UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

"Sobre a geometria local de hipersuperfícies em R^4"

Ana Claudia Nabarro

São Carlos - SP

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 24/05/2000

Assinatura: Marili Andrade

"Sobre a geometria local de hipersuperfícies em R^4"

Ana Claudia Nabarro

Orientador: ***Prof. Dr. Farid Tari***

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Área: Matemática.

USP – São Carlos
Maio de 2000

Trabalho realizado com o apoio da FAPESP

Agradecimentos

"Obrigada Pai pelas oportunidades e pelo conforto nas horas difícies"

Sou muito grata ao meu orientador Farid Tari por propor o problema, me encorajar e guiar, e também por sua paciência e compreensão. Agradeço a ele e à sua esposa Stephanie pela hospitalidade e amizade, em especial quando estive em Liverpool. 'Thank u'.

À minha mãe pelo esforço, incentivo e por ser uma ótima avó. Ao meu pai (...). Ao meu irmão que foi um bom tio nas horas vagas, e a toda minha família pelo constante apoio e carinho. Amo todos vocês.

Ao meu filho, que mesmo tão pequeno parece compreender as situações, especialmente quando precisamos estar separados. Ao meu esposo Jean pelo incentivo e pelo apoio destes últimos meses que foi muito importante para mim. Continue assim.

Aos professores do ICMC, em especial à Cidinha e Gaspar, Ires, Maria do Carmo, Dide, Ladeira, Paulo Porto, Leon e Zani com os quais muito aprendi e os quais jamais esquecerei. Aos professores e amigos da Unesp de Rio Claro. Vocês todos foram e são muito importantes para mim.

Eu gostaria de agradecer ao professor Bruce por me receber na Universidade de Liverpool e também pelas suas dicas e conversas. Agradeço Neil Kirk por permitir o uso do seu programa "Transversal", que nos foi muito útil e também pelas conversas que esclareceram o uso deste programa. Thank you.

Não posso me esquecer de todos os amigos: Aninha, Alexandra, Claudemir, Eliane, Fernando, Ivan, José, Leonilce, Luciana, Luciene, Mara, Marcão, Marcia, Marcio, Maria Alice, Nina, Regilene, Sadao, Sarita, Simone, Tinho, Vera, Victor, Willian, ..., que tornaram esta caminhada mais agradável. É bom ter amigos assim.

Aos funcionários deste Instituto e da Universidade de Liverpool pela atenção. Muito obrigada.

Às pessoas que direta ou indiretamente colaboraram com este trabalho e que estiveram presentes quando eu precisava. Um simples sorriso foi muito importante.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro durante todo este trabalho.

Resumo

O objetivo desta tese é estudar a geometria diferencial plana local de uma hipersuperfície regular M em $\mathbb{R}^4$, usando a teoria de singularidades. Esta geometria é obtida através do estudo do contato de M com retas, planos e hiperplanos. O contato com hiperplanos (respectivamente, retas e planos) é medido através das singularidades dos elementos da família de funções altura $H : M \times S^3 \to \mathbb{R}$ (respectivamente, família de projeções $P : M \times S^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\Pi : M \times G(2,4) \to \mathbb{R}^2$), onde S^3 é a esfera unitária em $\mathbb{R}^4$, e $G(2,4)$ é a Grassmaniana de 2-planos em $\mathbb{R}^4$.

Escrevendo M localmente na forma de Monge $w = f(x,y,z)$ obtemos as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f para identificar as singularidades genéricas de H_u, P_u e Π_u. Estudamos as estruturas dos conjuntos em M de um dado tipo de singularidade, usando a aplicação Monge-Taylor e os teoremas de transversalidade de Thom. Além disso, mostramos que existe uma relação de dualidade entre certos estratos dos conjuntos de bifurcações de H e P, e deduzimos propriedades geométricas sobre estes conjuntos. Estudamos também o comportamento de P em um ponto umbílico plano parcial.

A família Π é de 4 parâmetros, portanto as singularidades genéricas que ocorrem são aquelas de codimensão ≤ 4. Precisamos então completar a tabela de singularidades dos germes $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ em [46]. Fizemos isso usando o programa "Transversal" feito por Neil Kirk [27]. Obtemos critérios geométricos para reconhecer as singularidades de codimensão ≤ 1 e para estabelecer quando Π é um desdobramento versal de Π_u.

Abstract

We initiate in this thesis the study of the local flat geometry of smooth hypersurfaces M in $\mathbb{R}^4$ using singularity theory. This geometry is obtained by studying the contact of M with lines, planes and hyperplanes. The contact with hyperplanes (respectively, lines and planes) is measured by the singularities of the elements of the family of height functions $H : M \times S^3 \to \mathbb{R}$ (respectively, projections to hyperplanes $P : M \times S^3 \to \mathbb{R}^3$, and projections to planes $\Pi : M \times G(2,4) \to \mathbb{R}^2$), where S^3 is the unit sphere in $\mathbb{R}^4$, and $G(2,4)$ is the Grassmanian of 2-planes in $\mathbb{R}^4$.

We write locally M in Monge form $w = f(x,y,z)$ and obtain the conditions on the coefficients of the Taylor expansion of f for identifying the generic singularities of H_u, P_u and Π_u. We study the local structures of the set of points in M of a given singularity type using the Monge-Taylor map and Thom's transversality theorems. We also show that there is a duality relation between some strata of the bifurcation sets of H and P, and deduce geometric properties about these sets. We study in more details the behaviour of P at a partial flat umbilic point.

The family Π is of 4 parameters, so the generic singularities that occur in Π_u are of codimension ≤ 4. Therefore we need to complete the list of singularities of germs $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ given in [46]. We do this using "Transversal", a program elaborated by Neil Kirk [27]. We also obtain geometric criteria for recognizing the codimension ≤ 1 singularities of Π_u and for establishing when Π is a versal unfolding of Π_u.

Índice

Introdução **1**

1 Preliminares **6**

1.1 Germes e jatos 6

1.1.1 Grupos de Mather 8

1.1.2 Os espaços tangentes e a determinação finita 9

1.1.3 Desdobramentos versais 14

1.1.4 Genericidade e transversalidade 17

1.2 Geometria de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$ 18

2 Contato com hiperplanos **21**

2.1 As singularidades genéricas da função altura 21

2.2 Desdobramento versal 25

2.2.1 Conseqüências geométricas 27

2.3 A geometria proveniente do contato com hiperplanos 28

3 Contato com retas **43**

3.1 As singularidades genéricas da projeção ortogonal 43

3.2 As estruturas locais dos tipos de singularidades simples de codimensão ≤ 2 47

3.3 Demonstração da Proposição 3.4 59

3.4 Demonstrações das Proposições 3.8-3.13 70

3.4.1 Demostração da Proposição 3.8 70

3.4.2 Demostração da Proposição 3.9 74

3.4.3 Demostração da Proposição 3.10 75

3.4.4 Demostração da Proposição 3.12 83
3.4.5 Demostração da Proposição 3.13 84

4 Dualidade **88**
4.1 O resultado de dualidade entre H e P 89
4.1.1 Conseqüências 93
4.2 Umbílicos planos parciais 95

5 Germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ **100**
5.1 Introdução 100
5.2 As singularidades de corank 1 101
5.3 Exemplo dos cálculos feitos no "Transversal" 106
5.4 Diagramas de bifurcação das singularidades simples de codim ≤ 2 110
5.5 Condições geométricas para reconhecimento de singularidades de $\mathcal{A}_e$-codim ≤ 1 113
5.6 Reconhecimento geométrico dos desdobramentos versais das singularidades de $\mathcal{A}_e$-codim ≤ 1 120

6 Contato com planos **125**
6.1 Introdução 125
6.2 As singularidades simples de codimensão ≤ 2 da projeção em planos 127
6.3 Estratificação do espaço dos planos singulares 131
6.4 Desdobramento versal das singularidades simples de codimensão ≤ 2 136

Referências Bibliográficas **140**

Introdução

Nas últimas três décadas a teoria de singularidades não somente reinterpretou resultados clássicos da geometria diferencial de subvariedades mergulhadas em $\mathbb{R}^n$, mas também permitiu a descoberta de resultados fascinantes sobre esta geometria. Estes novos resultados seguiram da sugestão de René Thom que consiste em estudar o contato da subvariedade com objetos degenerados tais como planos, retas, esferas, círculos, etc. Estes contatos são medidos através das singularidades de algumas funções ou aplicações.

Em textos antigos da geometria diferencial encontramos a noção de k-ponto de contato entre duas curvas planas. Para o contato entre uma subvariedade e uma curva a mesma definição pode ser usada, mas para duas subvariedades quaisquer esta definição apresenta problemas. O primeiro presente da teoria de singularidades para a geometria diferencial foi a correta generalização da noção de k-ponto de contato. A idéia chave é a de equivalência de contato $\mathcal{K}$, introduzida por Mather. Montaldi [37] mostrou que se uma subvariedade é parametrizada localmente por $\phi : \mathbb{R}^s, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ e a outra é definida localmente por uma submersão $\psi : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^{n-r}, 0$ (ou vice-versa), o contato entre estas subvariedades é medido pelas $\mathcal{K}$-classes da composta $\psi \circ \phi : \mathbb{R}^s, 0 \to \mathbb{R}^{n-r}, 0$. Na prática usamos o grupo $\mathcal{A}$, pois ele mede também o contato com as fibras vizinhas de $\psi^{-1}(0)$, e fornece mais informações geométricas.

O primeiro trabalho então é de estudar as $\mathcal{A}$-singularidades de germes de $\mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$. Existem listas de classificações para $n + p \leq 6$. Gostaríamos de enfatizar que cada caso (n, p) precisa ser tratado individualmente. Portanto, embora existam teoremas gerais sobre a aplicação da teoria de singularidades à geometria de subvariedades $M^s \subset \mathbb{R}^n$, cada par (s, n) tem suas peculiaridades e precisa ser estudado separadamente.

As informações geométricas sobre subvariedades obtidas através do contato com objetos planos (tais como retas e planos) e esféricos (tais como círculos e esferas) são chamadas respectivamente geometria plana e geometria esférica. Comentamos a seguir alguns casos estudados. Ver [7] para os resultados sobre este assunto entre os anos de 1974 e 1994.

Sejam S^{n-1} a hiperesfera em $\mathbb{R}^n$, com centro na origem e raio um e $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade de dimensão s. A família de projeções em retas, chamada família de funções altura, é definida como

$$\begin{array}{rccc} H\colon & M \times S^{n-1} & \to & \mathbb{R} \\ & (p,u) & \mapsto & \langle p,u \rangle. \end{array}$$

A família de funções distância ao quadrado, é definida como

$$\begin{array}{rccc} d^2\colon & M \times S^{n-1} & \to & \mathbb{R} \\ & (p,u) & \mapsto & \| p-u \|^2. \end{array}$$

Lembramos que o contato de M com hiperplanos (respectivamente, com hiperesferas) de dimensão $n-1$ é medido através das singularidades da função altura H (respectivamente, distância ao quadrado d^2).

Para curvas planas, uma reta que tem um ponto de contato dois com uma curva (ou seja, H tem uma singularidade A_1) é simplesmente uma reta tangente, enquanto ter um ponto de contato três (singularidade A_2 de H) corresponde a uma tangente de inflexão. Note que a maioria das curvas não têm contato maior com retas, na antiga terminologia não existem ondulações sobre uma curva genérica. Para contato com círculos, singularidades A_1 de d^2 correspondem à família a 1-parâmetro de círculos tangentes. Temos um contato A_2 se o círculo é o círculo de curvatura, e um contato A_3 se o ponto em questão é também um vértice (isto é, um extremo de curvatura). Esta é uma lista completa de fenômenos genéricos.

Para curvas espaciais um plano tem contato A_1 (isto é, H tem singularidade A_1) se ele é simplesmente o plano tangente, enquanto uma singularidade A_2 acontece se o plano é osculador. Este plano osculador tem contato A_3 em pontos onde a torsão se anula, e genericamente esta é a singularidade mais degenerada que podemos esperar. Para mais detalhes, e em particular para uma análise do contato entre curvas espaciais e esferas ver [11].

No caso de curvas a teoria de singularidades é muito próxima da teoria clássica, como era de se esperar. Inicialmente isso também era verdade para superfícies em $\mathbb{R}^3$. O que é mais espantoso contudo, é que esta teoria moderna rapidamente descobriu fenômenos que descrevem importantes propriedades geométricas das superfícies das quais a geometria diferencial clássica não tem nenhum conhecimento.

Para superfícies em $\mathbb{R}^3$, a função altura é singular se o plano de contato em questão é o plano tangente da superfície. A função altura não é estável (isto é, tem uma singularidade

$A_{k\geq 2}$) precisamente nos pontos parabólicos. As cúspides de Gauss [2] são identificadas com as singularidades da função altura do tipo A_3. Existe uma família natural a dois parâmetros de funções altura. O discriminante desta família é o dual da superfície, e o conjunto bifurcação é a imagem do conjunto parabólico na esfera de Gauss. Discriminantes e conjuntos de bifurcações foram estudados por Arnold [1] (ver também [4, 6, 54]). Resultados sobre estes conjuntos foram usados para estender os resultados clássicos sobre a geometria plana das superfícies. O teorema de transversalidade de Thom [24] e os de Bruce [14] permitem estudar mudanças desta geometria em famílias a 1-parâmetro de superfícies [14].

O contato de uma superfície com uma reta de direção u é medido através das singularidades da projeção ortogonal na direção u. Estas singularidades são dadas pelas singularidades dos germes $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$, que foram estudadas por muitos autores, mas a lista mais completa foi obtida por Rieger em [45]. A projeção é singular se $u \in T_pM$. A singularidade é do tipo $A_{k\geq 2}$ se u é direção assintótica, e do tipo lábios/bicos se u é direção assintótica e p é ponto parabólico. O tipo das singularidades desta projeção dá informações sobre o perfil da superfície, que é a imagem do conjunto dos pontos de M onde a direção de projeção é tangente à superfície. O perfil é o discriminante da projeção.

As primeiras observações sobre o contato de superfícies com esferas são devidas a Thom, mas os trabalhos pioneiros nesta área são devidos a Porteous (ver [42, 43]). Esferas tangentes a uma superfície têm seus centros na reta normal à superfície. Em um ponto não umbílico o contato é A_1 para todas as esferas com centros em N_pM com exceção de duas onde o contato com a superfície é $A_{k\geq 2}$. Estas esferas são as esferas de curvatura. Existe uma curva de pontos sobre a superfície onde uma destas esferas de curvatura tem contato A_3 com a superfície. Esta curva, descoberta usando a teoria de singularidades, se denomina "ridge" [41], e é usada para identificar objetos em imagem médica [50]. Em pontos isolados sobre a curva ridge o contato pode ser do tipo A_4. As singularidades D_4 de d^2, ocorrem nos pontos umbílicos e dão informações sobre estes pontos e sobre a estrutura do conjunto focal, que é o conjunto dos centros das esferas de curvatura [41]. Outros resultados desta geometria podem ser encontrados em [12].

Podemos também medir a simetria de uma superfície na vizinhança de um ponto em relação a um plano em $\mathbb{R}^3$. Isto é feito através das singularidades da aplicação dobra cujas singularidades são aquelas das aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^3, 0$ estudadas em [19] e [53]. A aplicação dobra tem uma singularidade S_1 se o plano em questão é gerado pela direção normal e uma das direções principais da superfície no ponto estudado. A singularidade

é S_2, se além disso, o correspondente ponto da superfície focal é parabólico; S_3 se este ponto é cúspide de Gauss da superfície focal.

Outras descobertas interessantes sobre a geometria de superfícies em $\mathbb{R}^3$ vêm dos trabalhos de dualidade em [10, 19]. Foi mostrado que alguns componentes dos conjuntos de bifurcações da família de funções altura (respectivamente, d^2) e projeções (respectivamente, aplicação dobra) são duais. Isto revela, por exemplo, mais informações sobre os pontos umbílicos e uma estrutura rica da superfície focal. Ver também os trabalhos [7, 13, 14] sobre este assunto.

Recentemente, iniciou-se o estudo de superfícies (dimensão dois) em $\mathbb{R}^4$. Em [29], J. Little (1969), introduz alguns invariantes geométricos bem como alguns conceitos fundamentais, como direções assintóticas sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$. Mas foi somente em [34] que Mochida (ver também [23, 35, 36]) iniciou o uso de técnicas de teoria de singularidades para estudar a geometria plana de tais superfícies.

Nogueira [39], e Bruce e Nogueira [16] estenderam os resultados de dualidade, descritos acima, para superfícies e curvas em $\mathbb{R}^4$ e em [18] as mudanças na geometria plana em famílias a 1-parâmetro foram estudadas.

O objetivo desta tese é estudar a geometria diferencial plana local de hipersuperfícies regulares em $\mathbb{R}^4$, usando a teoria de singularidades. Um exemplo natural de hipersuperfície é a hipersuperfície canal de uma superfície em $\mathbb{R}^4$.

Começamos no capítulo 1 dando as noções preliminares da teoria de singularidades necessárias para desenvolver esta tese. Também damos algumas definições e conceitos sobre a geometria de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$.

No segundo capítulo estudamos o contato com hiperplanos de uma variedade de dimensão 3 mergulhada em $\mathbb{R}^4$. Obtemos as condições necessárias e suficientes para que a função altura na direção normal tenha singularidades genéricas e condições para que a família destas funções seja um desdobramento versal destas singularidades. Estendemos as técnicas de Bruce em [8], que consiste em usar a aplicação Monge-Taylor, para descrever os conjuntos em M onde ocorrem as singularidades genéricas desta função. Finalmente, demos as características geométricas das singularidades da função altura.

No terceiro capítulo estudamos o contato de M com retas. Obtemos as condições necessárias e suficientes para que a aplicação projeção tenha singularidades simples genéricas. Estudamos as estruturas locais em M dos conjuntos de um dado tipo de singularidade de codimensão menor ou igual a dois da aplicação projeção, e a maneira como eles se interceptam. Por fim, demos as caracterizações geométricas das singularidades da

aplicação projeção.

No quarto capítulo relacionamos a família de funções altura H, estudada no segundo capítulo, com a família de projeções ortogonais P estudada no terceiro capítulo. Mostramos que existe uma relação de dualidade entre certos estratos dos conjuntos de bifurcações das famílias H e P e deduzimos propriedades geométricas sobre estes conjuntos. Estudamos também o comportamento das projeções de M em torno de um ponto umbílico plano parcial (isto é, um ponto onde M tem contato do tipo D_4 com o hiperplano tangente).

No quinto capítulo, classificamos germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ sobre a ação do grupo $\mathcal{A}$. Em [46] Rieger e Ruas produziram uma lista das $\mathcal{A}$-órbitas para germes equivalentes a $(x, f(x, y) \pm z^2)$. No Capítulo 6 precisamos das $\mathcal{A}$-singularidades de codimensão ≤ 4, e a lista de Rieger e Ruas não cobre todos estes casos. Classificamos os germes de codimensão ≤ 4 que não se encontram em [46], usando o programa "Transversal" feito por Neil Kirk [27]. Demos o grau de determinação e os desdobramentos versais destas singularidades. Deduzimos os modelos das deformações dos discriminantes das singularidades de codimensão menor ou igual a dois. Fizemos também um reconhecimento geométrico das singularidades de codimensão ≤ 1 e de seus desdobramentos versais através do conjunto dos pontos críticos e do discriminante.

Finalmente, no sexto capítulo, consideramos o contato de M com planos, medido pelas singularidades da aplicação $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. Existe uma família a 4 parâmetros de projeções (ver [39]). Estudamos os tipos de singularidades que podem ocorrer em um ponto de M variando o plano de projeção, e investigamos com mais detalhes as singularidades simples de codimensão ≤ 2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados da teoria de singularidades e também uma breve descrição sobre a geometria de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$. Começamos definindo germes e jatos, passando então a descrever a $\mathcal{A}$-equivalência entre germes. Logo após voltamos nossa atenção para desdobramentos versais de um germe, e para a questão de genericidade. Como referências gerais para este capítulo recomendamos [25], [32], [51].

1.1 Germes e jatos

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$, $f : U_1 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, e $g : U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ aplicações diferenciáveis definidas em vizinhanças abertas U_1 e U_2 de x. Dizemos que f e g são equivalentes e escrevemos $f \sim g$ se, e somente se, existir uma vizinhança $U \ni x$ em $\mathbb{R}^n$, $U \subset U_1 \cap U_2$ tal que $f\mid_U = g\mid_U$, ou seja, se f e g coincidem em uma vizinhança U de x. Esta relação é uma relação de equivalência e suas classes de equivalência são chamadas `germes de aplicações diferenciáveis` de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ em x. Se $\bar{f}$ e $\bar{g}$ são representantes dos germes f e g então devemos ter $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$ e, portanto qualquer outro representante deve assumir o mesmo valor em x como também todas as suas derivadas parciais. Usamos a notação $f : \mathbb{R}^n, x \to R^p$ para indicar um germe de aplicação. Sem perda de generalidade podemos tomar $x = 0 \in \mathbb{R}^n$.

O conjunto dos germes $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p$ será denotado por $\mathcal{E}(n,p)$. Quando $p = 1$, a notação usada é $\mathcal{E}(n)$ e $m(n)$ é o conjunto dos germes f tal que $f(0) = 0$. O ideal $m(n)$ é gerado pelos monômios x_i (ver [3], capítulos 1 e 4).

O germe de uma aplicação $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ (esta notação significa que f leva a origem na origem) é dito `singular` se a matriz jacobiana $Df(0)$ não tem rank máximo,

caso contrário f é dito regular.

1. $\mathcal{E}(n)$ é um anel comutativo, com identidade $\overline{1}$:

As operações $\overline{f} + \overline{g} = \overline{f+g}$ e $\overline{f} \,.\, \overline{g} = \overline{f.g}$, onde $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são representantes dos germes f e g respectivamente, são bem definidas e fazem de $\mathcal{E}(n)$ um anel comutativo com identidade $\overline{1}$.

2. $\mathcal{E}(n)$ é um anel local (i.e., possui um único ideal maximal):

O único ideal maximal é $m(n)$. Seja $\mathcal{M}$ um outro ideal e suponha que $f \in \mathcal{M} - m(n)$. Então $f(0) \neq 0$, portanto $1/f$ está bem definida. Temos $(\overline{1/f}).\ \overline{f} = \overline{1} \in \mathcal{M}$, portanto $\mathcal{M} = \mathcal{E}(n)$.

3. $\mathcal{E}(n,p)$ é um $\mathcal{E}(n)$-módulo:

$(\mathcal{E}(n,p), +)$ é um grupo abeliano, $\mathcal{E}(n)$ é um anel, e a operação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(n,p) & \to & \mathcal{E}(n,p) \\ (f,F) & \mapsto & f.F = (f.F_1, \cdots, f.F_n) \end{array}$$

satisfaz

$$\begin{array}{rcl} f.(g.F) & = & (f.g).F \\ f.(F+G) & = & f.F + f.G \\ (f+g).F & = & f.F + g.F \\ 1.F & = & F \end{array}$$

ou seja, temos uma ação de $\mathcal{E}(n)$ sobre $\mathcal{E}(n,p)$.

Vamos agora introduzir uma outra relação de equivalência entre aplicações $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ aplicações definidas em uma vizinhança U de x. Dizemos que f e g têm o mesmo k-jato em x se $f(x) = g(x)$ e para algum sistema local de coordenadas em $x \in \mathbb{R}^n$ e em $f(x) \in \mathbb{R}^p$ todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ das componentes de f e g coincidem em x. Observe que esta definição depende apenas de f e g. Fixando $x \in \mathbb{R}^n$, $y = f(x) \in \mathbb{R}^p$ e coordenadas locais em $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$, segue que o k-jato de f é determinado pelos termos de grau $\leq k$ nas expansões de Taylor das componentes de f com respeito a estas coordenadas. Estes são os `k-jatos` de aplicações $\mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$. O conjunto de todos tais k-jatos é denotado por $J^k(n,p)$ o qual é um espaço vetorial.

Definição 1.1 *Definimos $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ como o conjunto das expansões de Taylor de ordem menor ou igual a k de $f(x) - f(a)$ em a onde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, ou seja, o conjunto de todos os k-jatos (em todos os pontos) de todas as aplicações $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, e a aplicação*

k-jato:

$$\begin{array}{rccc} j^k f: & \mathbb{R}^n & \to & J^k(n,p) \\ & a & \mapsto & j^k f(a). \end{array}$$

$J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é um fibrado sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ com fibra $J^k(n,p)$.

Para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, usaremos simplesmente $J^k(n)$, para o conjunto definido acima. Neste caso particular pode-se mostrar que as derivadas parciais de ordem $\leq k$ de $f \in \mathcal{E}(n)$ se anulam em x se, e somente se, $f \in m^{k+1}(n)$ (onde $m^{k+1}(n)$ é o espaço dos germes de funções cujos polinômios de Taylor de ordem k na origem são identicamente nulos). Assim, podemos identificar o espaço de k-jatos em x de aplicações $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com o espaço

$$\frac{\mathcal{E}(n)}{m^{k+1}(n)}.$$

Logo, no caso geral, temos que

$$J^k(n,p) = \frac{\mathcal{E}(n)}{m^{k+1}(n)} \times \cdots \times \frac{\mathcal{E}(n)}{m^{k+1}(n)} \text{ (p cópias).}$$

1.1.1 Grupos de Mather

Sejam $\mathcal{R}$ o grupo dos germes de difeomorfismos $\mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$, $\mathcal{L}$ o grupo dos germes de difeomorfismos $\mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$, e $\mathcal{A}$ o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$. Definimos ações destes grupos sobre $m(n).\mathcal{E}(n,p)$ como o seguinte

$$\begin{aligned} h.f &= f \circ h^{-1}, \quad h \in \mathcal{R} \\ k.f &= k \circ f, \quad k \in \mathcal{L} \\ (h,k).f &= k \circ f \circ h^{-1}, \quad (h,k) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

onde $f \in m(n).\mathcal{E}(n,p)$. O grupo $\mathcal{R}$ (respectivamente, $\mathcal{L}$) é chamado também o grupo de mudanças de coordenadas na fonte (respectivamente, na meta). Dizemos que dois germes $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p$ são $\mathcal{R}$-equivalentes (respectivamente, $\mathcal{L}$-equivalentes e $\mathcal{A}$-equivalentes) se existir $h \in \mathcal{R}$ (respectivamente, $k \in \mathcal{L}$ e $(h,k) \in \mathcal{A}$) tal que $f = g \circ h^{-1}$ (respectivamente, $f = k \circ g$ e $f = k \circ g \circ h^{-1}$). A $\mathcal{R}$-equivalência (respectivamente, $\mathcal{L}$-equivalência e $\mathcal{A}$-equivalência) é também chamada equivalência à direita (respectivamente, à esquerda, e à esquerda e à direita, ou seja ambos), daí o uso das letras $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ que são abreviações das palavras right e left em inglês, e $\mathcal{A}$ que é abreviação para ambo em latim.

O grupo $\mathcal{C}$ é o grupo de difeomorfismos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ que são escritos na forma $H(x,y) = (x, \overline{H}(x,y))$ com $\overline{H}(x,0) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ próximo da origem. A ação

de $\mathcal{C}$ sobre $m(n).\mathcal{E}(n,p)$ é definida como

$$H.f(x) = H(x, f(x)),\ H \in \mathcal{C},\ f \in m(n).\mathcal{E}(n,p).$$

$\mathcal{C}$ pode ser visto como o grupo de difeomorfismos $\mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ parametrizados por $x \in \mathbb{R}^n$. Denote $h_x(y) = \overline{H}(x,y)$, então a fórmula antecedente pode ser escrita na forma

$$H.f(x) = h_x(f(x)).$$

O grupo $\mathcal{K}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ que são escritos na forma

$$H(x,y) = (h(x), \overline{H}(x,y))$$

onde $h \in \mathcal{R}$, $\overline{H}(x,0) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ próximo da origem. A ação de $\mathcal{K}$ sobre $m(n).\mathcal{E}(n,p)$ é definida como

$$H.f(x) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))),\ H \in \mathcal{K},\ f \in m(n).\mathcal{E}(n,p).$$

Isto é

$$H.f(x) = h_x(f(h^{-1}(x))).$$

O grupo $\mathcal{K}$ é chamado `grupo de contato`. Os grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ podem ser identificados com subgrupos de $\mathcal{K}$. Os grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ são chamados grupos de Mather. Estes grupos não são grupos de Lie, pois possuem dimensões infinitas.

O grupo de contato tem uma interpretação geométrica. Sejam (X_i, Y_i), $i = 1, 2$, dois pares de variedades em $\mathbb{R}^n, 0$. Dizemos que os pares têm o mesmo contato na origem se existe um difeomorfismo $h \in \mathcal{R}(n)$ tal que $h(X_1) = X_2$ e $h(Y_1) = Y_2$.

Suponha que X_i é parametrizada por $\phi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e as Y_i são definidas por submersões $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, e sejam $f_i = g_i \circ \phi_i$, $i = 1, 2$. Então,

Teorema 1.2 *Os pares (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) têm o mesmo contato na origem se, e somente se, f_1 e f_2 são $\mathcal{K}$-equivalentes.*

Prova: Ver [37].

1.1.2 Os espaços tangentes e a determinação finita

Definimos o "espaço tangente" a $\mathcal{E}(n,p)$ em f como θ_f o $\mathcal{E}(n)$-módulo de campos de vetores ao longo de f. Então $\xi \in \theta_f$ se $\xi : \mathbb{R}^n, 0 \to T(\mathbb{R}^p)$ e $\pi_p \circ \xi = f$ onde $\pi_p : T(\mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^p$ é a projeção do fibrado tangente $T(\mathbb{R}^p)$ de $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^p$.

Definimos $\theta_n = \theta_{1_{\mathbb{R}^n}}$ e $\theta_p = \theta_{1_{\mathbb{R}^p}}$, onde $1_{\mathbb{R}^n}$ e $1_{\mathbb{R}^p}$ denotam as aplicações identidade de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$ respectivamente.

Seja $\mathcal{G}$ um subgrupo de $\mathcal{K}$. Definimos a álgebra de Lie, $L\mathcal{G}$, de $\mathcal{G}$ como segue. Seja $\phi :]-\epsilon, \epsilon[\times\mathbb{R}^{n+p}, 0 \to \mathbb{R}^{n+p}, 0$ uma curva em $\mathcal{G}$ tal que ϕ_0 é a identidade em $\mathcal{G}$. Derivando-a temos um campo de vetores

$$z \to \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, z)_{|t=0}.$$

O conjunto de todos estes campos é denotado por LG e é chamado a álgebra de Lie do grupo G.

Não é difícil verificar que $L\mathcal{R} = m(n).\theta_n$ e $L\mathcal{L} = m(p).\theta_p$.

Definimos o $\mathcal{E}(n)$-homomorfismo

$$\begin{aligned} tf : \theta_n &\to \theta_f \\ \phi &\mapsto df \circ \phi \end{aligned}$$

e o $\mathcal{E}(p)$-homomorfismo (via $f^* : \mathcal{E}(p) \to \mathcal{E}(n)$, $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ por $\alpha \in \mathcal{E}(p)$)

$$\begin{aligned} wf : \theta_p &\to \theta_f \\ \psi &\mapsto \psi \circ f. \end{aligned}$$

Então os espaços tangentes às órbitas dos grupos de Mather são dados por

$$\begin{gathered} L\mathcal{R} \cdot f = tf(m(n).\theta_n), \quad L\mathcal{L} \cdot f = wf(m(p).\theta_p), \\ L\mathcal{C} \cdot f = f^*(m(p)).\theta_f, \quad L\mathcal{A} \cdot f = L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f, \\ L\mathcal{K} \cdot f = L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{C} \cdot f. \end{gathered}$$

Na prática, aplicamos a seguinte observação. O conjunto θ_f é um $\mathcal{E}(n)$-módulo livre de rank p, pois se $(y_1, \cdots, y_p)$ é um sistema local de coordenadas em $\mathbb{R}^p, 0$, então os campos de vetores

$$(\frac{\partial}{\partial y_1}) \circ f, \cdots, (\frac{\partial}{\partial y_p}) \circ f$$

ao longo de f constituem uma base livre de θ_f. Podemos então identificar θ_f com $\mathcal{E}(n, p)$ e escrever os espaços tangentes acima como

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= m(n) \cdot \{\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\} \\ L\mathcal{L} \cdot f &= f^*(m(p)).\{e_1, \cdots, e_p\} \\ L\mathcal{C} \cdot f &= f^*(m(p)).\mathcal{E}(n).\{e_1, \cdots, e_p\} \end{aligned}$$

onde $e_1, \cdots, e_p$ são elementos da base canônica em $\mathbb{R}^p$ (considerados como elementos de $\mathcal{E}(n,p)$).

Observe que $L\mathcal{R}\cdot f$, $L\mathcal{C}\cdot f$, $L\mathcal{K}\cdot f$ são $\mathcal{E}$(n)-módulos, $L\mathcal{L}\cdot f$ é um $\mathcal{E}(p)$-módulo via f^*, e que $L\mathcal{A}\cdot f$ tem uma estrutura de mistura de módulos. Isto causa uma complicação no tratamento do grupo $\mathcal{A}$.

Definimos a $\mathcal{G}$-codimensão de f como segue:

$$\mathcal{G}\text{–}codim(f) = dim_{\mathbb{R}}(m(n).\mathcal{E}(n,p)/L\mathcal{G}\cdot f).$$

Definimos a $\mathcal{G}_e$-codimensão de f como

$$\mathcal{G}_e\text{–}codim(f) = dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(n,p)/L_e\mathcal{G}\cdot f),$$

onde

$$L_e\mathcal{R}\cdot f = tf(\theta_n), \quad L_e\mathcal{L}\cdot f = wf(\theta_p), \quad L_e\mathcal{C}\cdot f = f^*(\mathcal{E}(p)).\theta_f,$$

$$L_e\mathcal{A}\cdot f = L_e\mathcal{R}\cdot f + L_e\mathcal{L}\cdot f, \quad L_e\mathcal{K}\cdot f = L_e\mathcal{R}\cdot f + L_e\mathcal{C}\cdot f.$$

O espaço $L_e\mathcal{G}\cdot f$ é chamado espaço tangente estendido.

Seja $\mathcal{G}$ um subgrupo de um dos grupos de Mather e defina $\mathcal{G}_k$ como o subgrupo de $\mathcal{G}$ que consiste dos elementos de $\mathcal{G}$ cujo k-jato é a identidade. Estes são subgrupos normais de $\mathcal{G}$ e definem os grupos de jatos $J^k\mathcal{G} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_k$. *Estes grupos são grupos de Lie.*

A ação de $\mathcal{G}$ sobre $m(n).\mathcal{E}(n,p)$ induz uma ação de $J^k\mathcal{G}$ sobre $J^k(n,p)$ que é uma ação do grupo de Lie. A idéia é estudar a ação de $\mathcal{G}$ sobre $m(n).\mathcal{E}(n,p)$ através da ação de $J^k\mathcal{G}$ sobre $J^k(n,p)$.

Definição 1.3 *Um germe $f \in m(n).\mathcal{E}(n,p)$ é dito k-$\mathcal{G}$-determinado se qualquer $g \in m(n).\mathcal{E}(n,p)$ tal que $j^kg = j^kf$ é $\mathcal{G}$-equivalente a f.*
f é dito finitamente determinado se é k-determinado para algum k.

A investigação da determinação finita começou com os trabalhos de Mather em 1960 que deu uma estimativa grosseira de grau de determinação finita. Em 70, Gaffney e du Plessis deram melhores aproximações para o grau de determinação de germes, mas foi somente nos anos 80 que a questão da determinação finita foi completamente resolvida por Bruce-du Plessis-Wall em [17] usando as ações de grupos unipotentes. A idéia principal em [17] é perceber que a condição necessária para $k-\mathcal{G}_s$-determinação de um germe f ($\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$, $s \geq 1$) é também suficiente. Além disso, este resultado vale para qualquer subgrupo $\mathcal{U}$ de um dos grupos de Mather tal que $J^1\mathcal{U}$ é um grupo algébrico

afim unipotente. Os resultados da teoria dos grupos algébricos afins são essenciais no trabalho de Bruce-du Plessis-Wall. Temos abaixo algumas definições e conceitos sobre grupos algébricos.

