deformada continuamente dentro de  $\Omega$  até um ponto.



o disco  $B$  é simplesmente conexo



o anel  $A$  não é simplesmente conexo

**Exercício 11.4.1** Consideremos o campo definido em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  dado por

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j} = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}.$$

1. Verifique que  $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ ;
2. Mostre que  $\vec{F}$  não é conservativo em  $D$ ;
3. Mostre que  $\vec{F}$  é conservativo em qualquer retângulo que não contenha a origem;
4. Encontre uma função potencial para  $\vec{F}$  na região  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y = 0\}$ .

1. Basta ver que

$$A(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$B(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

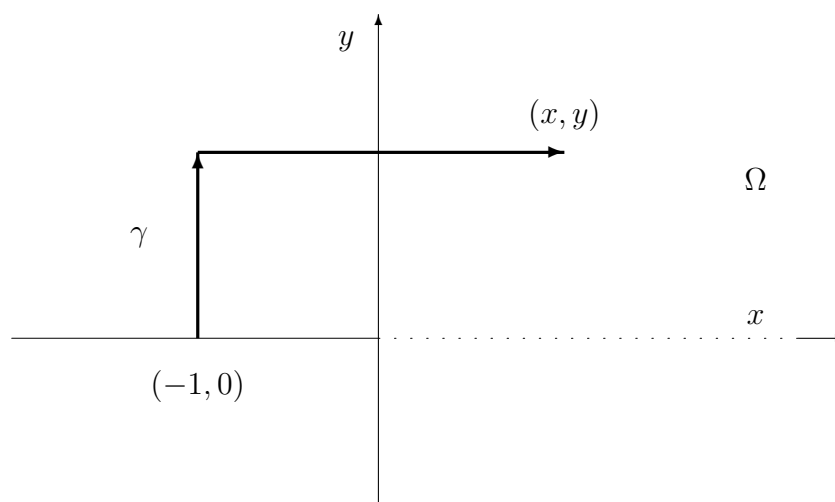
2. Se  $\vec{F}$  fosse conservativo em  $D$ , a sua integral sobre qualquer curva fechada contida em  $D$  seria zero. Porém, isto não ocorre, pois basta tomar  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  e calculando

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

3. Se  $\mathcal{R}$  é um retângulo que não contém a origem, então  $\mathcal{R} \subset D$ . Pelo item 1. deste exercício e pelo teorema 11.4.2 segue-se que  $\vec{F}$  é conservativo em  $\mathcal{R}$ .

4.  $\vec{F}$  é conservativo em  $\Omega$  pois trata-se de um domínio simplesmente conexo (veja a observação 11.4.3) e 11.2 já foi verificada em 1.

Dado  $(x, y) \in \Omega$ , considere  $\gamma$  a poligonal abaixo que liga  $(-1, 0) \in \Omega$  a  $(x, y)$ .



Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{\gamma} A dx + B dy = \int_0^y A(-1, t) dt + \int_{-1}^x B(t, y) dt = \int_0^y -\frac{1}{1+t^2} dt + \int_{-1}^x -\frac{y}{y^2+t^2} dt \\ &= -\operatorname{arctg} y - \int_{-1}^x \frac{y}{y^2+t^2} dt \end{aligned}$$

onde

$$-\int_{-1}^x \frac{y}{y^2+t^2} dt = \begin{cases} 0, & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{t}{y} \Big|_{-1}^x = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{1}{y}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ -\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} \frac{1}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left( -\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right) &= -\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}} \left( -\frac{1}{y^2} \right) \\ &= -\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} = 0, \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

Deste modo a função  $-\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$  é igual a  $-\pi/2$  para todo  $y > 0$  (basta tomar  $y = 1$ ) e igual a  $\pi/2$  para todo  $y < 0$ . Por quê?



Assim, uma função potencial de  $\vec{F}$  em  $\Omega$  é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{se } y > 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad e \quad x < 0$$

Note que se  $x > 0$  então

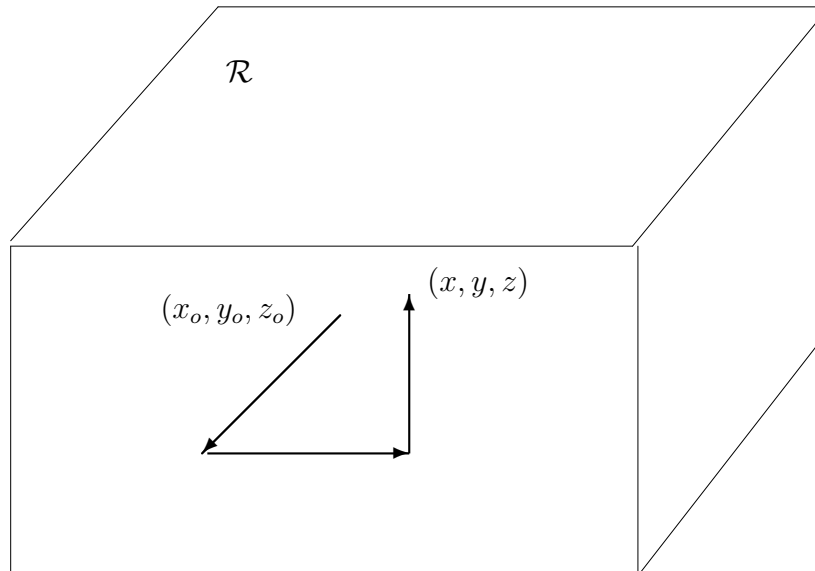
$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(x, y) = -\pi \quad e \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} f(x, y) = \pi.$$

Um resultado análogo ao teorema 11.4.2 também é válido para o  $\mathbb{R}^3$ . Temos

**Teorema 11.4.3** *Seja  $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ , onde  $A, B, C \in C^1$  em  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ . Então  $\vec{F}$  é conservativo em  $\mathcal{R}$  se e somente se*

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y} \quad \text{em } \mathcal{R}.$$

**Observação 11.4.4** *A prova é parecida com a do teorema 11.4.2 sendo que a função potencial do campo é obtida integrando  $\vec{F}$  sobre uma poligonal (contida em  $\mathcal{R}$ ) como abaixo.*



**Observação 11.4.5** *O teorema acima continua válido se ao invés do paralelepípedo  $\mathcal{R}$  considerarmos um domínio  $\Omega$  simplesmente conexo como na observação 11.4.3. Note que no  $\mathbb{R}^3$  um domínio simplesmente conexo pode ter “buracos”, como é o caso de uma bola da qual foi retirado o centro. Já uma bola da qual foi retirado um diâmetro não é um domínio simplesmente conexo.*

**Exemplo 11.4.4** *Se  $\vec{F}(x, y, z) = y^2\vec{i} + (2xy + e^{3z})\vec{j} + 3ye^{3z}\vec{k}$ , ache uma função  $f$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ .*

**Resolução:** Se existir uma tal  $f$  devemos ter satisfazer:

1.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2$
2.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$
3.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3ye^{3z}$

Integrando (1) com respeito a  $x$  obtemos:

$$f(x, y, z) = xy^2 + \phi(y, z) \quad (4).$$

Assim  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy + \phi_y(y, z)$ . Comparando (4) com (2) temos  $\phi_y(y, z) = e^{3z}$ . Portanto,  $\phi(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ . Logo (4) pode ser escrita como  $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$ .

Derivando esta equação com respeito a  $z$  e comparando com (3) obtemos  $h'(z) = 0$ . Assim,  $h(z) = \text{constante} = k$ . É fácil ver que  $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + k$  satisfaz  $\nabla f = \vec{F}$ .

**Exercício 11.4.2** Refaça o exercício anterior calculando  $f(x, y, z) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\gamma$  é o segmento dado por  $\gamma(t) = (xt, yt, zt)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Exercício 11.4.3** Consideremos  $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$  e  $\vec{F}(x, y) = y^2\vec{i} + (2xy - e^y)\vec{j}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Calcular  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

**Resolução: Primeiro modo:**

Pela definição

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t, 2 \cos t \sin t - e^{\sin t}) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \dots$$

**Segundo modo:** Como

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = 2y = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$$

em qualquer retângulo então  $\vec{F}$  é conservativo.

Procuramos  $f$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ , isto é,

1.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2$
2.  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy - e^y$

Integrando (1) com relação a  $x$  obtemos  $f(x, y) = xy^2 + \phi(y)$ .

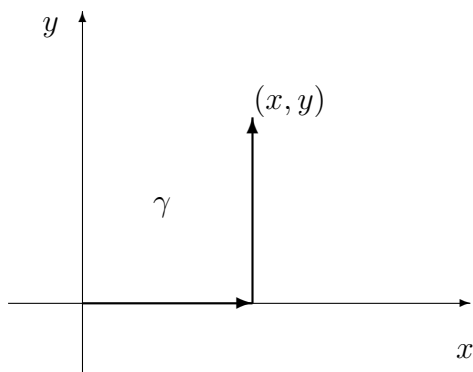
Por outro lado

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + \phi'(y) \stackrel{(2)}{=} 2xy - e^y,$$

portanto  $\phi'(y) = -e^y$  e logo  $\phi(y) = -e^y + c$ , assim  $f(x, y) = xy^2 - e^y + c$ . Verifica-se imediatamente que  $\nabla f = \vec{F}$ .

Calculando,  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(0, 1) - f(1, 0) = 1 - e$ .

Observemos que  $f$  pode ser obtida como no teorema 11.4.2, isto é, integrando  $\vec{F}$  sobre o caminho abaixo.



$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x A(t, 0) dt + \int_0^y B(x, t) dt = \int_0^x 0 dt + \int_0^y (2xt - e^t) dt \\ &= (xt^2 - e^t)|_{t=0}^{t=y} = xy^2 - e^y + 1. \end{aligned}$$

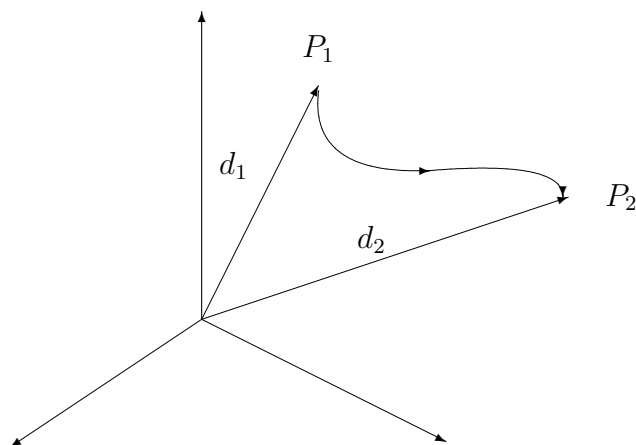
**Terceiro modo:** Sabemos que  $\vec{F}$  é do tipo gradiente em  $\mathbb{R}^2$ . Logo a integral acima independe da curva que liga os pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ . Assim, vamos calcular a integral sobre o segmento de reta que liga  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$ . Uma parametrização é  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = (1 - t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2, 2t(1 - t) - e^t) \cdot (-1, 1) dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 + 2t(1 - t) - e^t) dt = \dots = 1 - e. \end{aligned}$$

**Exercício 11.4.4** Seja  $\vec{F}$  um campo dado por  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{C}{\|\vec{r}(x, y, z)\|^3} \vec{r}(x, y, z)$ , onde  $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  e  $C$  é uma constante. Sejam  $P_1$  e  $P_2$  pontos cujas distâncias à origem são  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente.

Expresse o trabalho realizado por  $\vec{F}$  ao longo de uma curva suave por partes ligando  $P_1$  e  $P_2$  em termos de  $d_1$  e  $d_2$ .