Teorema 1.4 *Seja $\mathcal{H}$ um subgrupo fortemente Z-fechado de um dos grupos de Mather $\mathcal{G}$. Então, para qualquer r, $f \in \mathcal{E}(n,p)$ é $r-\mathcal{H}$-determinado se, e somente se, existe um subgrupo fortemente fechado $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, com $J^1\mathcal{U}$ unipotente, tal que*

$$m(n)^{r+1}.\theta_f \subset L\mathcal{U}.f.$$

Prova: Ver [17] para as definições dos conceitos no teorema e para a demonstração.

Corolário 1.5 *[17] f é $r-\mathcal{G}_s$-determinado ($\mathcal{G} = \mathcal{L}$ ou $\mathcal{A}$, $s \geq 1$) se, e somente se,*

$$m_n^{r+1}.\theta_f \subset L\mathcal{G}_s.f + m_n^{r+1}.f^*(m_p).\mathcal{E}_n + m_n^{2r+2}.\mathcal{E}(n,p).$$

No caso do grupo $\mathcal{A}$ temos o seguinte resultado.

Corolário 1.6 *[17] Se f satisfaz*

$$\begin{aligned} &m(n)^l.\theta_f \subset L\mathcal{K}.f \\ &m(n)^{r+1}.\theta_f \subset L\mathcal{A}_1.f + m_n^{l+r+1}.\theta_f \end{aligned}$$

então f é $r-\mathcal{A}_1$-determinado.

A determinação finita significa que o germe é equivalente a um de seus polinômios de Taylor e que o problema da classificação pode ser reduzido ao espaço dos k-jatos, que é um espaço vetorial de dimensão finita. Uma questão fundamental na teoria de singularidades é obter uma classificação das $\mathcal{G}$-órbitas de aplicações $\mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$.

O teorema da determinação finita sozinho não facilita a obtenção de listas de singularidades. Em [15], Bruce-Kirk-du Plessis deram um método para classificar singularidades. Existem outras técnicas para classificar singularidades, por exemplo, no caso de funções, Arnold usou os poliedros de Newton para obter a famosa lista de singularidades de funções. Mas a técnica de Transversal Completa é, até agora, a mais poderosa para o caso de aplicações.

A classificação dos germes de funções (ou de aplicações) é obtida por indução sobre o espaço de k-jatos. Dado um $j^k f$ usamos o teorema da Transversal Completa para obter uma parametrização do $k+1$ jato que tem o k-jato igual a $j^k f$. Podemos usar o Lema de Mather para produzir as órbitas dentro desta parametrização. Aplicamos o teste da determinação finita a cada órbita no $k+1$ jato (cuja k-jato é $j^k f$). Se o germe é finitamente determinado paramos o processo. Se não consideramos o $k+2$-jato. Precisamos então dos seguintes resultados.

Lema 1.7 (Lema de Mather [33]) *a) Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre a variedade M e suponha que a subvariedade $S \subset M$ tem as seguintes propriedades:*

1. *para cada $x \in S$, $L_x S \subset L_x G.x$;*
2. *A dimensão de $G.x$ é independente da escolha de $x \in S$;*
3. *S é uma variedade conexa.*

Então S está contido inteiramente em uma única G-órbita.

b) Suponha que $\Pi : M_1 \to M_2$ é uma G-submersão, e seja $S = \Pi^{-1}(x_0)$ para algum $x_0 \in M_2$. Se (1) e (3) de (a) se verificam, então S está contido em uma única G-órbita.

Um espaço afim A é um espaço invariante por transformações afins (translações e mudanças lineares de coordenadas). A diferença entre um espaço afim e um espaço vetorial é que no espaço afim a origem perde importância. Uma definição rigorosa é a seguinte.

Definição 1.8 *Um conjunto A é um espaço afim se existem um espaço vetorial V_A e uma aplicação $A \times V_A \to A$, $(x, v) \mapsto x + v$ tais que*

(i) $x + 0 = x$ e $x + (u + v) = (x + u) + v$ $\forall x \in A$, $u, v \in V_A$;

(ii) para qualquer $x, y \in A$ existe um único $v \in V_A$ tal que $y = x + v$.

Corolário 1.9 *Seja G um grupo de Lie agindo sobre um espaço afim A, e seja W um subespaço vetorial de V_A.*

Se $x \in A$, então $x + W$ está contido em uma órbita só se

(a) $W \subset LG.x$

(b) $\forall y \in x + W$, $LG.y = LG.x$

Podemos agora enunciar uma generalização do Lema de Mather que é muito importante na classificação de singularidades.

Teorema 1.10 (Transversal Completa [15]) *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre um espaço afim A, e seja W um subespaço vetorial de V_A com*

$$LG.(x+w) = LG.x, \ \forall x \in A \ e \ w \in W. \qquad (1)$$

Então

(i) $\forall x \in A$

$$x + \{LG.x \cap W\} \subset G.x \cap \{x + W\};$$

(ii) se $x_0 \in A$ e T é um subespaço vetorial de W tal que

$$W \subset T + LG.x_0 \qquad (2)$$

então $\forall w \in W$, existe $g \in G$, $t \in T$ tal que $g.(x_0 + w) = x_0 + t$.

Sejam $H^{k+1}(n,p)$ o espaço dos germes de polinômios homogêneos de grau $k+1$ em $\mathcal{E}(n,p)$ e $\mathcal{G}_1$ o subgrupo de $\mathcal{G}$ cujos elementos têm 1-jato igual a identidade.

Proposição 1.11 (Transversal Completa para jatos [15]) *Seja $\mathcal{G}$ um dos grupos de Mather. Então dado $f \in m(n).\mathcal{E}(n,p)$ e $T \subset H^{k+1}(n,p)$ tais que*

$$H^{k+1}(n,p) \subset L(J^{k+1}\mathcal{G}_1).j^{k+1}f + T$$

qualquer $(k+1)$-jato $j^{k+1}g$, cujo $j^k g = j^k f$, está na mesma $\mathcal{G}_1$-órbita de $j^{k+1}f + t$, por algum $t \in T$.

1.1.3 Desdobramentos versais

Seja f um germe finitamente determinado. Podemos considerar as deformações de f e estudar os tipos de singularidades que aparecem em tais deformações. Em particular, podemos perguntar se os tipos de singularidades que aparecem são em número finito e se existe uma família que contém todos estes tipos. Na verdade queremos que qualquer outra deformação de f seja obtida a partir desta família. Tal família se chama deformação versal. Vamos enunciar os teoremas principais sobre as deformações e os desdobramentos versais e definir alguns objetos geométricos associados a tais famílias.

Definição 1.12 ([32]) *Um* `desdobramento` *a s parâmetros de um germe $f_0 \in m(n).\mathcal{E}(n,p)$ é um germe $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$, $(x,u) \mapsto (f(x,u),u)$ tal que $f_0(x) = f(x,0)$. Usaremos as notações: $f_u(x) = f(x,u)$, onde f_u é uma deformação de f_0, parametrizada por $u \in \mathbb{R}^s$, e $\dot{F}(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x,0)$, para $i = 1, \cdots, s$.*

Consideramos o caso $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ (os resultados são análogos para qualquer grupo de Mather).

Definição 1.13 *Dois desdobramentos a s parâmetros* $F, G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$ *de* f_0 *são* `isomorfos` *se existem germes de difeomorfismos*

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0$$

$$\psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$$

que são desdobramentos a s parâmetros das funções identidades sobre $\mathbb{R}^n, 0$ *e* $\mathbb{R}^p, 0$ *respectivamente, tal que*

$$G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}.$$

No caso em que F e G são desdobramentos de f_0 com parâmetros diferentes, a definição de isomorfismo é dada pelo pull-back.

Dada $h : (\mathbb{R}^t, 0) \to (\mathbb{R}^s, 0)$, definimos o `pull-back` de F por h, denotado por h^*F, como o desdobramento a t parâmetros

$$(h^*F)(x, u) = (f(x, h(v)), v).$$

F e G são `equivalentes` se existe um difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^s, 0)$ tal que G é isomorfo a h^*F (esta é uma relação de equivalência). Se G é um desdobramento a t parâmetros de f_0 e F é um desdobramento a s parâmetros de f_0 (t não precisa ser necessariamente igual a s), dizemos que G é `induzida` de F se existe um germe C^∞, $h : (\mathbb{R}^t, 0) \to (\mathbb{R}^s, 0)$ tal que G é isomorfo a h^*F.

Definição 1.14 *1. F é um* `desdobramento versal` *se todo desdobramento de f_0 é induzido de F.*

2. F é `trivial` *se é isomorfo ao desdobramento constante $(x, u) \mapsto (f_0(x), u)$.*

3. f_0 é `estável` *se todos os desdobramentos de f_0 são triviais.*

Podemos enunciar agora o teorema fundamental da existência de desdobramentos versais, devido a Martinet [32].

Teorema 1.15 *O desdobramento F é versal se, e somente se,*

$$L\mathcal{A}_e f_0 + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \cdots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}(n, p).$$

Corolário 1.16 *Sejam $c = \mathcal{A}_e$-codimensão$(f_0) < \infty$ e $\dot{F}_i$ uma base do complementar de $L\mathcal{A}_e f_0$ em $\mathcal{E}(n,p)$. Então $F(x,u) = (f_0(x) + \sum_{i=1}^{c} u_i \, \dot{F}_i \, (x), u)$ é um desdobramento versal de f_0.*

Observação 1.17 *Se f é k-determinada podemos trabalhar em $J^k(n,p)$, isto é, basta mostrar que*

$$j^k(L\mathcal{A}(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \cdots, \dot{F}_p\}) = J^k(n,p)$$

para verificar se F é versal (ver [32]).

Corolário 1.18 *f_0 possui um desdobramento versal se, e somente se, $\mathcal{A}_e$ - codim $(f_0) < \infty$.*

Temos também:

Teorema 1.19 *f_0 é estável se, e somente se, $\mathcal{A}_e$-codim$(f_0) = 0$.*

Se $c = \mathcal{A}_e$-codim(f_0), então o número mínimo de parâmetros para um desdobramento versal é c. Um desdobramento versal a c parâmetros de f_0 é chamado `miniversal`.

Teorema 1.20 *Todos os desdobramentos miniversais de f_0 são equivalentes.*

Os resultados acima no caso dos $\mathcal{A}$-desdobramentos são análogos, só que usamos a $\mathcal{A}$-codim(f_0) e supomos que $\dot{F}_1, \cdots, \dot{F}_s \in m(n).\mathcal{E}(n,p)$ geram o complementar de $L\mathcal{A}f_0$ em $m(n).\mathcal{E}(n,p)$. Observamos que existe o seguinte resultado de Wilson (ver [52]).

Teorema 1.21 *$\mathcal{A}$-codim$(f_0) = \mathcal{A}_e$-codim$(f_0) + n$.*

Dado um desdobramento versal $F(x,u) = (f(x,u), u)$ com parâmetro u, podemos obter conjuntos que são de grande valor para o estudo da geometria dos germes singulares.

Definição 1.22 *O* `conjunto dos pontos críticos` *de F é*

$$\Sigma(F) = \{(x,u) : DF_x(x,u) \text{ é singular}\},$$

onde DF_x denota a derivada de F com relação a x.

O `conjunto discriminante` *de F é dado por*

$$\Delta(F) = \{(F(x,u), u) : (x,u) \in \Sigma(F)\}.$$

O `conjunto bifurcação` *é definido por*

$$Bif(F) = \{u \in \mathbb{R}^s : \exists x \in \mathbb{R}^n, 0 \text{ com } f_u \text{ instável em } x\}.$$

Uma aplicação importante dos desdobramentos versais é a seguinte (ver [11]).

Proposição 1.23 *Quaisquer dois desdobramentos versais com mesmo número de parâmetros têm conjuntos de pontos críticos, discriminantes e conjuntos de bifurcações difeomofos.*

1.1.4 Genericidade e transversalidade

O conceito de genericidade está fortemente relacionado com o conceito de versalidade. Dizemos que uma propriedade é genérica em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ se ela se verifica para um conjunto residual (ou seja, para uma interseção enumerável de conjuntos abertos densos) de aplicações. A definição mais precisa deste conceito é em termos de resultados de transversalidade. O resultado central neste contexto é o teorema de transversalidade de Thom. Primeiramente, vamos definir alguns conceitos de transversalidade.

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma função C^∞, e $Y \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade suave. Dizemos que f é transversal a Y, e escrevemos $f \pitchfork Y$, em $x \in \mathbb{R}^n$ se $f(x) \notin Y$ ou $f(x) \in Y$ e

$$T_x f(\mathbb{R}^n) + T_{f(x)} Y = \mathbb{R}^p$$

Observações 1.24

(*i*) *A equação de transversalidade implica que codim$Y \leq n$. Se codim $Y > n$, então f transversal a Y significa que $f(\mathbb{R}^n) \cap Y = \emptyset$.*

(*ii*) *Se $Y = \{ponto\}$, então f é transversal a Y se, e somente se, f é uma submersão ou $p \notin f(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 1.25 ([25]) *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma função C^∞, e $Y \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade suave com f transversal a Y. Então $X = f^{-1}(Y)$ é uma variedade suave em $\mathbb{R}^n$, que tem a mesma codimensão de Y.*

Teorema 1.26 (Teorema de Transversalidade de Thom [24]) *Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_s$ subvariedades diferenciáveis de $J^k(n,p)$. O conjunto de aplicações C^∞, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, para as quais $j^k f : \mathbb{R}^n \to J^k(n,p)$ é transversal a $X_1, X_2, \cdots, X_s$ é denso em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.*

A seguir enunciaremos um teorema de Montaldi [37], um dos mais poderosos e eficientes resultados de transversalidade (ou de genericidade), que se aplica tanto para germes quanto para multigermes.

Teorema 1.27 (Teorema de Montaldi [37]) *Sejam X, Y, Z, U variedades diferenciáveis e $\mathcal{G}$ um dos grupos de Mather: $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$. Se $F : Y \times U \to Z$ é uma aplicação diferenciável então dada uma aplicação $g : X \to Y$ pode-se definir uma composta $F_g : X \times U \to Z$ por $F_g(x, u) = F(g(x), u)$.*

1. *Suponha que $F : Y \times U \to Z$ é uma aplicação localmente $\mathcal{G}$-versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}^{(k)}$-invariante de $J^k(X, Y)$. Então para um conjunto residual de imersões $X \hookrightarrow Y$ a aplicação k-jato $j_1^k F_g : X \times U \to J^k(X, Y)$ é transversal a S, onde o subscrito 1 significa que estamos considerando os k-jatos com respeito a primeira variável x.*

2. *Suponha que $F : Y \times U \to Z$ é uma aplicação $\mathcal{G}$-versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}$-invariante de multijatos ${}_rJ^k(X, Y)$. Então para um conjunto residual de mergulhos $X \hookrightarrow Y$ a aplicação multijato ${}_rj_1^k F_g : X^{(r)} \times U \to_r J^k(X, Y)$ é transversal a S.*

1.2 Geometria de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$

Seja M o mergulho de uma variedade de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$, orientada pelo campo vetorial unitário normal N, e seja $p \in M$. A função Weingarten $L_p : T_pM \to T_pM$, definida por $L_p(v) = -d_pN(v)$, para $v \in T_pM$, mede a maneira que M se curva em $\mathbb{R}^{n+1}$ na direção v. Quando $\|v\| = 1$, este número

$$k(v) = \langle L_p(v), v \rangle$$

é chamado a `curvatura normal` de M em p na direção v. Os autovalores $k_1(p), \cdots, k_n(p)$ de L_p são chamados `curvaturas principais` de M em p e os autovetores unitários de L_p são chamados `direções principais`.

A `segunda forma fundamental` de M em p, $\mathcal{L}_p$, é a forma quadrática associada a função L_p, definida por

$$\mathcal{L}_p(v) = \langle L_p(v), v \rangle = \langle \ddot{\alpha}(t_0), N(p) \rangle$$

onde $\alpha : I \to M$ é qualquer curva parametrizada em M com $\alpha(t_0) = p$ e $\dot{\alpha}(t_0) = v$. Em particular quando $\|v\| = 1$, $\mathcal{L}_p(v)$ é igual a curvatura normal de M em p na direção v (ver [51]).

Definição 1.28 *Um ponto $p \in M$ é chamado um* `ponto umbílico` *se todas as curvaturas principais em p são iguais. Se em particular elas forem todas iguais a zero chamamos*

este ponto de `ponto umbílico plano`*. Se pelo menos duas das curvaturas principais em p são iguais a zero então p é chamado um* `ponto umbílico plano parcial`*.*

Para definir ponto parabólico, hiperbólico e elíptico, vamos precisar de alguns conceitos sobre formas quadráticas (para maiores detalhes ver [28] páginas $386 - 388$).

Teorema 1.29 *Seja q uma forma quadrática sobre $\mathbb{R}^n$. Então existem inteiros s e r com $s \leqslant r \leqslant n$ dependendo somente de q, e existem coordenadas $z_1, \cdots, z_n$ para $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$q = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2.$$

Definição 1.30 *O número s é chamado a* `assinatura` *da forma quadrática q e é denotado por $sign(q)$.*

A assinatura é um invariante da forma quadrática. Este fato é demonstrado na prova do teorema anterior em [28].

Seja $p \in M$, onde M é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$. Por mudanças de coordenadas sempre podemos identificar p com a origem. Fixemos coordenadas locais (x, y, z, w), tal que o eixo-w seja normal a M em p e o espaço-(x, y, z) seja o espaço tangente em p. Podemos escrever M, localmente, na forma de Monge, isto é, como um gráfico de uma função $w = f(x, y, z)$, tal que $f = f_x = f_y = f_z = 0$ em $(0, 0, 0)$. Além disso, por uma rotação dos eixos, podemos supor que $f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 0$ em $(0, 0, 0)$. Então, temos que $j^2 f(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2$, onde $a_i = k_i/2$. Observamos que neste caso, a segunda forma fundamental é igual ao segundo jato de f.

Definição 1.31 *(1) p é chamado um* `ponto parabólico` *se $k_i(p) = 0$ para algum i.*

(2) p é chamado um `ponto hiperbólico` *se $sign(\mathcal{L}_p) = 1$ ou 2.*

(3) p é chamado um `ponto elíptico` *se $sign(\mathcal{L}_p) = 0$ ou 3.*

Definição 1.32 *Uma direção u do espaço tangente é* `direção assintótica` *se, e somente se, a curvatura normal em u se anula.*

Como $j^2 f(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2$ temos que o vetor $(u_1, u_2, u_3, 0)$ pertencente ao espaço tangente da origem, é uma direção assintótica se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(0) & f_{xy}(0) & f_{xz}(0) \\ f_{xy}(0) & f_{yy}(0) & f_{yz}(0) \\ f_{xz}(0) & f_{yz}(0) & f_{zz}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 2(a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2) = 0$$

Nos pontos hiperbólicos o conjunto das direções assintóticas é um cone, pois temos a_i negativo para um ou dois $i's$ onde $i = 1, 2, 3$.

Nos pontos elípticos não existe solução não nula pois a_1, a_2, a_3 têm o mesmo sinal, ou seja, nestes pontos não temos direções assintóticas.

Nos pontos parabólicos ($a_{i_0} = 0$ para algum $i_0 = 1, 2, 3$) temos dois casos que dependem do sinal dos $a_i's$ não nulos. Ou o conjunto das direções assintóticas é dado por dois planos cuja interseção é o eixo-u_{i_0} (caso em que os $a_i's$ não nulos têm sinais opostos), ou o conjunto das direções assintóticas é dado pelo eixo-u_{i_0} (caso em que os $a_i's$ não nulos têm sinais iguais). Nestes casos, chamamos a direção do eixo-u_{i_0} de `direção assintótica principal`.

Nos pontos umbílicos planos parciais temos que o conjunto de direções assintóticas é dado por um plano.

Capítulo 2

Contato com hiperplanos

Neste capítulo estudamos o contato de uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^4$ com hiperplanos. Obtemos as condições necessárias e suficientes para que a função altura tenha singularidades genéricas e condições para que a família destas funções seja um desdobramento versal destas singularidades. Estendemos as técnicas de Bruce em [8], que consiste em usar a aplicação Monge-Taylor, para obter as configurações genéricas do conjunto parabólico de M. Finalmente, demos as características geométricas das singularidades da função altura.

Destacamos aqui que os resultados obtidos não são simples generalizações do que já era conhecido para superfícies em $\mathbb{R}^3$ e que os cálculos só foram possíves devido a constante ajuda do Maple. Por exemplo, em um polinômio homogêneo em (x, y) de grau três temos apenas 4 monômios, enquanto no caso de três variáveis (x, y, z) temos 10 monômios.

2.1 As singularidades genéricas da função altura

Seja M_3 uma variedade de dimensão três, e M seu mergulho em $\mathbb{R}^4$. A família de projeções em retas, chamada família de funções altura, é definida como

$$\begin{array}{rccc} H\colon & M \times S^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (p, u) & \mapsto & \langle p, u \rangle \end{array}$$

onde S^3 é a esfera em $\mathbb{R}^4$, com centro na origem e raio um. Esta é uma família a 3 parâmetros que mede o contato de M com hiperplanos em $\mathbb{R}^4$, perpendiculares à u.

Seja $p \in M$, por mudanças de coordenadas sempre podemos identificar p com a origem. Fixemos coordenadas locais (x, y, z, w), tal que o eixo-w seja normal a M em p e o espaço-(x, y, z) seja o espaço tangente em p. Podemos escrever M, localmente, na forma de Monge,

isto é, como um gráfico de uma função $w = f(x, y, z)$, tal que $f = f_x = f_y = f_z = 0$ em $(0, 0, 0)$. Além disso, por uma rotação dos eixos, podemos supor que $f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 0$ em $(0, 0, 0)$.

Escolhemos uma carta em S^3 próxima de $(0, 0, 0, 1)$ dada por $(a, b, c, 1)$, então a modificada função altura é

$$H(x, y, z, a, b, c) = \langle (a, b, c, 1), (x, y, z, f(x, y, z)) \rangle = ax + by + cz + f(x, y, z).$$

Fixando $u_0 = (0, 0, 0, 1)$, teremos $H_{u_0}(x, y, z) = f(x, y, z)$.

Vamos agora, estudar os tipos de singularidades de $H_{u_0} = f$ que ocorrem genericamente. Neste capítulo, escrevemos:

$$\begin{aligned}
j^2 f &= a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2, \\
j^3 f &= j^2 f + b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_4 y^3 + b_5 y^2 z + b_6 y z^2 + b_7 z^3 + b_8 z^2 x + b_9 z x^2 + b_{10} x y z, \\
j^4 f &= j^3 f + c_1 x^4 + c_2 x^3 y + c_3 x^2 y^2 + c_4 x y^3 + c_5 y^4 + c_6 y^3 z + c_7 y^2 z^2 + c_8 y z^3 + c_9 z^4 + c_{10} z^3 x + \\
&\quad c_{11} z^2 x^2 + c_{12} z x^3 + c_{13} x^2 y z + c_{14} x y^2 z + c_{15} x y z^2, \\
j^5 f &= j^4 f + d_1 x^5 + d_2 x^4 y + d_3 x^3 y^2 + d_4 x^2 y^3 + d_5 x y^4 + d_6 y^5 + d_7 y^4 z + d_8 y^3 z^2 + d_9 y^2 z^3 + \\
&\quad d_{10} z^4 y + d_{11} z^5 + d_{12} z^4 x + d_{13} x^2 z^3 + d_{14} x^3 z^2 + d_{15} x^4 z + d_{16} x^3 y z + d_{17} x^2 y^2 z + d_{18} x^2 y z^2 + \\
&\quad d_{19} x y^2 z^2 + d_{20} x y^3 z + d_{21} x y z^3.
\end{aligned}$$

Para termos singularidade do tipo A_k, $k > 0$, temos que ter que a função f é $\mathcal{R}$-equivalente, por mudanças de coordenadas, à forma normal $\pm x^2 \pm y^2 \pm z^{k+1}$. Ter singularidade do tipo $D_k^{\pm}$, $k \geq 4$, significa dizer que a função f é $\mathcal{R}$-equivalente à forma normal $\pm x^2 + y^2 z \pm z^{k-1}$. Em particular, as singularidades do tipo A_k ocorrem quando a Hessiana de f tem corank$\geq$ 1, e as do tipo D_k quando a Hessiana tem corank 2.

Observação 2.1 *Observemos que fazendo mudanças de coordenadas na meta, basta considerarmos as formas normais $x^2 \pm y^2 \pm z^{k+1}$ e $x^2 + y^2 z \pm z^{k-1}$ ao invés de $\pm x^2 \pm y^2 \pm z^{k+1}$ e $\pm x^2 + y^2 z \pm z^{k-1}$.*

Teorema 2.2 *Genericamente a função H_u tem singularidades locais do tipo A_k, $k \leq 4$, ou D_4, isto é, as singularidades de codimensão menor ou igual a três.*

Este teorema é uma conseqüência direta do teorema de Montaldi [37], pois a família H é $\mathcal{A}$-versal.

A seguinte proposição mostra as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f em $(0, 0, 0)$, para que H_u tenha um dos tipos das singularidades genéricas.

Proposição 2.3 *A função altura $H_{u_0} = f(x, y, z)$ tem as seguintes singularidades:*

(i) *Fora dos pontos umbílicos:*

$A_1 \Leftrightarrow a_1a_2a_3 \neq 0;$

fazendo $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$ temos:

$A_2 \Leftrightarrow a_3 = 0,\ b_7 \neq 0;$

$A_3 \Leftrightarrow a_3 = 0, b_7 = 0$ *e* $4a_1a_2c_9 - b_8^2a_2 - b_6^2a_1 \neq 0;$

$A_4 \Leftrightarrow a_3 = 0,\ b_7 = 0,\ 4a_1a_2c_9 - b_8^2a_2 - b_6^2a_1 = 0,$ *e*

$$4a_1a_2d_{11} - 4a_2c_{10}b_8 - 2a_1c_8b_6 + b_6b_8b_{10} \neq 0.$$

(ii) *Nos pontos umbílicos, com $a_1 \neq 0$:*

$D_4 \Leftrightarrow a_2 = a_3 = 0,\ b_7 \neq 0,\ b_5 \neq 0$ *e*

$$4b_6^3b_4 + 27b_4^2b_7^2 - 18b_4b_7b_5b_6 - b_5^2b_6^2 + 4b_5^3b_7 \neq 0.$$

Prova: Sabemos que f tem uma singularidade em $(0, 0, 0)$, pois $f_x(0, 0, 0) = f_y(0, 0, 0) = f_z(0, 0, 0) = 0$.

É óbvio que f tem singularidade do tipo A_1, isto é, f é equivalente a $x^2 \pm y^2 \pm z^2$ se, e somente se, $a_1a_2a_3 \neq 0$

Daqui para frente temos que ter $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = 0$, senão f seria equivalente à $x^2 \pm y^2 \pm z^2$ (singularidade A_1). Vamos supor sem perda de generalidade que a_1 e a_2 são diferentes de zero e $a_3 = 0$, a fim de que possamos ter singularidade A_k, com $k > 1$.

Para A_2, consideramos o 3-jato de f com $a_3 = 0$, $j^3f = a_1x^2 + a_2y^2 + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3 + b_8xz^2 + b_9x^2z + b_{10}xyz$. As seguintes mudanças, são feitas:

$y = Y - \frac{b_{10}}{2a_2}xz$, para eliminar o termo xyz;

$x = X - \frac{b_8}{2a_1}z^2$, para eliminar xz^2;

$Y = y - \frac{b_6}{2a_2}z^2$, para eliminar Yz^2.

Colocando, agora, X^2 em evidência para os termos que contém X^i, com $i \geq 2$, fazemos a mudança de coordenada: $x = X(sign(a_1)(a_1+b_1X+b_2y+b_9z))^{\frac{1}{2}}$, onde $sign(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função sinal

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Analogamente, colocando y^2 em evidência para os termos que contém y^i, com $i \geq 2$, fazemos a mudança de coordenada: $Y = y(sign(a_2)(a_2 + b_3x + b_4y + b_5z))^{\frac{1}{2}}$. Teremos

reduzido o 3-jato de f a $\pm x^2 \pm y^2 + b_7 z^3$. Finalmente, com mudança de coordenada na meta reduzimos a $x^2 \pm y^2 + b_7 z^3$. Portanto, teremos singularidade A_2 se, e somente se, $a_3 = 0$, e $b_7 \neq 0$.

Para A_3, consideramos o 4-jato de f com $a_3 = 0$ e $b_7 = 0$. As seguintes mudanças são feitas:

$y = Y - \frac{b_{10}}{2a_2} xz$, para eliminar o termo xyz;

$x = X - \frac{b_8}{2a_1} z^2$, para eliminar xz^2;

$Y = y - \frac{b_6}{2a_2} z^2$, para eliminar Yz^2;

$y = Y - \frac{c_8}{2a_2} z^3$, para eliminar yz^3;

$X = x - \frac{coef(Xz^3)}{2a_1} z^3$, para eliminar Xz^3, onde $coef(Xz^3)$ é o novo coeficiente de Xz^3 após as mudanças anteriores;

$Y = y - \frac{coef(xYz^2)}{2a_2} xz^2$, para eliminar xYz^2, onde $coef(xYz^2)$ é o novo coeficiente de xYz^2.

Como em A_2, colocando x^2 em evidência para os termos que contém x^i, com $i \geq 2$, e y^2 para os termos que contém y^i, com $i \geq 2$, fazemos de modo análogo, as mudanças de coordenadas. Finalmente, teremos reduzido o 4-jato de f a $x^2 \pm y^2 + (c_9 - b_8^2/4a_1 - b_6^2/4a_2)\, z^4$. Portanto, f tem singularidade A_3 se, e somente se, $a_3 = 0$, $b_7 = 0$, e $4a_1a_2c_9 - b_8^2a_2 - b_6^2a_1 \neq 0$.

Para A_4, consideramos o 5-jato de f com $a_3 = 0$ e $b_7 = 0$. Após as mudanças de coordenadas necessárias, e substituindo $c_9 - b_8^2/4a_1 - b_6^2/4a_2 = 0$, o 5-jato se reduz a $x^2 \pm y^2 + (d_{11} - c_{10}b_8/2a_1 - c_8b_6/2a_2 + b_6b_8b_{10}/4a_1a_2)\, z^5$. Portanto, f tem singularidade A_4 se, e somente se, $a_3 = 0$, $b_7 = 0$, $c_9 - b_8^2/4a_1 - b_6^2/4a_2 = 0$, e $4a_1a_2d_{11} - 4a_2c_{10}b_8 - 2a_1c_8b_6 + b_6b_8b_{10} \neq 0$.

Para os pontos umbílicos planos parciais, podemos supor que $j^2f(x,y,z) = a_1x^2$. Assim, para D_4, consideramos $j^3f = a_1x^2 + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3 + b_8xz^2 + b_9x^2z + b_{10}xyz$. De maneira análoga às mudanças anteriores, podemos fazer j^3f ser equivalente a $x^2 + C(y,z)$, onde $C(y,z)$ é a forma cúbica $b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3$. Temos singularidade D_4^+ se, e somente se, esta cúbica tem apenas uma raiz real e D_4^- se, e somente se, a cúbica tem 3 raízes reais. Isto é a singularidade é D_4 se, e somente se, a cúbica não tem raiz dupla, e isto nos diz que o discriminante de $C(y,z)$ tem que ser diferente de zero. Para calcular este discriminante, é conhecido que, basta eliminar por exemplo, yz^2 substituindo $z = Z - \frac{b_6}{3b_7} y$ (no caso em que $b_7 \neq 0$, caso contrário o raciocínio é análogo para eliminar y^2z se $b_4 \neq 0$, observe que se $b_4 = 0$ e $b_7 = 0$ então a cúbica tem 3 raízes reais e portanto a singularidade é do tipo D_4^-). Assim teremos:

$\left(\frac{2b_6^3}{27b_7^2}+b_4-\frac{b_5b_6}{3b_7}\right)y^3+\left(-\frac{b_6^2}{3b_7}+b_5\right)y^2Z+b_7Z^3$. Dividindo esta equação por b_7y^3 teremos:

$$\left(\frac{2b_6^3}{27b_7^3}+\frac{b_4}{b_7}-\frac{b_5b_6}{3b_7^2}\right)+\left(-\frac{b_6^2}{3b_7^2}+\frac{b_5}{b_7}\right)\frac{Z}{y}+\left(\frac{Z}{y}\right)^3,$$

cujo discriminate é

$$\frac{1}{108b_7^4}(4b_6^3b_4+27b_4^2b_7^2-18b_4b_7b_5b_6-b_5^2b_6^2+4b_5^3b_7).$$

Portanto, f tem singularidade do tipo D_4, isto é, f é equivalente a $x^2+y^2z\pm z^3$ se, e somente se, $a_2=a_3=0$, $b_7\neq 0$, $b_5\neq 0$ e $4b_6^3b_4+27b_4^2b_7^2-18b_4b_7b_5b_6-b_5^2b_6^2+4b_5^3b_7\neq 0$. ■

2.2 Desdobramento versal

A família de funções altura $H: M\times S^3,(p,u)\to \mathbb{R}$ é uma deformação da função altura H_{u_0}. Em coordenadas locais

$$H(x,y,z,a,b,c)=f(x,y,z)+ax+by+cz,$$

portanto $\dot{H}_a=x$, $\dot{H}_b=y$ e $\dot{H}_c=z$.

Nesta seção, procuramos as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f, para H ser uma deformação versal de $H_{u_0}=f$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4 *A família de funções altura H é um desdobramento versal em uma singularidade:*

A_2 : *sempre,*

$A_3\Leftrightarrow b_6\neq 0$ *ou* $b_8\neq 0$,

$A_4\Leftrightarrow a_1^2a_2^3b_8(-2(a_1a_2b_{10}^2b_8^2b_5+a_1^2a_2b_{10}c_{15}b_6^2-2a_1^2a_2b_6b_{10}c_7b_8+a_1^2a_2b_6b_{10}^2c_8-2a_1^2a_2b_{10}c_8b_8b_5)+a_1^2b_{10}b_3b_6^3+2a_1^2b_6^2b_{10}^2b_5-3a_1^2b_6^2b_{10}b_4b_8-2(2a_1^2b_{10}b_5^2b_8b_6+a_1a_2^2b_8c_{10}b_6^2-2a_1^2a_2^2b_{10}d_{12}b_6+2a_1^2a_2^2b_{10}d_{10}b_8+2a_1a_2^2b_6b_{10}c_{10}b_9-a_2^2b_8^25b_9b_6^2)+3a_2^2b_6b_{10}b_8^2b_1-a_2^2b_8^3b_{10}b_6+4a_2^2b_6b_{10}b_8b_9^2-4a_2^2b_6b_8^2b_5b_9-2a_2^2b_8^2b_9b_{10}^2+2a_2^2b_8^3b_5b_{10}-a_2^2b_{10}b_8^3b_2-4a_1a_2^2b_6b_{10}b_8c_{11}+2a_1a_2^2b_6b_8^2c_8+4a_1a_2^2b_6b_8b_5c_{10}+2a_1a_2^2b_{10}^2c_{10}b_8+2a_1a_2^2b_8^2c_{15}b_{10}-4a_1a_2^2b_8^2b_5c_8+a_1a_2b_{10}b_8b_6^3+2a_1a_2b_6^2b_{10}^2b_9-2a_1a_2b_6^2b_{10}b_8b_5+2a_1a_2b_6^2b_{10}b_8b_2-2a_1a_2b_6^2b_8^2b_5-2a_1a_2b_6b_{10}b_8^2b_3+4a_1a_2b_6b_8^2b_5^2)\neq 0,$

$D_4\Leftrightarrow 6b_3b_5b_7-2b_3b_6^2-9b_4b_{10}b_7+6b_4b_8b_6+b_5b_{10}b_6-2b_8b_5^2\neq 0.$

Prova: H é sempre um desdobramento versal em uma singularidade A_2, pois

$$j^3\left\{\langle f_x,f_y,f_z\rangle\right\}_{\mathcal{E}(2)}+\mathbb{R}\left\{\dot{H}_a,\dot{H}_b,\dot{H}_c\right\}=J^3(2).$$

Chamando o lado esquerdo da igualdade de V, temos que obviamente $V \subset J^3(2)$. Para ver que $J^3(2) \subset V$, observe que $x = \dot{H}_a$, $y = \dot{H}_b$, $z = \dot{H}_c$. Além disso, considerando que $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_7 \neq 0$ temos:

$$\begin{array}{llll}
x^3 = \frac{x^2}{2a_1} j^3 f_x, & y^3 = \frac{y^2}{2a_2} j^3 f_y, & yz^2 = \frac{z^2}{2a_2} j^3 f_y, & x^2 z = \frac{xz}{2a_1} j^3 f_x, \\
y^2 z = \frac{yz}{2a_2} j^3 f_y, & xy^2 = \frac{y^2}{2a_1} j^3 f_x, & x^2 y = \frac{x^2}{2a_2} j^3 f_y, & xz^2 = \frac{z^2}{2a_1} j^3 f_x, \\
xyz = \frac{zy}{2a_1} j^3 f_x, & z^3 = \frac{z}{3b_7} j^3 f_z, & xy = \frac{x}{2a_2} j^3 f_y, & y^2 = \frac{y}{2a_2} j^3 f_y, \\
xz = \frac{z}{2a_1} j^3 f_x, & yz = \frac{z}{2a_2} j^3 f_y, & x^2 = \frac{x}{2a_1} j^3 f_x, & z^2 = \frac{1}{3b_7} j^3 f_z.
\end{array}$$

H é um desdobramento versal em uma singularidade A_3 de f se, e somente se,

$$j^4 \left\{ \langle f_x, f_y, f_z \rangle \right\}_{\mathcal{E}(2)} + \mathbb{R} \left\{ \dot{H}_a, \dot{H}_b, \dot{H}_c \right\} = J^4(2).$$

Chamando novamente de V o conjunto do lado esquerdo da igualdade, temos que certamente $V \subset J^4(2)$. Para a outra inclusão, é fácil, como no caso anterior, ver que os termos: $x, y, z, x^4, y^4, xy^3, x^2yz, xy^2z, x^3y, x^2y^2, zy^3, z^2y^2, z^3y, xz^3, z^2x^2, zx^3, xyz^2, xyz, x^2z, y^3, y^2z, x^2y, xy^2, x^3$ estão em V, pois $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$. A condição, $4a_1a_2c_9 - b_8^2a_2 - b_6^2a_1 \neq 0$, para A_3, garante que yz^2, xz^2 e $z^4 \in V$, pois

$$\begin{pmatrix} z^2 j^4(f_y) \\ z^2 j^4(f_x) \\ z j^4(f_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 & 0 & b_6 \\ 0 & 2a_1 & b_8 \\ 2b_6 & 2b_8 & 4c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ z^4 \end{pmatrix} + \textit{elementos} \text{ de } V,$$

e o determinante da matriz é exatamente $(4a_1a_2c_9 - b_8^2a_2 - b_6^2a_1)/(4a_1a_2)$. Com isto podemos agora provar que x^2, y^2 e xy estão em V. Como

$$\begin{pmatrix} z j^4(f_y) \\ z j^4(f_x) \\ j^4(f_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 & 0 & b_6 \\ 0 & 2a_1 & b_8 \\ 2b_6 & 2b_8 & 4c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ z^3 \end{pmatrix} + \textit{elementos} \text{ de } V,$$

temos também que yz, xz e $z^3 \in V$. Finalmente, para provar que z^2 pertence a V podemos usar $j^4(f_y)$ se $b_6 \neq 0$ ou $j^4(f_z)$ se $b_8 \neq 0$.

H é um desdobramento versal em uma singularidade A_4 de f se, e somente se,

$$j^5 \left\{ \langle f_x, f_y, f_z \rangle \right\}_{\mathcal{E}(2)} + \mathbb{R} \left\{ \dot{H}_a, \dot{H}_b, \dot{H}_c \right\} = J^5(2).$$

O determinante da matriz, induzida pelos vetores $j^5 f_x$, $j^5 f_y$, $j^5(xf_x)$, $j^5(xf_y)$, $j^5(yf_y)$, $j^5(yf_x)$, $j^5(zf_y)$, $j^5(zf_x)$, $j^5(yzf_y)$, $j^5(z^2f_x)$, $j^5(z^2f_y)$, $j^5(z^3f_y)$, $j^5(z^3f_x)$ usada para mostrar que $x^2, xy, y^2, yz, z^2, xz, y^2z, yz^2, z^3, xz^2, z^3y, z^4, z^5$ pertencem a $j^5 \left\{ \langle f_x, f_y, f_z \rangle \right\}_{\mathcal{E}(2)} + \mathbb{R} \left\{ \dot{H}_a, \dot{H}_b, \dot{H}_c \right\}$, dá exatamente a condição que queremos.

H é um desdobramento versal em uma singularidade D_4 de f se, e somente se,

$$j^3\left\{\langle f_x, f_y, f_z\rangle\right\}_{\mathcal{E}(2)} + \mathbb{R}\left\{\dot{H}_a, \dot{H}_b, \dot{H}_c\right\} = J^3(2).$$

Para mostrar que xy, y^3, z^2y, xz, y^2z, z^3 pertencem a $j^3\left\{\langle f_x, f_y, f_z\rangle\right\}_{\mathcal{E}(2)} + \mathbb{R}\left\{\dot{H}_a, \dot{H}_b, \dot{H}_c\right\}$, temos uma matriz induzida pelos vetores $j^3(yf_x), j^3(zf_x), j^3(zf_y), j^3(yf_y), j^3(yf_z), j^3(zf_z)$, cujo determinante é $12(4b_6^3b_4 + 27b_4^2b_7^2 - 18b_4b_7b_5b_6 - b_5^2b_6^2 + 4b_5^3b_7)a_1^2$, que em D_4 é diferente de zero. E para y^2, yz e z^2 temos uma matriz, induzida pelos vetores j^3f_x, j^3f_y, j^3f_z, cujo determinante é $6b_3b_5b_7 - 2b_3b_6^2 - 9b_4b_{10}b_7 + 6b_4b_8b_6 + b_5b_{10}b_6 - 2b_8b_5^2$. ■

Vimos que o Teorema de Montaldi nos dá quais são as singularidades genéricas de cada aplicação ou função usadas para medir o contato da hipersuperfície com seus respectivos objetos. Nos resultados anteriores achamos as condições necessárias e suficientes para identificarmos cada uma destas singularidades. Olhando para um ponto p da hipersuperfície M, que pode sempre ser dada localmente na forma de Monge, e para os coeficientes desta forma, podemos dizer exatamente que tipo de singularidade genérica tem a função altura ao longo da normal no ponto p. Além disso, fizemos o mesmo para identificar quando cada família é um desdobramento versal destas singularidades. Com estas condições conseguimos mais informações geométricas (ver, por exemplo, a observação 2.12). Observamos que no caso de superfície em $\mathbb{R}^3$ achar as condições é um passo necessário para estudar as mudanças genéricas a 1-parâmetro na geometria plana de superfície [14]. Pretendemos, no futuro, fazer o mesmo estudo para hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$.

2.2.1 Conseqüências geométricas

Dado um desdobramento versal H de f podemos associar a H dois subconjuntos do espaço de parâmetros que são de grande interesse geométrico, o discriminante de H e o conjunto bifurcação de H. Estes conjuntos fornecem modelos locais extremamente úteis no estudo da geometria.

Seja:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{H}\colon & \mathbb{R}^3 \times S^3 & \to & \mathbb{R} \times S^3 \\ & (x, y, z, u) & \mapsto & (H(x, y, z, u), u) \end{array}$$

O primeiro é o subconjunto de S^3 definido por

$$\Delta(H) = \{(H(x,y,z,u),u); u \in S^3 \text{ e } H_u \text{ é singular em } (x,y,z)\} = \tilde{H}(\Sigma(H)).$$

Neste caso, o discriminante de H é exatamente o dual de M, pois um hiperplano desta família dá origem a uma singularidade se, e somente se, ele é tangente a M no ponto em questão.

O segundo conjunto é o conjunto de bifurcação de H

$$Bif(H) = \{u \in S^3; \exists (x,y,z) : H_u \text{ não é estável em } (x,y,z)\}$$

$$= \{u \in S^3; \exists (x,y,z) : H_u \text{ tem singularidade mais degenerada que } A_1\}.$$

Então $Bif(H)$ é o conjunto dos vetores normais a M nos pontos parabólicos, isto é, é a imagem do conjunto parabólico de M pela aplicação de Gauss. Os modelos destes conjuntos estão descritos no Teorema 2.17.

2.3 A geometria proveniente do contato com hiperplanos

Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$. O objetivo desta seção é descrever os conjuntos em M onde ocorrem as singularidades genéricas da função altura.

Seguindo o método de Bruce [8] para superfícies em $\mathbb{R}^3$, em cada ponto $q \in M$, podemos escolher eixos coordenados mutuamente perpendiculares (x,y,z,w) com o eixo-w na direção normal a M em q. Sejam q um ponto sobre a hipersuperfície, e n um campo vetorial normal unitário em uma vizinhança U de q. Escolha três campos vetoriais unitários C^∞, v, u e t no espaço tangente a M nos pontos de U, tal que eles formem uma base positivamente orientada. Logo, M pode ser escrita, localmente, em qualquer ponto p, de U na forma de Monge, como o gráfico de uma função $w = f_p(x,y,z)$.

Seja V_k o espaço vetorial de polinômios de x, y e z de grau ≥ 2 e $\leq k$. A construção acima define uma aplicação C^∞

$$\begin{array}{rccc} \theta : & U & \to & V_k \\ & p & \mapsto & j^k f_p \end{array}$$

Queremos obter as configurações genéricas do conjunto parabólico em M. Para isto, vamos definir para cada tipo de singularidade da função altura um estrato Y no conjunto

V_k representando este tipo de singularidade. Vamos provar a transversalidade da aplicação θ com o estrato Y para usar o Teorema 1.25 e mostrar que $\theta^{-1}(Y) \subset M$, é uma variedade regular de codimensão igual a codimensão de Y. Para fazer isto, precisamos saber qual é o espaço tangente da imagem da aplicação Monge-Taylor.

No próximo resultado, calculamos a imagem da derivada da aplicação Monge-Taylor θ, análogo à Proposição 2 de Bruce [8] para superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 2.5 *Seja $\theta : U \to V_k$ e seja $p = (x_0, y_0, z_0, w_0) \in U$, com M escrita localmente em q como $w = f(x, y, z)$. A imagem de $d\theta(p)$ é gerada por v_1, v_2, v_3 tais que:*

$$\begin{aligned} v_1 = {} & j^k\left(d\theta(\tfrac{\partial}{\partial x})\right) = j^k(f_x(x,y,z) - f_x(x,y,z)f_{xx}(0,0,0)f(x,y,z) - \\ & f_y(x,y,z)f(x,y,z)f_{xy}(0,0,0) - f_z(x,y,z)f(x,y,z)f_{xz}(0,0,0) - f_{xx}(0,0,0)x - \\ & f_{xy}(0,0,0)y - f_{xz}(0,0,0)z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 = {} & j^k\left(d\theta(\tfrac{\partial}{\partial y})\right) = j^k(f_y(x,y,z) - f_x(x,y,z)f_{xy}(0,0,0)f(x,y,z) - \\ & f_y(x,y,z)f(x,y,z)f_{yy}(0,0,0) - f_z(x,y,z)f(x,y,z)f_{yz}(0,0,0) - f_{xy}(0,0,0)x - \\ & f_{yy}(0,0,0)y - f_{yz}(0,0,0)z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 = {} & j^k\left(d\theta(\tfrac{\partial}{\partial z})\right) = j^k(f_z(x,y,z) - f_x(x,y,z)f_{xz}(0,0,0)f(x,y,z) - \\ & f_y(x,y,z)f(x,y,z)f_{yz}(0,0,0) - f_z(x,y,z)f(x,y,z)f_{zz}(0,0,0) - f_{xz}(0,0,0)x - \\ & f_{yz}(0,0,0)y - f_{zz}(0,0,0)z). \end{aligned}$$

Prova: Seja $p = (x_0, y_0, z_0, w_0) \in U$. Localmente M pode ser escrita em q como $w = f(x, y, z)$. Para outro ponto q em U teremos uma outra função g_q e um sistema de coordenadas X, Y, Z, W tal que M é localmente o gráfico desta função em uma vizinhança V_q de q. Em particular $f(x, y, z) = g_q(X, Y, Z)$ em $U \cap V_q$. Vamos escrever localmente g_q no sistema de coordenadas x, y, z, w em função de f, e assim podemos escrever a aplicação Monge-Taylor em U em função de f e calcular então os vetores geradores do espaço tangente de θ em função desta dada f.

Os vetores $v_1 = (1, 0, 0, f_x(x_0, y_0, z_0))$, $v_2 = (0, 1, 0, f_y(x_0, y_0, z_0))$ e $v_3 = (0, 0, 1, f_z(x_0, y_0, z_0))$ geram o hiperplano tangente T_pM, em p. Considere os vetores $e_1 = (1, 0, 0, f_x)$, $e_2 = (-f_y f_x, 1 + f_x^2, 0, f_y)$, $e_3 = (-f_x f_z, -f_y f_z, 1 + f_x^2 + f_y^2, f_z)$, que são dois a dois ortogonais e estão em T_pM. Para achar e_2 usamos as equações $e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 v_2$ e $\langle e_1, e_2\rangle = 0$, e para e_3 usamos $e_3 = \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_2 + \lambda_5 v_3$, $\langle e_1, e_3\rangle = 0$ e $\langle e_2, e_3\rangle = 0$. Seja $e_4 = (-f_x, -f_y, -f_z, 1)$ vetor normal a superfície M no ponto p. A transformação afim que leva o espaço-(x, y, z) e o eixo-w normal em $(0, 0, 0, 0)$, respectivamente, no espaço tangente e no normal em $p = (x_0, y_0, z_0, w_0)$, é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -f_x f_y & -f_x f_z & -f_x \\ 0 & 1+f_x^2 & -f_y f z & -f_y \\ 0 & 0 & 1+f_x^2+f_y^2 & -f_z \\ f_x & f_y & f_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X+x_0 \\ Y+y_0 \\ Z+z_0 \\ W+w_0 \end{pmatrix}$$

onde as derivadas parciais de f são calculadas no ponto (x_0, y_0, z_0). As coordenadas (x, y, z, w) são as coordenadas antigas de um ponto e (X, Y, Z, W) são as novas coordenadas. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} X+x_0 \\ Y+y_0 \\ Z+z_0 \\ W+w_0 \end{pmatrix} = A^{-1}(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

onde A é a matriz, cujas colunas são os vetores $e_i's$. Note que na origem A é a matriz identidade. Desenvolvendo as equações acima, temos:

$$\begin{aligned} x &= X + x_0 - f_y f_x (Y + y_0) - f_x f_z (Z + z_0) - f_x (W + w_0), \\ y &= (1 + f_x^2)(Y + y_0) - f_y f_z (Z + z_0) - f_y (W + w_0), \\ z &= (1 + f_x^2 + f_y^2)(Z + z_0) - f_z (W + w_0), \\ w &= f_x (X + x_0) + f_y (Y + y_0) + f_z (Z + z_0) + (W + w_0). \end{aligned}$$

Com esta mudança a hipersuperfície é dada no novo sistema (onde p está identificado com a origem) por (X, Y, Z, W), onde usando as igualdades anteriores,

$W = g_{(x_0,y_0,z_0)}(x, y, z)$

$= -f(x_0, y_0, z_0) + f(X + x_0 - f_y f_x (Y + y_0) - f_x f_z (Z + z_0) - f_x (W + w_0), (1 + f_x^2)(Y + y_0) - f_y f_z (Z + z_0) - f_y (W + w_0), (1 + f_x^2 + f_y^2)(Z + z_0) - f_z (W + w_0)) - f_x (X + x_0) - f_y (Y + y_0) - f_z (Z + z_0).$

Portanto a aplicação Monge-Taylor é dada por:

$$\begin{aligned} \theta : U &\to V_k \\ (x_0, y_0, z_0) &\mapsto j^k g_{(x_0,y_0,z_0)}(x, y, z). \end{aligned}$$

Logo, para obter o resultado basta calcular $v_1 = j^k(\frac{\partial W}{\partial x_0})$, $v_2 = j^k(\frac{\partial W}{\partial y_0})$, e $v_3 = j^k(\frac{\partial W}{\partial z_0})$ em $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. ■

Um resultado em [14] mostra que a geometria plana de variedades é $GL(n)$ - invariante. Então qualquer variedade em $J^k(n)$ resultando desta geometria é também $GL(n)$-invariante (ver [14], páginas 175-176).

Sendo assim, dada f com um determinado tipo de singularidade, vamos considerar um transversal a $GL(3)-$órbita desta f e trabalhar neste transversal. Pois, o estrato Y de um determinado tipo de singularidade pode ser visto como o estrato $\bar{Y}$ deste tipo de singularidade neste transversal cartesiano a $GL(3)-$órbita desta f. Temos então que o espaço tangente de Y é gerado pelo espaço tangente de $\bar{Y}$ e pelo espaço tangente à $GL(3)-$órbita de f. Então, para mostrar a transversalidade da aplicação θ com o estrato Y precisamos também dos geradores do espaço tangente à $GL(3)-$órbita de f.

Lema 2.6 *Os geradores do espaço tangente à $GL(3)-$órbita de f em $J^k(3)$, em f, são:*

$$\begin{array}{lll} u_1 = xf_x, & u_2 = yf_x, & u_3 = zf_x, \\ u_4 = yf_y, & u_5 = xf_y, & u_6 = zf_y, \\ u_7 = xf_z, & u_8 = yf_z, & u_9 = zf_z. \end{array}$$

Prova: Para obter os geradores, basta calcular $\frac{d}{dt} f(A_t(x,y,z)) \mid_{t=0}$ onde A_t é um caminho em $GL(3)$ pela identidade. Os seguintes caminhos vão dar os geradores:

$$I + tE_{ij} \text{ com } i,j = 1,2,3,$$

onde I é a matriz identidade e $E_{ij} = (\alpha_{lm})$ com

$$\alpha_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad l = i \quad \text{e} \quad m = j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

■

Observação 2.7 *O espaço vetorial V_k é gerado pelos monômios de grau ≥ 2 e $\leq k$ e um elemento de V_k é representado pelo seu coeficiente em relação a estes geradores. Por exemplo, um elemento de $V_2 = \langle x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz \rangle$ é representado pelo seu respectivo coeficiente $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$.*

Proposição 2.8 *As singularidades A_2 (conjunto parabólico) da função altura ocorrem localmente sobre uma superfície suave em M (ver Figura 2.1).*

Prova: Suponha que f tem uma singularidade A_2 na origem e tome, sem perda de generalidade, $j^2 f = a_1 x^2 + a_2 y^2$ com $a_1 a_2 \neq 0$. O espaço tangente à $GL(3)$-órbita de f em V_2 é $\mathbb{R}\langle x^2, xy, xz, y^2, yz \rangle$, logo um transversal à órbita é dado por $j^2 f + \bar{a}_3 z^2$, onde

$\bar{a}_3 \in \mathbb{R}$. Então no transversal, o estrato A_2 é dado por $\bar{a}_3 = 0$, isto é, é uma variedade de codimensão 1. Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-A_2 em V_2, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_f A_2 = V_2$.

O espaço tangente do estrato A_2 em V_2 é o kernel de uma forma diferenciável ξ. Como ξ tem que anular o tangente ao estrato A_2 no transversal e os geradores do tangente de $GL(3)(f)$, então $\xi = da_3$.

Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_2 (ver Proposição 2.5), são

$$v_1 = 2b_2xy + b_3y^2 + 3b_1x^2 + b_8z^2 + 2b_9xz + b_{10}yz,$$

$$v_2 = 2b_3xy + 3b_4y^2 + b_2x^2 + b_6z^2 + b_{10}xz + 2b_5yz,$$

$$v_3 = b_{10}xy + b_5y^2 + b_9x^2 + 3b_7z^2 + 2b_8xz + 2b_6yz.$$

A imagem de θ não é transversal ao estrato A_2 se, e somente se, $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\} + kernel\ \xi \subsetneq V_2$, o que significa que v_1, v_2, v_3 pertencem ao kernel ξ. Isto é se, e somente se,

$$\xi(v_1) = 0 \Leftrightarrow b_8 = 0,$$

$$\xi(v_2) = 0 \Leftrightarrow b_6 = 0,$$

$$\xi(v_3) = 0 \Leftrightarrow b_7 = 0.$$

Como $\xi(v_3) = b_7 \neq 0$ para uma singularidade A_2 concluímos que a imagem de θ é sempre transversal ao estrato A_2 em V_2. Então pelo Teorema 1.25, a variedade A_2 em M, que é igual a $\theta^{-1}(A_2)$, é sempre uma superfície suave já que o estrato A_2 tem codimensão um em V_2. ■

Observação 2.9 *Observe que a prova da proposição anterior nos dá informações precisas (ou seja, as condições para ocorrer a transversalidade) sobre a densidade a que se refere o Teorema 1.26. O mesmo se repetirá nas provas das Proposicões 2.11, 2.13 e 2.15. Usamos as condições que aparecem para obter novas informações geométricas.*

Vamos estudar o significado da não transversalidade de θ ao estrato A_2.

Proposição 2.10 *O ponto* $(0, 0, 0)$ *do conjunto parabólico é singular se, e somente se,* $b_6 = b_7 = b_8 = 0$*, ou seja, se, e somente se,* θ *não é transversal ao estrato* A_2*.*

Prova: Seja $j^2f = a_1x^2+a_2y^2+b_1x^3+b_2x^2y+b_3xy^2+b_4y^3+b_5y^2z+b_6yz^2+b_7z^3+b_8xz^2+b_9x^2z+b_{10}xyz$ com $f_{zz}(0,0,0) = a_3 = 0$, $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$, ou seja, f tem singularidade A_2 na origem. O conjunto parabólico é descrito pela equação

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = 0,$$

cujo primeiro jato é $8a_1a_2b_8x + 8a_1a_2b6y + 24a_1a_2b_7z$. Então as singularidades são dadas por

$$\nabla \left(\det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \right) = 8a_1a_2(b_8, b_6, 3b_7) = 0.$$

■

Proposição 2.11 *As singularidades A_3 da função altura ocorrem genericamente sobre uma curva suave da superfície suave de pontos A_2 (ver Figura 2.1).*

Prova: Suponha que f tem uma singularidade A_3 na origem, e sem perda de generalidade, tome $a_3 = 0$ e $b_7 = 0$. Um transversal à órbita de A_3 em V_3 pode ser dado por $j^3f + \bar{a}_3z^2 + \bar{f}_3$, onde $\bar{a}_3 \in \mathbb{R}$ e $\bar{f}_3 = \bar{b}_1x^3 + \bar{b}_2x^2y + \bar{b}_3xy^2 + \bar{b}_4y^3 + \bar{b}_5zy^2 + \bar{b}_6z^2y + \bar{b}_7z^3 + \bar{b}_8xz^2 + \bar{b}_9zx^2 + \bar{b}_{10}xyz$ com os coeficientes em $\mathbb{R}$. Neste transversal, temos uma singularidade A_3 se $\bar{a}_3 = 0$ e $\bar{b}_7 = 0$. Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-A_3, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_fA_3 = V_3$, e assim saberemos quando $\theta^{-1}(A_3)$ é variedade suave em $\mathbb{R}^3$ de codimensão igual a dois (codimensão de A_3).

O espaço tangente do estrato-A_3 em V_3 é a interseção do kernel de duas formas diferenciáveis ξ_1 e ξ_2. Como ξ_1 e ξ_2 têm que anular o tangente ao estrato-A_3 no transversal e os geradores do espaço tangente de $GL(3).f$, então $\xi_1 = da_3$ e $\xi_2 = a_2b_8da_5 + a_1b_6da_6 - 2a_1a_2db_7$.

Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_3, são

$$v_1 = 2b_2xy + b_3y^2 + 3b_1x^2 + b_8z^2 + 2b_9xz + b_{10}yz + (4c_1 - 4a_1^3)x^3 + 3c_2x^2y + 3c_{12}zx^2 + (2c_3 - 4a_1^2a_2)y^2x + 2c_{13}xyz + c_{10}z^3 + c_4y^3 + c_{14}y^2z + 2c_{11}xz^2 + c_{15}yz^2,$$

$$v_2 = 2b_3xy + 3b_4y^2 + b_2x^2 + b_6z^2 + b_{10}xz + 2b_5yz + c_2x^3 + (2c_3 - {}^2_2\, a_1)x^2y + c_{13}zx^2 + 3c_4y^2x + 2c_{14}xyz + c_8z^3 + (4c_5 - 4a_2^3)y^3 + 3c_6y^2z + c_{15}xz^2 + 2c_7yz^2,$$

$$v_3 = b_{10}xy + b_5y^2 + b_9x^2 + 2b_8xz + 2b_6yz + c_{12}x^3 + c_{13}x^2y + 2c_{11}zx^2 + c_{14}y^2x + 2c_{15}xyz + 4c_9z^3 + c_6y^3 + 2c_7y^2z + 3c_{10}xz^2 + 3c_8yz^2.$$

A imagem de θ não é transversal ao estrato-A_3 se, e somente se, $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\} + kernel\ \xi_1 \cap kernel\ \xi_2 \subsetneq V_3$. Como $kernel\ \xi_1 \cap kernel\ \xi_2$ tem codimensão dois, esta não transversalidade significa que existem dois vetores, linearmente independentes, $\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3$ $(j = 1, 2)$, tal que

$$\xi_1(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = -\left(b_8\lambda_j + b_6\mu_j\right) = 0 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}\xi_2(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) =& (2a_2(b_9b_8 - a_1c_{10}) + a_1b_6b_{10})\lambda_j + (a_2b_8b_{10} + 2a_1(b_6b_5 - a_2c_8))\mu_j + \\ & 2(a_2b_8^2 + a_1b_6^2 - 4a_1a_2c_9)\beta_j = 0\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$. Isto é, fazendo $x = \lambda_j$, $y = \mu_j$, $z = \beta_j$, teremos que ter duas soluções linearmente independentes para o sistema:

$$\begin{gathered} b_8x + b_6y = 0 \\ (2a_2(b_9b_8 - a_1c_{10}) + a_1b_6b_{10})x + (a_2b_8b_{10} + 2a_1(b_6b_5 - a_2c_8))\, y + 2(a_2b_8^2 + a_1b_6^2 - 4a_1a_2c_9)z = 0. \end{gathered}$$

Como estas são equações de planos, temos que:

(i) Se $a_2b_8^2 + a_1b_6^2 - 4a_1a_2c_9 \neq 0$ então $b_8 = b_6 = 0$, pois o coeficiente de z na primeira equação é zero, e portanto, ela tem que gerar o espaço todo, para termos duas soluções linearmente independentes. Assim, já que temos $b_7 = 0$ para A_3, isto é equivalente ao conjunto A_2 ser singular (ver Proposição 2.10).

(ii) Se $a_2b_8^2 + a_1b_6^2 - 4a_1a_2c_9 = 0$ então para que os planos sejam paralelos temos que ter $b_8\left(a_2b_8b_{10} + 2a_1b_6b_5 - 2a_1a_2c_8\right) - (2b_9a_2b_8 + a_1b_6b_{10} - 2a_1a_2c_{10})b_6 = 0$, e a primeira igualdade deste item nos diz que a singularidade é $A_{k\geq 4}$ (ver Proposição 2.3).

Concluímos que a imagem da aplicação Monge-Taylor não é transversal ao estrato A_2 na singularidade A_3 quando o conjunto parabólico é singular, ou quando a singularidade é do tipo $A_{k\geq 4}$. Observe que para o conjunto A_2 ser singular em A_3, precisamos de 4 condições, portanto θ não encontra este estrato (A_2 com conjunto parábolico singular), ou seja, o caso não é genérico. Então pelo Teorema 1.25, a variedade A_3 em M, que é igual a $\theta^{-1}(A_3)$, é genericamente uma curva suave já que o estrato A_3 tem codimensão dois em V_3. ■

Observações 2.12

(*i*) *Note que nesta curva a imagem de θ é transversal ao estrato-A_2 e então o conjunto A_2 é uma superfície suave.*

(*ii*) *Em $A_3 : b_6 = b_8 = 0$ se, e somente se, a família de função altura não é desdobramento versal (ver Proposição 2.4) se, e somente se, o conjunto parabólico é singular se, e somente se, a aplicação Monge-Taylor não é transversal ao estrato-A_2.*

Proposição 2.13 *As singularidades A_4 da função altura ocorrem genericamente em pontos isolados da curva A_3 (ver Figura 2.1).*

Prova: Suponha que f tem uma singularidade A_4 na origem, e sem perda de generalidade, tome $a_3 = 0$, $b_7 = 0$ e $c_9 - \frac{b_8^2}{4a_1} - \frac{b_6^2}{4a_2} = 0$. Um transversal à órbita de A_4 em V_4 pode ser dado por $j^4 f + \bar{a}_3 z^2 + \bar{f}_3 + \bar{f}_4$, onde $\bar{a}_3 \in \mathbb{R}$, $\bar{f}_3$ é dada na prova da Proposição 2.11 e $\bar{f}_4 = \bar{c}_1 x^4 + \bar{c}_2 x^3 y + \bar{c}_3 x^2 y^2 + \bar{c}_4 x y^3 + \bar{c}_5 y^4 + \bar{c}_6 y^3 z + \bar{c}_7 y^2 z^2 + \bar{c}_8 y z^3 + \bar{c}_9 z^4 + \bar{c}_{10} z^3 x + \bar{c}_{11} z^2 x^2 + \bar{c}_{12} z x^3 + \bar{c}_{13} x^2 y z + \bar{c}_{14} x y^2 z + \bar{c}_{15} x y z^2$. Neste transversal, temos uma singularidade A_4 se $\bar{a}_3 = 0$, $\bar{b}_7 = 0$ e $4a_1 a_2 (c_9 + \bar{c}_9) - (b_8 + \bar{b}_8)^2 a_2 - (b_6 + \bar{b}_6)^2 a_1 = 0$. Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-A_4, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_f A_4 = V_4$.

O espaço tangente do estrato-A_4 em V_4 é a interseção dos núcleos de três formas diferenciáveis ξ_1, ξ_2 e ξ_3. Como ξ_1, ξ_2 e ξ_3 têm que anular o tangente ao estrato-A_4 no transversal e os geradores do tangente de $GL(3).f$, então

$\xi_1 = da_3$,

$\xi_2 = a_2 b_8 da_5 + a_1 b_6 da_6 - 2a_1 a_2 db_7$,

$\xi_3 = \frac{-b_6}{8a_2} db_6 - \frac{b_8}{8a_1} db_8 + \frac{1}{4} dc_9 + (\frac{b_8 b_9}{8a_1^2} + \frac{b_6 b_{10}}{16a_1 a_2} - \frac{c_{10}}{8a_1}) da_5 + \left(\frac{b_8 b_{10}}{16a_1 a_2} + \frac{b_6 b_5}{8a_2^2} - \frac{c_8}{8a_2}\right) da_6 + \frac{b_8^2}{16a_1^2} da_1 + \frac{b_6^2}{16a_2^2} da_2 + \frac{b_6 b_8}{16a_1 a_2} da_4$.

Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_4, são

$$v_1 = j^4\left(d\theta(\frac{\partial}{\partial x})\right), v_2 = j^4\left(d\theta(\frac{\partial}{\partial y})\right), v_3 = j^4\left(d\theta(\frac{\partial}{\partial z})\right).$$

A imagem de θ não é transversal ao estrato-A_4 se, e somente se, $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\} +$ *kernel* $\xi_1 \cap$ *kernel* $\xi_2 \cap$ *kernel* $\xi_3 \subsetneq V_4$. Como *kernel* $\xi_1 \cap$ *kernel* $\xi_2 \cap$ *kernel* ξ_3 tem codimensão três, esta não transversalidade significa que existe um vetor não nulo, $\lambda v_1 + \mu v_2 + \beta v_3$, tal que $\xi_1(\lambda v_1 + \mu v_2 + \beta v_3) = 0$, $\xi_2(\lambda v_1 + \mu v_2 + \beta v_3) = 0$ e $\xi_3(\lambda v_1 + \mu v_2 + \beta v_3) = 0$. Isto é, teremos que ter

$$\det\begin{pmatrix} \xi_1(v_1) & \xi_1(v_2) & 0 \\ \xi_2(v_1) & \xi_2(v_2) & \xi_2(v_3) \\ \xi_3(v_1) & \xi_3(v_{2)} & \xi_3(v_3) \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$3a_1b_6^2b_8^2b_9b_{10}a_2^2 + 2b_{10}a_2^3b_8^3c_{10}a_1 + 4b_{10}a_2^2b_8^2b_6c_8a_1^2b_8^2d_{11}a_1^2 - b_{10}a_2^3b_8^4b_9 - b_{10}^2a_2^2b_8^3b_6a_1 - 3b_{10}a_2b_8^2b_5b_6^2a_1^2 - 4a_1^2a_2^3c_8b_8^2c_{10} + 2a_1a_2^3c_8b_8^3b_9 + 4a_1^2b_6b_5b_8^2c_{10}a_2^2 - 2a_1b_6b_5b_8^3b_9a_2^2 + b_8a_1^2b_6^3b_{10}^2a_2 - 4b_8a_1^2b_6^2c_{10}b_{10}a_2^2 - 2b_8a_1^3b_6^3b_5^2 - 4b_8a_1^3b_6 + 8b_8a_1^3a_2^3c_8d_{11} + 6b_8a_1^3a_2c_8b_5b_6^2 - 8b_8a_1^3b_6b_5d_{11}a_2^2 - 4b_9a_2^2b_8b_6^2c_8a_1^2 + 2b_9a_2b_8b_5b_6^3a_1^2 + 4a_1^3a_2^2c_{10}b_6^2c_8 - 2a_1^3a_2c_{10}b_5b_6^3 - 2a_1^3b_6^3b_{10}c_8a_2 + 4a_1^3b_6^2b_{10}d_{11}a_2^2 + a_1^3b_6^4b_{10}b_5 - 6b_6b_9a_2^3b_8^2c_{10}a_1 + 8b_6b_9a_2^3b_8d_{11}a_1^2 + 2b_6b_9^2a_2^3b_8^3 + 4b_6a_1^2a_2^3c_{10}^2b_8 - 8b_6a_1^3a_2^3c_{10}d_{11} = 0.$$

Observamos que na singularidade A_4 se o determinante acima se anula, teremos 4 condições e portanto θ não encontra este estrato (A_4 com o determinante nulo), ou seja, este caso não é genérico. Concluímos que quando este determinante é diferente de zero a imagem da aplicação Monge-Taylor é transversal ao estrato A_4. Sendo assim, como esta variedade tem codimensão três então pelo Teorema 1.25, $\theta^{-1}(A_4)$ é uma variedade de codimensão três em M, o que significa que é constituída de pontos isolados. ■

Observação 2.14 *As codimensões dos conjuntos $A_{k\geq 5}$ é maior ou igual a quatro, e portanto, transversalidade significa que a imagem de θ não encontra o estrato-A_k, para $k \geq 5$. Assim, concluímos que f, genericamente, não tem singularidades $A_{k\geq 5}$.*

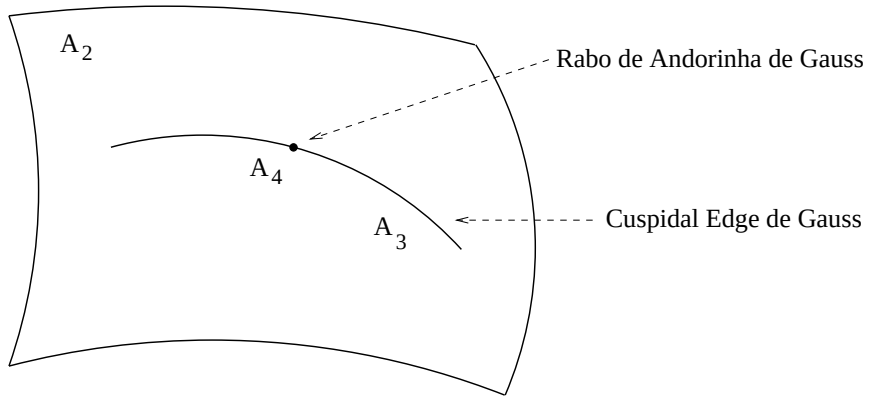

Figura 2.1: Conjuntos A_2, A_3, A_4

A nomenclatura usada na Figura 2.1 é devido ao fato de que localmente a imagem da aplicação de Gauss em um ponto A_3 é uma cuspidal edge e a imagem local de um ponto A_4 é o rabo de andorinha, análogo à nomenclatura no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 2.15 *As singularidades D_4 da função altura ocorrem, genericamente, sobre pontos isolados de M. Na singularidade D_4, o conjunto A_2 é um cone. Em D_4^+ o conjunto A_3 é uma reta contida neste cone. Em D_4^- o conjunto A_3 é constituído por três retas contidas no cone (ver Figura 2.2).*

Prova: Suponha que f tem uma singularidade D_4 na origem, e sem perda de generalidade, tome $a_2 = a_3 = 0$. Um transversal à órbita de D_4 em V_2 pode ser dado por $a_1x^2 + \bar{a}_2y^2 + \bar{a}_3z^2 + \bar{a}_6yz$, onde $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_6 \in \mathbb{R}$. Neste transversal, temos uma singularidade D_4 se $\bar{a}_2 = 0$, $\bar{a}_3 = 0$ e $\bar{a}_6 = 0$. Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-D_4, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_fD_4 = V_2$, e assim saberemos quando $\theta^{-1}(D_4)$ é variedade C^∞ em $\mathbb{R}^3$ de codimensão igual a três.