**Resolução**



Observemos que  $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$  onde  $f(x, y, z) = -\frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ . Assim,

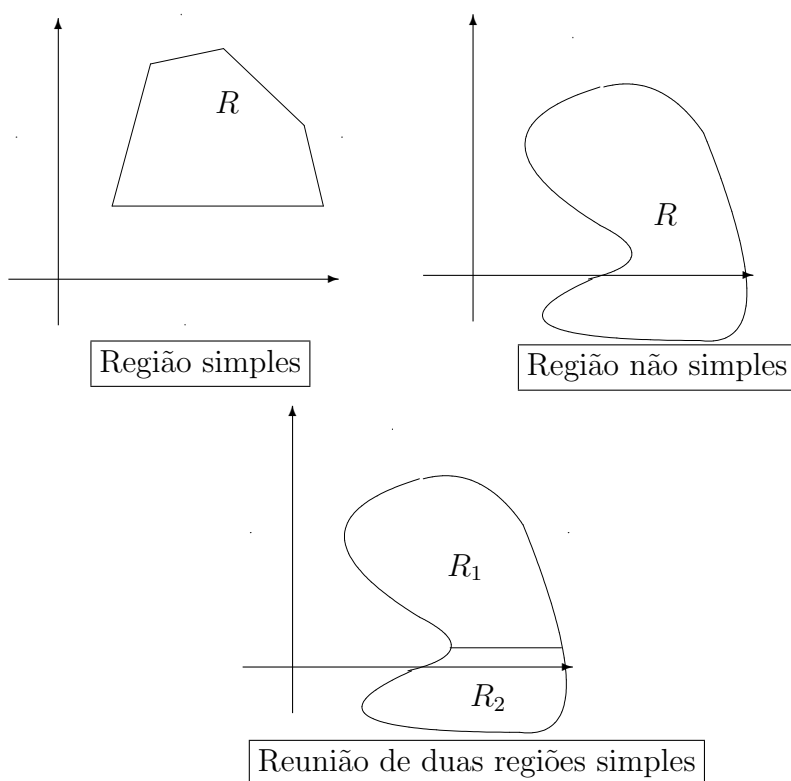
$$W = f(P_2) - f(P_1) = -\frac{C}{d_2} + \frac{C}{d_1} = \frac{C(d_2 - d_1)}{d_1 d_2}.$$

# Capítulo 12

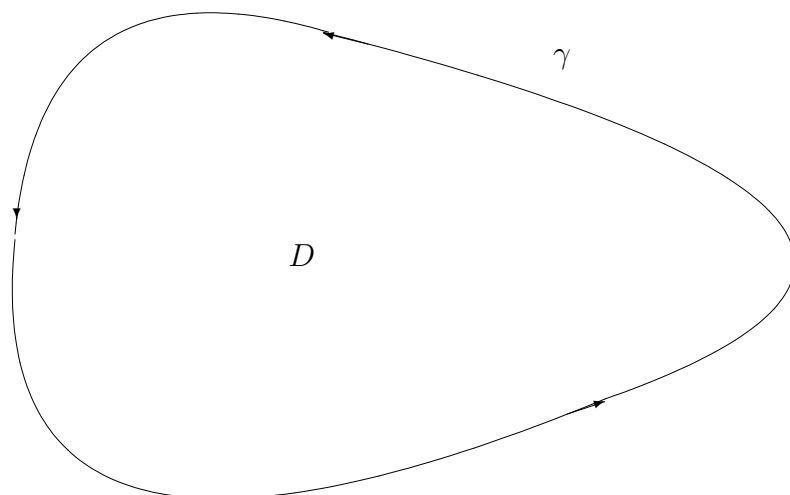
## Teorema de Green

### 12.1 Introdução

**Definição 12.1.1** Uma região  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  é dita uma região simples se toda reta paralela a um dos eixos coordenados corta a fronteira de  $B$  em um segmento ou, no máximo, em dois pontos.



**Teorema 12.1.1 (Green)** Seja  $D$  um região plana limitada dada por reunião finita de regiões simples, cada uma com fronteira constituída de uma curva suave por partes. Se  $A$  e  $B$  são funções de classe  $C^1$  num aberto contendo  $D$  e a fronteira de  $D$ , denotada por  $\gamma$ , então



Então

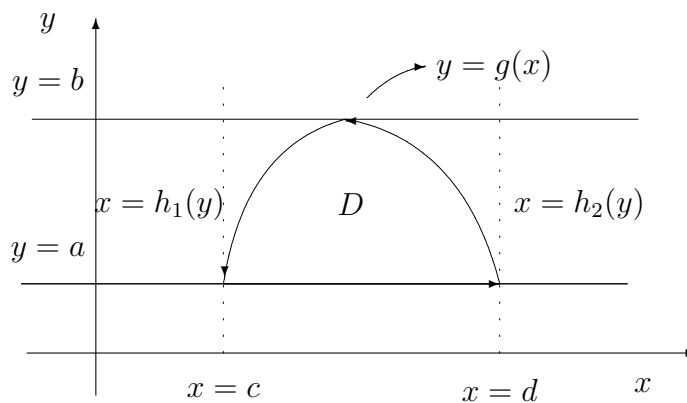
$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

onde  $\gamma$  é percorrida deixando  $D$  sempre à esquerda (neste caso diremos que  $\gamma$  está orientada positivamente). De modo abreviado escreveremos:

$$\int_{\gamma} A dx + B dy = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Prova:**

**1.º caso:** Suponhamos que a região  $D$  seja simples. Faremos a prova apenas no caso em que a fronteira de  $D$  pode ser descrita por um segmento e o gráfico de uma função com um máximo, como na figura abaixo.



Neste caso temos:

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b [B(h_2(y), y) - B(h_1(y), y)] dy \\
&= \int_a^b B(h_2(y), y) dy + \int_b^a B(h_1(y), y) dy = \int_\gamma B(x, y) dy,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade verificamos que a parte da integral em  $\gamma$  sobre o segmento de reta horizontal não contribui com nada na integral.

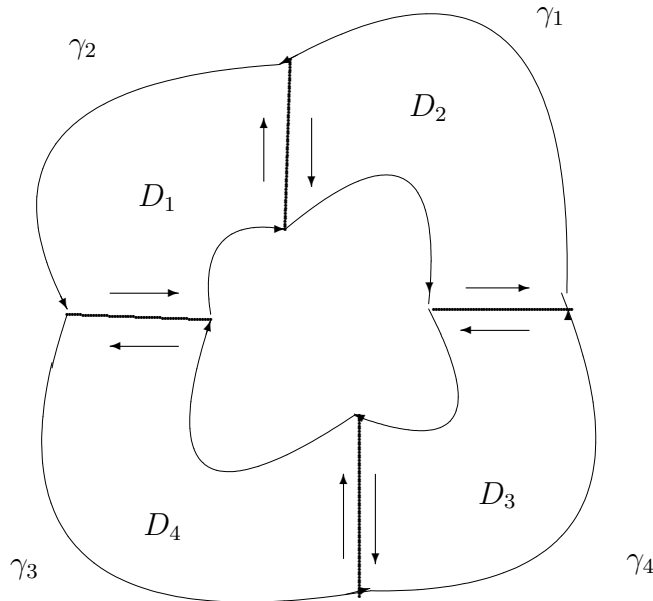
$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_c^d \int_a^{g(x)} \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_c^d [A(x, g(x)) - A(x, a)] dx \\
&= - \int_c^d A(x, g(x)) dx - \int_c^d A(x, a) dx = - \int_\gamma A(x, y) dx.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_\gamma A(x, y) dx + \int_\gamma B(x, y) dy.$$

**2.º caso:**  $D$  é uma reunião finita de regiões simples.

Dividamos a região  $D$  em sub-regiões,  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde cada uma destas são simples (ver figura abaixo). Denotemos por  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  a fronteira de  $D_i$  orientada como na figura abaixo.



Podem existir partes das curvas  $\gamma_i$  que não fazem parte de  $\gamma$  e que serão percorridas duas vezes, uma vez em cada sentido.

Aplicando o 1.º caso em cada uma dessas sub-regiões obtemos:

$$\int_{\gamma_i} A dx + B dy = \iint_{D_i} \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Somando-se de  $i = 1$  a  $n$  obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} A dx + B dy &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} A dx + B dy \\ &= \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

**Observação 12.1.1** *No caso de dimensão 1, o teorema de Green pode ser visto como o Teorema Fundamental do Cálculo, pois estamos relacionando o valor da integral de uma função em um intervalo fechado, sabendo o valor da de sua derivada na fronteira, que no caso é formada por dois pontos.*

## 12.2 Aplicação

### Área de uma região plana

Tomando-se  $A(x, y) = 0$  e  $B(x, y) = x$  temos pelo teorema de Green que a área da região  $D$  será dada por

$$A(D) = \iint_D dx dy = \int_{\gamma} x dy,$$

onde  $\gamma$  é percorrida no sentido positivo.

De outro modo, tomando-se  $A(x, y) = -y$  e  $B(x, y) = 0$  temos que

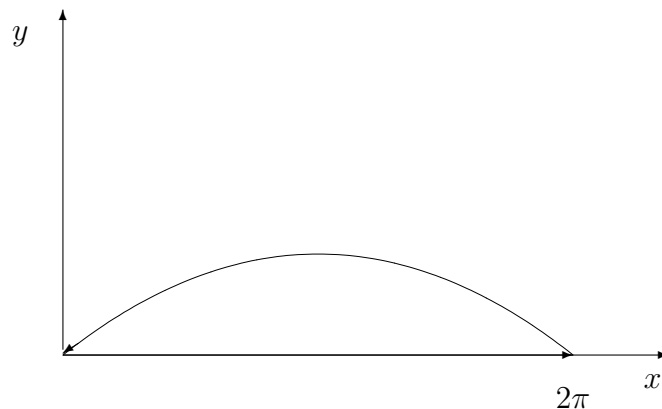
$$A(D) = \iint_D dx dy = - \int_{\gamma} y dx.$$

Ou ainda, somando-se as duas igualdades acima, temos que

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx.$$

**Exercício 12.2.1** *Calcule a área da região delimitada pela cicloide dada por  $\gamma_1(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$   $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $\gamma_2 = (t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .*

**Resolução:**

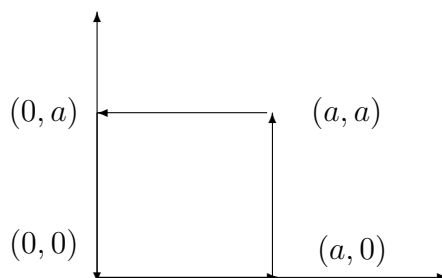




Note que, percorrendo a fronteira da região acima no sentido horário (negativo), temos

$$\begin{aligned} A &= - \oint_{\gamma} x dy = - \left[ \int_{\gamma_1} x dy - \int_{\gamma_2} x dy \right] = - \int_{\gamma_1} x dy = - \int_0^{2\pi} (t - \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t dt \\ &= \int_0^{2\pi} [t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t] dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - \int_0^{2\pi} t \operatorname{sen} t dt = \pi - [-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt = 3\pi. \end{aligned}$$

**Exercício 12.2.2** Use o Teorema de Green para calcular  $\oint_{\gamma} (1+10xy+y^2) dx + (6xy+5x^2) dy$ , onde  $\gamma$  é o quadrado de vértices  $(0,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(0,a)$ ,  $(a,a)$ ,  $a > 0$ .



**Resolução:** Observemos que neste caso  $A(x,y) = 1 + 10xy + y^2$ ,  $B(x,y) = 6xy + 5x^2$  e  $D$  a região delimitada pelo quadrado satisfazem as condições do Teorema de Green, onde a fronteira de  $D$ ,  $\gamma$ , está orientada no sentido positivo. Aplicando-o obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (1 + 10xy + y^2) dx + (6xy + 5x^2) dy &= \iint_D \left[ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right] dx dy = \\ \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (6xy + 5x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (1 + 10xy + y^2) \right] dx dy &= \iint_D [(6y + 10x) - (10x + 2y)] dx dy \\ &= \iint_D 4y dx dy = \int_0^a \int_0^a 4y dx dy = 2a^3. \end{aligned}$$

**Exercício 12.2.3** Calcular a área limitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Resolução:** Vimos acima que a área,  $A$ , da região pode ser dada por:  $A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx$ , onde  $\gamma$  é a elipse percorrida no sentido positivo (isto é, anti-horário). Uma parametrização de  $\gamma$  pode ser dada por  $t \in [0, 2\pi] \rightarrow (a \cos(t), b \operatorname{sen}(t))$ . Assim,

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t + b \operatorname{sen} t a \operatorname{sen} t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

**Exercício 12.2.4** Seja  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $A(x,y) = A(r)$ ,  $B(x,y) = B(r)$  funções de classe  $C^1$  que dependem somente da distância à origem. Mostre que

$$\iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

**Resolução:** Neste caso temos que  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  é a circunferência de centro na origem e raio 1.

Podemos aplicar o Teorema de Green para obter:

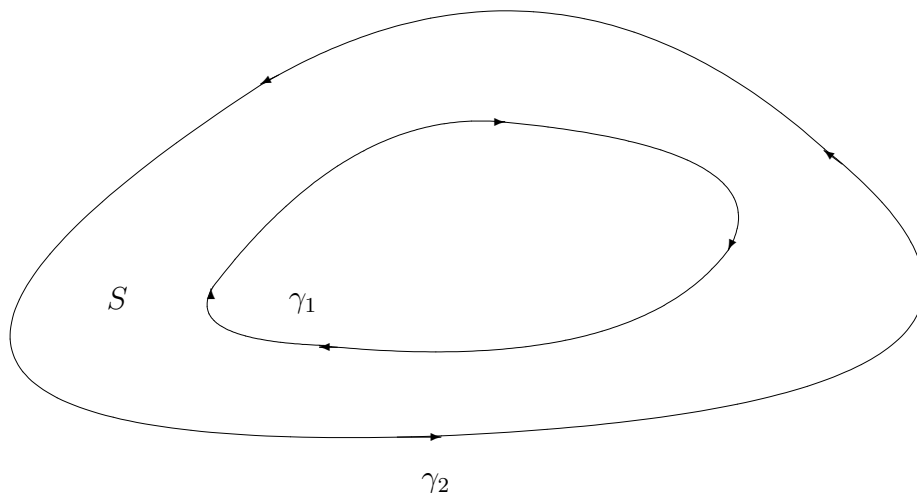
$$\iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} A(1) dx + B(1) dy$$

(observe que  $A$  e  $B$  são constantes sobre a circunferência  $\gamma$ ).

Por outro lado se considerarmos  $\bar{A}(x, y) = A(1)$  e  $\bar{B}(x, y) = B(1)$ ,  $(x, y) \in D$  (isto é,  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  são constantes em  $D$ ) e aplicando o Teorema de Green a estas duas funções obteremos:

$$\int_{\gamma} A(1) dx + B(1) dy = \iint_D \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

**Exercício 12.2.5** Consideremos  $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$ , onde  $A, B \in C^1$  com  $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$  na região  $S$  dada abaixo. Prove que  $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .



**Resolução:**

Pelo Teorema de Green temos que:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

pois, por hipótese,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

em  $S$ . Portanto

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

**Exercício 12.2.6** Consideremos  $\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$ , para  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $\gamma : t \in [0, 2\pi] \rightarrow (2 \cos t, 3 \sin t)$ . Calcular  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

**Resolução:**

Diretamente temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-3 \sin t}{4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t}, \frac{2 \cos t}{4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} \right) \cdot (-2 \sin t, 3 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{6 \sin^2 t + 6 \cos^2 t}{4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{6}{4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

que é uma integral razoavelmente difícil de calcularmos.

Observemos também que não podemos aplicar o Teorema de Green a região determinada por  $\gamma$  pois as funções não satisfazem as condições do teorema (a origem  $(0, 0)$  é um ponto onde as funções coordenadas de  $\vec{F}$  não são nem contínuas).

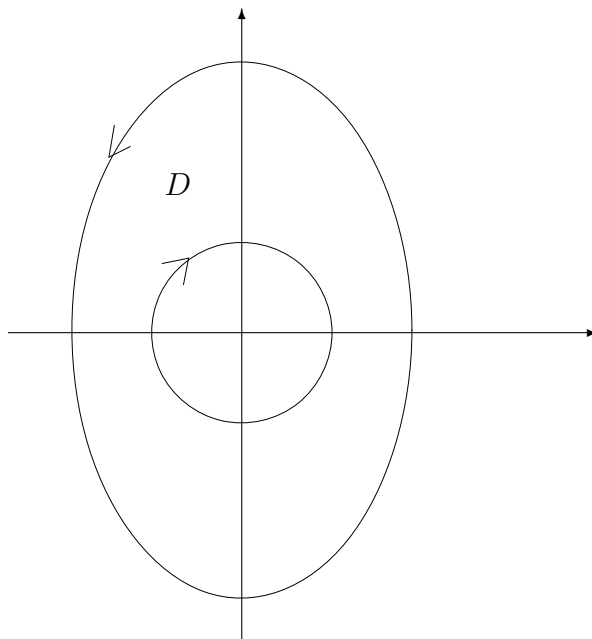
Para contornar este problema, observemos primeiramente que se

$$A(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad B(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

então

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

na região  $D$  abaixo que é externa ao disco unitário e interna à elipse.



Podemos aplicar o exemplo anterior, que nos diz que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \right) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

# Capítulo 13

## Integrais de Superfície

### 13.1 Superfícies

**Definição 13.1.1** Uma superfície parametrizada é uma transformação  $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ .

**Observação 13.1.1** A imagem de uma superfície parametrizada,  $S = \sigma(A)$ , é chamada de superfície. Neste caso, diz-se que transformação acima é uma parametrização da superfície.

**Observação 13.1.2** Geralmente usaremos a notação

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in A.$$

**Exemplo 13.1.1** A esfera de raio  $R$  centrada na origem,

$$S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

é uma superfície.

Note que, a transformação proveniente das coordenadas esféricas, dada por

$$\sigma(\varphi, \theta) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi), \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de  $S$ .

**Exemplo 13.1.2** Se  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$  então o seu gráfico,

$$G = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in A\},$$

é uma superfície.

Basta notar que

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in A$$

é uma parametrização de  $G$ .

**Exemplo 13.1.3** O cilindro  $C$  dado por  $x^2 + y^2 = R^2$  é uma superfície parametrizada por  $\sigma(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$ , onde  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Note que se  $S$  é uma superfície e  $\sigma$  uma parametrização sua, então os vetores

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

são tangentes a  $S$  no ponto  $\sigma(u, v)$ . Para verificar este fato, basta notar que, fixado  $v$ , a função  $u \mapsto \sigma(u, v)$  representa uma curva sobre  $S$  que passa por  $\sigma(u, v)$  e tem vetor tangente dado por  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$ . De maneira análoga se verifica que  $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$  tem propriedade semelhante.

Se  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$  são linearmente independentes então o produto vetorial

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$$

é diferente de zero e normal a  $S$  em  $\sigma(u, v)$ .

Convém lembrarmos que se colocarmos

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

então o produto vetorial entre  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$  é dado pelo determinante simbólico

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \vec{k},$$

onde

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

e assim por diante.

**Definição 13.1.2** Dizemos que uma superfície parametrizada  $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  é regular se  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$  são linearmente independentes para todo  $(u, v) \in A$ .

**Exemplo 13.1.4** Com relação ao gráfico de  $f$  (veja exemplo 13.1.2) obtemos

$$\vec{N} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v} \vec{j} + \vec{k}.$$

Note que neste caso temos  $\vec{N} \neq \vec{0}$  e

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}.$$

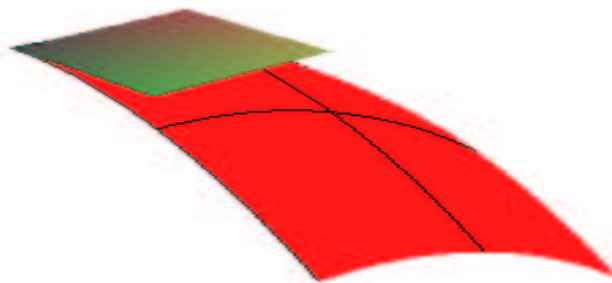
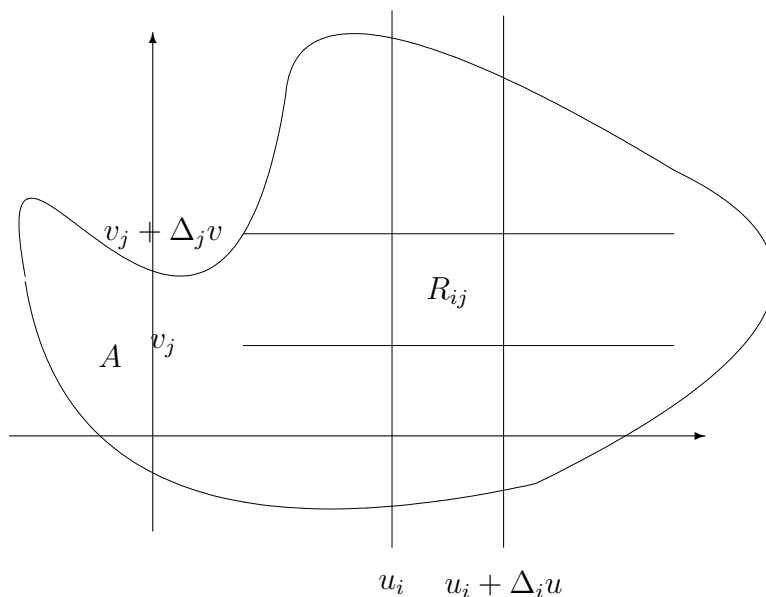
## 13.2 Integral de Superfície

Seja  $S$  uma superfície parametrizada por  $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Suponha que sobre  $S$  esteja definida uma função contínua  $f$ . Lembre que  $S \subset \mathbb{R}^3$  e, portanto,  $f$  é uma função de três variáveis. Queremos definir de um modo razoável a integral de  $f$  sobre  $S$ .

Tomemos um retângulo  $R_{ij}$  sobre a região  $A$  de lados  $\Delta_i u$  e  $\Delta_j v$  e com um vértice  $(u_i, v_j)$ , como mostra a figura. Seja  $P_o = \sigma(u_i, v_j)$ . A imagem  $\sigma(R)$  deste retângulo sobre  $S$  pela parametrização  $\sigma$  tem área aproximadamente igual à área do paralelogramo contido no plano tangente a  $S$  que passa por  $P_o$  cujos lados são *congruentes* aos vetores  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta_i u$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta_j v$ .

Assim área de  $\sigma(R_{ij})$  é aproximadamente

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta_i u \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta_j v \right\| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta_i u \Delta_j v = \|\vec{N}(u, v)\| \Delta_i u \Delta_j v.$$



Desta forma, se escolhermos  $(u'_i, v'_j) \in R_{ij}$  podemos formar a soma de Riemann

$$\sum_{i,j} f(\sigma(u'_i, v'_j)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta_i u \Delta_j v$$

a qual converge a

$$\iint_A f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| dudv,$$

desde que  $f$  contínua e limitada em  $S = \sigma(A)$  e a fronteira de  $A$  seja uma reunião finita de conjuntos suaves.

**Definição 13.2.1** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto cuja fronteira é uma reunião finita de conjuntos suaves. Seja  $S$  uma superfície dada pela parametrização  $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se  $f$  é uma função contínua e limitada em  $S$  definimos a integral de superfície de  $f$  em  $S$  por*

$$\iint_S f dS = \iint_A f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

**Observação 13.2.1** *Se  $f = 1$  em  $S$  então*

$$\iint_S dS = \text{área de } S.$$

**Observação 13.2.2** *Se  $f$  representa algum tipo de densidade superficial de  $S$  de alguma grandeza escalar (p. ex., densidade de massa ou de carga) então*

$$\iint_S f dS$$

*representa a quantidade total desta grandeza sobre sobre  $S$ .*

**Observação 13.2.3** *Se  $S$  é o gráfico de uma função  $g : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  (veja exemplo 13.1.2) então*

$$\iint_S f dS = \iint_A f(u, v, g(u, v)) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right)^2} dudv.$$

## 13.3 Exemplos

**Exemplo 13.3.1** *Encontre a área de uma esfera de raio  $R$ .*

**Resolução:**

Sabemos que

$$\sigma(\varphi, \theta) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi), \quad (\varphi, \theta) \in A = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$



é uma para parametrização de  $S$ . Temos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (-R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, R \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, 0)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, -R \operatorname{sen} \varphi)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi & R \cos \theta \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \operatorname{sen} \theta \cos \varphi & -R \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix}$$

$$= -R^2 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \vec{i} - R^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \vec{j} - R^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\|^2 &= R^4 (\cos^2 \theta \operatorname{sen}^4 \varphi + \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^4 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi) \\ &= R^4 (\operatorname{sen}^4 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi) = R^4 \operatorname{sen}^2 \varphi (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = R^4 \operatorname{sen}^2 \varphi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\| = R^2 \operatorname{sen} \varphi$$

e

$$A(S) = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta = 2\pi R^2 (-\cos \varphi)|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

**Exemplo 13.3.2** Mostre que a parametrização da esfera centrada na origem e de raio  $u$ ,  $\sigma : R = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$\sigma(u, v) = (\sqrt{1-v^2} \cos u, \sqrt{1-v^2} \operatorname{sen} u, v)$$

preserva áreas, isto é, se  $K \subset R$  é um conjunto cuja fronteira é uma reunião finita de conjuntos suaves então a área de  $K$  é igual à área de  $\sigma(K)$ .