O espaço tangente do estrato-D_4 em V_2 é a interseção dos núcleos de três formas diferenciáveis ξ_1, ξ_2 e ξ_3. Como ξ_1, ξ_2 e ξ_3 têm que anular o tangente ao estrato-D_4 no transversal e os geradores do espaço tangente de $GL(3).f$, então $\xi_1 = da_3$, $\xi_2 = da_2$ e $\xi_3 = da_6$.

Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_2, são

$$v_1 = j^2\left(d\theta(\frac{\partial}{\partial x})\right), v_2 = j^2\left(d\theta(\frac{\partial}{\partial y})\right), v_3 = j^2\left(d\theta(\frac{\partial}{\partial z})\right)$$

com $a_2 = a_3 = a_6 = 0$.

A imagem de θ não é transversal ao estrato-D_4 se, e somente se, $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\} + kern\ \xi_1 \cap kern\ \xi_2 \cap kern\ \xi_3 \subsetneq V_2$. Como $kern\ \xi_1 \cap kern\ \xi_2 \cap kern\ \xi_3$ tem codimensão três, esta não transversalidade significa que existe um vetor não nulo, $\lambda v_1 + \mu v_2 + \beta v_3$, tal que $\xi_1(\lambda v_1 + \mu v_2 + \beta v_3) = 0$, $\xi_2(\lambda v_1 + \mu v_2 + \beta v_3) = 0$ e $\xi_3(\lambda v_1 + \mu v_2 + \beta v_3) = 0$. Isto é, teremos que ter

$$\det\begin{pmatrix} \xi_1(v_1) & \xi_1(v_2) & \xi_1(v_3) \\ \xi_2(v_1) & \xi_2(v_2) & \xi_2(v_3) \\ \xi_3(v_1) & \xi_3(v_{2)} & \xi_3(v_3) \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$6b_3b_5b_7 - 2b_3b_6^2 - 9b_4b_{10}b_7 + 6b_4b_8b_6 + b_5b_{10}b_6 - 2b_8b_5^2 = 0.$$

Mas isso colocaria uma condição extra no D_4 tornando a situação não genérica. Concluímos que como genericamente o determinante acima é diferente de zero, a imagem da aplicação Monge-Taylor é transversal ao estrato D_4. Sendo assim, como este estrato tem codimensão três em V_3, pelo Teorema 1.25, $\theta^{-1}(D_4)$ é uma variedade de codimensão três em M, o que significa que é constituída de pontos isolados (ver Figura 2.2). Observamos ainda que a imagem de θ não é transversal ao estrato-D_4 se, e somente se, a família de função altura não é um desdobramento versal em uma singularidade D_4 (ver Proposição 2.4).

No transversal de D_4 (portanto em V_2, e assim podemos trabalhar com o 2-jato de f) o conjunto A_2 é um cone dado pela equação

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} = 2a_1 \left(\bar{a}_6^2 - 4\bar{a}_2\bar{a}_3\right) = 0$$

Isto é $\bar{a}_6^2 - 4\bar{a}_2\bar{a}_3 = 0$. Esta equação nos dá um cone em V_2. Como θ é transversal a D_4, $\theta(\mathbb{R}^3) \cap A_2$ é um cone em V_2, e como θ é um difeomorfismo $\mathbb{R}^3, 0 \to V_2$, $\theta^{-1}(A_2)$ é também um cone em M.

Vejamos agora como é o conjunto dos pontos A_3 sobre este cone. Para isto, precisamos trabalhar em V_3. Em uma singularidade D_4 o 3-jato de f é dado por $j^3 f = x^2 + C(x, y, z)$, onde a cúbica $C(x, y, z) \simeq z^3 \pm y^2 z + xa(x, y, z)$. Um transversal à órbita de D_4 em V_3 pode ser dado por $x^2 + \bar{a}_2 y^2 + \bar{a}_3 z^2 + \bar{a}_6 yz + z^3 \pm y^2 z + xa(x, y, z) + xb(x, y, z)$, onde $b(x, y, z) = \bar{b}_1 x^2 + \bar{b}_2 xy + \bar{b}_9 xz$. Fazendo $x = X - \frac{1}{2}(a - b)$ teremos $j^3 f \simeq X^2 + \bar{a}_2 y^2 + \bar{a}_3 z^2 + \bar{a}_6 yz + z^3 \pm y^2 z$, onde teremos A_3 se, e somente se, $\bar{a}_2 y^2 + \bar{a}_3 z^2 + \bar{a}_6 yz = L^2$ e $L \mid (z^3 \pm y^2 z)$. Assim, $j^3 f \simeq X^2 + L^2 + LW$, onde $W = (z^3 \pm y^2 z)/L$. Fazendo a mudança $L = l - \frac{W}{2}$, teremos $X^2 + l^2 - W^2/2$, como W^2 tem grau 4 então $j^3 f = X^2 + l^2$. Vejamos:

(i) se tivermos $z^3 + y^2 z = z(z^2 + y^2)$, então $L \mid z$ ou $L \mid (z^2 + y^2)$ (que não pode ocorrer, pois L é de grau 1), logo $L = \lambda z$. Portanto, como $L^2 = \bar{a}_2 y^2 + \bar{a}_3 z^2 + \bar{a}_6 yz$ temos que $\bar{a}_2 = \bar{a}_6 = 0$, isto é teremos uma variedade de codimensão 2 em V_3, que está sobre o cone $\bar{a}_6^2 - 4\bar{a}_2\bar{a}_3 = 0$. Logo em M teremos uma curva suave, pois θ genericamente é transversal ao estrato-A_3.

(ii) se tivermos $z^3 - y^2 z = z(z - y)(z + y)$, então

$L \mid z \Rightarrow L^2 = \lambda^2 z^2$, ou

$L \mid (z - y) \Rightarrow L^2 = \lambda^2 (z - y)^2$, ou

$L \mid (z+y) \Rightarrow L^2 = \lambda^2(z+y)^2.$

Como $L^2 = \bar{a}_2 y^2 + \bar{a}_3 z^2 + \bar{a}_6 yz$, para o primeiro caso teremos que ter $\bar{a}_2 = \bar{a}_6 = 0$, para o segundo $\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = 0$ e $\bar{a}_6 + 2\bar{a}_2 = 0$, e para o último temos que ter $\bar{a}_6 - 2\bar{a}_2 = 0$ e $\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = 0$. Isto é, teremos três variedades de codimensão 2 (sobre o cone $\bar{a}_6^2 - 4\bar{a}_2\bar{a}_3 = 0$), e portanto em M, teremos três curvas suaves. ■

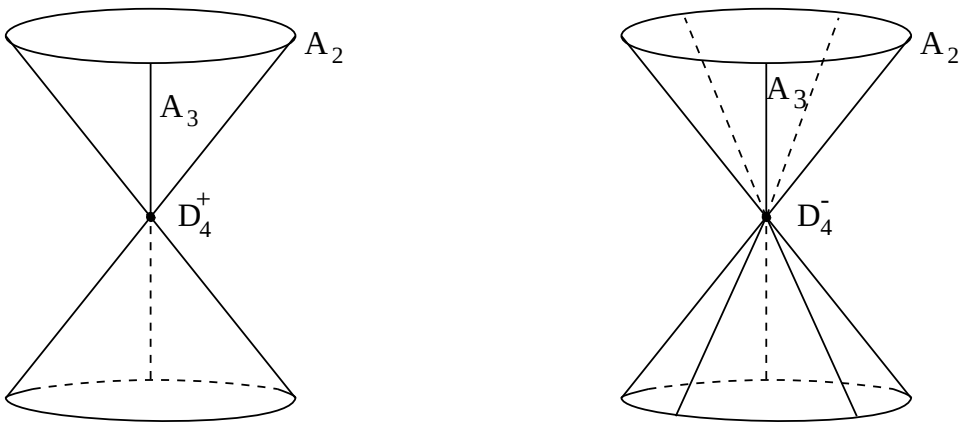

Figura 2.2: Conjunto parabólico em D_4, umbílico elíptico (hiperbólico) à esquerda (respectivamente, à direita)

Observação 2.16 *As codimensões dos conjuntos $D_{k\geq 5}$ são maiores ou iguais a quatro, e portanto, transversalidade significa que a imagem de θ não encontra o estrato-D_k, para $k \geq 5$. Concluímos que f, genericamente, não tem singularidades $D_{k\geq 5}$.*

O teorema a seguir identifica geometricamente os tipos de singularidades da função altura.

Teorema 2.17 *As singularidades genéricas da função altura ao longo da direção u ocorrem em $p \in M$ quando*

A_1: *p não é ponto parabólico, $Bif(H)$ é vazio.*

A_2: *p é ponto parabólico, a direção assintótica principal é transversal ao conjunto parabólico da hipersuperfície, $Bif(H)$ é uma superfície regular.*

A_3: *p é ponto parábólico, a direção assintótica principal é tangente ao conjunto parabólico da hipersuperfície, $Bif(H)$ é um cuspidal edge.*

A_4: p é ponto parabólico, a direção assintótica principal é tangente à curva A_3, $Bif(H)$ é um rabo de andorinha.

D_4: p é ponto parabólico, o conjunto parabólico é um cone. Em D_4^+, o conjunto A_3 é uma reta sobre o cone. Em D_4^-, o conjunto A_3 é formado de três retas sobre o cone. Os conjuntos Bif(H) para D_4^+ e para D_4^- são como na Figura 2.4.

Ver Figuras 2.3 e 2.4.

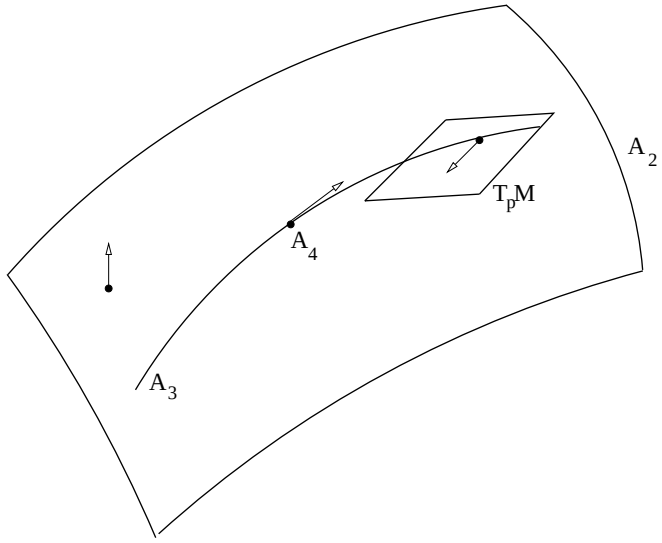

Figura 2.3: Direções assintóticas principais sobre os pontos A_2, A_3 e A_4

Prova: Dado $p \in M$ denotamos as três curvaturas principais em p, por k_1, k_2 e k_3. O segundo jato da f pode ser escrito como $\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2)$. Logo, segue da definição de ponto parabólico e das condições sobre os coeficientes de f, que A_1 não é ponto parabólico, mas que A_2, A_3, A_4, e D_4 são todos pontos parabólicos.

Como o conjunto bifurcação é a imagem do conjunto parabólico na esfera de Gauss, então $Bif(H) = \emptyset$ para os pontos não parabólicos A_1. Para os outros tipos de singularidades sabemos que a função altura é um desdobramento versal, portanto os conjuntos de bifurcações são dados por modelos dos conjuntos de bifurcações das singularidades A_2, A_3, A_4 e D_4. Ver por exemplo [11] nas páginas $110 - 115$.

Sabemos que o conjunto parabólico de uma hipersuperfície $w = f(x, y, z)$ é dado pelos pontos (x, y, z) que anulam o determinante da matriz hessiana de $f(x, y, z)$. O primeiro jato desta equação é dado por

$$8a_1a_2b_8x + 8a_1a_2b_6y + 24a_1a_2b_7z.$$

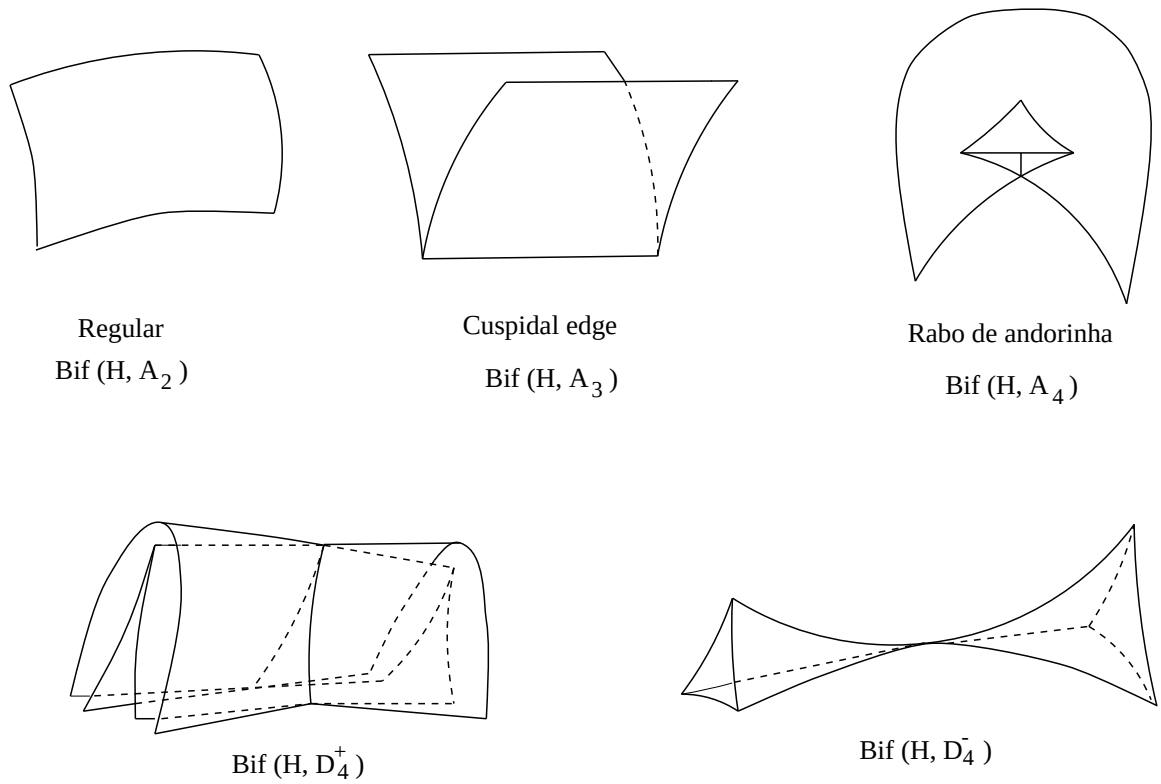

Figura 2.4: Conjuntos de Bifurcações de H

O normal ao conjunto parabólico pode ser dado por (b_8, b_6, b_7) (ver Proposição 2.10). A direção assintótica principal é $(0, 0, 1)$. Logo, $(0, 0, 1)$ é transversal ao conjunto parabólico se, e somente se, $b_7 \neq 0$, ou seja, se, e somente se, a singularidade for do tipo A_2. Se $b_7 = 0$, ou seja, se a singularidade for do tipo A_3, então $(0, 0, 1)$ é tangente ao conjunto parabólico.

Queremos agora provar que a direção assintótica principal é tangente à curva A_3 no ponto A_4. Para isso, precisamos achar a parametrização da curva A_3. Esta é dada pelos pontos (x_0, y_0, z_0) tal que o determinante da matriz hessiana nestes pontos seja zero, e o kernel (a, b, c) da hessiana seja raiz da forma cúbica de f. Ou seja, precisamos achar primeiramente (a, b, c) tal que:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

onde as derivadas parciais de f são calculadas em (x_0, y_0, z_0). Podemos supor que a terceira linha da matriz acima é combinação linear das duas primeiras, ou seja,

$$f_{xz}(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 f_{xx}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 f_{xy}(x_0, y_0, z_0),$$

$$f_{zy}(x_0, y_0, z_0) = \lambda_3 f_{xy}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_4 f_{yy}(x_0, y_0, z_0),$$

$$f_{zz}(x_0, y_0, z_0) = \lambda_5 f_{xz}(x_0, y_0, z_0) + \lambda_6 f_{yz}(x_0, y_0, z_0)$$

já que o determinante da matriz hessiana em (x_0, y_0, z_0) deve ser igual a zero. Achamos então:

$$\begin{aligned} a =& f_{xz}(f_{yy}f_{xx} - f_{xy}^2) + f_{xy}(f_{xz}f_{xy} - f_{yz}f_{xx}), \\ b =& f_{xx}(f_{yz}f_{xx} - f_{xz}f_{xy}), \\ c =& f_{xx}(f_{xy}^2 - f_{yy}f_{xx}). \end{aligned}$$

Então a curva A_3 é dada pelos pontos (x_0, y_0, z_0) tal que o determinante da hessiana neste ponto seja zero e a parte cúbica da f calculada em (a, b, c) também se anule. Fazendo as contas, temos

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, z_0) = (&-b_6(b_8^2a_2+b_6^2a_1-4a_1a_2c_9)y, b_8(b_8^2a_2+b_6^2a_1-4a_1a_2c_9)y, (b_6(b_8b_9a_2+\tfrac{1}{2}b_6a_1b_{10}- \\ &a_1a_2c_{10} - a_1b_5b_8) + b_8(a_1a_2c_8 - \tfrac{1}{2}a_2b_8b_{10}))y) + t.o.m. \end{aligned}$$

Sendo assim, a direção do tangente da curva A_3 é $(-b_6(b_8^2a_2 + b_6^2a_1 - 4a_1a_2c_9), b_8(b_8^2a_2 + b_6^2a_1 - 4a_1a_2c_9), (b_6(b_8b_9a_2 + \frac{1}{2}b_6a_1b_{10} - a_1a_2c_{10} - a_1b_5b_8) + b_8(a_1a_2c_8 - \frac{1}{2}a_2b_8b_{10})))$. Sabemos que o conjunto parabólico é suave sobre a curva A_3 (isto é, quando $b_7 = 0$) se, e somente se, $b_6 \neq 0$ ou $b_8 \neq 0$. Então a direção assintótica principal $(0, 0, 1)$ é tangente à curva A_3 se, e somente se, $b_8^2a_2 + b_6^2a_1 - 4a_1a_2c_9 = 0$, ou seja, se, e somente se, o ponto tem singularidade A_4 (ver Figura 2.3).

O fato que o conjunto parabólico é um cone em D_4, onde em D_4^+, o conjunto A_3 é uma reta sobre o cone e em D_4^-, o conjunto A_3 é formado de três retas sobre o cone, está provado na Proposição 2.15. ■

Capítulo 3

Contato com retas

Neste capítulo estudamos o contato de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$ com retas. Obtemos as condições necessárias e suficientes para que a aplicação projeção tenha singularidades genéricas, e estudamos as estruturas locais dos conjuntos com tipos de singularidades de codimensão menor ou igual a dois da aplicação projeção. Interseções destes conjuntos também foram estudadas. Por fim, demos as características geométricas das singularidades da aplicação projeção.

A seguir definiremos a família de projeções ortogonais e listaremos as singularidades genéricas que podem ocorrer para os membros desta família.

3.1 As singularidades genéricas da projeção ortogonal

Seja M_3 uma variedade de dimensão três, e M seu mergulho em $\mathbb{R}^4$. A família de projeções em $\mathbb{R}^3$, que mede o contato de M com retas em $\mathbb{R}^4$, é definida pela aplicação:

$$\begin{array}{llll} \text{P:} & \text{M} \times S^3 & \rightarrow & \text{B} \\ & (p,u) & \mapsto & (u, p- < u,p > u) \end{array}$$

onde $B = \{(u,y) \in S^3 \times \mathbb{R}^4; \langle u,y \rangle = 0\}$, isto é, B é o fibrado tangente de S^3.

Seja $p \in M$, por mudanças de coordenadas sempre podemos identificar p com a origem e fixar coordenadas locais (x,y,z,w) em $p = (0,0,0,0)$, tal que o eixo-w seja normal a M em p, e o espaço-(x,y,z) seja o espaço tangente a M em p. Assim podemos escrever

M na forma de Monge, isto é, como um gráfico de uma função $w = f(x, y, z)$, tal que $f = f_x = f_y = f_z = 0$ em $(0, 0, 0)$.

Escolhemos uma carta em S^3 próxima de $(0, 0, 1, 0)$ dada por $(a, b, 1, c)$. Logo, as coordenadas de um ponto $p \in M$ no plano de projeção $z = 0$ ao longo da direção $(a, b, 1, c)$ são dadas por $(X, Y, 0, W) = (x, y, z, f(x, y, z)) + \lambda(a, b, 1, c)$, ou seja $\lambda = -z$. Então a família de projeções P pode ser reescrita, na vizinhança da origem, da forma:

$$\begin{array}{rccl} \text{P:} & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, 0 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & ((x, y, z), (a, b, c)) & \mapsto & (x - az, y - bz, f(x, y, z) - cz). \end{array}$$

Fixando $u_0 = (0, 0, 1, 0)$ teremos $P_{u_0}(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$, um germe de corank 1 de uma aplicação de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^3, 0$. Observemos que as singularidades de P não são alteradas por mudanças de coordenadas na fonte e na meta. As $\mathcal{K}$ classes de P_{u_0} fornecem informações sobre o contato de M com u_0 mas não com as retas vizinhas. Portanto, consideramos a ação do grupo $\mathcal{A}$ sobre germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^3, 0$, que fornece informações sobre o contato de M com retas vizinhas de u_0.

Encontramos em [31] uma classificação de germes $\mathcal{A}$-simples de tais aplicações.

Teorema 3.1 ([31]) *As $\mathcal{A}$-classes das singularidades simples de germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^3, 0$ de corank 1 e as suas $\mathcal{A}_e$-codimensões, são mostradas na Tabela 1:*

Tabela 1:

Tipo	*Forma normal*	$\mathcal{A}_e$*-cod*
II	(x, y, z^2)	*0*
3_*	$(x, y, z^3 + h(x, y)z)$	$\mu(h)$
4_1^k	$(x, y, z^4 + xz \pm y^k z^2), k \geq 1$	$k - 1$
4_2^k	$(x, y, z^4 + (y^2 \pm x^k)z + xz^2), k \geq 2$	k
5_1	$(x, y, z^5 + xz + yz^2)$	*1*
5_2	$(x, y, z^5 + xz + y^2z^2 + yz^3)$	*2*
5_3	$(x, y, z^5 + xz + yz^3)$	*3*

$*$ *denota o tipo de* h *que pode ser* A_k $(\pm x^2 \pm y^{k+1})$, D_k $(x^2y \pm y^{k-1})$, E_6 $(x^3 \pm y^4)$, E_7 $(x^3 + xy^3)$, E_8 $(x^3 + y^5)$, *e* μ *denota o número de Milnor.*

As singularidades que podemos esperar dos membros da família P são as de codimensão ≤ 3, que é a dimensão do seu espaço de parâmetros. Para completar a lista destas singularidades, a seguir listaremos as singularidades não simples de $\mathcal{A}_e$-codimensão menor ou igual a três estudadas por Hawes [26].

Teorema 3.2 ([26]) *As $\mathcal{A}$-classes das singularidades não simples, de $\mathcal{A}_e$-codimensão ≤ 3, de germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^3, 0$ de corank 1 e as suas $\mathcal{A}_e$-codimensões, são mostradas na Tabela 2:*

Tabela 2:

Tipo	*Forma normal*	$\mathcal{A}_e$*-cod*
6_1	$(x, y, yz + xz^2 + z^6 \pm z^8 + az^9)$	2
6_2	$(x, y, yz + xz^2 + z^6 + z^9)$	3
5_4	$(x, y, yz + x^2z^2 + z^5 \pm z^6 + az^7)$	3

Queremos saber como a família P estratifica o seu espaço de parâmetros S^3 em relação às singularidades genéricas simples. As singularidades genéricas de P_u, $u \in S^3$, são dadas pelo teorema a seguir, que é uma consequência direta do teorema de transversalidade de Montaldi [37], pois a família P é $\mathcal{A}$-versal.

Teorema 3.3 *Genericamente a aplicação P_u tem singularidades simples locais de codimensão menor ou igual a três, isto é, as singularidades simples do tipo $II, 3_{A_k}$ com $0 \leq k \leq 3$, 4_1^k com $1 \leq k \leq 4$, $4_2^2, 4_2^3$, $5_1, 5_2$ e 5_3 do Teorema 3.1 e as singularidades não simples 6_1, 6_2 e 5_4 do Teorema 3.2.*

Destacamos aqui, que só estudamos as singularidades simples.

A proposição a seguir mostra as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f em $(0, 0, 0)$, quando $P_{u_0} = (x, y, f(x, y, z))$ tem as singularidades simples genéricas citadas acima. Escrevemos o 6-jato de f como:

$$j^6(f) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3 + b_8z^2x + b_9zx^2 + b_{10}xyz + c_1x^4 + c_2x^3y + c_3x^2y^2 + c_4xy^3 + c_5y^4 + c_6y^3z + c_7y^2z^2 + c_8yz^3 + c_9z^4 + c_{10}z^3x + c_{11}z^2x^2 + c_{12}zx^3 + c_{13}x^2yz + c_{14}xy^2z + c_{15}xyz^2 + d_1x^5 + d_2x^4y + d_3x^3y^2 + d_4x^2y^3 + d_5xy^4 + d_6y^5 + d_7y^4z + d_8y^3z^2 + d_9y^2z^3 + d_{10}z^4y + d_{11}z^5 + d_{12}z^4x + d_{13}x^2z^3 + d_{14}x^3z^2 + d_{15}x^4z + d_{16}x^3yz + d_{17}x^2y^2z + d_{18}x^2yz^2 + d_{19}xy^2z^2 + d_{20}xy^3z +$$

$d_{21}xyz^3+e_1x^6+e_2x^5y+e_3x^4y^2+e_4x^3y^3+e_5x^2y^4+e_6xy^5+e_7y^6+e_8y^5z+e_9y^4z^2+e_{10}y^3z^3+$
$e_{11}y^2z^4+e_{12}yz^5+e_{13}z^6+e_{14}xz^5+e_{15}x^2z^4+e_{16}x^3z^3+e_{17}x^4z^2+e_{18}x^5z+e_{19}x^4yz+e_{20}x^3y^2z+$
$e_{21}x^3yz^2+e_{22}x^2y^2z^2+e_{23}x^2y^3z+e_{24}x^2yz^3+e_{25}xy^4z+e_{26}xyz^4+e_{27}xy^2z^3+e_{28}xy^3z^2.$

Proposição 3.4 *A projeção ortogonal P_{u_0} tem as seguintes singularidades simples:*

$$
\begin{array}{lcl}
II & \Leftrightarrow & a_3 \neq 0; \\
3_{A_0} & \Leftrightarrow & a_3 = 0, a_5 \neq 0,\ b_7 \neq 0; \\
3_{A_1} & \Leftrightarrow & a_3 = a_5 = a_6 = 0, b_7 \neq 0, 3b_9b_7 - b_8^2 \neq 0 \\
 & & 4b_8b_6b_{10} - 3b_{10}^2b_7 - 4b_5b_8^2 + 12b_5b_7b_9 - 4b_6^2b_9 \neq 0; \\
3_{A_2} & \Leftrightarrow & a_3 = a_5 = a_6 = 0, 4b_8b_6b_{10} - 3b_{10}^2b_7 - 4b_5b_8^2 + 12b_5b_7b_9 - 4b_6^2b_9 = 0, \\
 & & b_7 \neq 0, 3b_9b_7 - b_8^2 \neq 0,\ \varphi_1(b_i, c_i) \neq 0; \\
3_{A_3} & \Leftrightarrow & a_3 = a_5 = a_6 = 0, 4b_8b_6b_{10} - 3b_{10}^2b_7 - 4b_5b_8^2 + 12b_5b_7b_9 - 4b_6^2b_9 = 0, \\
 & & \varphi_1(b_i, c_i) = 0, b_7 \neq 0, 3b_9b_7 - b_8^2 \neq 0,\ \varphi_2(b_i, c_i, d_i) \neq 0; \\
4_1^1 & \Leftrightarrow & a_3 = b_7 = 0, b_6a_5 - b_8a_6 \neq 0, a_5 \neq 0,\ c_9 \neq 0; \\
4_1^2 & \Leftrightarrow & a_3 = b_7 = b_6a_5 - b_8a_6 = 0, a_5 \neq 0, c_9 \neq 0,\ \varphi_3(a_i, b_i, c_i) \neq 0\ ; \\
4_1^3 & \Leftrightarrow & a_3 = b_7 = b_6a_5 - b_8a_6 = \varphi_3(a_i, b_i, c_i) = 0, a_5 \neq 0, c_9 \neq 0, \\
 & & \varphi_4(a_i, b_i, c_i, d_i) \neq 0; \\
4_1^4 & \Leftrightarrow & a_3 = b_7 = b_6a_5 - b_8a_6 = \varphi_3(a_i, b_i, c_i) = \varphi_4(a_i, b_i, c_i, d_i) = 0, a_5 \neq 0, \\
 & & c_9 \neq 0,\ \varphi_5(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i) \neq 0; \\
4_2^2 & \Leftrightarrow & a_3 = a_5 = a_6 = b_7 = 0, b_8 \neq 0, c_9 \neq 0, b_5b_8^2 - b_{10}b_6b_8 + b_9b_6^2 \neq 0, \\
 & & \varphi_6(b_i, c_i) \neq 0; \\
4_2^3 & \Leftrightarrow & a_3 = a_5 = a_6 = b_7 = \varphi_6(b_i, c_i) = 0, b_8 \neq 0, c_9 \neq 0, \\
 & & b_5b_8^2 - b_{10}b_6b_8 + b_9b_6^2 \neq 0,\ \varphi_7(b_i, c_i) \neq 0; \\
5_1 & \Leftrightarrow & a_3 = b_7 = c_9 = 0, a_5 \neq 0, d_{11} \neq 0,\ b_6a_5 - b_8a_6 \neq 0; \\
5_2 & \Leftrightarrow & a_3 = b_7 = c_9 = b_6a_5 - b_8a_6 = 0, a_5 \neq 0, d_{11} \neq 0,\ \varphi_7(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i) \neq 0, \\
 & & c_8a_5 - c_{10}a_6 \neq 0; \\
5_3 & \Leftrightarrow & a_3 = b_7 = c_9 = b_6a_5 - b_8a_6 = \varphi_7(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i) = 0, a_5 \neq 0, d_{11} \neq 0, \\
 & & c_8a_5 - c_{10}a_6 \neq 0.
\end{array}
$$

Onde as expressões φ_j, $j = 1, \cdots, 7$ são polinômios de a_i, b_i, c_i, d_i, e_i. Suas expressões são extensas e são dadas na Seção 3.3.

Prova: Usamos o Maple (ver Seção 3.3 para um exemplo do programa usado) para fazermos mudanças de coordenadas para tornar $(x, y, f(x, y, z))$ equivalente às formas normais

do Teorema 3.1. Assim, descobrimos as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f necessárias para cada caso. ■

Precisamos do seguinte resultado na Proposição 4.6.

Proposição 3.5 *Dado um desdobramento versal* $(x, y, u, z^3 + \bar{h}\ (x, y, u)z)$ *da singularidade* $(x, y, z^3 + h(x, y)z)$ *do Teorema 3.1, o conjunto de bifurcação deste desdobramento é o discriminante do desdobramento versal* $\bar{h}$ *da função* h.

Prova: Seja $(x, y, u, z^3 + \bar{h}\ (x, y, u)z)$ um desdobramento versal da singularidade $(x, y, z^3 + h(x, y)z)$, onde $\bar{h}\ (x, y, u)$ é um desdobramento versal de $h(x, y)$ (ver [31]). O conjunto de bifurcação do primeiro desdobramento é dado pelas condições:

$$3z^2 + \bar{h}\ (x, y, u) = 0$$

$$6z = 0$$

$$\bar{h}_x\ (x, y, u) = 0$$

$$\bar{h}_y\ (x, y, u) = 0.$$

Para $\bar{h}$ o conjunto discriminante é dado por:

$$\begin{aligned} \bar{h}\ (x, y, u) &= 0 \\ \bar{h}_x\ (x, y, u) &= 0 \\ \bar{h}_y\ (x, y, u) &= 0. \end{aligned}$$

Comparando estas condições, concluímos que estes dois conjuntos são iguais. ■

3.2 As estruturas locais dos tipos de singularidades simples de codimensão ≤ 2

Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$ dada localmente por $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que leva (x, y, z) em $(x, y, z, f(x, y, z))$. O objetivo desta seção é descrever os lugares em M onde ocorrem as singularidades simples genéricas, de codimensão 1 e 2, da aplicação projeção. Esta restrição neste capítulo é devido às complexidades das contas (ver Seção 3.4). Vamos trabalhar em $V_1 \times V_1 \times V_k$ onde consideramos uma $\mathcal{G}$- órbita de $P_{u_0}(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$

a qual não altera a geometria afim. Veremos que é suficiente trabalhar em V_k. Nestes casos teremos que os lugares geométricos são genericamente curvas e superfícies, os resultados que apresentaremos nos darão as condições sobre os coeficientes de f para que tenhamos tais curvas e superfícies.

Suponha que P_{u_0} possui uma determinada singularidade na origem. Vamos calcular o espaço tangente da $\mathcal{G}$- órbita de P_{u_0}. Em um transversal a esta órbita podemos definir as variedades onde ocorrem uma determinada singularidade. Basta agora ver o que acontece neste transversal para sabermos o que acontece em todo V_k, pois a variedade de uma determinada singularidade é o cartesiano desta variedade no transversal com a órbita. Sabemos então que a codimensão da variedade em V_k é igual à codimensão da variedade no transversal. Com a transversalidade da aplicação Monge-Taylor à esta variedade podemos concluir o que acontece em M pelo Teorema 1.25.

A Proposição 2.5 nos dá os geradores, v_1, v_2 e v_3, da imagem da derivada da aplicação Monge-Taylor θ. Já sabemos que a geometria plana é $GL(3)$-invariante e então podemos usar este grupo para fazermos mudanças de coordenadas na fonte, ou seja, em $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Agora, queremos um subgrupo de $GL(4)$ que nos permita fazer mudanças de coordenadas na meta, ou seja, em $(x, y, z, f(x, y, z))$, tal que a geometria plana dada pelas projeções em $\mathbb{R}^3$ ainda seja invariante. Seja G o subgrupo de $GL(4)$ dado pelas matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Temos dois motivos para escolher este subgrupo. O primeiro é que como queremos, a geometria dada pelas projeções é a mesma se considerarmos a ação deste grupo G (ver [13]). Assim, considerando $\mathcal{G} = GL(3) \times G$, temos que a geometria plana é $\mathcal{G}$-invariante, e portanto qualquer variedade em $J^k(3)$ resultando desta geometria é também $\mathcal{G}$-invariante.

Os geradores do espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de $P(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$, podem ser obtidos calculando $\frac{d}{dt}(P(A_t(x, y, z, f(x, y, z)))) \mid_{t=0}$ onde A_t é um caminho em G pela identidade e $\frac{d}{dt}P(\xi(B_t(x, y, z))) \mid_{t=0}$ onde B_t é um caminho em $GL(3)$ pela identidade. Para as mudanças de coordenadas na meta temos os seguintes caminhos geradores A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{33}, A_{44} onde $A_{ij} = I + tE_{ij}$ com $i, j = 1, 2, 3, 4$, I é a matriz

identidade e $E_{ij} = (\alpha_{lm})$ com

$$\alpha_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad l = i \quad \text{e} \quad m = j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para as mudanças de coordenadas na fonte temos os seguintes caminhos geradores $B_{ij} = I + tE_{ij}$, com $i, j = 1, 2, 3$.

Teremos então 17 vetores geradores do espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita. O segundo motivo para escolhermos o subgrupo G é que com alguns destes vetores, $\frac{d}{dt}(P(A_{11}))\ |_{t=0}= (x, 0, 0)$, $\frac{d}{dt}(P(A_{12}))\ |_{t=0}= (y, 0, 0)$, $\frac{d}{dt}(P(A_{13}))\ |_{t=0}= (z, 0, 0)$, $\frac{d}{dt}(P(A_{21}))\ |_{t=0}= (0, x, 0)$, $\frac{d}{dt}(P(A_{22}))\ |_{t=0}= (0, y, 0)$, $\frac{d}{dt}(P(A_{23}))\ |_{t=0}= (0, z, 0)$, podemos gerar $V_1 \times V_1 \times 0$ em $V_1 \times V_1 \times V_k$. Sendo assim, o transversal à órbita está totalmente contido em $0 \times 0 \times V_k$, e então podemos trabalhar apenas em V_k. O que com certeza nos facilita as contas.

Temos então o seguinte resultado.

Lema 3.6 *Os geradores do espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f ($\mathcal{G}.f$) em $J^k(3)$, em f, são:*

$$u_1 = j^k f, \qquad u_2 = xf_x, \qquad u_3 = yf_x, \qquad u_4 = zf_x, \qquad u_5 = xf_y,$$

$$u_6 = yf_y, \qquad u_7 = xf_z, \qquad u_8 = yf_z, \qquad u_9 = zf_z, \qquad u_{10} = zf_y.$$

Proposição 3.7 *As singularidade 3_{A_1} da aplicação projeção P_u ocorrem localmente sobre uma superfície suave, que é o conjunto parabólico (ver Figura 3.1).*

Prova: Suponha que P tem uma singularidade 3_{A_1} na origem e tome $P(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ tal que $j^2 f = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_4 xy$, pois os outros coeficientes para o 2-jato são nulos (ver Proposição 3.4). O espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f em V_2 é dado pelos vetores u_i, $i = 1, \cdots, 10$ (ver Lema 3.6). Quando $a_4^2 - 4a_1a_2 \neq 0$ (isto significa que o ponto é parabólico e não é umbílico parcial), um transversal à órbita pode ser dado por $T = \mathbb{R}.\{z^2\}$ e portanto se $\bar{f} \in T$ então $\bar{f} = j^2 f + \bar{a}_3 z^2$, onde $\bar{a}_3 \in \mathbb{R}$.

Consideremos no transversal a projeção na direção singular. Observamos a projeção em qualquer direção do espaço tangente resulta numa projeção singular. Como a projeção inicial é ao longo de $(0, 0, 1, 0)$ podemos parametrizar as direções próximas no espaço tangente por $(\alpha, \beta, 1, 0)$ com α e β próximos de zero. A projeção ao longo de $(\alpha, \beta, 1, 0)$ é dada

por $P(x,y,z) = (x - \alpha z, y - \beta z, \bar{f}(x,y,z))$ que é equivalente a $(x, y, \bar{f}(x + \alpha z, y + \beta z, z))$. Neste transversal, temos uma singularidade 3_{A_1} se

$$coef(xz) = 2a_1\alpha + a_4\beta = 0,$$

$$coef(yz) = a_4\alpha + 2a_2\beta = 0, \quad \text{e}$$

$$coef(z^2) = \bar{a}_3 + a_1\alpha^2 + a_4\alpha\beta + a_2\beta^2 = 0.$$

Logo como o determinante das duas primeiras equações é diferente de zero (condição para T ser transversal), então a única solução é $\alpha = \beta = 0$. Substituindo estes valores na terceira equação temos que a condição para ter singularidade 3_{A_1} no transversal é $\bar{a}_3 = 0$.

Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-3_{A_1} em V_2, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_f 3_{A_1} = V_2$, e assim saberemos quando $\theta^{-1}(3_{A_1})$ é variedade em $\mathbb{R}^3$ de codimensão igual a um.

O espaço tangente do estrato-3_{A_1} em V_2 é o núcleo de uma forma diferenciável ξ. Como ξ tem que anular o tangente ao estrato-3_{A_1} no transversal e os geradores do espaço tangente de $\mathcal{G}.f$, então $\xi = da_3$. Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_2, são:

$$v_1 = 3b_1x^2 + 2b_2xy + b_3y^2 + b_8z^2 + 2b_9zx + b_{10}yz;$$

$$v_2 = b_2x^2 + 2b_3xy + 3b_4y^2 + 2b_5yz + b_6z^2 + b_{10}xz;$$

$$v_3 = b_5y^2 + 2b_6yz + 3b_7z^2 + 2b_8xz + b_9x^2 + b_{10}xy.$$

A imagem de θ não é transversal ao estrato 3_{A_1} se, e somente se, $\mathbb{R} \cdot \{v_1, v_2, v_3\} +$ kernel $\xi \subsetneq V_2$. Como kernel ξ tem codimensão 1, esta não transversalidade significa que v_1, v_2, v_3 pertencem ao kernel ξ. Isto é se, e somente se,

$$\xi(v_1) = 0 \Leftrightarrow b_8 = 0,$$

$$\xi(v_2) = 0 \Leftrightarrow b_6 = 0,$$

$$\xi(v_3) = 0 \Leftrightarrow b_7 = 0.$$

Como temos uma singularidade 3_{A_1} então $\xi(v_3) = b_7 \neq 0$, e portanto a imagem de θ é sempre transversal ao estrato 3_{A_1}. Consequentemente, pelo Teorema 1.25, a variedade 3_{A_1} em M, que é igual a $\theta^{-1}(3_{A_1})$ é sempre uma superfície suave de codimensão 1 em M, isto é, de dimensão dois (ver Figura 3.1). ■

Observamos que o resultado acima também segue da Proposição 2.8 e do Teorema 4.2, onde mostramos que P_u tem singularidade 3_{A_1} se, e somente se, H_{u^*} tem singularidade A_2, onde u^* é a direção dual de u. Note que as condições para haver transversalidade é a mesma da Proposição 2.8.

As demonstrações das proposições a seguir seguem o mesmo método da prova da Proposição 3.7 e por serem extensas serão provadas na última seção deste capítulo.

Proposição 3.8 *As singularidades 3_{A_2} da aplicação projeção P_{u_0} ocorrem localmente sobre uma curva suave da superfície suave de pontos 3_{A_1}.*

Proposição 3.9 *As singularidades 4_1^2 da aplicação projeção P_{u_0} ocorrem localmente sobre uma superfície suave em M (ver Figura 3.1) fora dos pontos 4_2^2.*

Proposição 3.10 *As singularidades 4_1^3 da aplicação projeção P_{u_0} ocorrem localmente sobre uma curva suave da superfície suave de pontos 4_1^2 (ver Figura 3.1).*

Proposição 3.11 *As singularidades 4_2^2 da aplicação projeção P_{u_0} ocorrem localmente sobre uma curva suave (ver Figura 3.1).*

Prova: Este resultado segue das Proposições 2.11 e 4.3, onde mostramos que P_{u^*} tem singularidade 4_2^2 se, e somente se, H_u tem singularidade $A_{k\geq 3}$. As condições para não haver transversalidade são as mesmas que foram encontradas na Proposição 2.11. ■

Proposição 3.12 *As singularidades 5_1 da aplicação projeção P_{u_0} ocorrem localmente sobre uma superfície suave em M (ver Figura 3.1).*

Proposição 3.13 *As singularidades 5_2 da aplicação projeção P_{u_0} ocorrem localmente sobre um curva suave da superfície suave de pontos 5_1 (ver Figura 3.1).*

Observações 3.14

(1) Observe que as provas das Proposições 3.7 e 3.8 , 3.9, 3.10, 3.12, e 3.13 na Seção 3.4 *nos dão informações precisas sobre a densidade a que se refere o Teorema 1.26.*

(2) As condições de não transversalidade dos resultados acima, podem estar relacionadas com o não desdobramento versal da família da aplicação projeção da determinada singularidade, como acontece para a família de funções altura.

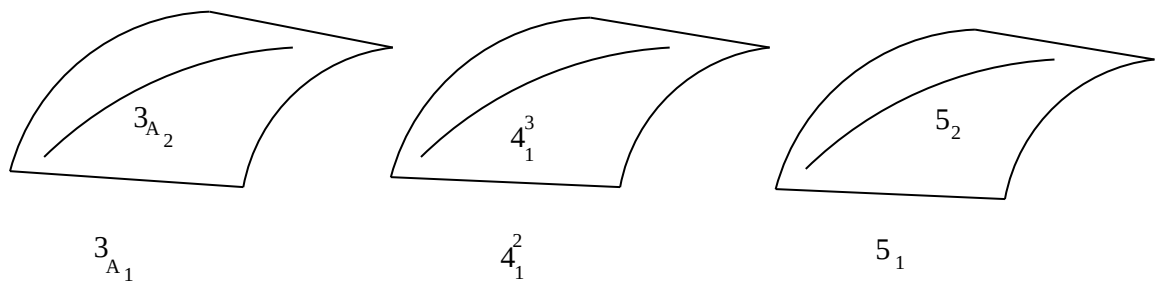

Figura 3.1: Tipos de singularidades simples de codimensão ≤ 2

(3) As codimensões das variedades 3_{A_k}, $k \geq 4$, 4_1^k, $k \geq 5$ *e* 4_2^k $k \geq 4$ *são maiores ou iguais a três, e portanto, transversalidade significa que a imagem de* θ *não encontra a variedade destas singularidades. Assim, concluímos que, genericamente, a projeção não possue estas singularidades.*

Vamos agora estudar como as várias superfícies acima se encontram.

Teorema 3.15 *Genericamente, as superfícies* 4_1^2 *e* 3_{A_1} *em* M *se encontram tangencialmente ao longo da curva* 4_2^2*. Em pontos isolados sobre* 4_2^2*, a superfície* 4_1^2 *adquiri uma singularidade tipo cross-cap.*

Prova: Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$ dada localmente na origem por $(x, y, z, f(x, y, z))$ onde $j^3 f = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3 + b_8z^2x + b_9zx^2 + b_{10}xyz$. Então a aplicação projeção P_{u_0} tem singularidade 4_1^2 na origem se $a_3 = b_7 = b_6a_5 - b_8a_6 = 0$, e tem singularidade 3_{A_1} se $a_3 = a_5 = a_6 = 0$. Logo na interseção das superfícies 4_1^2 e 3_{A_1} temos $a_3 = a_5 = a_6 = b_7 = 0$, ou seja P_{u_0} tem uma singularidade 4_2^2 (ou mais degenerada).

Suponha que $(x, y, f(x, y, z))$ tem singularidade 4_2^2 na origem. Então considerando o 3-jato acima temos que $a_3 = a_5 = a_6 = b_7 = 0$. O espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f em V_3 é dado pelos vetores u_i, $i = 1, \cdots, 10$. Quando $a_4^2 - 4a_1a_2 \neq 0$ (isto é, o ponto não é umbílico parcial), um transversal à órbita pode ser dado por $T = \mathbb{R}.\{z^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, y^2z, yz^2, z^3\}$ e portanto se $\bar{f} \in T$ então $\bar{f} = j^3 f + \bar{a}_3z^2 + \bar{b}_1x^3 + \bar{b}_2x^2y + \bar{b}_3xy^2 + \bar{b}_4y^3 + \bar{b}_5y^2z + \bar{b}_6yz^2 + \bar{b}_7z^3$, onde $\bar{a}_3$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$, $\bar{b}_4$, $\bar{b}_5$, $\bar{b}_6$, $\bar{b}_7 \in \mathbb{R}$.

Consideremos no transversal a projeção na direção singular sobre o espaço tangente, $(\alpha, \beta, 1, 0)$ com α e β próximos do zero, ou seja $P(x, y, z) \simeq (x, y, \bar{f}(x + \alpha z, y + \beta z, z))$. Neste transversal, temos uma singularidade 4_1^2 se

$$coef(z^2) = \bar{a}_3 + a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0,$$

$$coef(z^3) = \bar{b}_7 + b_8\alpha + b_6\beta + \bar{b}_6\beta + O_1(2) = 0,$$

$$coef(yz^2).coef(xz) - coef(xz^2).coef(yz) = (2b_6a_1 - b_8a_4)\alpha + (b_6a_4 - 2b_8a_2)\beta + O_2(2) = 0,$$

onde $O_1(2)$ e $O_2(2)$ são os termos de ordem maior ou igual a dois em α, β, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ que são nulos se $\alpha = \beta = 0$.

(1) Vamos supor que $b_8(b_6a_4 - 2b_8a_2) + b_6(2b_6a_1 - b_8a_4) \neq 0$. Então podemos pelo Teorema da função Implícita tirar α em função de β na terceira equação onde o primeiro jato é dado por $\alpha = \frac{2b_8a_2 - b_6a_4}{2b_6a_1 - b_8a_4}\beta$. Substituindo na segunda equação temos que o primeiro jato é dado por $\bar{b}_7 + \frac{1}{2b_6a_1 - b_8a_4}(b_8(2b_8a_2 - b_6a_4) + b_6(2b_6a_1 - b_8a_4))\beta = 0$. Como estamos supondo o coeficiente de β diferente de zero, podemos escrever β em função das outras incógnitas. Substituindo estes valores na primeira equação temos que o primeiro jato da condição para ter singularidade 4_1^2 no transversal é $\bar{a}_3 = 0$, que é o espaço tangente do estrato 4_1^2.

No tranversal a singularidade é do tipo 3_{A_1} se

$$coef(z^2) = \bar{a}_3 + a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0,$$

$$coef(xz) = a_4\beta + 2a_1\alpha = 0,$$

$$coef(yz) = a_4\alpha + 2a_2\beta = 0.$$

Logo como o determinante destas duas últimas equações é diferente de zero (condição para T ser transversal), então a única solução é $\alpha = \beta = 0$. Substituindo estes valores na primeira equação temos que a variedade 3_{A_1} no transversal é dada por $\bar{a}_3 = 0$.

Então nos pontos 4_2^2 de interseção destes estratos temos que os espaços tangentes são iguais. Ou seja, os estratos 3_{A_1} e 4_1^2 se encontram tangencialmente ao longo do estrato 4_2^2. Portanto pelo Teorema 1.25, as superfícies 4_1^2 e 3_{A_1} se encontram tangencialmente em M ao longo da curva 4_2^2 (ver Figura 3.2).

(2) Se $b_8(2b_8a_2 - b_6a_4) + b_6(2b_6a_1 - b_8a_4) = 0$ com $(2b_8a_2 - b_6a_4) \neq 0$ e $b_6(2b_6a_1 - b_8a_4) \neq 0$ podemos parametrizar o 2-jato do conjunto 4_1^2 da forma $(\bar{a}_3, \bar{b}_6, \bar{b}_7) = (\xi_1\alpha^2, \bar{b}_6, \xi_2\bar{b}_6\alpha)$ que é um cross-cap, onde ξ_1 e ξ_2 são constantes. Portanto em $\mathbb{R}^2 \times V_3$ temos que o estrato 4_1^2 é difeomorfo ao cross-cap cartesiano $\mathbb{R}^{k-1}$ onde $k = dimV_3$. A imagem de θ intercepta esta estratificação produto em um cross-cap (pois θ é genericamente transversal ao estrato e a imagem de θ tem dimensão 3) portanto $\theta^{-1}(4_1^2)$ é um cross-cap. Por continuidade 4_1^2 e 3_{A_1} são tangentes também neste caso. ■

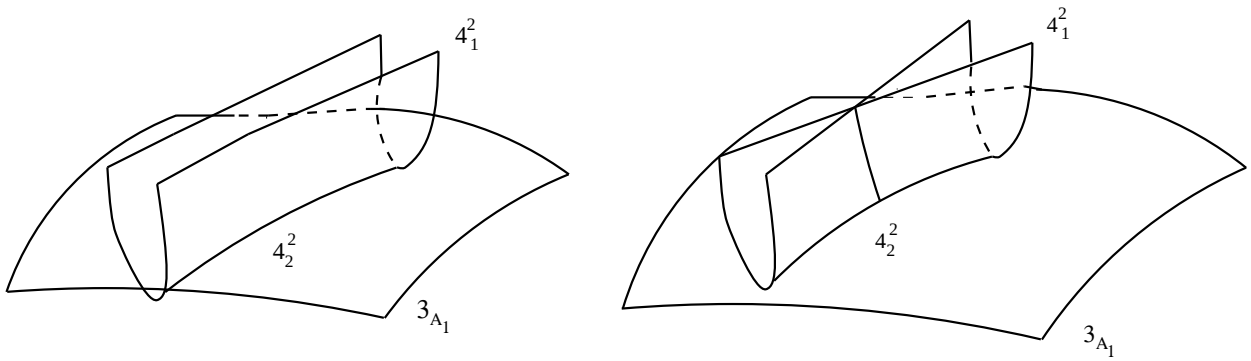

Figura 3.2: Interseção de 3_{A_1} e 4_1^2

Teorema 3.16 *Genericamente, as superfícies 4_1^2 e 5_1 em M se encontram tangencialmente ao longo da curva 5_2.*

Prova: Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^4$ dada localmente na origem por $(x, y, z, f(x, y, z))$ onde $j^4 f = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3 + b_8z^2x + b_9zx^2 + b_{10}xyz + c_1x^4 + c_2x^3y + c_3x^2y^2 + c_4xy^3 + c_5y^4 + c_6y^3z + c_7y^2z^2 + c_8yz^3 + c_9z^4 + c_{10}z^3x + c_{11}z^2x^2 + c_{12}zx^3 + c_{13}x^2yz + c_{14}xy^2z + c_{15}xyz^2$. Então a aplicação projeção tem singularidade 4_1^2 na origem se $a_3 = b_7 = b_6a_5 - b_8a_6 = 0$, e tem singularidade 5_1 se $a_3 = b_7 = c_9 = 0$. Então na intersecção das superfícies 4_1^2 e 5_1, temos $a_3 = b_7 = b_6a_5 - b_8a_6 = c_9 = 0$, ou seja a projeção possui uma singularidade do tipo 5_2.

Suponha que $(x, y, f(x, y, z))$ tem singularidade 5_2 na origem. Então considerando o 4-jato acima temos que ter $a_3 = b_7 = b_6a_5 - b_8a_6 = c_9 = 0$. O espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f em V_4 é dado pelos vetores u_i, $i = 1, \cdots, 10$. Um transversal à órbita pode ser dado por $\bar{f} = j^4 f + \bar{a}_2y^2 + \bar{b}_1x^3 + \bar{b}_2x^2y + \bar{b}_3xy^2 + \bar{b}_4y^3 + \bar{b}_5y^2z + \bar{b}_7z^3 + \bar{b}_9x^2z + \bar{b}_{10}xyz + \bar{c}_1x^4 + \bar{c}_2x^3y + \bar{c}_3x^2y^2 + \bar{c}_4xy^3 + \bar{c}_5y^4 + \bar{c}_6y^3z + \bar{c}_7y^2z^2 + \bar{c}_8yz^3 + \bar{c}_9z^4 + \bar{c}_{10}z^3x + \bar{c}_{11}x^2z^2 + \bar{c}_{12}x^3z + \bar{c}_{13}x^2yz + \bar{c}_{14}xy^2z + \bar{c}_{15}xyz^2$, onde $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i \in \mathbb{R}$.

Consideremos no transversal a projeção na direção singular sobre o espaço tangente, $(\alpha, \beta, 1, 0)$ onde α e β são valores próximos do zero. Ou seja $P(x, y, z) \simeq (x, y, \bar{f}(x + \alpha z, y + \beta z, z))$. Neste transversal, temos uma singularidade 4_1^2 se

$$coef(z^2) = a_5\alpha + a_6\beta + a_1\alpha^2 + (a_2 + \bar{a}_2)\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0,$$

$$coef(yz^2).coef(xz) - coef(xz^2).coef(yz) = (2b_6a_1 + b_{10}a_5 - b_8a_4 - 2b_9a_6)\alpha +$$

$$(b_6a_4 + 2b_5a_5 - 2b_8a_2 - b_{10}a_6)\beta + O_1(2) = 0, \text{ e}$$

$$coef(z^3) = \bar{b}_7 + b_8\alpha + b_6\beta + O_2(2) = 0,$$

onde $O_1(2)$ e $O_2(2)$ são os termos de ordem maior ou igual a dois em α, β, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ e são nulos se $\alpha = \beta = 0$. Como $a_5 \neq 0$, da primeira equação pelo Teorema da Função Implícita temos que α é uma função de β com $j^1\alpha = -\frac{a_6}{a_5}\beta$. Substituindo α na segunda equação temos que quando $C = (2b_6a_1+b_{10}a_5-b_8a_4-2b_9a_6)a_6-(b_6a_4+2b_5a_5-2b_8a_2-b_{10}a_6)a_5 \neq 0$, isto é quando o coeficiente de β é não nulo, então a solução próxima de zero é $\beta = 0$. Caso contrário, se $C = 0$ temos que substituindo na segunda equação o valor de α encontrado na primeira obtemos $\beta^2(c+O(1)) = 0$, onde c é constante e $O(1)$ tem grau maior ou igual a 1 em α, β, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$. Novamente se $c \neq 0$ temos que a solução próxima do zero é $\beta = 0$. Observe que o caso $c = 0$ é não genérico pois θ não encontra o estrato 5_2 com mais duas condições $C = c = 0$. Logo as soluções próximas do zero são $\beta = \alpha = 0$. A terceira condição nos dá então $\bar{b}_7 = 0$. Temos uma singularidade 5_1 no transversal se

$$coef(z^2) = a_5\alpha + a_6\beta + a_1\alpha^2 + (a_2 + \bar{a}_2)\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0,$$

$$coef(z^3) = \bar{b}_7 + b_8\alpha + b_6\beta + O_1(2) = 0, \quad \text{e}$$

$$coef(z^4) = \bar{c}_9 + c_{10}\alpha + c_8\beta + O_2(2) = 0,$$

onde $O_1(2)$ e $O_2(2)$ são os termos de ordem maior ou igual a dois em α, β, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ e são nulos se $\alpha = \beta = 0$. Novamente da primeira equação podemos escrever α em função de β, substituindo na terceira equação temos $\bar{c}_9 + \frac{c_8a_5-c_{10}a_6}{a_5}\beta + O_3(2) = 0$ como $c_8a_5 - c_{10}a_6 \neq 0$ para 5_2 podemos achar β e substituindo na segunda equação temos que o primeiro jato é $\bar{b}_7 = 0$ que é o tangente da variedade 5_1.

Portanto as variedades 4_1^2 e 5_1 em M se encontram tangencialmente ao longo da curva 5_2, pois o espaço tangente do estrato-5_1 é o mesmo que o espaço tangente do estrato-4_1^2 em V_4 (ver Figura 3.3). ■

O resultado a seguir (análogo ao resultado de Gaffney e Ruas [21] para superfícies em $\mathbb{R}^3$, ver também [22]) procura identificar geometricamente os tipos de singularidades simples da projeção. Precisamos da seguinte definição.

Definição 3.17 *Seja $F = (x, y, f(x, y, z))$. A curva cuja imagem por F é a curva de auto-interseção do discriminante de F, $\Delta(F)$, é chamada* `curva dos pontos duplos`*. A curva na origem que é levada pela F na cuspidal edge de $\Delta(F)$ é chamada* `curva cuspidal edge`*.*

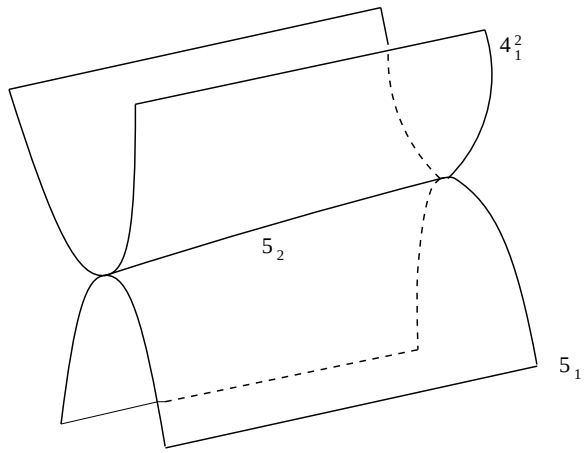

Figura 3.3: Tangência de 4_1^2 e 5_1 ao longo de 5_2

Teorema 3.18 *As singularidades genéricas simples da aplicação projeção P ao longo da direção u ocorrem em $p \in M$ quando*

II*: $u \in T_pM$, mas não é direção assintótica. Nos pontos elípticos só acontece singularidade deste tipo.*

3_{A_0}*: p é ponto parabólico ou hiperbólico; u tem contato 2 com a hipersuperfície; u é direção assintótica no ponto hiperbólico e direção assintótica não principal no ponto parabólico; $\Sigma(P)$é uma superfície regular.*

3_{A_k}*: ($1 \leq k \leq 3$) p é ponto parabólico; u tem contato 2 com a hipersuperfície; u é direção assintótica principal e é transversal ao conjunto parabólico; $\Sigma(P)$ é uma superfície com singularidade A_k.*

4_1^k*: ($1 \leq k \leq 4$) p é hiperbólico; u tem contato 3 com a hipersuperfície; u é direção assintótica; $\Sigma(P)$ é uma superfície regular; a curva cuspidal edge tem singularidade A_{k-1}.*

$4_2^2, 4_2^3$*: p é ponto parabólico; u tem contato 3 com a hipersuperfície; u é direção assintótica principal e é tangente ao conjunto parabólico; $\Sigma(P)$ é uma superfície com singularidade A_1.*

5_1*: p é ponto hiperbólico; u tem contato 4 com a hipersuperfície; u é direção assintótica; $\Sigma(P)$ é uma superfície regular; a curva dos pontos duplos tem singularidade A_5; a curva cuspidal edge é regular.*

$5_2, 5_3$: *p é ponto hiperbólico; u tem contato* 4 *com a hipersuperfície; u é direção assintótica;* $\Sigma(P)$ *é uma superfície regular; a curva cuspidal edge tem singularidade* A_1.

Observações 3.19

(1) 4_2^k, $k = 2, 3$, *são distinguidos pela curva dos pontos duplos que não é trivial calcular nestes casos.*

(2) A menos da $\mathcal{A}_e$*-codimensão, os invariantes associados aos germes* $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^3, 0$ *em [31] e [40] são todos iguais para* 5_2 *e* 5_3, *portanto não podemos usá-los para distinguir* 5_2 *e* 5_3.

Prova: O espaço tangente a M em $p = (x, y, z, f(x, y, z))$ é gerado por $(1, 0, 0, f_x)$, $(0, 1, 0, f_y)$ e $(0, 0, 1, f_z)$. Portanto, um vetor v pertence ao espaço tangente se, e somente se, $v = \lambda_1(1, 0, 0, f_x) + \lambda_2(0, 1, 0, f_y) + \lambda_3(0, 0, 1, f_z)$. Logo, $u = (0, 0, 1, 0)$ pertence ao espaço tangente se, e somente se, $f_z = 0$ ou seja, se, e somente se, a projeção nesta direção tem uma singularidade em p. Além disso, u é direção assintótica se, e somente se, a curvatura normal em u se anula. Isto acontece se, e somente se, $a_3 = 0$. Portanto, para a singularidade do tipo II, a direção de projeção não é assintótica, e para os outros tipos a direção é assintótica.

O segundo jato de f pode ser escrito como $\phi(x, y) + a_3z^2 + a_5xz + a_6yz$. Para a singularidade II, $j^2P(x, y, z) = (x, y, a_3z^2 + a_5xz + a_6yz)$ é equivalente a (x, y, z^2) pois $a_3 \neq 0$, logo o ponto pode ser parabólico, hiperbólico ou elíptico. Para o caso em que $a_3 = 0$, isto é, a direção $(0, 0, 1, 0)$ é direção assintótica, se $a_5 \neq 0$ ou $a_6 \neq 0$ temos que $j^2P(x, y, z) = (x, y, xz)$ e o ponto é hiperbólico, senão $j^2P(x, y, z) = (x, y, 0)$ e o ponto é parabólico.

Nos pontos elípticos só acontece singularidade do tipo II, pois não temos direção assintótica nestes pontos.

Nos pontos parabólicos se projetarmos nas direções assintóticas não principais veremos uma singularidade do tipo 3_{A_0}, e se projetarmos na direção assintótica principal a singularidade será do tipo 3_{A_1} ou mais degenerada (ou seja, 3_{A_2}, 3_{A_3}, 4_2^2 ou 4_2^3).

Seja $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. Se F é finitamente determinada e $f(0, 0, z)$ tem uma singularidade A_k para algum k então podemos escrever f da forma $f(x, y, z) = z^{k+1} + P_1(x, y)z + \cdots + P_{k-1}(x, y)z_{k-1}$ [31]. Então, $u = (0, 0, 1, 0)$ tem contato k com a hipersuperfície. Por exemplo, se a singularidade é do tipo 3_{A_k} temos que $f(x, y, z) = z^3 + P_1(x, y)z$. Concluímos então que u tem contato 2 com a hipersuperfície. Lembramos

também que dois germes equivalentes têm conjuntos de pontos críticos e discriminantes difeomorfos.

Nos casos $3_{A_{k\geq 1}}$ e 4_2^k, $k = 2, 3$, o fato de u ser respectivamente transversal e tangente ao conjunto parabólico já foi provado no Teorema 2.17, pois as singularidades A_2 e $A_{k\geq 3}$ da função altura correspondem respectivamente por dualidade (às singularidades $3_{A_k\geq 1}$ (Proposição 4.6) e 4_2^k, $k = 2, 3$ (Proposição 4.3).

Se a projeção tem singularidade 3_{A_k} então $F \simeq (x, y, f(x, y, z))$ onde $f(x, y, z) = z^3 + (x^2 \pm y^{k+1})z$. O conjunto $\Sigma(F)$ é difeomorfo ao conjunto dos pontos (x, y, z) tal que $f_z = 0$, ou seja, $\Sigma(F) \simeq \{(x, y, z); 3z^2 + x^2 \pm y^{k+1} = 0\}$. Logo $\Sigma(F)$ é uma superfície com singularidade A_k. Para 3_{A_0} $F \simeq (x, y, z^3 + xz)$, logo $\Sigma(F) \simeq \{(x, y, z); 3z^2 + x = 0\}$, ou seja, $\Sigma(F)$ é uma superfície com singularidade A_0.

Se a projeção tem singularidade 4_1^k então $F \simeq (x, y, f(x, y, z))$ onde $f(x, y, z) = z^4 + xz \pm y^k z^2$. Logo $\Sigma(F) \simeq \{(x, y, z); 4z^3 + x \pm 2y^k z = 0\}$, que é uma superfície regular. Além disso, a curva cuspidal edge é dada por $f_z = f_{zz} = 0$, ou seja, $f_{zz} = 6z^2 \pm y^k = 0$ interseção com $\Sigma(F)$. Como $\Sigma(F)$ é regular temos que a curva cuspidal edge pode ser vista como uma curva plana. Esta curva tem singularidade do tipo A_{k-1} para $k \geq 1$.

Se a projeção tem singularidade 4_2^k, $k = 2, 3$ então $F \simeq (x, y, f(x, y, z))$ onde $f(x, y, z) = z^4 + (y^2 \pm x^k)z + xz^2$. O conjunto $\Sigma(F)$ é difeomorfo ao conjunto dos pontos (x, y, z) tal que $f_z = 0$, ou seja, $\Sigma(F) \simeq \{(x, y, z); 4z^3 + y^2 \pm x^k + 2xz = 0\}$. Logo $\Sigma(F)$ é uma superfície com singularidade A_1.

Se a projeção tem singularidade 5_1 então $F \simeq (x, y, f(x, y, z))$ onde $f(x, y, z) = z^5 + xz + yz^2$. Logo $\Sigma(F) \simeq \{(x, y, z); 5z^4 + x + 2yz = 0\}$, que é uma superfície regular. Além disso, a curva cuspidal edge é dada por $f_z = f_{zz} = 0$, ou seja, $f_{zz} = 20z^3 + 2y = 0$ interseção com $\Sigma(F)$. Como $\Sigma(F)$ é regular temos que a curva cuspidal edge é regular. A curva dos pontos duplos é dada por $200z^6 + 140yz^3 + 27y^2 = 0$ (ver [31]), que tem uma singularidade A_5.

Se a projeção tem singularidade 5_2 então $F \simeq (x, y, f(x, y, z))$ onde $f(x, y, z) = z^5 + xz + y^2z^2 + yz^3$. Logo $\Sigma(F) \simeq \{(x, y, z); 5z^4 + x + 2y^2z + 3yz^2 = 0\}$, que é uma superfície regular. Além disso, a curva cuspidal edge é dada por $f_z = f_{zz} = 0$, ou seja, $f_{zz} = 20z^3 + 2y^2 + 6yz = 0$ interseção com $\Sigma(F)$. Como $\Sigma(F)$ é regular temos que a curva cuspidal edge tem singularidade A_1.

Se a projeção tem singularidade 5_3 então $F \simeq (x, y, f(x, y, z))$ com $f(x, y, z) = z^5 + xz + yz^3$. Logo $\Sigma(F) \simeq \{(x, y, z); 5z^4 + x + 3yz^2 = 0\}$, que é uma superfície regular. Além disso, a curva cuspidal edge é dada por $f_z = f_{zz} = 0$, ou seja, $f_{zz} = 20z^3 + 6yz =$

0 interseção com $\Sigma(F)$. Como $\Sigma(F)$ é regular temos que a curva cuspidal edge tem singularidade A_1. ■

3.3 Demonstração da Proposição 3.4

Na Proposição 3.4 não listamos as condições φ_j, $j = 1, \cdots, 7$, a fim de não tumutuar o seu enunciado, pois tais expressões são extensas. Além de listar estas condições, também faremos aqui um exemplo simples dos cálculos feitos no maple a fim de ilustrar o método usado para provar a proposição.