**Resolução:** Lembre-se que a parametrização acima já foi estudada no capítulo de transformações.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{1-v^2} \operatorname{sen} u & \sqrt{1-v^2} \cos u & 0 \\ -\frac{v \cos u}{\sqrt{1-v^2}} & -\frac{v \operatorname{sen} u}{\sqrt{1-v^2}} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{1-v^2} \cos u \vec{i} + \sqrt{1-v^2} \operatorname{sen} u \vec{j} + v \vec{k} \end{aligned}$$

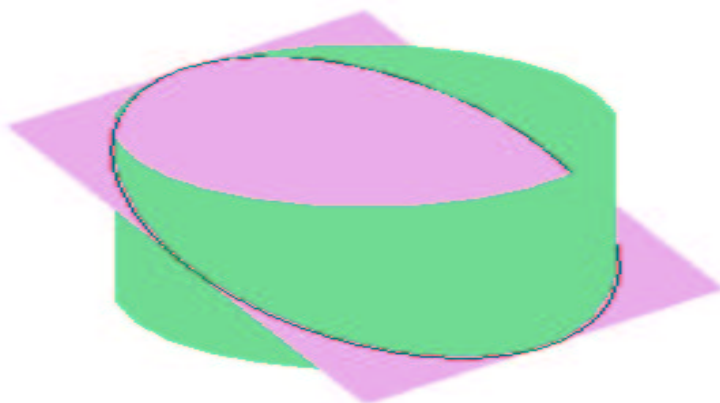
$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = (1-v^2) \cos^2 u + (1-v^2) \operatorname{sen}^2 u + v^2 = 1.$$

Assim,

$$A(\sigma(K)) = \iint_{\sigma(K)} dS = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| dudv = \iint_K dudv = A(K).$$

**Exemplo 13.3.3** *Encontre a área da região do plano  $z = -y + 1$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .*

**Resolução:**

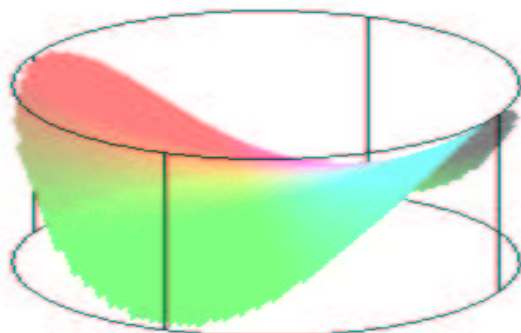


Neste caso  $z = f(x, y) = -y + 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  
Observemos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1$ , logo a área da região  $S$  será:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy \\ &= \iint_A \sqrt{1 + 1} \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_A dx \, dy = \sqrt{2}\pi, \end{aligned}$$

já que a última integral dupla nos dá a área do círculo de raio 1.

**Exemplo 13.3.4** *Calcular a área do parabolóide hiperbólico  $z = xy$  que fica dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .*

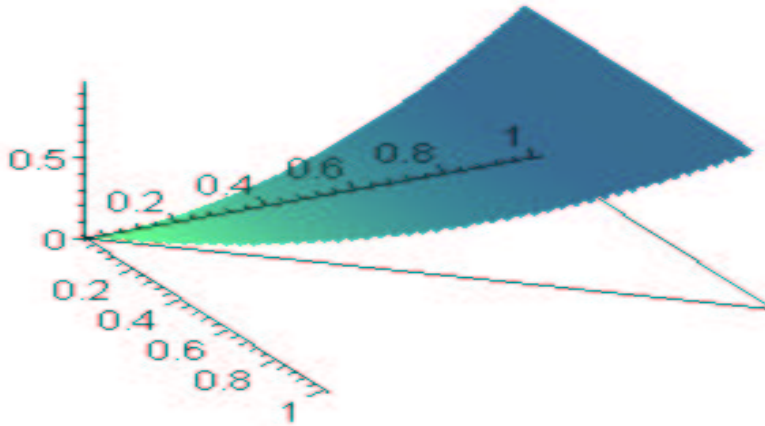


**Resolução:** Temos  $f(x, y) = xy$  e  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . E daí,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$ ,

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy = \iint_A \sqrt{y^2 + x^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr d\theta = \{ \text{faça } u = r^2 + 1 \dots \} = \frac{2\pi}{3} [2\sqrt{2} - 1]. \end{aligned}$$

**Exemplo 13.3.5** Encontrar a área da parte do cilindro  $z = y^2$  que fica sobre o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$ .



**Resolução:** Neste caso temos que  $z = f(x, y) = y^2$  e  $A =$  triângulo com vértices nos pontos acima,. Logo, sabemos que a área,  $A(S)$ , da superfície será dada por:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} y dy = \{ \text{faça } u = 4y^2 + 1 \dots \} = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

(\*)Vale observar que se a integral acima for calculada na outra ordem ela ficará bem difícil.

**Exemplo 13.3.6** Calcular a massa de uma lâmina que tem a forma do cone  $z^2 = x^2 + y^2$  entre os planos  $z = 1$  e  $z = 4$ , se a densidade superficial é proporcional à distância ao eixo dos  $z$ .

**Resolução:**

A função densidade é  $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$  e onde

$$S = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}); (x, y) \in A\} \quad \text{e} \quad (x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Observemos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ . Assim, a massa de  $S$  é dada por

$$\begin{aligned} M(S) &= \iint_S \rho \, dS = k = \iint_A \rho(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx dy \\ &= k\sqrt{2} \iint_A \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = k\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^2 \, dr d\theta = 42k\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

# Capítulo 14

## Fluxo

### 14.1 Definição e Exemplos

Considere uma superfície parametrizada regular dada por  $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Definimos os versores

$$\vec{n}_1(u, v) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|} \quad \text{e} \quad \vec{n}_2(u, v) = -\vec{n}_1(u, v).$$

Como já vimos,  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são normais a  $S = \sigma(A)$  em  $\sigma(u, v)$ . Se  $\vec{F}$  é um campo vetorial contínuo, definido sobre  $S$  e  $\vec{n}$  é igual a  $\vec{n}_1$  ou  $\vec{n}_2$ , definimos o fluxo (normal) de  $\vec{F}$  através de  $S$  na direção  $\vec{n}$  por

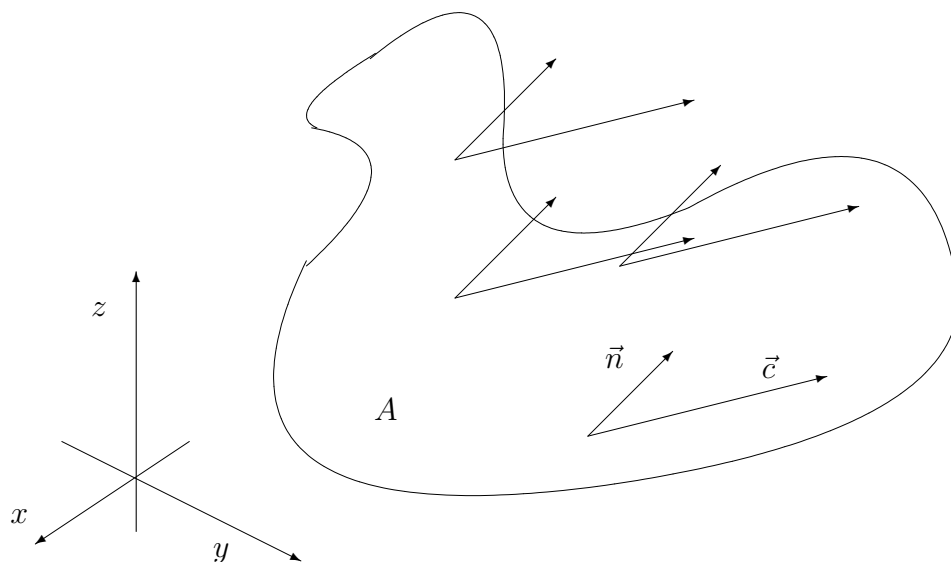
$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Note que se  $\vec{n} = \vec{n}_1$  então

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 = \iint_A \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| \, dudv \\ &= \iint_A \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) \, dudv \end{aligned}$$

e se a escolha fosse  $\vec{n} = \vec{n}_2$ , teríamos  $\Phi = -\Phi_1$ .

**Exemplo 14.1.1** *Considere um fluido que escoar com velocidade constante igual a  $\vec{c}$ . Encontre o fluxo deste campo através de uma placa plana de área  $A$  com relação à normal  $\vec{n}$  da placa que faz com  $\vec{c}$  um ângulo de no máximo  $90^\circ$ .*



Temos

$$\Phi = \iint_S \vec{c} \cdot \vec{n} dS = \vec{c} \cdot \vec{n} \iint_S dS = A\vec{c} \cdot \vec{n}.$$

Observe que se  $\vec{c}$  é medida em metros por segundo e a área de  $S$  em metros quadrados, vemos que a dimensão de  $\Phi$  é metros cúbicos por segundo. Ou seja,  $\Phi$  mede a vazão, isto é, o volume de líquido que atravessa  $S$  por unidade de tempo. Observe ainda que  $\vec{c} \cdot \vec{n}$  é zero se  $\vec{c}$  e  $\vec{n}$  são ortogonais e, neste caso, a posição da placa é paralela ao campo. No outro extremo,  $\Phi$  é máximo quando a placa está posicionada perpendicularmente ao campo e, neste caso,  $\Phi = \|\vec{c}\|A$ .

Sejam  $\sigma_j : A_j \rightarrow \mathbb{R}^3$   $j = 1, \dots, m$  são superfícies parametrizadas regulares. Suponha que  $A_j$  seja um compacto cuja fronteira é uma reunião finita de conjuntos suaves e que  $\sigma_i(\text{int}A_i) \cap \sigma_j(\text{int}A_j) = \emptyset$ , onde  $\text{int}A$  representa o interior do conjunto  $A$ . Coloque  $S_j = \sigma_j(A_j)$  e  $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$ . Se  $n_j$  é uma escolha de vetores normais a  $S_j$ , e  $\vec{F}$  é um campo contínuo definido sobre  $S$ , definimos o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$  (de acordo com as normais escolhidas) por

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS + \dots + \iint_{S_m} \vec{F} \cdot \vec{n}_m dS$$

**Observação 14.1.1** Note que se  $S$  é uma superfície fechada  $\vec{F}$  representa velocidade de um fluido que escoar através de  $S$ , o sinal do fluxo de  $\vec{F}$  através da normal exterior de  $S$  nos diz se há mais fluido saindo de  $S$ , no caso de sinal positivo, ou entrando na região limitada delimitada por  $S$ , no caso de sinal negativo. Quando o fluxo é zero, há uma igualdade entre a quantidade de fluido que entra e entre a que sai.

**Exemplo 14.1.2** Calcule o fluxo de  $\vec{f}(x, y, z) = xy\vec{i} + 4yz^2\vec{j} - yz\vec{k}$  para fora do cubo  $S$  cujas faces estão contidas na união dos planos coordenados e dos planos  $x = 1$ ,  $y = 1$  e  $z = 1$ .

**Resolução:**

Face	$\vec{n}$	$\vec{F} \cdot \vec{n}$	Fluxo
$z = 1$	$\vec{k}$	$-yz$	$\iint_A -y \, dx \, dy = -\frac{1}{2}$
$z = 0$	$-\vec{k}$	$yz$	$\iint_A 0 \, dx \, dy = 0$
$x = 1$	$\vec{i}$	$xy$	$\iint_A y \, dy \, dz = \frac{1}{2}$
$x = 0$	$-\vec{i}$	$-xy$	$\iint_A 0 \, dy \, dz = 0$
$y = 1$	$\vec{j}$	$4yz^2$	$\iint_A 4z^2 \, dx \, dy = \frac{4}{3}$
$y = 0$	$-\vec{j}$	$-4yz^2$	$\iint_A 0 \, dx \, dy = 0$

Portanto,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{4}{3}.$$

**Exemplo 14.1.3** Encontre o fluxo através da normal exterior da esfera  $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$  do campo elétrico

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

gerado por uma carga.

**Resolução:** Um modo de resolver este exercício é usando a parametrização do exemplo 13.3.1 e resolver

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_A \vec{E}(\sigma(\varphi, \theta)) \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \right) \, d\varphi d\theta.$$

No entanto, resolveremos da seguinte maneira: o versor normal no ponto  $(x, y, z) \in S$  apontando para fora é

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

e, portanto,

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{q}{R^2}.$$

Daí,

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q}{R^2} \iint_S dS = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q.$$





# Capítulo 15

## Os Teoremas de Gauss e Stokes

### 15.1 O Divergente e o Rotacional

Consideremos um campo de vetores

**Definição 15.1.1** *Seja  $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . O divergente de  $\vec{F}$  em  $P \in \Omega$  é definido por*

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \frac{\partial A_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial A_2}{\partial y}(P) + \frac{\partial A_3}{\partial z}(P), .$$

**Exemplo 15.1.1** *Se  $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} - xy\vec{j} + xy\vec{k}$  então  $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = x + xy$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .*

**Exemplo 15.1.2** *Se  $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$  então  $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .*

**Exemplo 15.1.3** *Se  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  então  $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 3$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .*

**Definição 15.1.2** *Dado um campo vetorial  $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$  de classe  $C^1$  em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , definimos o rotacional de  $\vec{F}$  em  $P \in \Omega$  como sendo*

$$\operatorname{rot} \vec{F}(P) = \left( \frac{\partial A_3}{\partial y}(P) - \frac{\partial A_2}{\partial z}(P) \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z}(P) - \frac{\partial A_3}{\partial x}(P) \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial A_1}{\partial y}(P) \right) \vec{k}.$$

Observemos que  $\operatorname{rot} \vec{F}$  pode ser calculado, simbolicamente, através do seguinte determinante:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

No caso bidimensional,

$$\vec{F}(x, y) = A_1(x, y)\vec{i} + A_2(x, y)\vec{j}$$

então

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y) = \left( \frac{\partial A_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A_1}{\partial y}(x, y) \right) \vec{k}.$$

**Exemplo 15.1.4** Se  $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$  então

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) \vec{k} = 2\vec{k}. \end{aligned}$$

Observemos que o campo é uma rotação.