As condições denotas por φ_j, $j = 1, \cdots, 7$ da Proposição 3.4 são:

$$\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{b_i}, \mathbf{c_i}) = -18c_{11}b_8b_7^2b_{10}^3 - 8c_{12}b_8^3b_6^3 - 4c_9b_8^3b_{10}^3 + 9c_{10}b_8^2b_7b_{10}^3 - 8c_{14}b_8^5b_6 + 108c_{14}b_7^3b_{10}b_9^2 + 12c_{14}b_7b_{10}b_8^4 - 8b_8^5c_7b_{10} + 216c_6b_7^2b_9^2b_8^2 - 72c_6b_7b_9b_8^4 + 32c_9b_6^3b_9^3 + 144c_7b_6b_7^2b_9^3 - 72c_8b_6^2b_7b_9^3 + 6b_8^4c_8b_{10}^2 + 8c_{13}b_8^4b_6^2 - 54c_{13}b_7^3b_{10}^2b_9 + 18c_{13}b_7^2b_{10}^2b_8^2 - 12b_8^3b_7c_{15}b_{10}^2 - 216c_6b_7^3b_9^3 + 8c_6b_8^6 + 27c_{12}b_7^3b_{10}^3 - 8c_{11}b_8^3b_6^2b_{10} + 24c_{11}b_8^2b_7b_6b_{10}^2 + 36c_{12}b_7b_8^2b_6^2b_{10} - 54c_{12}b_7^2b_8b_6b_{10}^2 - 6c_{10}b_8^3b_6b_{10}^2 - 24c_{10}b_6^3b_8b_9^2 + 36c_{10}b_6^2b_7b_{10}b_9^2 + 24c_{10}b_6^2b_{10}b_9b_8^2 - 72c_{14}b_7^2b_8b_6b_9^2 + 48c_{14}b_7b_8^3b_6b_9 - 72c_{14}b_7^2b_{10}b_9b_8^2 + 48c_{15}b_6^2b_7b_8b_9^2 - 16c_{15}b_6^2b_8^3b_9 - 72c_{15}b_6b_7^2b_{10}b_9^2 + 8c_{15}b_6b_{10}b_8^4 - 48b_8c_9b_6^2b_{10}b_9^2 - 96b_8^2c_7b_7b_6b_9^2 + 16b_8^4c_7b_6b_9 - 72b_8c_7b_7^2b_{10}b_9^2 + 48b_8^3c_7b_7b_{10}b_9 + 24b_8^2c_8b_6^2b_9^2 + 72b_8c_8b_6b_7b_{10}b_9^2 - 24b_8^3c_8b_6b_{10}b_9 + 24b_8^2c_9b_6b_{10}^2b_9 - 18b_8^2c_8b_7b_{10}^2b_9 - 24c_{13}b_7b_8^2b_6^2b_9 + 72c_{13}b_7^2b_8b_6b_{10}b_9 - 24c_{13}b_7b_8^3b_6b_{10} + 16c_{11}b_6^3b_8^2b_9 - 48c_{11}b_6^2b_7b_8b_{10}b_9 + 36c_{11}b_6b_7^2b_{10}^2b_9 - 36b_8b_7c_{10}b_6b_{10}^2b_9 + 36b_8b_7^2c_{15}b_{10}^2b_9;$$

$$\varphi_{\mathbf{2}}(\mathbf{b_i}, \mathbf{c_i}, \mathbf{d_i}) = 19440c_{12}b_7^5b_{10}^2c_{15}b_6b_8^4 + 44064c_{12}b_7^5b_{10}^3c_9b_6b_9b_8^2 + 10368c_7b_7^4b_8^5b_5c_{10}b_9^2 + 128c_7b_7b_8^9c_9b_{10}b_6 - 46656c_{14}^2b_7^7b_9^3b_8^2 + 23328c_{14}^2b_7^6b_9^2b_8^4 + 576c_7^2b_7^3b_8^8b_9 - 6912c_7^2b_7^4b_8^6b_9^2 - 576c_7b_7^3b_8^9c_{14} + 3888c_{12}b_7^5b_{10}^2b_8^3b_6c_8b_9 - 34992c_{12}b_7^7b_{10}^2c_{14}b_9b_8^2 - 34992c_{12}b_7^7b_{10}^2c_{15}b_6b_9^2 - 31104c_7b_7^5b_8^5c_{14}b_9^2 - 128c_7b_7b_8^{10}c_9b_5 - 34992c_{12}b_7^7b_{10}^2c_7b_8b_9^2 + 23328c_{12}b_7^6b_{10}^2c_7b_8^3b_9 + 46656c_{12}b_7^6b_{10}^2b_8b_6c_8b_9^2 - 3888c_7b_7^5b_8^5c_{12}b_{10}^2 + 15552c_{15}^2b_7^6b_6^2b_9^4 - 480c_7b_7^2b_8^8c_9b_{10}^2 - 46656c_{14}b_7^7b_9^4c_7b_8 + 768c_7b_7^2b_8^7c_9b_{10}b_6b_9 + 31104c_{14}b_7^6b_9^4c_{10}b_6^2 + 52488c_{14}b_7^8b_9^2c_{12}b_{10}^2 + 1728c_{13}^2b_7^4b_8^6b_6^2 + 20736c_{14}b_7^4b_9^2c_9b_5b_8^5 + 3888c_{12}^2b_7^4b_8^4b_6^4 + 7776c_{11}^2b_8^2b_7^6b_{10}^4 - 243b_9^2b_7^6c_{10}^2b_{10}^4 - 168b_{10}^2b_7^2c_8^2b_8^8 + 64c_9^2b_{10}^2b_6^2b_8^8 + 6912c_7b_7^4b_8^7c_{14}b_9 - 4608c_9b_5b_8^7c_{14}b_7^3b_9 - 6912c_9b_5b_8^5c_{15}b_7^3b_6b_9^2 + 1152c_9b_5b_8^8c_7b_7^2b_9 - 2304c_9^2b_5b_6^8b_6^2b_9^2b_7 + 128c_9^2b_5b_8^8b_6^2b_9 - 46656c_{12}b_7^5b_{10}^2b_8c_9b_6^2b_9^2 - 41472c_{12}b_7^4b_{10}^2b_8^3c_9b_6^2b_9 + 2592c_9b_5b_8^5c_{12}b_7^4b_{10}^2 + 64c_9^2b_5^2b_8^{10} - 128c_7b_7b_8^8c_9b_6^2b_9 - 62208c_7b_7^5b_8^3b_9^3c_{15}b_6 - 15552c_{14}b_7^5b_8^4b_5c_{10}b_9^2 - 2304c_7b_7^3b_8^7b_9c_{15}b_6 - 4320c_{14}b_7^4b_8^6b_{10}c_8b_9 + 576c_{14}b_7^3b_8^8b_{10}c_8 + 384c_9b_5b_8^7c_{10}b_6^2b_7b_9 + 15552c_7b_7^6b_8b_9^4b_5c_{10} + 25920c_7b_7^4b_8^5b_9^2b_{10}c_8 + 134784c_7b_7^5b_8^2b_9^4b_6c_8 - 768c_{14}b_7^2b_8^8c_9b_{10}b_6 + 224c_9^2b_8^7b_{10}^3b_7b_6 + 1152c_9b_5b_8^5c_{10}b_6^2b_7^2b_9^2 - 768c_7b_7^2b_8^6c_9b_6^2b_9^2 + 9216c_{14}b_7^3b_8^6c_9b_{10}b_6b_9 - 10368c_{14}b_7^4b_8^4c_{10}b_6^2b_9^2 - 4032c_{14}b_7^3b_8^7b_6c_8b_9 + 576c_{14}b_7^3b_8^8c_{15}b_6 - 51840c_7b_7^4b_8^4b_9^3b_6c_8 + 62208c_7b_7^6b_8b_9^4c_{15}b_6 + 89856c_7b_7^4b_8^3b_9^3c_9b_{10}b_6 - 20736c_7b_7^3b_8^5b_9^2c_9b_{10}b_6 - 67392c_7b_7^5b_8^3b_9^3b_{10}c_8 + 25920c_{14}b_7^4b_8^5b_6c_8b_9^2 - 2592c_9b_8^3b_{10}^4b_7^5c_{12} + 1152c_{14}b_7^2b_8^7c_9b_6^2b_9 + 576c_7b_7^2b_8^7c_{10}b_6^2b_9 - 128c_9^2b_5b_8^9b_{10}b_6 - 224c_9^2b_5b_8^8b_{10}^2b_7 - 17280b_8^3c_9b_6^2b_9^3b_5b_7^3c_{10} - 62208c_7^2b_7^6b_8^2b_9^4 - 13824c_{14}b_7^3b_8^5c_9b_6^2b_9^2 - 5184c_{14}^2b_7^5b_8^6b_9 - 640b_8^6c_9b_6^3b_9^2c_8b_7 - 28800b_8^3c_9b_6^3b_9^3c_{15}b_7^3 + 7776c_{14}b_7^5b_9^2b_{10}c_8b_8^4 + 3168c_{14}b_7^3b_8^6c_{10}b_6^2b_9 + 128b_8^7c_9b_6^3b_9c_{15}b_7 + 960b_8^7c_9b_6^2b_9b_{10}b_7c_8 +$$

$31104b_8c_9b_6^2b_9^4b_7^4b_5c_{10} + 5832c_{14}b_7^6b_8^4c_{12}b_{10}^2 + 7776c_{14}b_7^6b_9^3b_{10}c_8b_8^2 + 65664b_8c_9b_6^3b_9^4b_7^4c_{15} + 1920b_8^5c_9b_6^3b_9^2b_7^2c_{15} -$

$384b_8^3c_9^2b_6^3b_9^3b_7^2b_{10} + 3200b_8^5c_9^2b_6^3b_9^2b_7b_{10} - 53568b_8^3c_9b_6^2b_9^3b_7^3b_{10}c_8 + 384c_{14}b_7^2b_8^9c_9b_5 - 89856b_8^2c_9b_6^2b_9^4b_7^4c_7 + 20736b_8^4c_9b_6^2b_9^3b_7^3c_7 +$

$35712b_8^2c_9b_6^3b_9^4b_7^3c_8 + 384b_8^4c_9b_6^3b_9^3b_7^2c_8 - 576b_8^5c_9b_6^2b_9^2b_7^2b_{10}c_8 - 128b_8^7c_9^2b_6^3b_9b_{10} - 704c_{10}b_6^3b_7b_9b_8^6c_9b_{10} - 23328c_{14}b_7^7b_9^4b_5c_{10} -$

$31104c_{14}b_7^4b_9^2c_9b_{10}b_6b_8^4 + 20736c_{14}b_7^5b_9^3c_9b_{10}b_6b_8^2 - 67392c_{14}b_7^5b_9^3b_8^3b_6c_8 + 62208c_{14}b_7^6b_9^4b_8b_6c_8 + 51840c_{14}b_7^4b_9^3b_8^3c_9b_6^2 -$

$62208c_{14}b_7^5b_9^4b_8c_9b_6^2 - 2592c_{14}b_7^5b_9^3c_{10}b_6^2b_8^2 - 576c_{10}b_6^3b_7^2b_9b_8^6c_{15} - 1536c_{10}b_6^2b_7^2b_9b_8^6b_{10}c_8 + 3456c_{10}^2b_6^2b_7^4b_9^3b_8^2b_5 + 192b_8^2c_9^2b_6^4b_9^4b_7^2 +$

$432c_{14}^2b_7^4b_8^8 + 512c_{10}b_6^4b_7b_9^2b_8^5c_9 - 10368c_7b_7^3b_8^5c_{10}b_6^2b_9^2 - 46656c_{14}b_7^7b_9^4c_{15}b_6 + 27648c_{10}b_6^2b_7^3b_9^2b_{10}c_8b_8^4 - 47520c_{10}b_6^2b_7^4b_9^3b_{10}c_8b_8^2 +$

$1152c_{10}b_6^3b_7^2b_9^2b_8^5c_8 - 22464c_{10}b_6^3b_7^4b_9^3b_8^2c_{15} - 62208c_{10}b_6^2b_7^5b_9^4c_7b_8 +$

$46656c_{10}b_6^2b_7^4b_9^3c_7b_8^3 + 60480c_{10}b_6^3b_7^4b_9^4b_8c_8 + 62208c_{14}b_7^6b_9^3c_7b_8^3 + 15552c_{14}b_7^5b_9^2c_9b_8^3b_{10}^2 - 49536c_{10}b_6^4b_7^3b_9^4b_8c_9 + 1296b_8^6b_7^4c_{15}^2b_{10}^2 +$

$3888c_{13}^2b_7^6b_{10}^2b_8^4 + 34992c_{13}^2b_7^8b_{10}^2b_9^2 - 13608c_{12}b_7^6b_{10}^3c_8b_9b_8^2 - 17496c_{12}b_7^7b_{10}^2b_5c_{10}b_9^2 + 4608c_{10}b_6^4b_7^2b_9^3b_8^3c_9 - 24192c_{10}b_6^3b_7^3b_9^3b_8^3c_8 +$

$11520c_{10}b_6^3b_7^3b_9^2c_{15}b_8^4 + 81216c_{10}b_6^3b_7^3b_9^3c_9b_{10}b_8^2 - 9408c_{10}b_6^3b_7^2b_9^2c_9b_{10}b_8^4 + 64b_8^6c_9^2b_6^4b_9^2 - 4032c_7b_7^3b_7^7b_8^7b_{10}c_8b_9 + 192c_7b_7^2b_7^9b_{10}c_8 +$

$73872c_{12}b_7^5b_{10}^2c_{10}b_6^2b_9b_8^2 + 6912c_{10}^2b_6^4b_7^4b_9^4 - 2688c_9b_5b_8^7b_{10}b_7^2c_8b_9 + 2304c_9^2b_5b_8^7b_{10}b_7b_6b_9 - 640c_9b_5b_8^8b_6c_8b_7b_9 + 3888b_5^2b_7^6c_{10}^2b_9^4 +$

$23328c_{12}b_7^6b_{10}^2c_{10}b_6^2b_9^2 + 31104c_7^2b_7^5b_8^4b_9^3 - 43200c_9b_8^3b_{10}^2b_7^3c_{10}b_6^2b_9^2 - 1600b_8^4c_9^2b_6^4b_9^3b_7 - 912c_{10}^2b_6^4b_7^2b_9^2b_8^4 - 2304c_7b_7^3b_7^7b_8^5b_{10}b_9 +$

$192c_7b_7^2b_8^9b_5c_{10} - 384c_7b_7^2b_8^8c_{10}b_6b_{10} + 6336c_7b_7^3b_8^6b_9c_{10}b_6b_{10} - 3888c_7b_7^4b_8^5b_9c_{10}b_{10}^2 + 378c_{10}^2b_8^4b_7^4b_{10}^4 - 10368c_{10}^2b_6^2b_7^5b_9^4b_5 -$

$12960b_{10}b_7^4c_8b_8^4b_5c_{10}b_9^2 + 2880b_{10}^2b_7^3c_8^2b_9b_8^6 + 18144b_{10}b_7^5c_8b_9^3b_8^2b_5c_{10} + 2592c_9b_8^3b_{10}^2b_7^4b_5c_{10}b_9^2 - 12960b_{10}^2b_7^4c_8^2b_9^2b_8^4 -$

$6192c_9b_8^5b_{10}^3b_7^3c_8b_9 - 192c_{10}^2b_6^2b_7^2b_9b_8^6b_5 + 1248c_{10}^2b_6^3b_7^2b_9b_8^5b_{10} +$

$2376c_{10}^2b_6^2b_7^3b_9b_8^4b_{10}^2 + 576c_{10}b_6^4b_7^2b_9b_8^5c_{11} + 7488c_{10}b_6^3b_7^3b_9b_8^4c_{11}b_{10} - 41472c_{10}b_6^2b_7^4b_9b_8^3c_{11}b_{10}^2 + 4896c_{10}b_6^4b_7^3b_9b_8^4c_{12} -$

$34560c_{10}b_6^3b_7^4b_9b_8^3c_{12}b_{10} - 4032c_{10}b_6^3b_7^3b_9b_8^5c_{13} + 18144c_{10}b_6^2b_7^4b_9b_8^4c_{13}b_{10} - 6912c_{10}b_6^2b_7^3b_9b_8^5c_{15}b_{10} - 6912b_8^2c_9^2b_6^2b_9^4b_7^3b_5 +$

$9216b_8^4c_9^2b_6^2b_9^3b_7^2b_5 + 2208c_9^2b_8^5b_{10}^3b_7^2b_6b_9 + 1056c_9b_8^7b_{10}^2b_7^2c_{15}b_6 - 2592c_9b_8^3b_{10}^2b_7^4c_{15}b_6b_9^2 - 20736c_{10}b_6^3b_7^5b_9^4c_{15} - 320c_9b_{10}^2b_6b_8^8b_7c_8 +$

$24192c_9b_{10}b_6b_8^4b_5b_7^3c_{10}b_9^2 + 12384c_{10}^2b_6^4b_7^3b_9^3b_8^2 - 1056c_9b_8^6b_{10}^2b_7^2b_6c_8b_9 - 2592c_9b_8^5b_{10}^2b_7^4c_{14}b_9 - 34560c_9b_{10}b_7^4b_6b_9^3b_8^2b_5c_{10} +$

$5760c_9b_8^6b_{10}^2b_7^3c_7b_9 + 30240c_9b_8^4b_{10}^2b_7^3b_6c_8b_9^2 + 5184c_{12}b_7^5b_{10}^3c_8b_8^4 - 2496c_{15}b_7^2b_6^2b_8^6c_9b_{10}b_9 - 128c_{15}b_7b_6^2b_8^8c_9b_{10} +$

$44064c_{10}^2b_6^2b_7^4b_9^2b_8^2b_{10}^2 - 44064c_{10}^2b_6^3b_7^4b_9^3b_8b_{10} - 77760c_{10}b_6^2b_7^4b_9^3c_9b_8b_{10}^2 - 12672c_{10}b_6^4b_7^3b_9^2c_{11}b_8^3 + 67392c_{10}b_6^3b_7^4b_9^2c_{11}b_8^2b_{10} -$

$85536c_{10}b_6^2b_7^5b_9^2c_{11}b_8b_{10}^2 + 10368c_{10}b_6^4b_7^4b_9^2c_{12}b_8^2 - 31104c_{10}b_6^3b_7^5b_9^2c_{12}b_8b_{10} + 3456c_{10}b_6^3b_7^4b_9^2c_{13}b_8^3 - 31104c_{10}b_6^2b_7^6b_9^3c_{13}b_{10} -$

$46656c_{10}b_6^2b_7^5b_9^2c_{13}b_{10}b_8^2 - 15552c_{10}b_6^2b_7^4b_9^2b_8^3c_{15}b_{10} + 20736c_{10}b_6^3b_7^5b_9^3c_{13}b_8 + 98496c_{10}b_6^2b_7^5b_9^3b_8c_{15}b_{10} - 13824c_{10}b_6^4b_7^4b_9^3c_{11}b_8 +$

$58320c_{12}b_7^6b_{10}^3c_{11}b_8^2b_6 - 26244c_{12}b_7^7b_{10}^4c_{11}b_8 + 52488c_{12}^2b_7^6b_{10}^2b_8^2b_6^2 - 52488c_{12}^2b_7^7b_{10}^3b_8b_6 -$

$34992c_{12}b_7^6b_{10}^2c_{13}b_8^3b_6 - 52488c_{12}b_7^8b_{10}^3c_{13}b_9 + 17496c_{12}b_7^7b_{10}^3c_{13}b_8^2 - 11664c_{12}b_7^6b_{10}^3b_8^3c_{15} + 104976c_{12}b_7^7b_{10}^2c_{13}b_8b_6b_9 +$

$34992c_{12}b_7^7b_{10}^3b_8c_{15}b_9 - 69984c_{12}b_7^6b_{10}^2c_{11}b_6^2b_8b_9 + 34992c_{12}b_7^7b_{10}^3c_{11}b_6b_9 + 864c_{10}^2b_6^2b_7^3b_9^2b_5b_8^4 + 17496c_{10}^2b_6^2b_7^5b_9^3b_{10}^2 -$

$16848c_{12}b_7^5b_{10}^3c_{10}b_8^3b_6 + 10692c_{12}b_7^6b_{10}^4c_{10}b_8^2 - 54432c_{12}b_7^6b_{10}^3b_9c_{10}b_8b_6 + 7290c_{12}b_7^7b_{10}^4b_9c_{10} - 9720c_{12}b_7^6b_{10}^4c_9b_9b_8 -$

$1824c_9^2b_8^6b_{10}^2b_7b_6^2b_9 - 20736c_9b_8^4b_{10}^2b_7^4c_7b_9^2 + 5376c_9b_5b_8^6b_6c_8b_7^2b_9^2 - 1152c_9b_8^6b_{10}^2b_7^3c_{13}b_6 - 2592c_9b_8^3b_{10}^3b_7^5c_{13}b_9 - 864c_9b_8^5b_{10}^3b_7^4c_{13} -$

$144c_9b_8^6b_{10}^3b_7^3c_{15} + 20736c_9b_8^4b_{10}^2b_7^4c_{13}b_6b_9 + 5616c_9b_8^4b_{10}^3b_7^4c_{15}b_9 + 6048c_9b_8^4b_{10}^2b_7^3c_{11}b_6^2b_9 - 24192c_9b_8^3b_{10}^3b_7^4c_{11}b_6b_9 +$

$11664c_{12}b_7^6b_{10}^2b_5c_{10}b_9b_8^2 - 1944c_{12}b_7^5b_{10}^2b_5c_{10}b_8^4 + 23328c_{12}b_7^6b_{10}^2c_9b_5b_8b_9^2 + 6336c_{15}b_7^3b_6b_8^6b_{10}c_8b_9 - 192c_{15}b_7^2b_6b_8^8b_{10}c_8 +$

$6912c_9b_8^5b_{10}^2b_7^2c_{10}b_6^2b_9 - 2016c_9^2b_8^4b_{10}^2b_7^2b_6^2b_9^2 + 20736c_7b_7^4b_8^5c_{15}b_6b_9^2 - 2304c_9b_5b_8^6c_7b_7^3b_9^2 -$

$53568c_{15}b_7^4b_6^2b_9^3c_9b_{10}b_8^2 + 32832c_{15}b_7^3b_6^2b_9^2c_9b_{10}b_8^4 + 5184c_{15}b_7^5b_6b_9^3b_{10}c_8b_8^2 - 25920c_{15}b_7^4b_6b_9^2b_{10}c_8b_8^4 + 15552c_{15}b_7^6b_6b_9^4b_5c_{10} -$

$384c_7b_7^2b_8^8b_6c_8b_9 - 8640c_{15}^2b_7^4b_6^2b_9^2b_8^4 + 8064c_7b_7^3b_8^6b_6c_8b_9^2 - 6912c_9b_5^2b_8^5b_7^3c_{10}b_9^2 + 19683c_{12}^2b_7^8b_{10}^4 + 31104c_{14}b_7^6b_9^3b_8^2c_{15}b_6 -$

$3456c_{14}b_7^4b_9b_8^6c_{15}b_6 + 31104c_{14}b_7^6b_9^3b_8^2b_5c_{10} +$
$192b_8^7b_6c_8^2b_7^2b_9b_{10} + 8640b_8^3b_6c_8b_7^4b_9^3b_5c_{10} + 320c_9b_5b_8^9b_{10}b_7c_8 + 1152c_9b_5b_8^7c_{12}b_7^2b_6^2 - 3456c_9b_5b_8^6c_{12}b_7^3b_6b_{10} - 768c_9b_5b_8^8c_{13}b_7^2b_6 -$

$10368c_9b_5b_8^5c_{13}b_7^4b_{10}b_9 + 1152c_9b_5b_8^7c_{13}b_7^3b_{10} - 576c_9b_5b_8^8b_7^2c_{15}b_{10} + 6912c_9b_5b_8^6c_{13}b_7^3b_6b_9 + 4608c_9b_5b_8^6b_7^3c_{15}b_{10}b_9 -$

$1152c_9b_5b_8^6c_{11}b_6^2b_7^2b_9 - 3456c_9b_5b_8^5c_{11}b_6b_7^3b_{10}b_9 - 1488c_9b_8^6b_{10}^3b_7^2c_{10}b_6 + 648c_9b_8^5b_{10}^4b_7^3c_{10} +$

$5328c_9b_8^4b_{10}^3b_7^3b_9c_{10}b_6 - 7344c_9b_8^3b_{10}^4b_7^4b_9c_{10} + 2268c_9^2b_8^4b_{10}^4b_7^3b_9 - 1632c_9b_8^6b_{10}^2b_7^2c_{11}b_6^2 + 1728c_9b_8^5b_{10}^3b_7^3c_{11}b_6 + 648c_9b_8^4b_{10}^4b_7^4c_{11} +$

$3456c_9b_8^5b_{10}^2b_7^3c_{12}b_6^2 - 192b_8^6b_6^2c_8^2b_7^2b_9^2 + 51840b_8^3b_6^2c_8b_7^4b_9^3c_{15} + 384b_8^7b_6^2c_8b_7^2b_9c_{15} + 43200b_8^3b_6c_8^2b_7^4b_9^3b_{10} - 8640b_8^5b_6c_8^2b_7^3b_9^2b_{10} -$

$10368b_8b_6c_8b_7^5b_9^4b_5c_{10} + 128c_9b_5b_8^9c_{15}b_7b_6 - 396c_9^2b_8^6b_{10}^4b_7^2 + 624c_9b_8^7b_{10}^3b_7^2c_8 - 576c_{14}b_7^3b_8^7c_{11}b_6^2 + 3456c_{14}b_7^4b_8^6c_{11}b_6b_{10} -$

$3888c_{14}b_7^5b_8^5c_{11}b_{10}^2 + 2592c_{14}b_7^4b_8^6c_{12}b_6^2 - 7776c_{14}b_7^5b_8^5c_{12}b_6b_{10} - 1728c_{14}b_7^4b_8^7c_{13}b_6 - 23328c_{14}b_7^6b_8^4c_{13}b_{10}b_9 + 2592c_{14}b_7^5b_8^6c_{13}b_{10} -$

$1728c_{14}b_7^4b_8^7c_{15}b_{10} + 15552c_{14}b_7^5b_8^5c_{13}b_6b_9 + 15552c_{14}b_7^5b_8^5c_{15}b_{10}b_9 - 15552c_{14}b_7^5b_8^4c_{11}b_6b_{10}b_9 + 1536c_9b_5^2b_8^7b_7^2c_{10}b_9 -$

$128c_9b_5^2b_8^9b_7c_{10} + 2688c_9^2b_5^2b_8^6b_7^2b_9^2 - 704c_9^2b_5^2b_8^8b_7b_9 - 64c_9b_5b_8^8c_{10}b_7b_6b_{10} + 864c_9b_5b_8^7c_{10}b_7^2b_{10}^2 - 3840c_9b_5b_8^6b_9b_7^2c_{10}b_6b_{10} -$

$4320c_9b_5b_8^5b_9b_7^3c_{10}b_{10}^2 + 960c_9^2b_5b_8^6b_9b_7^2b_{10}^2 - 128c_9b_5b_8^8c_{11}b_7b_6^2 + 1152c_9b_5b_8^7c_{11}b_7^2b_6b_{10} - 43200b_8^2b_6^2c_8^2b_7^4b_9^4 + 8640b_8^4b_6^2c_8^2b_7^3b_9^3 -$

$72576b_8b_6^2c_8b_7^5b_9^4c_{15} - 10368b_8^5b_6^2c_8b_7^3b_9^2c_{15} - 69984c_{14}b_7^8b_9^3c_{13}b_{10} + 69984c_{14}b_7^7b_9^2c_{13}b_{10}b_8^2 - 46656c_{14}b_7^6b_9^2b_9^3c_{15}b_{10} +$

$46656c_{14}b_7^7b_9^3c_{13}b_8b_6 + 46656c_{14}b_7^7b_9^3b_8c_{15}b_{10} - 31104c_{14}b_7^6b_9^3c_{11}b_6^2b_8 + 46656c_{14}b_7^7b_9^3c_{11}b_6b_{10} + 3456c_{14}b_7^4b_8^6b_5c_{10}b_9 -$

$288c_{14}b_7^3b_8^8b_5c_{10} + 1296c_{14}b_7^4b_8^6c_{10}b_{10}^2 - 7776c_{14}b_7^4b_8^5b_9c_{10}b_6b_{10} - 20736c_7b_7^5b_8^3b_9^3b_5c_{10} + 48b_5^2b_7^2c_{10}^2b_8^8 + 34992c_{14}^2b_7^8b_9^4 +$

$50976b_8^2c_9^2b_6^2b_9^3b_7^3b_{10}^2 - 3072b_8^4c_9b_6^4b_9^2b_7^2c_{11} - 33408b_8^3c_9b_6^3b_9^2b_7^3c_{11}b_{10} + 80352b_8^2c_9b_6^2b_9^2b_7^4c_{11}b_{10}^2 - 16128b_8^3c_9b_6^4b_9^2b_7^3c_{12} +$

$51840b_8^2c_9b_6^3b_9^2b_7^4c_{12}b_{10} + 16128b_8^4c_9b_6^3b_9^2b_7^3c_{13} + 62208b_8c_9b_6^2b_9^3b_7^5c_{13}b_{10} - 34560b_8^2c_9b_6^3b_9^3b_7^4c_{13} + 31104b_8^2c_9b_6^4b_9^3b_7^3c_{11} -$

$65664b_8c_9b_6^3b_9^3b_7^4c_{11}b_{10} + 20736c_7b_7^5b_8^2b_9^3c_9b_{10}^2 - 20736c_7b_7^4b_8^4b_9^2c_{11}b_6^2 + 31104c_7b_7^5b_8^3b_9^2c_{11}b_6b_{10} - 15552c_7b_7^5b_8^3b_9^2c_{12}b_6^2 +$

$46656c_7b_7^6b_8^2b_9^2c_{12}b_6b_{10} + 46656c_7b_7^7b_8b_9^3c_{13}b_{10} - 46656c_7b_7^6b_8^3b_9^2c_{13}b_{10} - 31104c_7b_7^6b_8^2b_9^3c_{13}b_6 + 31104c_7b_7^6b_8^2b_9^3c_{15}b_{10} +$

$31104c_7b_7^5b_8^2b_9^3c_{11}b_6^2 - 62208c_7b_7^6b_8b_9^3c_{11}b_6b_{10} - 7776c_7b_7^5b_8^4b_9c_{11}b_{10}^2 + 10368c_7b_7^4b_8^5b_9c_{12}b_6^2 - 31104c_7b_7^5b_8^4b_9c_{12}b_6b_{10} -$

$1728b_8^5b_6c_8b_7^3b_9^2b_5c_{10} + 6912b_8^2b_6c_8b_7^4b_9^4c_9b_5 - 13824b_8^4b_6c_8b_7^3b_9^3c_9b_5 + 62208b_8b_6c_8b_7^5b_9^3c_{10}b_{10}^2 - 71712b_8^2b_6c_8b_7^4b_9^3c_9b_{10}^2 +$

$12672b_8^4b_6^3c_8b_7^3b_9^2c_{11} - 38880b_8^2b_6c_8b_7^5b_9^2c_{11}b_{10}^2 + 17280b_8^3b_6^3c_8b_7^4b_9^2c_{12} - 54432b_8^2b_6^2c_8b_7^5b_9^2c_{12}b_{10} - 25920b_8^4b_6^2c_8b_7^4b_9^2c_{13} -$

$62208b_8b_6c_8b_7^6b_9^3c_{13}b_{10} + 36288b_8^2b_6^2c_8b_7^5b_9^3c_{13} - 128b_8^6c_9b_6^4b_9c_{11}b_7 +$

$4224b_8^5c_9b_6^3b_9c_{11}b_7^2b_{10} + 1920b_8^5c_9b_6^4b_9c_{12}b_7^2 + 8064b_8^4c_9b_6^3b_9c_{12}b_7^3b_{10} - 1536b_8^6c_9b_6^3b_9c_{13}b_7^2 - 10368b_8^5c_9b_6^2b_9c_{13}b_7^3b_{10} +$

$31104c_7b_7^5b_8^2b_9^4c_9b_5 - 6912c_7b_7^4b_8^4b_9^3c_9b_5 - 20736c_7b_7^4b_8^4b_9^2c_{10}b_6b_{10} + 23328c_7b_7^5b_8^3b_9^2c_{10}b_{10}^2 -$

$34992c_7b_7^6b_8b_9^3c_{10}b_{10}^2 - 1152c_7b_7^3b_7^7c_{11}b_6b_{10} + 1728c_7b_7^4b_8^6c_{11}b_{10}^2 - 1728c_7b_7^3b_8^7c_{12}b_6^2 + 5184c_7b_7^4b_8^6c_{12}b_6b_{10} + 1152c_7b_7^3b_8^8c_{13}b_6 +$

$15552c_7b_7^5b_8^5c_{13}b_{10}b_9 - 1728c_7b_7^4b_7^7c_{13}b_{10} + 576c_7b_7^3b_8^8c_{15}b_{10} - 10368c_7b_7^4b_8^6c_{13}b_6b_9 - 3456c_7b_7^4b_8^6c_{15}b_{10}b_9 + 3456c_7b_7^3b_8^6c_{11}b_6^2b_9 +$

$31104c_{14}b_7^6b_9^4c_9b_5b_8 - 41472c_{14}b_7^5b_9^3c_9b_5b_8^3 + 46656c_{14}b_7^5b_9^2c_{10}b_8^3b_6b_{10} - 69984c_{14}b_7^6b_9^3c_{10}b_8b_6b_{10} + 17496c_{14}b_7^7b_9^3c_{10}b_{10}^2 -$

$23328c_{14}b_7^6b_9^3c_9b_8b_{10}^2 + 15552c_{14}b_7^5b_9^2c_{11}b_8^3b_6^2 - 34992c_{14}b_7^7b_9^2c_{11}b_8b_{10}^2 + 23328c_{14}b_7^6b_9^2c_{12}b_8^2b_6^2 - 69984c_{14}b_7^7b_9^2c_{12}b_8b_6b_{10} -$

$576b_5^2b_7^3c_{10}^2b_9b_8^6 + 3888b_5b_7^4c_{10}^2b_9b_8^4b_{10}^2 + 5184b_5b_7^4c_{10}b_9b_8^4c_{11}b_6b_{10} - 7776b_5b_7^5c_{10}b_9b_8^3c_{11}b_{10}^2 + 5184b_5b_7^4c_{10}b_9b_8^4c_{12}b_6^2 -$
$15552b_5b_7^5c_{10}b_9b_8^3c_{12}b_6b_{10} - 5184b_5b_7^4c_{10}b_9b_8^5c_{13}b_6 + 7776b_5b_7^5c_{10}b_9b_8^4c_{13}b_{10} - 46656c_{14}b_7^6b_9^2c_{13}b_8^3b_6 - 5832c_{14}b_7^5b_8^4b_9c_{10}b_{10}^2 -$

$1440c_9b_5b_8^6c_{11}b_7^3b_{10}^2 - 15552c_{12}b_7^5b_{10}^2c_9b_5b_8^3b_9 - 46656c_{12}b_7^5b_{10}^2c_{11}b_8^3b_6^2 - 12672c_{10}^2b_6^3b_7^3b_9^2b_8^3b_{10} + 20736c_{10}b_6^3b_7^5b_9^3c_{11}b_{10} -$

$5184c_7b_7^5b_8^2b_9^3c_{10}b_6b_{10} + 31104c_7b_7^5b_8^4b_9^2c_{13}b_6 + 31104b_8^3b_6c_8b_7^5b_9^2c_{13}b_{10} - 34560b_8^2b_6^3c_8b_7^4b_9^3c_{11} + 72576b_8b_6^2c_8b_7^5b_9^3c_{11}b_{10} -$

$192b_8^7b_6c_8b_7^2b_9b_5c_{10} - 9072b_8^5b_6c_8b_7^3b_9c_{10}b_{10}^2 - 384b_8^6b_6^3c_8b_7^2b_9c_{11} - 8640b_8^5b_6^2c_8b_7^3b_9c_{11}b_{10} +$

$12960b_8^4b_6c_8b_7^4b_9c_{11}b_{10}^2 - 6336b_8^5b_6^3c_8b_7^3b_9c_{12} + 12960b_8^4b_6^2c_8b_7^4b_9c_{12}b_{10} + 5184b_8^6b_6^2c_8b_7^3b_9c_{13} + 23328c_{14}b_7^6b_9b_8^3c_{11}b_{10}^2 -$

$15552c_{14}b_7^5b_9b_8^4c_{12}b_6^2 + 46656c_{14}b_7^6b_9b_8^3c_{12}b_6b_{10} - 10368c_{15}b_7^5b_6b_9^3b_5c_{10}b_8^2 - 31104c_{15}b_7^5b_6b_9^4c_9b_5b_8 + 27648c_{15}b_7^4b_6b_9^3c_9b_5b_8^3 -$

$46656c_{15}b_7^5b_6b_9^2c_{10}b_8^2b_{10}^2 - 34992c_{15}b_7^6b_6b_9^3c_{10}b_{10}^2 + 64800c_{15}b_7^5b_6b_9^3c_9b_8b_{10}^2 + 6912c_{15}b_7^4b_6^3b_9^2c_{11}b_8^3 - 57024c_{15}b_7^5b_6^2b_9^2c_{11}b_8^2b_{10} +$

$77760c_{15}b_7^6b_6b_9^2c_{11}b_8b_{10}^2 - 15552c_{15}b_7^5b_6^3b_9^2c_{12}b_8^2 + 46656c_{15}b_7^6b_6^2b_9^2c_{12}b_8b_{10} + 10368c_{15}b_7^5b_6^2b_9^2c_{13}b_8^3 + 46656c_{15}b_7^7b_6b_9^3c_{13}b_{10} +$

$15552c_{15}b_7^6b_6b_9^2c_{13}b_{10}b_8^2 + 25920c_{15}^2b_7^5b_6b_9^2b_8^3b_{10} - 31104c_{15}b_7^6b_6^2b_9^3c_{13}b_8 - 46656c_{15}^2b_7^6b_6b_9^3b_8b_{10} + 20736c_{15}b_7^5b_6^3b_9^3c_{11}b_8 -$

$31104c_{15}b_7^6b_6^2b_9^3c_{11}b_{10} + 1152c_{15}b_7^3b_6b_8^6b_5c_{10}b_9 - 192c_{15}b_7^2b_6b_8^8b_5c_{10} + 384c_{15}b_7^2b_6^2b_8^7c_{10}b_{10} + 19440c_{15}b_7^4b_6b_8^4b_9c_{10}b_{10}^2 -$

$9504c_{15}b_7^3b_6b_8^5c_9b_9b_{10}^2 + 1728c_{15}b_7^3b_6^2b_8^6c_{11}b_{10} - 6912c_{15}b_7^4b_6b_8^5c_{11}b_{10}^2 + 1728c_{15}b_7^3b_6^3b_8^6c_{12} - 10368c_{15}b_7^4b_6^2b_8^5c_{12}b_{10} -$