**Exemplo 15.1.5** Seja  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Então

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Note que o campo acima não é uma rotação.

**Exercício 15.1.1** Considere  $\Phi(x, y, z) = x + y + z$  e  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Calcular:

a)  $\nabla(\phi)$    b)  $\operatorname{div} \vec{F}$    c)  $\operatorname{rot} \vec{F}$    d)  $\operatorname{div}(\phi\vec{F})$    e)  $\operatorname{rot}(\phi\vec{F})$ .

**Exercício 15.1.2** Prove que  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ , onde  $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

**Exercício 15.1.3** Prove que  $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$  se  $f$  é de classe  $C^2$ .

O seguinte teorema é uma consequência é uma reformulação em termos do rotacional teorema 12.4.3 (capítulo de Integrais de Linha), juntamente com a equivalência entre independência de caminho e integral zero sobre todas as curvas fechadas.

**Teorema 15.1.1** Seja  $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$  com derivadas parciais contínuas em  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ . As seguintes afirmações são equivalentes

1.  $\vec{F}$  é conservativo em  $\mathcal{R}$ ;
2.  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$  em  $\mathcal{R}$ ;
3. a integral de  $\vec{F}$  independe do caminho;
4. a integral de  $\vec{F}$  ao longo de qualquer curva fechada é zero.

**Observação 15.1.1** Vale um teorema análogo ao anterior para retângulos em  $\mathbb{R}^2$ .

## 15.2 O Teorema de Gauss

Suponhamos que  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  e  $D$  sejam como no enunciado do teorema de Green. Suponha que a parametrização de  $\Gamma$  seja tal que  $\Gamma'(t) \neq 0$ . Então temos

$$\int_{\Gamma} -Bdx + A dy = \iint_D \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy.$$

Se colocarmos  $\vec{F} = -B(x, y)\vec{i} + A(x, y)\vec{j}$  e  $\vec{v}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$  a equação anterior tornar-se-á

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \operatorname{div} \vec{v} dx dy.$$

Lembre que

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F} \cdot \vec{T} ds,$$

onde  $\vec{T}$  é o vetor tangente unitário a  $\Gamma$ , que deixa a região  $D$  à sua esquerda.

Observemos que  $\vec{F} \cdot \vec{T} = \vec{v} \cdot \vec{n}$ . De fato, se denotarmos  $\vec{n} = (a, b)$  o vetor normal unitário apontando para fora da região  $D$ , teremos  $\vec{T} = (-b, a)$ , pois  $\vec{T}$  deixa  $D$  à sua esquerda ( $\vec{T}$  é uma rotação de  $90^\circ$  de  $\vec{n}$  no sentido anti-horário. Agora, como  $\vec{F} = (-B, A)$  e  $\vec{v} = (A, B)$  segue-se que

$$\vec{F} \cdot \vec{T} = (-B, A) \cdot (-b, a) = (Bb + Aa) = \vec{v} \cdot \vec{n}.$$

Com isto obtemos

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{v} dx dy.$$

Vejamos como a fórmula acima se aplica também no  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $B$  um compacto de  $\mathbb{R}^3$  cuja fronteira  $S$  possa ser descrita da seguinte maneira:

Sejam  $\sigma_j : A_j \rightarrow \mathbb{R}^3$   $j = 1, \dots, m$  são superfícies parametrizadas regulares. Suponha que  $A_j$  seja um compacto cuja fronteira é uma reunião finita de conjuntos suaves e que  $\sigma_i(\operatorname{int} A_i) \cap \sigma_j(\operatorname{int} A_j) = \emptyset$ , onde  $\operatorname{int} A$  representa o interior do conjunto  $A$ . Coloque  $S_j = \sigma_j(A_j)$  então  $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$ .

**Teorema 15.2.1 (Divergência (Gauss))** *Sejam  $B$  e  $S$  como acima. Seja  $\vec{n}_j$  o vetor normal unitário a  $S_j$  que aponta para fora de  $B$ . Coloque  $\vec{n}(P) = \vec{n}_j(P)$ , se  $P \in \sigma_j(\operatorname{int} A_j)$ . Se  $\vec{F}$  é um campo de classe  $C^1$  definido num aberto que contém  $B$  então*

$$\iiint \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS. \quad (15.1)$$

**Observação 15.2.1** *Note que o lado esquerdo de 15.1 representa o fluxo de  $\vec{F}$  através da normal exterior de  $S$ .*

### 15.2.1 Interpretação Física do Divergente

Lembremos que o Teorema do Valor Médio para Integrais do Cálculo 1 nos diz que: se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ .

Este resultado continua válido para integrais triplas, isto é, se  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua na bola  $B$  então existe  $P_0 \in E$  tal que

$$\iiint_B g(x, y, z) dx dy dz = g(P_0) \text{vol}(B).$$

Sejam  $\vec{F}$  um campo de classe  $C^1$  definido em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  e  $P \in \Omega$ . Sejam  $B_\epsilon$  a bola fechada de centro em  $P$  e raio  $\epsilon > 0$  contida em  $\Omega$  e  $S_\epsilon$  a superfície de  $B_\epsilon$ . Suponha que  $\vec{F}(x, y, z)$  represente a velocidade de escoamento de um fluido no ponto  $(x, y, z) \in \Omega$ .

O Teorema da divergência nos diz que

$$\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{B_\epsilon} \text{div } \vec{F} dx dy dz.$$

Logo

$$\iiint_{B_\epsilon} \text{div } \vec{F} dx dy dz = \text{fluxo para fora de } S_\epsilon.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para Integrais para o segundo membro da igualdade acima obtemos

$$\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \text{div}(\vec{F}(P_\epsilon)) \text{vol}(B_\epsilon),$$

onde  $P_\epsilon \in B_\epsilon$ . Assim,

$$\text{div } \vec{F}(P_\epsilon) = \frac{\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dS}{\text{vol}(B_\epsilon)}.$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  temos que  $P_\epsilon \rightarrow P$  e, assim,

$$\text{div } \vec{F}(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{div } \vec{F}(P_\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dS}{\text{vol}(B_\epsilon)}.$$

Portanto,  $\text{div } \vec{F}(P)$  é o valor limite do fluxo por unidade de volume sobre uma esfera de centro em  $P$ , quando o raio da esfera tende a zero, ou ainda,

$$\frac{\text{volume do fluido para fora por unidade de tempo}}{\text{volume da esfera}} = \text{div } \vec{F}(P).$$

Logo, se  $\text{div } \vec{F}(P) > 0$  então o fluido “se afasta” de  $P$ , isto é,  $P$  é uma *fonte*. Se  $\text{div } \vec{F}(P) < 0$  então o fluido “se aproxima” de  $P$ , isto é,  $P$  é uma *sorvedouro*. Se  $\text{div } \vec{F} = 0$  dizemos que o fluido é *incompressível*.

**Observação 15.2.2** *O raciocínio acima pode ser repetido para um fluxo magnético ou elétrico.*

**Exemplo 15.2.1** Comprove o teorema da divergência para o caso em que  $B$  é um tetraedro limitado pelos planos coordenados e por  $x + y + z = 1$ ,  $\vec{F}(x, y, z) = 3x^2\vec{i} + xy\vec{j} + z\vec{k}$ .

**Resolução:** Neste caso  $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = 6x + x + 1 = 7x + 1$ . Assim,

$$\iiint_B \text{div } \vec{F} \, dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (7x + 1) \, dz \, dy \, dx = \dots = \frac{1}{8}.$$

Por outro lado, se colocarmos  $S_1$  como a face do tetraedro contida no plano  $z = 0$ ,  $S_2$  como a face contida no plano  $x = 0$ ,  $S_3$  como a face contida no plano  $y = 0$  e  $S_4$  como a face contida no plano  $x + y + z = 1$ , obtemos

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} (3x^2\vec{i} + xy\vec{j} + 0\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) \, dS = 0.$$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} (0\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) \, dS = 0.$$

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_3} (3x^2\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{j}) \, dS = 0.$$

Como  $S_4 = \{(x, y, 1 - x - y); (x, y) \in S_1\}$  então

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{S_1} (3x^2\vec{i} + xy\vec{j} + (1 - x - y)\vec{k}) \cdot (\vec{i}\vec{j} + \vec{k}) \, dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (3x^2 + xy + (1 - x - y)) \, dy \, dx = \dots = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Logo

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_A \text{div } \vec{F} \, dx dy dz.$$

**Exemplo 15.2.2** Sejam  $B$  o sólido limitado por  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$ ,  $z = 3$  e  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . ; Utilizar o teorema da divergência para calcular o fluxo de  $\vec{F}$  através da normal exterior da superfície  $S$  que delimita  $B$ .

**Resolução:** Temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B 3 \, dx dy dz = 3\text{vol}(B) = 36\pi.$$

**Exemplo 15.2.3** Idem para  $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ .

**Resolução:** Temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B 0 \, dx dy dz = 0.$$

### 15.3 O Teorema de Stokes

Voltemos a examinar o Teorema de Green. Suponhamos que  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  e  $D$  satisfazem as condições do teorema do teorema de Green. Temos

$$\int_{\Gamma} A dx + B dy = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy. \quad (15.2)$$

Lembremos que se  $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$  então

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Deste modo, podemos reescrever a fórmula 15.2 como

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} dx dy.$$

Vejamos como este resultado pode ser visto no  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $K \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto compacto cuja fronteira pode ser descrita por uma curva  $\gamma$  fechada suave por partes, sem auto-intersecção. Seja  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada injetora tal que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u} \neq \vec{0}.$$

Diremos que o bordo de  $S = \sigma(K)$ , dado pela curva  $\Gamma = \sigma \circ \gamma$  está no orientado no sentido positivo com relação a

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right\|}$$

quando  $\gamma$  estiver orientada no sentido anti-horário.

**Teorema 15.3.1 (Stokes)** *Sejam  $K, \gamma, \sigma, S, \Gamma$  e  $n$  como acima. Se  $\vec{F}$  é um campo de classe  $C^1$  definido num aberto que contém  $S$  então*

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

**Exemplo 15.3.1** *Comprove o teorema de Stokes para o caso em que  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1 : z \geq 0\}$ ,  $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .*

**Resolução:** Neste caso sabemos que  $\text{rot } \vec{F} = 0$ .

Logo

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S 0 dS = 0.$$

Por outro lado, como o bordo de  $S$  pode ser descrito por  $\Gamma(t) \rightarrow (\cos(t), \sin(t), 0)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , segue-se que

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} x dx + y dy + z dz = \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t] dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.$$

### 15.3.1 Interpretação Física do Rotacional

Seja  $\vec{F}$  um campo de classe  $C^1$  definido em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Suponha que  $\vec{F}(x, y, z)$  represente a velocidade de escoamento de um fluido no ponto  $(x, y, z) \in \Omega$ .

A integral  $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$  será denominada circulação de  $\vec{F}$  ao longo de  $\Gamma$ , onde  $\vec{T}$  é o vetor unitário tangente a  $\Gamma$ .

**Observação 15.3.1** Note que se  $\vec{F} \cdot \vec{T} \neq 0$ , temos contribuição para um movimento circulatório.

Se  $\vec{F} \cdot \vec{T} = 0$ , não haverá contribuição para um movimento circulatório.

Consideremos  $P$  um ponto em  $\Omega$ ,  $D_{\epsilon}$  um disco de centro em  $P$  e raio  $\epsilon > 0$ . Sejam  $\Gamma_{\epsilon}$  a circunferência de  $D_{\epsilon}$ ,  $\vec{T}$  vetor tangente unitário a  $\Gamma_{\epsilon}$ .

Utilizando o Teorema de Stokes e o Teorema do Valor Médio para Integrais temos

$$\int_{\Gamma_{\epsilon}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_{\Gamma_{\epsilon}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{T. Stokes}}{=} \iint_{D_{\epsilon}} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{T.V.Médio}}{=} \text{rot } \vec{F}(P_{\epsilon}) \cdot \vec{n} \pi \epsilon^2.$$

Portanto,

$$\text{rot } \vec{F}(P_{\epsilon}) \cdot \vec{n} = \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{\Gamma_{\epsilon}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  temos que  $P_{\epsilon} \rightarrow P$  e, assim,

$$\text{rot } \vec{F}(P) \cdot \vec{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{rot } \vec{F}(P_{\epsilon}) \cdot \vec{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{\Gamma_{\epsilon}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Logo, em cada ponto  $P$ , a componente de  $\text{rot } \vec{F}(P)$  em qualquer direção  $\vec{n}$  é o valor limite da circulação de  $\vec{F}$  por unidade de área no plano normal a  $\vec{n}$ . Em particular,  $\text{rot } \vec{F}(P) \cdot \vec{n}$  tem máximo quando  $\vec{n}$  é paralelo a  $\text{rot } \vec{F}(P)$ . Assim, a direção de  $\text{rot } \vec{F}(P)$  é a direção para a qual a circulação ao longo da fronteira de um disco perpendicular a  $\text{rot } \vec{F}(P)$  atinge seu valor máximo quando o disco tende a um ponto.