$1152c_{15}b_7^3b_6^2b_8^7c_{13} - 25920c_{15}b_7^5b_6b_8^4c_{13}b_{10}b_9 + 5184c_{15}b_7^4b_6b_8^6c_{13}b_{10} - 576c_{15}^2b_7^3b_6b_8^7b_{10} + 3456c_{15}b_7^4b_6^2b_8^5c_{13}b_9 -$

$1728c_{15}^2b_7^4b_6b_8^5b_{10}b_9 - 4608c_{15}b_7^3b_6^3b_8^5c_{11}b_9 + 17280c_{15}b_7^4b_6^2b_8^4c_{11}b_{10}b_9 + 6912c_9^2b_{10}b_7^3b_6b_9^3b_8^3b_5 - 9216c_9^2b_{10}b_7^2b_6b_9^2b_8^5b_5 +$

$43632c_9b_{10}^3b_7^4b_6b_9^2b_8^2c_{10} - 18144c_9^2b_{10}^3b_7^3b_6b_9^2b_8^3 - 46656c_9b_{10}^2b_7^5b_6b_9^2b_8^2c_{13} + 192c_9b_{10}^2b_6^2b_8^7c_{10}b_7 + 128c_9b_{10}b_6^3b_8^7c_{11}b_7 -$

$1536c_9b_{10}b_6^3b_8^6c_{12}b_7^2 + 1152c_9b_{10}b_6^2b_8^7c_{13}b_7^2 + 3744b_{10}b_7^3c_8b_9b_8^6b_5c_{10} - 3456b_{10}b_7^4c_8b_9^3b_8^3c_9b_5 + 6912b_{10}b_7^3c_8b_9^2b_8^5c_9b_5 +$

$6480b_{10}^3b_7^4c_8b_9b_8^4c_{10} - 19440b_{10}^3b_7^5c_8b_9^2b_8^2c_{10} + 12528b_{10}^3b_7^4c_8b_9^2b_8^3c_9 + 1296b_{10}^3b_7^5c_8b_9b_8^3c_{11} + 11664b_{10}^2b_7^6c_8b_9^2b_8^2c_{13} -$

$11664b_{10}^2b_7^5c_8b_9b_8^4c_{13} + 15552b_{10}^2b_7^5c_8b_9^2b_8^3c_{15} - 384b_{10}b_7^2c_8b_8^8b_5c_{10} + 720b_{10}^2b_7^2c_8b_7^7c_{10}b_6 - 72b_{10}^3b_7^3c_8b_8^6c_{10} + 192b_{10}b_7^2c_8b_7^7c_{11}b_6^2 +$

$1152b_{10}^2b_7^3c_8b_8^6c_{11}b_6 - 2160b_{10}^3b_7^4c_8b_8^5c_{11} + 1728b_{10}b_7^3c_8b_8^6c_{12}b_6^2 - 6480b_{10}^2b_7^4c_8b_8^5c_{12}b_6 - 1152b_{10}b_7^3c_8b_7^7c_{13}b_6 + 2160b_{10}^2b_7^4c_8b_8^6c_{13} -$

$576b_{10}^2b_7^3c_8b_8^7c_{15} - 5184b_5^2b_7^5c_{10}^2b_9^3b_8^2 + 2592b_5^2b_7^4c_{10}^2b_9^2b_8^4 - 10368b_5^2b_7^5c_{10}b_9^4c_9b_8 + 13824b_5^2b_7^4c_{10}b_9^3c_9b_8^3 - 7776b_5b_7^4c_{10}^2b_9^2b_8^3b_6b_{10} -$

$5832b_5b_7^5c_{10}^2b_9^2b_8^2b_{10}^2 + 15552b_5b_7^5c_{10}^2b_9^3b_8b_6b_{10} + 7776b_5b_7^5c_{10}b_9^3c_9b_8b_{10}^2 - 5184b_5b_7^4c_{10}b_9^2c_{11}b_8^3b_6^2 + 11664b_5b_7^6c_{10}b_9^2c_{11}b_8b_{10}^2 -$

$7776b_5b_7^5c_{10}b_9^2c_{12}b_8^2b_6^2 + 23328b_5b_7^6c_{10}b_9^2c_{12}b_8b_6b_{10} +$

$15552b_5b_7^5c_{10}b_9^2c_{13}b_8^3b_6 + 23328b_5b_7^7c_{10}b_9^3c_{13}b_{10} - 23328b_5b_7^6c_{10}b_9^2c_{13}b_{10}b_8^2 + 15552b_5b_7^5c_{10}b_9^2b_8^3c_{15}b_{10} - 15552b_5b_7^6c_{10}b_9^3c_{13}b_8b_6 -$

$15552b_5b_7^6c_{10}b_9^3b_8c_{15}b_{10} + 10368b_5b_7^5c_{10}b_9^3c_{11}b_6^2b_8 - 15552b_5b_7^6c_{10}b_9^3c_{11}b_6b_{10} - 5184b_5b_7^4c_{10}b_9b_8^5c_{15}b_{10} + 288b_5b_7^2c_{10}^2b_8^7b_6b_{10} -$

$648b_5b_7^3c_{10}^2b_8^6b_{10}^2 + 192b_5b_7^2c_{10}b_8^7c_{11}b_6^2 - 1152b_5b_7^3c_{10}b_8^6c_{11}b_6b_{10} + 1296b_5b_7^4c_{10}b_8^5c_{11}b_{10}^2 - 864b_5b_7^3c_{10}b_8^6c_{12}b_6^2 +$

$2592b_5b_7^4c_{10}b_8^5c_{12}b_6b_{10} + 576b_5b_7^3c_{10}b_8^7c_{13}b_6 - 864b_5b_7^4c_{10}b_8^6c_{13}b_{10} + 576b_5b_7^3c_{10}b_8^7c_{15}b_{10} - 1728c_9^2b_5^2b_7^4b_8^2b_9^4 - 3456c_9^2b_5^2b_7^3b_8^4b_9^3 -$

$1728c_9^2b_5b_7^4b_8^2b_9^3b_{10}^2 + 10368c_9b_5b_7^3b_8^4b_9^2c_{11}b_6^2 - 10368c_9b_5b_7^4b_8^3b_9^2c_{11}b_6b_{10} - 7776c_9b_5b_7^5b_8^2b_9^2c_{11}b_{10}^2 + 10368c_9b_5b_7^4b_8^3b_9^2c_{12}b_6^2 -$

$31104c_9b_5b_7^5b_8^2b_9^2c_{12}b_6b_{10} - 20736c_9b_5b_7^4b_8^4b_9^2c_{13}b_6 - 31104c_9b_5b_7^6b_8b_9^3c_{13}b_{10} + 31104c_9b_5b_7^5b_8^3b_9^2c_{13}b_{10} - 10368c_9b_5b_7^4b_8^4b_9^2c_{15}b_{10} +$

$20736c_9b_5b_7^5b_8^2b_9^3c_{13}b_6 - 17280c_9b_5b_7^4b_8^2b_9^3c_{11}b_6^2 + 31104c_9b_5b_7^5b_8b_9^3c_{11}b_6b_{10} + 7776c_9b_5b_7^4b_8^4b_9c_{11}b_{10}^2 - 6912c_9b_5b_7^3b_8^5b_9c_{12}b_6^2 +$

$20736c_9b_5b_7^4b_8^4b_9c_{12}b_6b_{10} - 504c_{10}^2b_8^6b_7^2b_6^2b_{10}^2 + 720c_{10}^2b_8^5b_7^3b_6b_{10}^3 - 13392c_{10}^2b_8^3b_7^4b_6b_{10}^3b_9 - 384c_{10}b_8^6b_7^2b_6^3b_{10}c_{11} +$

$4320c_{10}b_8^4b_7^4b_6b_{10}^3c_{11} - 576c_{10}b_8^5b_7^3b_6^3b_{10}c_{12} + 7776c_{10}b_8^4b_7^4b_6^2b_{10}^2c_{12} + 288c_{10}b_8^6b_7^3b_6^2b_{10}c_{13} - 11664c_{10}b_8^3b_7^5b_6b_{10}^2c_{13}b_9 -$

$3888c_{10}b_8^5b_7^4b_6b_{10}^2c_{13} + 5508c_{10}^2b_8^2b_7^5b_{10}^4b_9 - 5184c_{10}b_8^3b_7^5b_{10}^4c_{11} - 9720c_{10}b_8^2b_7^6b_{10}^3c_{13}b_9 + 4536c_{10}b_8^4b_7^5b_{10}^3c_{13} - 1728c_{10}b_8^5b_7^4b_{10}^3c_{15} -$

$1296c_{10}b_8^3b_7^5b_{10}^3c_{15}b_9 + 50544c_{10}b_8^2b_7^5b_{10}^3c_{11}b_6b_9 - 18792b_9^2b_7^5c_{10}^2b_8b_6b_{10}^3 + 69984b_9^2b_7^6c_{10}b_8b_6b_{10}^2c_{13} - 1296b_9^2b_7^5c_{10}b_{10}^4c_9b_8 -$

$10692b_9b_7^6c_{10}b_{10}^4c_{11}b_8 - 11664b_9^2b_7^7c_{10}b_{10}^3c_{13} + 19440b_9^2b_7^6c_{10}b_{10}^3b_8c_{15} + 19440b_9^2b_7^6c_{10}b_{10}^3c_{11}b_6 + 540c_9^2b_9^2b_7^4b_8^2b_{10}^4 +$

$9072c_9b_9b_7^5b_8^2b_{10}^4c_{11} + 15552c_9b_9^2b_7^6b_8b_{10}^3c_{13} - 14256c_9b_9^2b_7^5b_8^2b_{10}^3c_{15} - 36288c_9b_9^2b_7^5b_8b_{10}^3c_{11}b_6 - 1152c_{11}^2b_8^5b_7^3b_6^3b_{10} +$

$6912c_{11}^2b_8^4b_7^4b_6^2b_{10}^2 - 1728c_{11}b_8^5b_7^3b_6^4c_{12} + 15552c_{11}b_8^4b_7^4b_6^3c_{12}b_{10} + 1152c_{11}b_8^6b_7^3b_6^3c_{13} + 5184c_{11}b_8^3b_7^5b_6^2c_{13}b_{10}b_9 -$

$8640c_{11}b_8^5b_7^4b_6^2c_{13}b_{10} + 3456c_{11}b_8^4b_7^4b_6^3c_{13}b_9 + 2880c_{11}^2b_8^4b_7^3b_6^4b_9 - 20736c_{11}^2b_8^3b_7^4b_6^3b_{10}b_9 -$

$12960c_{11}^2b_8^3b_7^5b_6b_{10}^3 - 38880c_{11}b_8^2b_7^6b_6b_{10}^2c_{13}b_9 + 18144c_{11}b_8^4b_7^5b_6b_{10}^2c_{13} - 5184c_{11}b_8^3b_7^5b_6b_{10}^2c_{15}b_9 + 44064c_{11}^2b_8^2b_7^5b_6^2b_{10}^2b_9 +$

$34992c_{11}b_8b_7^7b_{10}^3c_{13}b_9 - 11664c_{11}b_8^3b_7^6b_{10}^3c_{13} + 6480c_{11}b_8^4b_7^5b_{10}^3c_{15} - 15552c_{11}b_8^2b_7^6b_{10}^3c_{15}b_9 - 31104c_{11}^2b_8b_7^6b_{10}^3b_6b_9 -$

$23328c_{12}^2b_7^5b_8^3b_6^3b_{10} - 5184c_{12}b_7^4b_8^5b_6^3c_{13} - 69984c_{12}b_7^6b_8^2b_6^2c_{13}b_{10}b_9 + 23328c_{12}b_7^5b_8^4b_6^2c_{13}b_{10} + 15552c_{12}b_7^5b_8^3b_6^3c_{13}b_9 +$

$15552c_{12}b_7^5b_8^3b_6^2c_{15}b_{10}b_9 - 10368c_{12}b_7^4b_8^3b_6^4c_{11}b_9 + 46656c_{12}b_7^5b_8^2b_6^3c_{11}b_{10}b_9 - 46656c_{12}b_7^6b_8^2b_6b_{10}^2c_{15}b_9 + 31104c_{13}^2b_7^6b_8^3b_6b_{10}b_9 -$

$5184c_{13}^2b_7^5b_8^5b_6b_{10} - 10368c_{13}^2b_7^5b_8^4b_6^2b_9 - 23328c_{13}^2b_7^7b_{10}^2b_9b_8^2 + 31104c_{13}b_7^6b_{10}^2b_9b_8^3c_{15} - 46656c_{13}^2b_7^7b_{10}b_9^2b_8b_6 -$

$46656c_{13}b_7^7b_{10}^2b_9^2b_8c_{15} + 62208c_{13}b_7^6b_{10}b_9^2c_{11}b_6^2b_8 - 46656c_{13}b_7^7b_{10}^2b_9^2c_{11}b_6 - 5184c_{13}b_7^5b_{10}^2b_8^5c_{15} - 6480b_8^4b_7^5c_{15}^2b_{10}^2b_9 +$

$15552c_{13}^2b_7^6b_8^2b_6^2b_9^2 - 20736c_{13}b_7^5b_8^2b_6^3b_9^2c_{11} + 3888b_8^2b_7^6c_{15}^2b_{10}^2b_9^2 + 6912c_{11}^2b_6^4b_7^4b_8^2b_9^2 - 20736c_{11}^2b_6^3b_7^5b_8b_9^2b_{10} + 15552c_{11}^2b_6^2b_7^6b_{10}^2b_9^2 +$

$32832c_9^2b_6^4b_9^5b_7^3 - 139968d_7b_7^8b_9^5 + 576d_7b_7^3b_8^{10} + 324b_7^5c_9^2b_{10}^4b_9^3 + 5184b_7^5c_9^2b_5^2b_9^5 + 46656b_7^7c_7^2b_9^5 - 34992d_{17}b_7^8b_{10}^2b_9^3 +$

$34992d_{17}b_7^7b_{10}^2b_9^2b_8^2 - 11664d_{17}b_7^6b_{10}^2b_9b_8^4 + 1296d_{17}b_7^5b_{10}^2b_8^6 - 15552d_{17}b_7^6b_8^2b_6^2b_9^3 + 15552d_{17}b_7^5b_8^4b_6^2b_9^2 - 5184d_{17}b_7^4b_8^6b_6^2b_9 +$

$576d_{17}b_7^3b_8^8b_6^2 + 46656d_{17}b_7^7b_8b_6b_{10}b_9^3 - 46656d_{17}b_7^6b_8^3b_6b_{10}b_9^2 + 15552d_{17}b_7^5b_8^5b_6b_{10}b_9 - 1728d_{17}b_7^4b_8^7b_6b_{10} - 32c_8^2b_7b_8^8b_6^2b_9 +$

$32c_8^2b_7b_8^9b_6b_{10} + 18144c_8^2b_7^5b_8^2b_{10}^2b_9^3 - 15552d_9b_7^4b_8^4b_6^2b_9^3 + 1728d_9b_7^3b_8^6b_6^2b_9^2 - 46656d_9b_7^5b_8^3b_6b_{10}b_9^3 + 15552d_9b_7^4b_8^5b_6b_{10}b_9^2 -$

$1728d_9b_7^3b_8^7b_6b_{10}b_9 - 11664d_9b_7^6b_8^2b_{10}^2b_9^3 + 11664d_9b_7^5b_8^4b_{10}^2b_9^2 - 3888d_9b_7^4b_8^6b_{10}^2b_9 + 432d_9b_7^3b_8^8b_{10}^2 - 32b_6^4c_{10}^2b_7b_8^6b_9 +$

$32b_6^3c_{10}^2b_7b_8^7b_{10} + 64b_6^3c_8b_7c_{10}b_8^7b_9 - 64b_6^2c_8b_7c_{10}b_8^8b_{10} - 5760d_{11}b_6^3b_7^3b_8^3b_{10}b_9^3 - 12960d_{11}b_6^2b_7^4b_8^2b_{10}^2b_9^3 + 4320d_{11}b_6^2b_7^3b_8^4b_{10}^2b_9^2 +$

$2304d_{10}b_6^3b_7^3b_8^4b_9^3 + 20736d_{10}b_6^2b_7^4b_8^3b_{10}b_9^3 - 3456d_{10}b_6^2b_7^3b_8^5b_{10}b_9^2 + 15552d_{10}b_6b_7^5b_8^2b_{10}^2b_9^3 -$

$10368d_{10}b_6b_7^4b_8^4b_{10}^2b_9^2 + 1728d_{10}b_6b_7^3b_8^6b_{10}^2b_9 - 31104d_{19}b_7^5b_8^3b_6^2b_9^3 + 10368d_{19}b_7^4b_8^5b_6^2b_9^2 - 1152d_{19}b_7^3b_8^7b_6^2b_9 + 31104d_{19}b_7^6b_8^2b_6b_{10}b_9^3 -$

$3456d_{19}b_7^4b_8^6b_6b_{10}b_9 + 576d_{19}b_7^3b_8^8b_6b_{10} + 23328d_{19}b_7^7b_8b_{10}^2b_9^3 - 23328d_{19}b_7^6b_8^3b_{10}^2b_9^2 + 7776d_{19}b_7^5b_8^5b_{10}^2b_9 - 864d_{19}b_7^4b_8^7b_{10}^2 -$

$192c_{14}b_7^2c_{10}b_8^8b_6^2 + 10368d_{18}b_6^3b_7^5b_8^2b_9^3 - 6912d_{18}b_6^3b_7^4b_8^4b_9^2 + 1152d_{18}b_6^3b_7^3b_8^6b_9 - 31104d_{18}b_6^2b_7^6b_8b_{10}b_9^3 + 15552d_{18}b_6^2b_7^5b_8^3b_{10}b_9^2 -$

$576d_{18}b_6^2b_7^3b_8^7b_{10} + 23328d_{18}b_6b_7^7b_{10}^2b_9^3 - 7776d_{18}b_6b_7^5b_{10}^2b_9b_8^4 + 1728d_{18}b_6b_7^4b_{10}^2b_8^6 - 5184d_{13}b_6^4b_7^4b_8^2b_9^3 + 1728d_{13}b_6^4b_7^3b_8^4b_9^2 +$

$15552d_{13}b_6^3b_7^5b_8b_{10}b_9^3 - 1728d_{13}b_6^3b_7^3b_8^5b_{10}b_9 - 11664d_{13}b_6^2b_7^6b_{10}^2b_9^3 - 11664d_{13}b_6^2b_7^5b_{10}^2b_9^2b_8^2 + 3888d_{13}b_6^2b_7^4b_{10}^2b_9b_8^4 +$

$432d_{13}b_6^2b_7^3b_{10}^2b_8^6 - 15552c_9c_{13}b_7^6b_6b_{10}^2b_9^3 - 192c_{13}b_7^2c_8b_8^8b_6^2 + 11664c_{13}b_7^7c_8b_{10}^2b_9^3 + 28512c_9c_{11}b_7^5b_6^2b_{10}^2b_9^3 - 31104c_{15}b_7^6c_8b_8b_{10}^2b_9^3 -$

$2304d_{12}b_6^4b_7^3b_8^3b_9^3 - 6912d_{12}b_6^3b_7^4b_8^2b_{10}b_9^3 + 3456d_{12}b_6^3b_7^3b_8^4b_{10}b_9^2 + 15552d_{12}b_6^2b_7^5b_8b_{10}^2b_9^3 - 1728d_{12}b_6^2b_7^3b_8^5b_{10}^2b_9 +$

$10368d_{21}b_6^3b_7^4b_8^3b_9^3 - 1728d_{21}b_6^3b_7^3b_8^5b_9^2 - 7776d_{21}b_6^2b_7^4b_8^4b_{10}b_9^2 + 1728d_{21}b_6^2b_7^3b_8^6b_{10}b_9 - 23328d_{21}b_6b_7^6b_8b_{10}^2b_9^3 +$

$11664d_{21}b_6b_7^5b_8^3b_{10}^2b_9^2 - 432d_{21}b_6b_7^3b_8^7b_{10}^2 - 31104c_{11}b_7^6b_6c_8b_{10}^2b_9^3 - 93312c_9b_6^3c_8b_7^4b_9^5 + 59616b_6^2c_8^2b_7^5b_9^5 - 8640d_{11}b_7^4b_6^4b_9^5 +$

$2880d_{11}b_7^3b_6^4b_9^4b_8^2 - 62208c_9c_6b_7^6b_6b_9^5 + 82944c_9c_6b_7^5b_6b_9^4b_8^2 - 41472c_9c_6b_7^4b_6b_9^3b_8^4 + 9216c_9c_6b_7^3b_6b_9^2b_8^6 - 768c_9c_6b_7^2b_6b_9b_8^8 +$

$46656c_6b_7^7c_8b_9^5 - 77760c_6b_7^6c_8b_9^4b_8^2 + 51840c_6b_7^5c_8b_9^3b_8^4 - 17280c_6b_7^4c_8b_9^2b_8^6 + 2880c_6b_7^3c_8b_9b_8^8 - 192c_6b_7^2c_8b_8^{10} + 93312d_8b_7^7b_6b_9^5 -$

$124416d_8b_7^6b_6b_9^4b_8^2 + 62208d_8b_7^5b_6b_9^3b_8^4 - 13824d_8b_7^4b_6b_9^2b_8^6 + 1152d_8b_7^3b_6b_9b_8^8 + 114048c_9c_7b_7^5b_6^2b_9^5 + 20736d_{10}b_6^3b_7^5b_9^5 -$

$13824d_{10}b_6^3b_7^4b_9^4b_8^2 - 46656d_9b_6^2b_7^6b_9^5 + 46656d_9b_6^2b_7^5b_9^4b_8^2 - 124416c_7b_7^6b_6c_8b_9^5 + 233280d_7b_7^7b_9^4b_8^2 - 155520d_7b_7^6b_9^3b_8^4 +$

$51840d_7b_7^5b_9^2b_8^6 - 8640d_7b_7^4b_9b_8^8 + 69984d_{20}b_7^8b_{10}b_9^4 - 93312d_{20}b_7^7b_{10}b_9^3b_8^2 + 46656d_{20}b_7^6b_{10}b_9^2b_8^4 - 10368d_{20}b_7^5b_{10}b_9b_8^6 +$

$864d_{20}b_7^4b_{10}b_8^8 - 65664c_9^2b_6^3b_8b_{10}b_7^3b_9^4 - 46656d_{20}b_7^7b_8b_6b_9^4 + 62208d_{20}b_7^6b_8^3b_6b_9^3 - 31104d_{20}b_7^5b_8^5b_6b_9^2 + 6912d_{20}b_7^4b_8^7b_6b_9 -$

$576d_{20}b_7^3b_8^9b_6 + 46656c_9b_6^3c_{10}b_7^4b_{10}b_9^4 + 15552c_6b_7^6c_{10}b_8b_6b_9^4 - 20736c_6b_7^5c_{10}b_8^3b_6b_9^3 + 10368c_6b_7^4c_{10}b_8^5b_6b_9^2 - 2304c_6b_7^3c_{10}b_8^7b_6b_9 +$

$192c_6b_7^2c_{10}b_8^9b_6 - 23328c_6b_7^7c_{10}b_{10}b_9^4 + 31104c_6b_7^6c_{10}b_{10}b_9^3b_8^2 - 15552c_6b_7^5c_{10}b_{10}b_9^2b_8^4 + 3456c_6b_7^4c_{10}b_{10}b_9b_8^6 - 288c_6b_7^3c_{10}b_{10}b_8^8 +$

$31104c_9c_6b_7^6b_8b_{10}b_9^4 - 41472c_9c_6b_7^5b_8^3b_{10}b_9^3 + 20736c_9c_6b_7^4b_8^5b_{10}b_9^2 - 4608c_9c_6b_7^3b_8^7b_{10}b_9 + 384c_9c_6b_7^2b_8^9b_{10} - 46656d_8b_7^7b_8b_{10}b_9^4 +$

$62208d_8b_7^6b_8^3b_{10}b_9^3 - 31104d_8b_7^5b_8^5b_{10}b_9^2 + 6912d_8b_7^4b_8^7b_{10}b_9 - 576d_8b_7^3b_8^9b_{10} +$

$6912d_{12}b_6^4b_7^4b_8b_9^4 - 10368d_{12}b_6^3b_7^5b_{10}b_9^4 - 15552d_{21}b_6^3b_7^5b_8b_9^4 + 23328d_{21}b_6^2b_7^6b_{10}b_9^4 + 31104d_{19}b_6^2b_7^6b_8b_9^4 - 46656d_{19}b_6b_7^7b_{10}b_9^4 -$

$57024c_9c_{15}b_7^5b_6^2b_{10}b_9^4 - 59616b_6^2c_8b_7^5c_{10}b_{10}b_9^4 + 139968c_9b_6^2c_8b_7^4b_8b_{10}b_9^4 - 59616b_6c_8^2b_7^5b_8b_{10}b_9^4 + 62208c_7b_7^6b_6c_{10}b_{10}b_9^4 -$

$114048c_9c_7b_7^5b_6b_8b_{10}b_9^4 - 31104d_{10}b_6^2b_7^5b_8b_{10}b_9^4 + 46656d_9b_6b_7^6b_8b_{10}b_9^4 + 17280d_{11}b_6^3b_7^4b_8b_{10}b_9^4 + 62208c_7b_7^6c_8b_8b_{10}b_9^4 +$

$31104c_9c_{14}b_7^6b_6b_{10}b_9^4 + 192c_{14}b_7^2c_8b_8^9b_6 - 23328c_{14}b_7^7c_8b_{10}b_9^4 + 62208c_{15}b_7^6b_6c_8b_{10}b_9^4 + 17496d_{16}b_7^8b_{10}^3b_9^2 - 11664d_{16}b_7^7b_{10}^3b_9b_8^2 +$

$1944d_{16}b_7^6b_{10}^3b_8^4 - 5184d_{16}b_7^5b_8^3b_6^3b_9^2 + 3456d_{16}b_7^4b_8^5b_6^3b_9 - 576d_{16}b_7^3b_8^7b_6^3 + 23328d_{16}b_7^6b_8^2b_6^2b_{10}b_9^2 - 15552d_{16}b_7^5b_8^4b_6^2b_{10}b_9 +$

$2592d_{16}b_7^4b_8^6b_6^2b_{10}-34992d_{16}b_7^7b_8b_6b_{10}^2b_9^2+23328d_{16}b_7^6b_8^3b_6b_{10}^2b_9-3888d_{16}b_7^5b_8^5b_6b_{10}^2+192c_{13}b_7^2c_{10}b_8^7b_6^3-11664d_{18}b_7^7b_8b_{10}^3b_9^2+$
$7776d_{18}b_7^6b_8^3b_{10}^3b_9-1296d_{18}b_7^5b_8^5b_{10}^3+5832b_8^2b_7^6d_{21}b_{10}^3b_9^2-3888b_8^4b_7^5d_{21}b_{10}^3b_9+648b_8^6b_7^4d_{21}b_{10}^3-2592b_8^3b_7^5d_{10}b_{10}^3b_9^2+$
$1728b_8^5b_7^4d_{10}b_{10}^3b_9-288b_8^7b_7^3d_{10}b_{10}^3+3456d_{14}b_6^4b_7^4b_8^3b_9^2-1152d_{14}b_6^4b_7^3b_8^5b_9-15552d_{14}b_6^3b_7^5b_8^2b_{10}b_9^2+3456d_{14}b_6^3b_7^4b_8^4b_{10}b_9+$
$576d_{14}b_6^3b_7^3b_8^6b_{10}+23328d_{14}b_6^2b_7^6b_8b_{10}^2b_9^2-2592d_{14}b_6^2b_7^4b_8^5b_{10}^2-11664d_{14}b_6b_7^7b_{10}^3b_9^2-7776d_{14}b_6b_7^6b_{10}^3b_9b_8^2+3888d_{14}b_6b_7^5b_{10}^3b_8^4+$
$7776c_9c_{12}b_7^6b_6b_{10}^3b_9^2+192c_{12}b_7^2c_8b_8^7b_6^3-5832c_{12}b_7^7c_8b_{10}^3b_9^2+15552c_{11}b_7^6c_8b_8b_{10}^3b_9^2+11664d_{13}b_6b_7^6b_8b_{10}^3b_9^2-1296d_{13}b_6b_7^4b_8^5b_{10}^3-$
$7776b_7^5d_{12}b_6b_8^2b_{10}^3b_9^2+1728b_7^4d_{12}b_6b_8^4b_{10}^3b_9+288b_7^3d_{12}b_6b_8^6b_{10}^3+4320b_7^4d_{11}b_8^3b_6b_{10}^3b_9^2-1440b_7^3d_{11}b_8^5b_6b_{10}^3b_9-8748d_{15}b_7^8b_{10}^4b_9+$
$2916d_{15}b_7^7b_{10}^4b_8^2-1728d_{15}b_7^4b_8^4b_6^4b_9+576d_{15}b_7^3b_8^6b_6^4+10368d_{15}b_7^5b_8^3b_6^3b_{10}b_9-3456d_{15}b_7^4b_8^5b_6^3b_{10}-23328d_{15}b_7^6b_8^2b_6^2b_{10}^2b_9+$
$7776d_{15}b_7^5b_8^4b_6^2b_{10}^2+23328d_{15}b_7^7b_8b_6b_{10}^3b_9-7776d_{15}b_7^6b_8^3b_6b_{10}^3-192c_{12}b_7^2c_{10}b_8^6b_6^4+5832d_{14}b_8b_7^7b_{10}^4b_9-1944d_{14}b_8^3b_7^6b_{10}^4+$
$1296d_{12}b_8^3b_7^5b_{10}^4b_9-432d_{12}b_8^5b_7^4b_{10}^4+180d_{11}b_8^6b_7^3b_{10}^4-540d_{11}b_8^4b_7^4b_{10}^4b_9-2916d_{13}b_8^2b_7^6b_{10}^4b_9+972d_{13}b_8^4b_7^5b_{10}^4+2916b_7^7c_{11}^2b_{10}^4b_9+$
$7776b_7^6c_8^2b_9^5b_5-12960b_7^5c_8^2b_9^4b_5b_8^2+8640b_7^4c_8^2b_9^3b_5b_8^4-2880b_7^3c_8^2b_9^2b_5b_8^6-1944b_7^6c_8^2b_9^4b_{10}^2+480b_7^2c_8^2b_8^8b_5b_9-32b_7c_8^2b_8^{10}b_5-$
$10368b_7^4c_9^2b_6^2b_9^5b_5+2592b_7^4c_9^2b_6^2b_9^4b_{10}^2-31104b_7^6c_9c_7b_9^5b_5+7776b_7^6c_9c_7b_9^4b_{10}^2+23328b_7^7c_7b_9^3c_{11}b_{10}^2-2592b_7^5c_9^2b_5b_9^4b_{10}^2-$
$7776b_7^6c_9b_5b_9^3c_{11}b_{10}^2+10368b_7^5c_9b_5b_9^5b_6c_8-32b_7b_5b_8^8c_{10}^2b_6^2+1944b_7^6c_9b_{10}^4b_9^2c_{11}-2592b_7^5c_9b_{10}^2b_9^4b_6c_8-46656b_7^7c_7b_9^4c_{15}b_{10}-$
$5184b_7^5c_9b_5b_9^4b_6c_{10}b_{10}+10368b_7^4c_9^2b_5b_9^4b_6b_8b_{10}-7776b_7^6b_5b_9^4c_8c_{10}b_{10}-5184b_7^5c_9b_5b_9^4c_8b_8b_{10}+15552b_7^6c_9b_5b_9^4c_{15}b_{10}+$
$64b_7b_5b_8^9c_8c_{10}b_6+1296b_7^5c_9b_{10}^3b_9^3b_6c_{10}-2592b_7^4c_9^2b_{10}^3b_9^3b_6b_8+1944b_7^6b_{10}^3b_9^3c_8c_{10}+1296b_7^5c_9b_{10}^3b_9^3c_8b_8-3888b_7^6c_9b_{10}^3b_9^3c_{15}-$
$11664b_7^7c_{11}b_{10}^3c_{15}b_9^2+5184b_7^5c_{15}^2b_8^2b_6^2b_9^3+1728b_7^3c_{15}^2b_8^6b_6^2b_9+11664b_7^7c_{15}^2b_{10}^2b_9^3;$

$\varphi_{\mathbf{3}}(\mathbf{a_i},\mathbf{b_i},\mathbf{c_i})=-3a_5c_{10}^2a_6^2+6c_{10}a_6c_8a_5^2-3c_8^2a_5^3+8c_{11}a_6^2a_5c_9+8c_7a_5^3c_9-8c_{15}a_6a_5^2c_9+8b_8c_9b_{10}a_6a_5-8b_8c_9b_9a_6^2-8b_8c_9b_5a_5^2;$

$\varphi_{\mathbf{4}}(\mathbf{a_i},\mathbf{b_i},\mathbf{c_i},\mathbf{d_i})=64b_8c_9^3c_6a_5^4+128b_8c_9^3b_9^2a_6^3+8b_8c_9c_8^3a_5^4+48a_5^5c_9^2d_9c_8+32a_5^5c_7c_9^2d_{10}-36a_5^5c_8^2d_{10}c_9-25a_5^2c_{10}^3a_6^3d_{11}+$
$64a_5^4c_9^3c_{15}b_5+25a_5^5c_8^3d_{11}-64d_8a_5^5c_9^3+75a_5^3c_{10}^2a_6^2d_{11}c_8-36a_5^3c_{10}^2a_6^2d_{10}c_9+36a_5^2c_{10}^2a_6^3d_{12}c_9+64a_5^2c_9^3c_{15}b_9a_6^2+128a_5^2c_9^3c_{11}a_6^2b_{10}-$
$128a_5c_9^3c_{11}a_6^3b_9-128a_5^3c_9^3c_{11}a_6b_5-64a_5^3c_9^3c_{15}b_{10}a_6-75a_5^4c_{10}a_6c_8^2d_{11}-32a_5^2c_{11}a_6^3c_9^2d_{12}+64d_{19}a_6a_5^4c_9^3+64d_{14}a_6^3a_5^2c_9^3-$
$64d_{18}a_6^2a_5^3c_9^3+40a_5^2c_9b_8d_{11}c_{10}a_6^2b_{10}-40a_5c_9b_8d_{11}c_{10}a_6^3b_9-40a_5^3c_9b_8d_{11}c_{10}a_6b_5-40a_5^3c_9b_8d_{11}c_8b_{10}a_6+40a_5^2c_9b_8d_{11}c_8b_9a_6^2+$
$40a_5^4c_9b_8d_{11}c_8b_5+32a_5^3c_9^2b_8d_{10}b_{10}a_6-32a_5^2c_9^2b_8d_{10}b_9a_6^2-32a_5^4c_9^2b_8d_{10}b_5-32a_5^2c_9^2b_8d_{12}a_6^2b_{10}+32a_5c_9^2b_8d_{12}a_6^3b_9+$
$32a_5^3c_9^2b_8d_{12}a_6b_5-192b_8c_9^3b_{10}a_5b_9a_6^2+128b_8c_9^3b_9a_6b_5a_5^2+32b_8^2c_9^2c_{10}a_6^2b_{10}a_5-32b_8^2c_9^2c_{10}a_6^3b_9-64b_8c_9^3c_{12}a_6^3a_5+$
$64b_8c_9^3c_{13}a_6^2a_5^2-64b_8c_9^3c_{14}a_6a_5^3-64b_8c_9^3b_{10}a_5^3b_5+64b_8c_9^3b_{10}^2a_5^2a_6-8b_8c_9a_5c_{10}^3a_6^3-32b_8c_9^2a_5^2c_{15}a_6^2c_{10}+32b_8c_9^2a_5^3c_{15}a_6c_8+$
$32b_8c_9^2a_5^3c_7c_{10}a_6+32b_8c_9^2a_5c_{11}a_6^3c_{10}-32b_8c_9^2a_5^2c_{11}a_6^2c_8-32b_8^2c_9^2c_{10}a_6b_5a_5^2-32b_8^2c_9^2c_8a_5^2b_{10}a_6+32b_8^2c_9^2c_8a_5b_9a_6^2-$
$48a_5^2c_9^2c_{10}b_9a_6^2c_8+48a_5^3c_9^2c_{10}^2b_5a_6-48a_5^4c_9^2c_{10}b_5c_8-32b_8c_9^2a_5^4c_7c_8-24b_8c_9c_{10}a_6c_8^2a_5^3-48a_5^4c_9^2d_9c_{10}a_6-48a_5^2c_9^2d_{13}a_6^3c_{10}+$
$48a_5^3c_9^2d_{13}a_6^2c_8+48a_5^3c_9^2d_{21}a_6^2c_{10}-48a_5^4c_9^2d_{21}a_6c_8-48a_5^2c_9^2c_{10}^2b_{10}a_6^2+48a_5^3c_9^2c_{10}b_{10}a_6c_8+48a_5c_9^2c_{10}^2b_9a_6^3+24b_8c_9c_{10}^2a_6^2c_8a_5^2+$
$32b_8^2c_9^2c_8a_5^3b_5+72a_5^4c_{10}a_6c_8d_{10}c_9-72a_5^3c_{10}a_6^2c_8d_{12}c_9+36a_5^4c_8^2d_{12}a_6c_9-40a_5^3c_{15}a_6^2c_9d_{11}c_{10}+40a_5^4c_{15}a_6c_9d_{11}c_8-$
$32a_5^4c_{15}a_6c_9^2d_{10}+32a_5^3c_{15}a_6^2c_9^2d_{12}+40a_5^4c_7c_9d_{11}c_{10}a_6-40a_5^5c_7c_9d_{11}c_8-32a_5^4c_7c_9^2d_{12}a_6+40a_5^2c_{11}a_6^3c_9d_{11}c_{10}-$
$40a_5^3c_{11}a_6^2c_9d_{11}c_8+32a_5^3c_{11}a_6^2c_9^2d_{10};$