Uma outra relação entre rotacional e aspectos rotacionais do movimento pode ser obtida da seguinte forma:

Consideremos um fluido em rotação uniforme em torno de um eixo.

Definimos o vetor velocidade angular, denotado por  $\vec{\omega}$ , como sendo o vetor que satisfaz

- (i)  $\vec{\omega}$  tem a direção do eixo de rotação;
- (ii) tem sentido positivo em relação à rotação (“regra da mão direita”);
- (iii)  $\|\vec{\omega}\| = \frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{r}\|}$ .

Note que  $\vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , pois  $\|\vec{F}\| = \|\vec{\omega}\| \|\vec{r}\|$ .

Logo se,  $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$ ,  $P = (x, y, z)$ ,  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  então

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}$$

$$= [\omega_2(z - z_0) - \omega_3(y - y_0)]\vec{i} + [\omega_3(x - x_0) - \omega_1(z - z_0)]\vec{j} + [\omega_1(y - y_0) - \omega_2(x - x_0)]\vec{k}.$$

Calculando  $\text{rot } \vec{F}$  teremos  $2\omega_1\vec{i} + 2\omega_2\vec{j} + 2\omega_3\vec{k}$ . Portanto  $\text{rot } \vec{F} = 2\vec{\omega}$ .

**Observação 15.3.2** *Se temos o movimento de um fluido,  $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j}$ , incompressível (divergente igual a zero) e irrotacional (rotacional igual a zero) no plano então*

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

e

$$\text{rot } \vec{F} = \left[ \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right] \vec{k} = 0,$$

nos dão as *Equações de Cauchy-Riemann*, de grande importância na teoria de funções de variáveis complexas.

## 15.4 Resumo

Temos os seguintes resultados relacionados:

### 1. Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

### 2. Teorema Fundamental para Campos Conservativos:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

### 3. Teorema de Green:

$$\int_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} A dx + B dy.$$

### 3. Teorema da Divergência ou de Gauss:

$$\iiint_B \text{div } \vec{F} dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

### 3. Teorema da Stokes:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Gamma} d\vec{r}.$$

**Exercício 15.4.1** *Prove que se  $\vec{F}$  é um campo de quadrado inverso então  $\vec{F}$  é incompressível e irrotacional*

**Exemplo 15.4.1** *Seja  $S$  uma superfície fechada que é fronteira de uma região  $B$ , com a origem sendo um ponto interior de  $B$ . Se o campo de quadrado inverso é dado por  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{q}{\|\vec{r}\|} \vec{r}$ , onde  $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , prove que o fluxo de  $\vec{F}$  sobre  $S$  é  $4\pi q$ , independente da forma de  $B$ .*



**Resolução:** Vale observar que não podemos aplicar diretamente o teorema da divergência em  $B$ , pois  $\vec{F}$  não é de classe  $C^1$  em  $B$ .

Para resolver esta situação, consideremos a bola  $E$  de centro na origem e raio  $a > 0$  contida em  $B$ . Denotemos a superfície de  $E$  por  $S^1$ .

Como  $\vec{F}$  é de classe  $C^1$  na região  $B_1 \doteq B \setminus E$ , podemos aplicar o teorema da divergência nesta região e obter:

$$\iiint_{B_1} \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S^1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Sabemos que  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , logo

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{S^1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Mas a normal exterior a  $S^1$  pode ser dada por  $\vec{n} = -\frac{1}{\|\vec{r}\|} \vec{r}$  com  $\|\vec{r}\| = a$ . Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= - \iint_{S^1} \left( \frac{q}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \vec{r} \right) \left( -\frac{1}{\|\vec{r}\|} \vec{r} \right) dS \\ &= \iint_{S^1} \frac{q}{\|\vec{r}\|^4} \vec{r} \cdot \vec{r} \, dS = \iint_{S^1} \frac{q}{\|\vec{r}\|^2} \, dS = \iint_{S^1} \frac{q}{a^2} \, dS = \frac{q}{a^2} \iint_{S^1} dS = 4\pi q. \end{aligned}$$

**Exercício 15.4.2** Seja  $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ . Encontre

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

onde  $S$  é a porção do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  delimitada pelos planos  $z = 1$  e  $z = 2$  e  $\vec{n}$  aponta para fora de  $S$ .



# Capítulo 16

## Listas de Exercícios

### 16.1 Lista Preliminar de Exercícios

**Exercício 16.1.1** *Esboce as seguintes regiões no plano:*

- a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .
- b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .
- c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \leq 1, -1 - x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$ .
- d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, 1 \leq x^2 + y^2\}$ .

**Exercício 16.1.2** *Esboce as seguintes regiões no espaço:*

- a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + 2y\}$ .
- b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}$ .
- c)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$ .
- d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, -1 - x^2 - y^2 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ .
- e)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ .
- f)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ .
- g)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .
- h)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - 2x + y^2 \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$ .

**Exercício 16.1.3** *Faça um esboço do gráfico da equação e denomine a superfície, em cada um dos itens abaixo:*

a)  $4x^2 + 9y^2 = 36 - z^2$       b)  $\frac{x^2}{36} = 4 - \frac{y^2}{25}$       c)  $x^2 = y^2 + z^2$

**Exercício 16.1.4** Determine o domínio de  $f$  nos seguintes casos:

$$a) f(x, y) = \frac{xy}{x-2y} \quad b) f(u, v) = \sqrt{1-u} - e^{u/v} \quad c) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^3}$$

**Exercício 16.1.5** Seja  $f(x, y) = x^2 + 2xy$ .

- a) Encontre as curvas de nível  $c$  da função  $f$ , para  $c = 0$  e  $c \neq 0$ .  
 b) Encontre a intersecção da superfície definida por  $f$  com o plano  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .  
 c) Faça um esboço do gráfico de  $f$ .

**Exercício 16.1.6** Faça um esboço das curvas (ou superfícies) de nível das funções abaixo nos níveis indicados.

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y) = x - y, c = 0, 1, 2 & b) f(x, y) = \frac{e^x}{2y}, c = -1/2, 0, 1/2 \\ c) f(x, y) = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}, c = 0, 1, 2 & d) f(x, y) = \sqrt{x+y}, c = 0, 1, 2 \\ e) f(x, y, z) = x - y, c = 0, 1, 2 & f) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}}, c = 0, 1, 2 \\ g) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, c = -1, 0, 2 & h) f(x, y) = xy, c = 0, 1, 2 \end{array}$$

**Exercício 16.1.7** Determinar os pontos  $(x, y)$  onde  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$  das funções abaixo.

- a)  $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$ .  
 b)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .  
 c)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ .  
 d)  $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad (x > 0, y > 0)$ .

## 16.2 Primeira Lista de Exercícios

1. Encontre o polinômio de Taylor de  $f$  em torno do ponto  $(x_0, y_0)$  em cada um dos itens abaixo:

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y) = \sin x \cos y, (x_0, y_0) = (0, 0) & b) f(x, y) = x^2y + y^3x + x^4, (x_0, y_0) = (0, 0) \\ c) f(x, y) = \cos(x^2 + y^2), (x_0, y_0) = (0, 0) & d) f(x, y) = x^2 \cos y, (x_0, y_0) = (1, 0) \end{array}$$

2. Calcular os pontos extremos da função  $z = f(x, y) = (x - y)^6 + (y - 2)^2$ .  
 3. Determine os valores máximos e mínimos de  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  na região  $0 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 2$ .  
 4. Verifique se existem pontos críticos nas seguintes equações e analise-os (se existirem).

$$\begin{array}{ll} a) z = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110 & b) z = \sin(x+y) + \sin x + \sin y \\ c) z = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy & d) z = x^2 \cos y \end{array}$$

5. Dividir 120 em três partes de modo que a soma dos produtos das partes tomadas duas a duas seja máxima.
6. Representar um número positivo  $A$  em forma de produto de quatro fatores positivos, cuja soma seja a menor possível.
7. Determine a reta tangente à curva  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $x > 0$  e  $y > 0$ , que forma com os eixos um triângulo de área mínima.
8. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determinar os extremos condicionados das funções:

$$a) z = xy \text{ quando } x + y = 1 \quad b) u = x^2 + y^2 + z^2 \text{ quando } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(a > b > c > 0)$$

$$c) z = x^2 + y^2 \text{ quando } 3x + 2y = 6 \quad d) u = xyz \text{ quando } x + y + z = 5 \text{ e } xy + yz + zx = 8$$

9. Os leitos de dois rios são aproximadamente representados pela parábola  $y = x^2$  e pela reta  $x - y - 2 = 0$ . Deseja-se reunir os dois cursos por um canal retilíneo de tal maneira que o comprimento seja mínimo. Quais são os pontos pelos quais deve passar tal canal?
10. Achar o comprimento dos eixos da elipse  $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ .
11. Achar a distância mais curta do ponto  $P = (1, 2, 3)$  à reta  $x = -\frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ .
12. Qual o volume do maior paralelepípedo retangular inscrito no elipsóide.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$

13. A temperatura  $T$  em qualquer ponto  $(x, y, z)$  é  $T(x, y, z) = 100x^2yz$ . Encontre as temperaturas máximas e mínimas dentro da região  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ .
14. Determine um ponto  $P$  na elipse  $x^2 + 2y^2 = 6$  e  $Q$  na reta  $x + y = 4$  de modo que a distância de  $P$  a  $Q$  seja a menor possível.
15. Achar a menor distância da origem à superfície  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ . O que se pode falar dos pontos  $(1, 0, 0)$  e  $(-1, 0, 0)$ ?

## 16.3 Segunda Lista de Exercícios

1. Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x)) \quad \text{e} \quad g(u, v, w) = (w^2, 2v - u).$$

- a) Encontre as matrizes jacobianas de  $f$  e  $g$ .
- b) Encontre a matriz jacobiana da composta  $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$ .

2. Sejam  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + z, 2x + y + z^2) \quad \text{e} \quad g(u, v, w) = (w^2, \text{sen } v, e^{u^2}).$$

a) Encontre as matrizes jacobianas de  $f$  e  $g$ .

b) Encontre a matriz jacobiana da composta  $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$ .

3. Considere a transformação  $T(x, y) = (2x, y)$ . Qual a imagem círculo  $x^2 + y^2 = 1$  pela transformação  $T$ ? Faça um esboço da imagem.

4. Considere a transformação  $T(x, y) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$  definida para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

a) Mostre que  $T$  leva círculos centrados na origem de raio  $r$  em círculos centrados na origem de raio  $1/r$ .

b) Mostre que  $T$  leva a semi-reta  $(x, y) = t(x_0, y_0)$ ,  $t > 0$ ,  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  nela mesma.

c) Mostre que a inversa de  $T$  é a própria  $T$ .

5. Verifique que as transformações abaixo são localmente inversíveis em torno do ponto dado.

a)  $T(x, y) = (\text{sen}(x + y), \text{sen } x - \text{sen } y)$   $P_0 = (0, 0)$ .

b)  $T(x, y) = (x, f(x, y))$  em torno de qualquer ponto  $(x_0, y_0)$  onde  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

c)  $T(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$  em torno de qualquer ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  onde  $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \neq 0$ .

6. Seja  $T(u, v) = (u - v, u/v)$  uma transformação definida para  $v \neq 0$ .

a) Calcule  $T(u, u)$ .

b) Mostre que  $T$  admite inversa local em torno de qualquer ponto  $(u_0, v_0)$  com  $u_0 \neq v_0$  e  $v_0 \neq 0$ .

7. Seja  $T(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ .

a) Mostre que  $T$  é localmente inversível em torno de qualquer ponto  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .

b)  $T$  admite inversa se restringirmos seu domínio a todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$  exceto o  $(0, 0)$ ? Justifique.

c) Mostre que o arco de circunferência dado por  $(r \cos \theta, r \text{sen } \theta)$  onde  $0 \leq \theta \leq \pi$  é levado por  $T$  na circunferência centrada na origem e raio  $r^2$ .

8. Mostre que a equação  $f(x, y) = 0$  define uma função implícita  $y = g(x)$  em torno do ponto  $(x_0, y_0)$  e calcule  $g'(x)$  nos seguintes casos:

a)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 2)$

b)  $f(x, y) = 2e^{x+y} - x + y$ ,  $(x_0, y_0) = (1, -1)$

c)  $f(x, y) = xy - 1$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ . Calcule também  $g''(1)$ .

9. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivada contínua. Apresente uma condição que imposta a  $f$  possibilitará que a equação

$$2f(xy) = f(x) + f(y)$$

defina implicitamente  $y$  como uma função de  $x$  em torno de  $(1, 1)$ .

10. Se  $x_o \neq 0$  e  $x_o \neq 1$  mostre que se  $(x, y)$  está suficientemente próximo a  $(x_o, 0)$  a equação  $\text{sen}(x^2y) - xy = 0$  é equivalente a  $y = 0$ .
11. Qual é o lugar geométrico dos pontos  $(x, y)$  que satisfazem a equação:
- $y^2 + x^2e^y = 0$ ?
  - $(e^{\text{sen } x} - 1)^2 + (\text{sen } y - 1)^2 = 0$ ?
  - Estude as equações anteriores de acordo com o Teorema das Funções Implícitas e veja se está tudo bem.
12. Se  $F(x, y) = x^2 + y^2 - x^3$  ache a solução  $y = f(x)$  de  $F(x, y) = 0$  :
- em uma vizinhança de  $(5, 10)$ .
  - em uma vizinhança de  $(10, -30)$ .
  - Observe que  $y^2 = x^3 - x^2 \geq 0$ . Logo, existe uma região do plano onde esta equação não tem solução. Qual é ela?
  - Em que pontos  $(x_o, y_o)$  do lugar geométrico  $F(x, y) = 0$  nós não temos um intervalo  $I$  contendo  $x_o$  tal que  $F(x, y(x)) = 0$  para todo  $x \in I$ .

## 16.4 Terceira Lista de Exercícios

- Dado  $\int_2^4 dy \int_1^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy$ , caracterizar  $D$ .
- Escreva a integral dupla equivalente, invertendo a ordem de integração para cada um dos problemas abaixo. Verifique o resultado, calculando ambas as integrais
  - $\int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx$
  - $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx dy$
  - $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy$
  - $\int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy dx$
- Calcule, utilizando integral dupla, a área da região compreendida entre:
  - o gráfico das funções  $y = x$  e  $y = -x^2 + x + 1$  com  $-1 \leq x \leq 1$ .
  - o gráfico das funções  $y = \text{sen } x$  e  $y = 1 - \cos x$  com  $0 \leq x \leq \pi/2$ .
  - o gráfico das funções  $y = x$  e  $y = e^x$  com  $0 \leq x \leq 1$ .
- Calcule o volume de cada um dos sólidos e faça os gráficos desses sólidos:
  - sólido delimitado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 1$  e pela superfície cilíndrica  $z = 1 - x^2$ ;
  - sólido delimitado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = y$  e pela superfície cilíndrica  $z = 4 - y^2$ ;
  - sólido delimitado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = y$  e pelo cilindro  $x^2 + z^2 = 1$ .

5. Determinar a área no primeiro quadrante, limitada pela parábola  $x - y = (x + y)^2 + 1$  e pela reta  $x - y = 4$ . Sugestão: Faça  $u = x - y$  e  $v = x + y$ .
6. Calcular  $\iint_D (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy$ , onde  $D$  é o paralelogramo de vértices:  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$  e  $(0, \pi)$ . Sugestão: Usar a transformação:  $u = x - y$  e  $v = x + y$ .
7. Determinar a área do anel dado por dois círculos concêntricos de raios  $a$  e  $b$ ,  $b > a$ .
8. Achar o volume do sólido  $S$ , limitado pelo parabolóide  $x^2 + y^2 = 4z$  e pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 8y$  e pelo plano  $z = 0$ .
9. Determinar o volume  $V$  do sólido constituído pelo cone  $(z - 3)^2 \geq x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 2$  e pelo cilindro  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $2 \leq z \leq 5$ .
10. Determinar os intervalos de variação das coordenadas de um ponto pertencente à região  $R$ :
  - (a) Quando se abre um furo de raio  $a$  numa esfera de raio  $2a$ , sendo o eixo do furo um diâmetro da esfera;
  - (b) limitado pelos cilindros:  $x^2 + y^2 = 16$  e  $x^2 + z^2 = 16$ ;
  - (c) limitado pelo parabolóide  $r^2 = 9 - z$  e pelo plano  $z = 0$ .
11. Determinar o volume interno ao cilindro  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $0 \leq z \leq 6$  e externo ao cone  $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}z^2$ ,  $z \geq 0$ .
12. Dada a integral  $\iiint_D z dx dy dz$  onde  $D$  é o sólido definido pelas desigualdades  $x^2 + y^2 \leq z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ ,  $z \geq 0$ . Determine os extremos de integração, e escreva as integrais iteradas usando:
  - a) coordenadas cartesianas; b) coordenadas cilíndricas; c) coordenadas esféricas.
 Calcule esta integral usando o sistema de coordenadas que achar mais conveniente.
13. Calcule o volume do sólido definido pelas desigualdades  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $3 \leq z \leq 6$ ;  $x^2 + y^2 \leq z^2$ ,  $0 \leq z \leq 3$  e  $x^2 + y^2 \geq 1$ . Sugestão: usar coordenadas cilíndricas.
14. Calcular o volume do sólido constituído pelo cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 2$  e pelo cone  $x^2 + y^2 \leq z^2$ ,  $2 \leq z \leq 5$ .
15. Seja  $R$  a região limitada pelo parabolóide  $z = 2x^2 + y^2 + 1$ , pelo plano  $x + y = 1$  e pelos planos coordenados. Calcule o volume de  $R$ .



16. Calcule as integrais abaixo usando a sistema de coordenadas mais conveniente:

$$(a) \int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx dz$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz dx dy$$

(c) Seja  $S$  a região limitada pelo tetraedro formado pelo plano  $12x + 20y + 15z = 60$  e os planos coordenados. Calcule:

$$a) \iiint_S y dV \quad b) \iiint_S (x^2 + y^2) dV$$

Seja  $\mu : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua sobre  $B$ . Se  $\mu(x, y)$  indicar a densidade de massa no ponto  $(x, y)$  então define-se:

$$a) \text{ Massa de } B: M = \iint_B \mu(x, y) dx dy$$

b) **Centro de massa de  $B$**  é o ponto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$  com  $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ ,  $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$  onde

$$M_x = \iint_B y \mu(x, y) dx dy = \text{momento de } B \text{ em relação ao eixo } x$$

$$M_y = \iint_B x \mu(x, y) dx dy = \text{momento de } B \text{ em relação ao eixo } y$$

Observação: Se  $\mu(x, y) = \text{constante} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  é chamado **centróide**.

c) momento de inércia com relação ao eixo  $x$  :  $I_x = \iint_B y^2 \mu(x, y) dx dy$  momento de

inércia com relação ao eixo  $y$  :  $I_y = \iint_B x^2 \mu(x, y) dx dy$  momento de inércia polar ou em

relação à origem:  $I_0 = \iint_B (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy$ .

Baseado nas definições acima resolver:

1. Uma lâmina plana é limitada pelos gráficos de  $y = x^2$  e  $x = 4$ , Ache o centro de massa, sabendo-se que a densidade no ponto  $P = (x, y)$  é diretamente proporcional à distância de  $P$  ao eixo  $y$ .
2. Seja a elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  a forma de uma placa. Seccionando-se a placa segundo o segmento que liga o ponto  $(0, b)$  ao ponto  $(a, 0)$ , pede-se o centróide da porção seccionada da placa.
3. Encontre o momento de inércia de uma placa semi-circular de raio  $a$ , sabendo-se que a densidade em  $P = (x, y)$  é diretamente proporcional à distância de  $P$  ao diâmetro da placa.
4. Calcule  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_0$  para a lâmina que tem a forma da região limitada pelos gráficos de  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 8$ ,  $y = 0$  cuja densidade é  $\mu(x, y) = y^2$ .

5. Uma lâmina homogênea tem a forma de um quadrado de lado  $a$ . Determine o momento de inércia em relação a:

a) um lado; b) uma diagonal; c) o centro de massa.

## 16.5 Quarta Lista de Exercícios

1. Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  sendo dados:

(a)  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  e  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Resp.  $2\pi^2$ .

(b)  $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{j}$  e  $\gamma(t) = (t^2, 3)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Resp. 0.

(c)  $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + (x - y)\vec{j}$  e  $\gamma(t) = (t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Resp.  $\frac{\pi^3}{3} - 2$ .

(d)  $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$  e  $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Resp.  $\frac{8\pi^3}{3}$ .

2. Uma partícula desloca-se em um campo de forças dado por  $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ . Calcule o trabalho realizado por  $\vec{F}$  no deslocamento da partícula de  $\gamma(a)$  até  $\gamma(b)$ , sendo dados

(a)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $a = 0$  e  $b = 2\pi$ . Resp.  $2\pi(\pi + 1)$ .

(b)  $\gamma(t) = (2t + 1, t - 1, t)$ ,  $a = 1$  e  $b = 2$ . Resp.  $9/2$ .

(c)  $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ ,  $a = 0$  e  $b = 2\pi$ . Resp. 0.

3. Calcule  $\int_{\gamma} x dx + y dy$ , sendo  $\gamma$  dada por  $x = t^2$  e  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ . Resp.  $\frac{\pi^4}{32} + \frac{1}{2}$ .

4. Calcule  $\int_{\gamma} x dx + y dy$ , sendo  $\gamma$  o segmento de extremidades  $(1, 1)$  e  $(2, 3)$  percorrido no sentido de  $(1, 1)$  para  $(2, 3)$ . Resp.  $-\frac{11}{2}$ .

5. Calcule  $\int_{\gamma} x dx + y dy + z dz$ , sendo  $\gamma$  o segmento de retas de extremidades  $(0, 0, 0)$  e  $(1, 2, 1)$  percorrido no sentido de  $(0, 0, 0)$  para  $(1, 2, 1)$ . Resp. 3.

6. Calcule  $\int_{\gamma} x dx + dy + 2 dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  com o plano  $z = 2x + 2y - 1$ ; o sentido de percurso deve ser escolhido de modo que a projeção de  $\gamma(t)$ , no plano  $xy$ , caminhe no sentido anti-horário. Resp. 0.

7. Calcule  $\int_{\gamma} 2x dx - dy$ , onde  $\gamma$  tem por imagem  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ ; o sentido de percurso é de  $(2, 0)$  para  $(0, 2)$ . Resp.  $-6$ .

8. Calcule  $\int_{\gamma} \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy$ , onde  $\gamma$  tem por imagem  $4x^2 + y^2 = 9$ ; o sentido de percurso é anti-horário. Resp.  $\pi$ .

9. Seja  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Mostre que

$$\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

não depende de  $R > 0$ .

10. Calcule  $\int_{\gamma} \sqrt[3]{x} dx + \frac{dy}{1+y^2}$ , onde  $\gamma$  é o quadrado centrado na origem e lado 2 percorrido no sentido anti-horário. Resp. 0.
11. Calcule  $\int_{\gamma} F \cdot dr$  onde  $F(x, y) = (0, x + y^2)$  e  $\gamma$  é a curva do exercício anterior. Resp. 4.
12. Calcule  $\int_{\gamma} (x - y) dx + e^{x+y} dy$ , onde  $\gamma$  é a fronteira do triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 2)$ , orientada no sentido anti-horário. Resp.  $\frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} + \frac{5}{6}$ .
13. (a) Demonstrar que  $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$  é independente do caminho de  $(1, 2)$  a  $(3, 4)$ .  
(b) Calcule a integral do item anterior. [Resp. : 236]
14. Provar que  $\vec{F} = (2xz^3 + 6y)\vec{i} + (6x - 2yz)\vec{j} + (3x^2z^2 - y^2)\vec{k}$  é um campo conservativo, isto é,  $\vec{F}$  provém de um potencial.
15. Calcular  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot dr$  onde  $\gamma$  é um caminho entre  $(1, -1, 1)$  e  $(2, 1, -1)$ .

16. Mostre que  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  independe do caminho determinando uma função potencial  $f$  para  $\vec{F}$ :

- (a)  $\vec{F}(x, y) = (3x^2y + 2)\vec{i} + (x^3 + 4y^3)\vec{j}$   
 (b)  $\vec{F}(x, y) = (2x \operatorname{sen} y + 4e^x)\vec{i} + (x^2 \cos y + 2)\vec{j}$   
 (c)  $\vec{F}(x, y) = (2y^3 \operatorname{sen} x)\vec{i} + (6y^2 \cos x + 5)\vec{j}$

17. Comprovar o Teorema de Green nos casos abaixo, isto é, verifique que

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

- (a)  $\oint_{\gamma} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$  sendo  $\gamma$  a curva fechada do domínio limitado entre  $y = x^2$  e  $y^2 = x$ .  
 (b)  $\vec{F} = xy\vec{i} - 2xy\vec{j}$ ,  $D$  é o retângulo  $1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 3$   
 (c)  $\vec{F} = e^x \operatorname{sen} y\vec{i} + e^x \cos y\vec{j}$ ,  $D$  é  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$   
 (d)  $\vec{F} = (\frac{2}{3}xy^3 - x^2y)\vec{i} + x^2y^2\vec{j}$ ,  $D$  é o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ .

18. Usando o Teorema de Green, calcular:

- (a)  $\oint e^x \operatorname{sen} y dx + e^x \cos y dy$  sobre o retângulo de vértices :  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, \pi/2)$  e  $(0, \pi/2)$ .  
 (b)  $\oint_{\gamma} 2x^2y^3 dx + 3xy dy$  onde  $\gamma$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

19. Usando integral de linha, calcule a área da região delimitada pelas curvas  $y = x + 2$  e  $y = x^2$ .

20. Usando integral de linha, calcule a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas curvas  $4y = x$ ,  $y = 4x$  e  $xy = 4$ .

21. Calcule  $\oint_C \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ , onde  $C$  é o arco de parábola  $y = x^2 - 1$ ,  $-1 \leq x \leq 2$ , seguido pelo segmento de  $(2, 3)$  a  $(-1, 0)$  (Aplicar o Teorema de Green).

22. Calcule

- (a)  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds$ , onde  $\gamma(t) = (t, t)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Resp.  $4\sqrt{2}/3$ .  
 (b)  $\int_{\gamma} (2xy + y^2) ds$ , onde  $\gamma(t) = (t + 1, t - 1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Resp.  $-\sqrt{2}$ .  
 (c)  $\int_{\gamma} xyz ds$ , onde  $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Resp.  $-\pi\sqrt{2}/2$ .  
 (d)  $\int_{\gamma} (x + y + z) ds$ , onde  $\gamma(t) = (t, 2t, 3t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Resp.  $3\sqrt{14}$ .

23. Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ , onde  $\vec{T}$  é o vetor unitário tangente à curva  $C$ , nos seguintes casos:

- (a)  $\vec{F} = xy\vec{i} - y\vec{j} + \vec{k}$ ,  $C$  é o segmento de reta de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$ ;  
 (b)  $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $C$  é dada por  $x = \cos \theta$ ,  $y = \operatorname{sen} \theta$ ,  $z = \frac{\theta}{\pi}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;

## 16.6 Quinta Lista de Exercícios

*OBS.: Nos exercícios abaixo utilize a orientação positiva caso não seja especificado nada em contrário.*

- Verifique se o campo  $\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$  é o gradiente de alguma função escalar no paralelepípedo  $1 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 3$ ,  $2 \leq z \leq 4$ .
- Calcule a área do parabolóide hiperbólico  $z = xy$  que fica dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .  
Resp.  $\frac{2}{3}\pi[2\sqrt{2} - 1]$ .
- Calcule as seguintes integrais de superfície:
  - $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , onde  $S$  é a esfera de centro na origem e raio  $a$ . Resp.  $\frac{8}{3}\pi a^4$ .
  - $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$ , onde  $S$  é a superfície lateral do cone  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ ,  $0 \leq z \leq b$ .  
Resp.  $\frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3}$ .
  - $\iint_S \sqrt{1 + y^2} dS$ , onde  $S$  é dada por  $z = y^2/2$ ,  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ . Resp.  $4/3$ .
- Calcule  $\int \int_S f(x, y, z) dS$ , onde:
  - $f(x, y, z) = 1$ ,  $S$  é a porção do plano  $x + y + z - 1 = 0$  no primeiro octante
  - $f(x, y, z) = x^2$ ,  $S$  é a parte do plano  $z = x$  interior ao cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
  - $f(x, y, z) = x^2$ ,  $S$  é o hemisfério superior  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
  - $f(x, y, z) = x + y$ ,  $S$  é a porção do plano  $2x + 3y + z = 6$  situada no primeiro octante.
  - $f(x, y, z) = x$  e  $S$  é dada na forma paramétrica  $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v)$ ,  $0 \leq u \leq 1$  e  $u^2 \leq v \leq 1$ . Resp.  $\frac{\sqrt{2}}{10}(3\sqrt{3} - 2)$ .
  - $f(x, y, z) = xy$  e  $S$  é dada na forma paramétrica  $\sigma(u, v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1)$ ,  $0 \leq u \leq 1$  e  $0 \leq v \leq u$ . Resp.  $\sqrt{14}/6$ .
  - $f(x, y, z) = y$  e  $S$  é dada na forma paramétrica  $\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u^2)$ ,  $0 \leq u \leq 1$  e  $0 \leq v \leq \sqrt{u}$ . Resp.  $\frac{1}{24}(5\sqrt{5} - 1)$ .
- Calcule  $\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , nos seguintes casos:
  - $\vec{F} = (x + 1)\vec{i} - (2y + 1)\vec{j} + z\vec{k}$  e  $S$  é o triângulo de vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$
  - $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$  e  $S$  é a parte do cone  $z^2 = x^2 + y^2$ , para  $z$  entre 1 e 2
  - $\vec{F} = xy\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$  e  $S$  é a parte do cilindro  $y^2 = 2 - x$  cortado pelos cilindros  $y^2 = z$  e  $y = z^3$ .
- Aplicando o teorema de Stokes, achar as integrais abaixo.
  - $\int_{\gamma} (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$ . Resp. 0.
  - $\int_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ , onde  $\gamma$  é a elipse  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + z = 0$ .  
Resp.  $-4\pi$ .

- c)  $\int_{\gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , onde  $\gamma$  é o triângulo de vértices  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, a, 0)$  e  $(0, 0, a)$ ,  $a > 0$ . Resp.  $-a^3$ .
- d)  $\vec{F} = (3z - \operatorname{sen} x)\vec{i} + (x^2 + e^y)\vec{j} + (y^3 - \cos z)\vec{k}$ , e  $C$  a curva  $x = \cos t$ ,  $y = \operatorname{sen} t$ ,  $z = 1$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$
- e)  $\vec{F} = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$  e  $C$  o quadrado de vértices  $(0, 0, 2)$ ,  $(1, 0, 2)$ ,  $(1, 1, 2)$  e  $(0, 1, 2)$ .
- f)  $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , onde  $\vec{F} = 2y\vec{i} + e^z\vec{j} - \arctan x\vec{k}$  e  $S$  é a parte do parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  acima do plano  $z = 0$  e  $\vec{n}$  é a normal superior. Obs.  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{F}$ .
7. Comprove o teorema de Stokes nos casos em que o campo  $\vec{F}(x, y, z)$  e a superfície  $S$  são dados por:
- a)  $\vec{F} = (x, y, z)$  e  $S$  é a parte superior da esfera unitária centrada na origem.
- b)  $\vec{F} = (3z, 4x, 2y)$  e  $S$  é a porção do parabolóide  $z = 10 - x^2 - y^2$  compreendida entre os planos  $z = 1$  e  $z = 9$ .
- c)  $\vec{F} = (x^4, xy, z^4)$  e  $S$  é o triângulo de vértices  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  e  $(0, 0, 2)$ . Resp.  $4/3$ .
- d)  $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$  e  $S$  é a parte do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$ , com  $z \geq 0$
- e)  $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} - 2xz\vec{k}$  e  $S$  é  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$
- f)  $\vec{F} = z\vec{i} - x\vec{k}$  e  $S$  é a parte do cilindro  $r = 2 + \cos \theta$  acima do plano  $xy$  e abaixo do cone  $z^2 = x^2 + y^2$ .
8. Usando o teorema de Gauss, calcule o fluxo dos campos abaixo através na direção da normal exterior das respectivas superfícies:
- a)  $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$  e  $S$  é a face do cubo  $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ . Resp.  $3a^4$ .
- b)  $\vec{F} = (x, y, z)$  e  $S$  é a face da pirâmide limitada pelos planos  $x + y + z = a$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ . Resp.  $a^3/2$ .
- c)  $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$  e  $S$  é a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Resp.  $\frac{12}{5}\pi a^5$ .
- d)  $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$  e  $S$  é o cone  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ ,  $0 \leq z \leq b$ . Resp.  $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$ .
- e)  $\vec{F} = y \operatorname{sen} x\vec{i} + y^2 z\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$ ;  $S$  a superfície da região limitada pelos planos  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ ,  $z = \pm 1$
- f)  $\vec{F} = y^3 e^z\vec{i} - xy\vec{j} + x \arctan y\vec{k}$ ;  $S$  a superfície da região limitada pelos planos coordenados e pelo plano  $x + y + z = 1$
- g)  $\vec{F} = ye^z\vec{i} + (y - ze^x)\vec{j} + (xe^y - z)\vec{k}$ ,  $S$  o toro  $(\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 = a^2$ ,  $0 < b < a$
- h)  $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $S$  é formada por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = x + 2$ .
9. Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (2x, 5y, z)$  que atravessa a superfície  $S$ , sabendo-se que  $S$  é uma luva com volume de  $15 \text{ cm}^3$  e que sua abertura é a circunferência  $\{(x, y, 0); x^2 + y^2 = 8\}$ .

10. Calcule o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (z \cos y^7, z^3 e^{x^2}, z)$  sobre o parabolóide (sem tampa)  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
11. Verifique o Teorema de Gauss, sendo  $\vec{F} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$  e  $S$  a superfície da região  $Q$  limitada por  $y = x^2$  e  $z^2 = 4 - x$ .
12. Usando o Teorema de Gauss, calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , onde  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal exterior a  $S$  e
- $\vec{F} = y \sin x\vec{i} + y^2 z\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$ ;  $S$  a superfície da região limitada pelos planos  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ ,  $z = \pm 1$ ;
  - $\vec{F} = y^3 e^{z^2}\vec{i} - xy\vec{j} + x \arctan y\vec{k}$ ;  $S$  a superfície da região limitada pelos planos coordenados e pelo plano  $x + y + z = 1$ ;
  - $\vec{F} = ye^{z^2}\vec{i} + (y - ze^x)\vec{j} + (xe^y - z)\vec{k}$ ,  $S$  o toro  $(\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 = a^2$ ,  $0 < b < a$ ;
  - $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $S$  é formada por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = x + 2$ .
13. Verifique o Teorema de Stokes:
- $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$  e  $S$  é a parte do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$ , com  $z \geq 0$ ;
  - $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} - 2xz\vec{k}$  e  $S$  é  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ ;
  - $\vec{F} = z\vec{i} - x\vec{k}$  e  $S$  é a parte do cilindro  $r = 2 + \cos \theta$  acima do plano  $xy$  e abaixo do cone  $z^2 = x^2 + y^2$ .
14. Use o Teorema de Stokes para calcular  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{R}$ , sendo
- $\vec{F} = (3z - \sin x)\vec{i} + (x^2 + e^y)\vec{j} + (y^3 - \cos z)\vec{k}$ , e  $C$  a curva  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 1$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ;
  - $\vec{F} = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$  e  $C$  o quadrado de vértices  $(0, 0, 2)$ ,  $(1, 0, 2)$ ,  $(1, 1, 2)$  e  $(0, 1, 2)$ .
15. Use o Teorema de Stokes para calcular  $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , onde  $\vec{F} = 2y\vec{i} + e^z\vec{j} - \arctan x\vec{k}$  e  $S$  é a parte do parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  acima do plano  $z = 0$  e  $\vec{n}$  é a normal superior.
16. Verifique se o campo  $\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$  é o gradiente de alguma função escalar no paralelepípedo  $1 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 3$ ,  $2 \leq z \leq 4$ .

# Índice Remissivo

- campo
  - conservativo, 123
  - fluxo de um, 149
  - gradiente, 106
  - vetorial, 106
- conjunto
  - conexo, 121
  - simplesmente conexo, 127
  - suave, 70
  - volume de um, 74
- coordenadas
  - cilíndricas, 42
  - esféricas, 42
  - polares, 41
- divergente, 153
- fórmula de Taylor, 16
- hessiano, 15
  - teste do –, caso bidimensional, 16
  - teste do –, caso geral, 18
- independência do caminho, 118
- integral, 69
  - de linha, 113
  - de linha relativa ao comprimento de arco, 110
  - de superfície, 144
  - iterada, 65
  - mudança de variáveis na, 83
- lista de exercícios
  - prelimininar, 163
  - primeira, 164
  - quarta, 170
  - quinta, 173
  - segunda, 165
  - terceira, 167
- matriz
  - hessiana, 15
  - jacobiana, 41
  - multiplicador de Lagrange, 31
- polinômio de Taylor, 5
- ponto
  - crítico, 15
  - de máximo, 13
  - de máximo local, 13
  - de mínimo, 13
  - de mínimo local, 13
  - de sela, 7
- região, 121
- rotacional, 153
- superfície, 141
  - área de uma, 144
  - parametrização de uma, 141
  - parametrizada, 141
  - regular, 142
- teorema
  - de Gauss, 155
  - da divergência, 155
  - da função inversa, 52
  - das funções implícitas, 60
  - de Green, 133
  - de Stokes, 158
- transformação, 39
  - inversa, 39
  - inversa local de uma, 52
- vínculo, 29