$\varphi_{\mathbf{5}}(\mathbf{a_i},\mathbf{b_i},\mathbf{c_i},\mathbf{d_i},\mathbf{e_i})=-768d_9a_5^5c_9^4d_{13}a_6^2+1152d_9a_5^7c_9^3d_{10}c_8+$
$1152d_9a_5^5c_9^3d_{12}a_6^2c_{10}-1152d_9a_5^6c_9^3d_{12}a_6c_8+1200d_{11}a_5^6c_8^2d_{21}a_6c_9^2-1200d_{11}a_5^5c_8^2c_{10}c_9^2b_{10}a_6+1200d_{11}a_5^4c_8^2c_{10}c_9^2b_9a_6^2+$
$768d_9a_5^6c_9^4d_{21}a_6-768d_9a_5^5c_9^4c_{10}b_{10}a_6+768d_9a_5^4c_9^4c_{10}b_9a_6^2+768d_9a_5^6c_9^4c_{10}b_5+1400d_{11}a_5^7c_8^3c_9d_{10}-1400d_{11}a_5^6c_8^3c_9d_{12}a_6-$

$1152d_9a_5^6c_9^3d_{10}c_{10}a_6 - 1152d_{21}a_6^3a_5^4c_9^3d_{12}c_{10} + 1152d_{13}a_6^4a_5^3c_9^3d_{12}c_{10} + 1536c_{10}^2c_9^4b_{10}a_6a_5^4b_5 - 1152c_{10}^2c_9^3b_{10}a_6^2a_5^4d_{10} +$

$1536d_{21}a_6^2a_5^4c_9^4c_{10}b_{10} - 1536d_{21}a_6^3a_5^3c_9^4c_{10}b_9 - 1536d_{21}a_6a_5^5c_9^4c_{10}b_5 + 1152d_{21}a_6^2a_5^5c_9^3d_{10}c_{10} + 1728c_{10}^2c_9^3b_{10}a_6^3a_5^3d_{12} -$

$2304c_{10}c_9^3b_{10}a_6^2a_5^4d_{12}c_8 + 1152c_{10}c_9^3b_{10}a_6a_5^5d_{10}c_8 + 1152d_{21}a_6^2a_5^5c_9^3d_{12}c_8 - 1152c_{10}^2c_9^4b_{10}^2a_6^2a_5^3 - 1152c_{10}c_9^3b_9a_6^2a_5^4d_{10}c_8 +$

$3072c_{10}^2c_9^4b_{10}a_6^3a_5^2b_9 - 1152d_{21}a_6a_5^6c_9^3d_{10}c_8 - 1152d_{13}a_6^3a_5^4c_9^3d_{12}c_8 - 2304d_{13}a_6^3a_5^3c_9^4c_{10}b_{10} + 2304d_{13}a_6^4a_5^2c_9^4c_{10}b_9 +$

$2304d_{13}a_6^2a_5^4c_9^4c_{10}b_5 - 1152d_{13}a_6^3a_5^4c_9^3d_{10}c_{10} - 384d_{13}^2a_6^4a_5^3c_9^4 + 2304c_{10}c_9^3b_5a_5^5d_{12}a_6c_8 - 1728c_{10}^2c_9^3b_9a_6^4a_5^2d_{12} +$

$2304c_{10}c_9^3b_9a_6^3a_5^3d_{12}c_8 + 1152c_{10}^2c_9^3b_9a_6^3a_5^3d_{10} - 2304c_{10}^2c_9^4b_9a_6^2b_5a_5^3 + 1440a_5^4c_9^2d_{10}c_{10}^2a_6^3d_{12} - 2880a_5^5c_9^2d_{10}c_{10}a_6^2d_{12}c_8 -$

$625d_{11}^2a_5^3c_{10}^4a_6^4 - 720a_5^3c_9^2d_{12}^2a_6^4c_{10}^2 + 1440a_5^6c_9^2d_{10}c_8^2d_{12}a_6 - 720a_5^5c_9^2d_{10}^2c_{10}^2a_6^2 - 720a_5^7c_9^2d_{10}^2c_8^2 + 1440a_5^4c_9^2d_{12}^2a_6^3c_{10}c_8 +$

$1440a_5^6c_9^2d_{10}^2c_{10}a_6c_8 - 1152c_{10}c_9^3b_5a_5^6d_{10}c_8 - 1728c_{10}^2c_9^3b_5a_5^4d_{12}a_6^2 + 1152c_{10}^2c_9^3b_5a_5^5d_{10}a_6 - 720a_5^5c_9^2d_{12}^2a_6^2c_8^2 - 384d_{21}^2a_6^2a_5^5c_9^4 -$

$384c_{10}^2c_9^4b_5^2a_5^5 - 384d_9^2a_5^7c_9^4 + 1024c_9^5c_{11}a_5^5b_5^2 + 1024e_{22}a_6^2c_9^5a_5^5 - 1024e_{28}a_6c_9^5a_5^6 - 1024e_{21}a_6^3c_9^5a_5^4 + 1024e_9a_6^4c_9^5a_5^3 + 1024e_{15}c_9^5a_5^7 -$

$625d_{11}^2a_5^7c_8^4 - 4096c_{11}a_6a_5^4c_9^5b_{10}b_5 + 3072c_{11}a_6^2a_5^3c_9^5b_{10}^2 + 2048c_{11}a_6a_5^5c_9^5c_6 + 1536c_{15}a_5^4c_9^4b_8c_{10}a_6b_5 - 1024c_{15}a_5^4c_9^5c_{13}a_6^2 -$

$1152c_{11}a_6^2a_5^4c_9^3c_{10}c_8^2 - 2048c_{15}a_5^4c_9^5b_9a_6b_5 - 1024c_{11}^2a_6^3a_5^3c_9^4c_8 + 1536c_{11}a_6^2a_5^4c_9^4c_{15}c_8 - 1536c_{11}a_6^3a_5^3c_9^4c_{15}c_{10} - 640c_{11}a_6^4a_5^2c_9^3c_{10}^3 +$

$1024b_8b_9a_6^4c_9^3a_5c_{10}^3 - 2048b_8b_9a_6c_9^5c_6a_5^4 - 2304b_8b_9a_6^3c_9^3c_{10}^2c_8a_5^2 + 768c_{15}a_5^5c_9^3c_{10}a_6c_8^2 -$

$2048c_{15}a_5^2c_9^5b_9^2a_6^3 - 1152c_{15}a_5^4c_9^3c_{10}^2a_6^2c_8 + 512c_{15}a_5^3c_9^3c_{10}^3a_6^3 + 512c_{15}^2a_5^4c_9^4a_6^2c_{10} + 3072c_{15}a_5^3c_9^5b_{10}b_9a_6^2 - 1024c_{15}a_5^5c_9^4b_8c_8b_5 +$

$512a_5^6c_9^4c_{15}d_{10}b_5 + 1024a_5^4c_9^4c_{11}a_6^2d_{10}b_{10} - 1024c_{15}a_5^6c_9^5c_6 + 1152d_{13}a_6^2a_5^5c_9^3d_{10}c_8 + 768d_{13}a_6^3a_5^4c_9^4d_{21} + 2500d_{11}^2a_5^6c_{10}a_6c_8^3 -$

$2400d_{11}a_5^5c_{10}a_6^2c_8d_{21}c_9^2 - 2400d_{11}a_5^5c_{10}^2a_6c_8c_9^2b_5 - 1200d_{11}a_5^5c_8^2d_{13}a_6^2c_9^2 - 1200d_{11}a_5^3c_{10}^3a_6^3c_9^2b_{10} + 1200d_{11}a_5^2c_{10}^3a_6^4c_9^2b_9 +$

$1200d_{11}a_5^4c_{10}^3a_6^2c_9^2b_5 + 4200d_{11}a_5^5c_{10}^2a_6^2c_9d_{10}c_8 - 3750d_{11}^2a_5^5c_{10}^2a_6^2c_8^2 - 1200d_{11}a_5^5c_{10}^2a_6^2d_9c_9^2 - 1200d_{11}a_5^3c_{10}^2a_6^4d_{13}c_9^2 -$

$1400d_{11}a_5^4c_{10}^3a_6^3c_9d_{10} + 1200d_{11}a_5^4c_{10}^2a_6^3d_{21}c_9^2 + 1400d_{11}a_5^3c_{10}^3a_6^4c_9d_{12} + 4200d_{11}a_5^5c_{10}a_6^2c_8^2c_9d_{12} - 1200d_{11}a_5^7c_8^2d_9c_9^2 -$

$1920a_5c_{10}^2c_9^4b_9^2a_6^4 + 1200d_{11}a_5^6c_8^2c_{10}c_9^2b_5 - 4200d_{11}a_5^6c_{10}a_6c_8^2c_9d_{10} +$

$2400d_{11}a_5^4c_{10}^2a_6^2c_8c_9^2b_{10} - 2400d_{11}a_5^3c_{10}^2a_6^3c_8c_9^2b_9 + 2400d_{11}a_5^6c_{10}a_6c_8d_9c_9^2 + 2400d_{11}a_5^4c_{10}a_6^3c_8d_{13}c_9^2 - 4200d_{11}a_5^4c_{10}^2a_6^3c_9d_{12}c_8 +$

$2500d_{11}^2a_5^4c_{10}^3a_6^3c_8 - 2048a_5^4c_9^5d_{18}a_6^2b_{10} - 768b_8^2d_{10}a_5^4c_9^3c_{10}a_6b_5 - 1536b_8d_{10}a_5^3c_9^4b_{10}b_9a_6^2 - 512c_9^4b_8d_{12}a_5^5b_5^2 - 1024b_8c_9^5d_{15}a_6^4a_5^2 -$

$1024b_8c_9^5d_{17}a_6^2a_5^4 + 1024b_8c_9^5d_{20}a_6a_5^5 + 512c_9^4b_8^2c_{10}b_5^2a_5^4 - 512c_{15}^2a_5^5c_9^4a_6c_8 - 512c_{15}a_5^5c_9^4c_7c_{10}a_6 + 1536c_{11}a_6^3a_5^3c_9^3c_{10}^2c_8 +$

$512c_{15}a_5^6c_9^4c_7c_8 + 1024c_{15}a_5^5c_9^5b_{10}b_5 - 1024c_{15}a_5^4c_9^5b_{10}^2a_6 + 1024c_{15}a_5^5c_9^5c_{14}a_6 + 880c_9b_8a_5^3d_{11}c_{10}^3a_6^3c_8 - 220c_9b_8a_5^2d_{11}c_{10}^4a_6^4 +$

$880c_9b_8a_5^5d_{11}c_{10}a_6c_8^3 - 1320c_9b_8a_5^4d_{11}c_{10}^2a_6^2c_8^2 + 640b_8a_5^3d_{11}c_{10}a_6^3c_{13}c_9^3 - 640b_8a_5^2d_{11}c_{10}a_6^4c_{12}c_9^3 + 2560b_8a_5^3d_{11}c_{10}a_6^2b_9c_9^3b_5 -$

$1280b_8^2a_5^3d_{11}c_{10}a_6^2c_9^2c_8b_{10} - 640b_8^2a_5^3d_{11}c_{10}^2a_6^2c_9^2b_5 + 640b_8a_5^4d_{11}c_{10}^2a_6^2c_9^2c_7 + 640b_8^2a_5^2d_{11}c_{10}^2a_6^3c_9^2b_{10} - 1280b_8a_5^3d_{11}c_{10}a_6^3c_9^2c_{11}c_8 -$

$3200b_8a_5^2d_{11}c_{10}a_6^3b_{10}c_9^3b_9 + 1280b_8^2a_5^4d_{11}c_{10}a_6c_9^2c_8b_5 -$

$1280b_8a_5^5d_{11}c_{10}a_6c_9^2c_7c_8 - 640b_8^2a_5d_{11}c_{10}^2a_6^4c_9^2b_9 - 640b_8a_5^4d_{11}c_{10}a_6^2c_{14}c_9^3 + 1280b_8^2a_5^2d_{11}c_{10}a_6^3c_9^2c_8b_9 + 2560b_8^2c_9^4c_{10}a_6^4b_9^2 -$

$1920b_8a_5^4d_{11}c_{10}a_6b_{10}c_9^3b_5 + 1280b_8a_5^3d_{11}c_{10}a_6^2b_{10}^2c_9^3 - 220c_9b_8d_{11}c_8^4a_5^6 + 1280b_8a_5^4d_{11}c_{10}a_6^2c_9^2c_{15}c_8 + 640b_8d_{11}c_8a_5^5c_{14}a_6c_9^3 -$

$640b_8^2d_{11}c_8^2a_5^3c_9^2b_9a_6^2 + 1920b_8d_{11}c_8a_5^3b_{10}c_9^3b_9a_6^2 + 640b_8d_{11}c_8^2a_5^4c_9^2c_{11}a_6^2 + 640b_8a_5^2d_{11}c_{10}^2a_6^4c_9^2c_{11} - 640b_8^2d_{11}c_8^2a_5^5c_9^2b_5 -$

$640b_8d_{11}c_8a_5^4c_{13}a_6^2c_9^3 + 640b_8d_{11}c_8a_5^3c_{12}a_6^3c_9^3 + 1920b_8a_5d_{11}c_{10}a_6^4b_9^2c_9^3 + 640b_8^2d_{11}c_8^2a_5^4c_9^2b_{10}a_6 + 640b_8d_{11}c_8a_5^5b_{10}c_9^3b_5 -$

$640b_8d_{11}c_8a_5^4b_{10}^2c_9^3a_6 - 1280b_8d_{11}c_8a_5^4b_9a_6c_9^3b_5 + 640b_8a_5^5d_{11}c_{10}a_6c_6c_9^3 - 768b_8d_{10}a_5^6c_9^3c_7c_8 - 1280b_8d_{11}c_8a_5^2b_9^2a_6^3c_9^3 -$

$640b_8d_{11}c_8a_5^6c_6c_9^3 + 5120c_{11}a_6^4a_5c_9^5b_9^2 + 1024c_{15}a_5^3c_9^5c_{12}a_6^3 - 768b_8^2d_{10}a_5^4c_9^3c_8b_{10}a_6 + 768b_8^2d_{10}a_5^5c_9^3c_8b_5 - 512b_8d_{10}a_5^5c_9^4b_{10}b_5 +$

$512b_8d_{10}a_5^4c_9^4b_{10}^2a_6 - 640b_8d_{11}c_8^2a_5^5c_9^2c_{15}a_6 + 640b_8d_{11}c_8^2a_5^6c_9^2c_7 + 320b_8d_{10}a_5^6c_9^2c_8^3 + 768b_8d_{10}a_5^3c_9^3c_{11}a_6^3c_{10} +$

$512b_8d_{10}a_5^4c_9^4c_{13}a_6^2 - 256b_8^3c_9^3c_8^2a_5^4b_5 - 320b_8d_{10}a_5^3c_9^2c_{10}^3a_6^3 - 768b_8^2d_{10}a_5^2c_9^3c_{10}a_6^3b_9 + 768b_8^2d_{10}a_5^3c_9^3c_{10}a_6^2b_{10} + 512b_8d_{10}a_5^6c_9^4c_6 -$

$512b_8a_5^3d_{12}a_6^3c_9^4c_{13} + 512b_8a_5^2d_{12}a_6^4c_9^4c_{12} + 768b_8d_{10}a_5^5c_9^3c_7c_{10}a_6 + 768b_8d_{10}a_5^5c_9^3c_{15}a_6c_8 +$

$512b_8a_5^4d_{12}a_6^2c_9^4c_{14} - 768b_8d_{10}a_5^4c_9^3c_{15}a_6^2c_{10} - 768b_8d_{10}a_5^4c_9^3c_{11}a_6^2c_8 - 512b_8d_{10}a_5^3c_9^4c_{12}a_6^3 + 768b_8^2d_{10}a_5^3c_9^3c_8b_9a_6^2 -$

$512b_8d_{10}a_5^5c_9^4c_{14}a_6 + 1024b_8d_{10}a_5^4c_9^4b_9a_6b_5 - 768b_8^2a_5^4d_{12}a_6c_9^3c_8b_5 + 960b_8d_{10}a_5^4c_9^2c_{10}^2a_6^2c_8 + 1024b_8d_{10}a_5^2c_9^4b_9^2a_6^3 +$

$1536b_8a_5^4d_{12}a_6c_9^4b_{10}b_5 - 960b_8d_{10}a_5^5c_9^2c_{10}a_6c_8^2 - 320b_8a_5^5d_{12}a_6c_9^2c_8^3 - 1024b_8a_5^3d_{12}a_6^2c_9^4b_{10}^2 + 768b_8a_5^3d_{12}a_6^3c_9^3c_{11}c_8 -$

$2048b_8a_5^3d_{12}a_6^2c_9^4b_9b_5 + 768b_8^2a_5^3d_{12}a_6^2c_9^3c_8b_{10} + 768b_8a_5^3d_{12}a_6^3c_9^3c_{15}c_{10} + 768b_8^2a_5d_{12}a_6^4c_9^3c_{10}b_9 - 768b_8a_5^4d_{12}a_6^2c_9^3c_7c_{10} -$

$768b_8a_5^2d_{12}a_6^4c_9^3c_{11}c_{10} + 768b_8a_5^5d_{12}a_6c_9^3c_7c_8 - 768b_8a_5^4d_{12}a_6^2c_9^3c_{15}c_8 - 768b_8^2a_5^2d_{12}a_6^3c_9^3c_{10}b_{10} + 320b_8a_5^2d_{12}a_6^4c_9^2c_{10}^3 -$

$768b_8^2a_5^2d_{12}a_6^3c_9^3c_8b_9 + 768b_8^2a_5^3d_{12}a_6^2c_9^3c_{10}b_5 + 2560b_8a_5^2d_{12}a_6^3c_9^4b_{10}b_9 + 256b_8^2c_9^3c_{10}^2a_6^4a_5c_{11} + 512b_8^2c_9^3c_{10}a_6^2a_5^3c_{15}c_8 +$

$256b_8^2c_9^2c_{10}^3a_6^3c_8a_5^2 + 512b_8^2c_9^4c_8a_5^4c_{14}a_6 - 512b_8^2c_9^4c_8a_5^3c_{13}a_6^2 - 4096b_8^2c_9^4c_{10}a_6^3b_{10}a_5b_9 + 512b_8^2c_9^4c_8a_5^2c_{12}a_6^3 - 512b_8a_5^5d_{12}a_6c_9^4c_6 -$

$1536b_8a_5d_{12}a_6^4c_9^4b_9^2 + 256b_8^2c_9^2c_{10}a_6c_8^3a_5^4 - 2048b_8^2c_9^4c_{10}a_6b_{10}a_5^3b_5 + 960b_8a_5^4d_{12}a_6^2c_9^2c_{10}c_8^2 - 960b_8a_5^3d_{12}a_6^3c_9^2c_{10}^2c_8 -$

$256b_8^3c_9^3c_{10}^2a_6^4b_9 - 512b_8^2c_9^3c_{10}a_6^3a_5^2c_{11}c_8 + 512b_8^3c_9^3c_{10}a_6^3c_8a_5b_9 +$

$3072b_8^2c_9^4c_{10}a_6^2b_9b_5a_5^2 - 64b_8^2c_9^2c_{10}^4a_6^4a_5 + 256b_8^3c_9^3c_{10}^2a_6^3b_{10}a_5 - 512b_8^3c_9^3c_{10}a_6^2c_8a_5^2b_{10} - 256b_8^3c_9^3c_{10}^2a_6^2b_5a_5^2 - 512b_8^2c_9^4c_{10}a_6^2c_{14}a_5^3 +$

$512b_8^2c_9^4c_{10}a_6^3c_{13}a_5^2 + 1536b_8^2c_9^4c_{10}a_6^2b_{10}^2a_5^2 - 512b_8^2c_9^4c_{10}a_6^4c_{12}a_5 + 256b_8^2c_9^3c_8^2a_5^3c_{11}a_6^2 + 256b_8^2c_9^3c_8^2a_5^5c_7 + 512b_8^2c_9^4c_{10}a_6c_6a_5^4 -$

$64b_8^2c_9^2c_8^4a_5^5 + 3072b_8^2c_9^4c_8a_5^2b_{10}b_9a_6^2 + 1024b_8^2c_9^4c_8a_5^4b_{10}b_5 - 1024b_8^2c_9^4c_8a_5^3b_{10}^2a_6 - 512b_8^2c_9^3c_{10}a_6a_5^4c_7c_8 + 256b_8^2c_9^3c_{10}^2a_6^2a_5^3c_7 -$

$640b_8a_5^3d_{11}c_{10}^2a_6^3c_9^2c_{15} + 512b_8^3c_9^3c_{10}a_6c_8a_5^3b_5 - 256b_8^2c_9^3c_{10}^2a_6^3a_5^2c_{15} - 384b_8^2c_9^2c_{10}^2a_6^2c_8^2a_5^3 - 256b_8^2c_9^3c_8^2a_5^4c_{15}a_6 - 128c_{15}a_5^6c_9^3c_8^3 +$

$1024b_8b_{10}^3a_5^3c_9^5a_6 - 512b_8^2c_9^4c_8a_5^5c_6 - 2048b_8b_{10}a_5^4c_9^5c_{14}a_6 + 6144b_8b_{10}a_5^3c_9^5b_9a_6b_5 -$

$2048b_8^2c_9^4c_8a_5^3b_9a_6b_5 + 256b_8^3c_9^3c_8^2a_5^3b_{10}a_6 - 256b_8^3c_9^3c_8^2a_5^2b_9a_6^2 + 3072b_8b_{10}a_5^3c_9^5c_{13}a_6^2 -$

$4096b_8b_{10}a_5^2c_9^5c_{12}a_6^3 + 3072b_8b_{10}a_5^2c_9^4c_{11}a_6^3c_{10} - 512b_8b_{10}a_5^5c_9^4c_7c_8 - 2048b_8^2c_9^4c_8a_5b_9^2a_6^3 + 128b_8b_{10}a_5^5c_9^3c_8^3 - 1024b_8b_{10}^2a_5^4c_9^5b_5 -$

$4096b_8b_9a_6^3c_9^5c_{13}a_5^2 - 2560b_8b_{10}a_5^3c_9^4c_{11}a_6^2c_8 + 1536b_8b_{10}a_5^4c_9^4c_{15}a_6c_8 - 2048b_8b_{10}a_5^3c_9^4c_{15}a_6^2c_{10} + 1536b_8b_9a_6^2c_9^3c_{10}c_8^2a_5^3 -$

$896b_8b_{10}a_5^2c_9^3c_{10}^3a_6^3 + 10240b_8b_{10}a_5c_9^5b_9^2a_6^3 + 2560b_8b_9a_6^3c_9^4a_5^2c_{15}c_{10} + 3072b_8b_9a_6^2c_9^5c_{14}a_5^3 - 1152b_8b_{10}a_5^4c_9^3c_{10}a_6c_8^2 +$

$1024b_8b_{10}a_5^5c_9^5c_6 + 1024b_8b_{10}a_5^4c_9^4c_7c_{10}a_6 + 1920b_8b_{10}a_5^3c_9^3c_{10}^2a_6^2c_8 - 256b_8b_9a_6c_9^3c_8^3a_5^4 - 6144b_8b_{10}^2a_5^2c_9^5b_9a_6^2 -$

$2048c_{11}a_6^2a_5^4c_9^5c_{14} + 2048c_{11}a_6^3a_5^3c_9^5c_{13} - 2048c_{11}a_6^4a_5^2c_9^5c_{12} + 256c_{11}a_6a_5^5c_9^3c_8^3 + 6144c_{11}a_6^2a_5^3c_9^5b_9b_5 + 5120b_8b_9a_6^4c_9^5c_{12}a_5 -$

$6144b_8b_9^2a_6^2c_9^5b_5a_5^2 + 3072b_8b_9a_6^3c_9^4a_5^2c_{11}c_8 - 3584b_8b_9a_6^4c_9^4a_5c_{11}c_{10} + 1024b_8b_9a_6c_9^4a_5^4c_7c_8 - 1536b_8b_9a_6^2c_9^4a_5^3c_7c_{10} -$

$2048b_8b_9a_6^2c_9^4a_5^3c_{15}c_8 + 1024c_{11}^2a_6^4a_5^2c_9^4c_{10} - 1024c_{11}a_6a_5^5c_9^4c_7c_8 + 1024c_{11}a_6^2a_5^4c_9^4c_7c_{10} - 8192c_{11}a_6^3a_5^2c_9^5b_{10}b_9 +$

$2048c_{11}a_6a_5^4c_9^4b_8c_8b_5 - 2560c_{11}a_6^2a_5^3c_9^4b_8c_{10}b_5 - 5120b_8b_9^3a_6^4c_9^5 + 2000a_5^5c_9b_8d_{11}^2c_{10}a_6c_8b_5 + 1600a_5^6c_9^2b_8d_{11}c_8d_{10}b_5 +$

$2000a_5^3c_9b_8d_{11}^2c_{10}a_6^3c_8b_9 + 384a_5^3c_9^3b_8d_{12}^2a_6^3b_{10} - 1000a_5^2c_9b_8d_{11}^2c_{10}^2a_6^4b_9 + 512a_5^4c_9^4c_7d_{12}b_9a_6^2 - 512a_5^5c_9^4c_7d_{12}b_{10}a_6 -$

$384a_5^2c_9^3b_8d_{12}^2a_6^4b_9 +$

$1280a_5^5c_9^3c_{11}a_6d_{11}c_8b_5 - 1536a_5^3c_9^4c_{11}a_6^3d_{12}b_{10} + 512a_5^6c_9^4c_7d_{12}b_5 + 1280a_5^3c_9^3c_{11}a_6^3d_{11}c_8b_9 - 1000a_5^4c_9b_8d_{11}^2c_{10}^2a_6^2b_5 -$

$384a_5^4c_9^3b_8d_{12}^2a_6^2b_5 + 1000a_5^3c_9b_8d_{11}^2c_{10}^2a_6^3b_{10} - 2000a_5^4c_9b_8d_{11}^2c_{10}a_6^2c_8b_{10} - 512a_5^5c_9^4c_7b_8c_{10}b_5 + 1600a_5^4c_9^2b_8d_{11}c_8d_{12}a_6^2b_{10} -$

$1600a_5^3c_9^2b_8d_{11}c_8d_{12}a_6^3b_9 - 1024a_5^3c_9^4c_{15}d_{12}a_6^3b_9 - 640a_5^4c_9^3c_{15}d_{11}c_8b_9a_6^2 - 1280a_5^4c_9^3c_{15}d_{11}c_{10}a_6^2b_{10} - 1280a_5^4c_9^3c_{11}a_6^2d_{11}c_8b_{10} +$

$384a_5^7c_7c_9^3d_{10}^2 + 1600a_5^2c_9^2b_8d_{11}c_{10}a_6^4d_{12}b_9 + 1600a_5^4c_9^2b_8d_{11}c_{10}a_6^2d_{12}b_5 + 640a_5^5c_9^3c_{15}d_{11}c_8b_{10}a_6 + 3072a_5^3c_9^5d_{14}a_6^3b_{10} -$

$3072a_5^2c_9^5d_{14}a_6^4b_9 - 1024a_5^6c_9^5d_{19}b_5 + 1536a_5^4c_9^4c_{11}a_6^2d_{12}b_5 + 1600a_5^4c_9^2b_8d_{11}c_{10}a_6^2d_{10}b_{10} - 1600a_5^3c_9^2b_8d_{11}c_{10}a_6^3d_{10}b_9 -$

$1600a_5^5c_9^2b_8d_{11}c_{10}a_6d_{10}b_5 + 1536a_5^2c_9^4c_{11}a_6^4d_{12}b_9 +$

$2048a_5^5c_9^5d_{18}a_6b_5 + 1280a_5^3c_9^3c_{15}d_{11}c_{10}a_6^3b_9 - 1600a_5^3c_9^2b_8d_{11}c_{10}a_6^3d_{12}b_{10} - 640a_5^6c_9^3c_{15}d_{11}c_8b_5 - 1600a_5^5c_9^2b_8d_{11}c_8d_{12}a_6b_5 +$

$1024a_5^4c_9^4c_{15}d_{12}a_6^2b_{10} + 576a_5^5c_9^3d_{12}c_8^2b_{10}a_6 - 1024a_5^4c_9^5d_{19}b_9a_6^2 - 576a_5^4c_9^3d_{12}c_8^2b_9a_6^2 - 576a_5^6c_9^3d_{12}c_8^2b_5 - 3072a_5^4c_9^5d_{14}a_6^2b_5 +$

$2048a_5^3c_9^5d_{18}a_6^3b_9 + 384a_5^5c_9^3b_8d_{10}^2b_{10}a_6 - 384a_5^4c_9^3b_8d_{10}^2b_9a_6^2 - 384a_5^6c_9^3b_8d_{10}^2b_5 - 1000a_5^6c_9b_8d_{11}^2c_8^2b_5 + 768a_5^5c_9^3b_8c_{10}c_8^2b_5 +$

$1024a_5^5c_9^5d_{19}b_{10}a_6 + 1000a_5^5c_9b_8d_{11}^2c_8^2b_{10}a_6 - 1000a_5^4c_9b_8d_{11}^2c_8^2b_9a_6^2 + 1536a_5^4c_9^4d_{13}a_6^2c_8b_{10} - 1536a_5^3c_9^4d_{13}a_6^3c_8b_9 -$

$1536a_5^5c_9^4d_{13}a_6c_8b_5 + 768a_5^6c_9^4d_{21}c_8b_5 - 1536a_5^4c_9^3b_8c_{10}^2a_6c_8b_5 + 768a_5^3c_9^3b_8c_{10}^3a_6^2b_5 + 768a_5^4c_9^4c_{10}b_{10}^2c_8a_6 - 768a_5^5c_9^4c_{10}b_{10}c_8b_5 +$

$1600a_5^4c_9^2b_8d_{11}c_8d_{10}b_9a_6^2 + 768a_5^4c_9^4d_{21}c_8b_9a_6^2 - 2304a_5^3c_9^4c_{10}b_9a_6^2c_8b_{10} + 1536a_5^2c_9^4c_{10}b_9^2a_6^3c_8 - 768a_5^5c_9^4d_{21}c_8b_{10}a_6 +$

$1536a_5^4c_9^4c_{10}b_9a_6c_8b_5 + 1920a_5^3c_9^3c_{11}a_6^3d_{11}c_{10}b_{10} - 1920a_5^2c_9^3c_{11}a_6^4d_{11}c_{10}b_9 - 1920a_5^4c_9^3c_{11}a_6^2d_{11}c_{10}b_5 + 512a_5^4c_9^4c_{15}d_{10}b_9a_6^2 +$

$768a_5^5c_9^3b_8d_{10}d_{12}a_6b_5 - 1600a_5^5c_9^2b_8d_{11}c_8d_{10}b_{10}a_6 - 768a_5^4c_9^3b_8d_{10}d_{12}a_6^2b_{10} + 768a_5^3c_9^3b_8d_{10}d_{12}a_6^3b_9 - 1024a_5^3c_9^4c_{11}a_6^3d_{10}b_9 -$

$1024a_5^5c_9^4c_{11}a_6d_{10}b_5 - 512a_5^5c_9^4c_{15}d_{10}b_{10}a_6 - 512a_5^7d_8c_9^4d_{10} - 640a_5^6d_{19}a_6c_9^3d_{11}c_8 -$

$1600a_5^5c_7c_9^2d_{11}c_{10}a_6^2d_{12} + 1600a_5^6c_7c_9^2d_{11}c_8d_{12}a_6 - 2000a_5^6c_7c_9d_{11}^2c_{10}a_6c_8 + 1000a_5^7c_7c_9d_{11}^2c_8^2 - 384a_5^6c_{15}a_6c_9^3d_{10}^2 +$

$768a_5^5c_{15}a_6^2c_9^3d_{10}d_{12} - 384a_5^4c_{15}a_6^3c_9^3d_{12}^2 + 1000a_5^5c_7c_9d_{11}^2c_{10}^2a_6^2 - 1600a_5^5c_{15}a_6^2c_9^2d_{11}c_{10}d_{10} - 1600a_5^5c_{15}a_6^2c_9^2d_{11}c_8d_{12} -$

$1000a_5^4c_{15}a_6^3c_9d_{11}^2c_{10}^2 + 2000a_5^5c_{15}a_6^2c_9d_{11}^2c_{10}c_8 - 1000a_5^6c_{15}a_6c_9d_{11}^2c_8^2 + 1600a_5^6c_7c_9^2d_{11}c_{10}a_6d_{10} + 1600a_5^4c_{11}a_6^3c_9^2d_{11}c_{10}d_{10} -$

$1600a_5^3c_{11}a_6^4c_9^2d_{11}c_{10}d_{12} - 768a_5^6c_7c_9^3d_{10}d_{12}a_6 + 384a_5^5c_{11}a_6^2c_9^3d_{10}^2 + 1600a_5^4c_{15}a_6^3c_9^2d_{11}c_{10}d_{12} + 1600a_5^6c_{15}a_6c_9^2d_{11}c_8d_{10} -$

$1600a_5^5c_{11}a_6^2c_9^2d_{11}c_8d_{10} + 1600a_5^4c_{11}a_6^3c_9^2d_{11}c_8d_{12} + 384a_5^5c_7c_9^3d_{12}^2a_6^2 + 1000a_5^5c_{11}a_6^2c_9d_{11}^2c_8^2 + 1000a_5^3c_{11}a_6^4c_9d_{11}^2c_{10}^2 -$

$2000a_5^4c_{11}a_6^3c_9d_{11}^2c_{10}c_8 - 1600a_5^7c_7c_9^2d_{11}c_8d_{10} - 768a_5^4c_{11}a_6^3c_9^3d_{10}d_{12} + 384a_5^3c_{11}a_6^4c_9^3d_{12}^2 + 1280a_5^5c_9^3c_{15}d_{11}c_{10}a_6b_5 -$

$1024a_5^5c_9^4c_{15}d_{12}a_6b_5 - 384a_5^6c_9^3c_7c_{10}c_8^2 - 768a_5^7c_9^4e_{16}c_8 - 1152a_5^6c_9^3e_{17}c_{10}a_6c_8 - 384a_5^4c_9^3c_7c_{10}^3a_6^2 + 768a_5^5c_9^3c_7c_{10}^2a_6c_8 +$

$576a_5^3c_9^3e_{11}a_6^4c_{10}^2 - 1152a_5^4c_9^3e_{11}a_6^3c_{10}c_8 + 576a_5^5c_9^3e_{11}a_6^2c_8^2 + 576a_5^5c_9^3e_{17}c_{10}^2a_6^2 - 576a_5^4c_9^3e_{26}a_6^3c_{10}^2 + 1152a_5^5c_9^3e_{26}a_6^2c_{10}c_8 -$

$576a_5^6c_9^3e_{26}a_6c_8^2 + 576a_5^7c_9^3e_{17}c_8^2 + 96a_5^6c_9^2c_{10}c_8^4 + 400a_5^6c_9^2e_{12}a_6c_8^3 - 384a_5^3c_9^2c_{10}^4a_6^3c_8 + 576a_5^4c_9^2c_{10}^3a_6^2c_8^2 + 400a_5^4c_9^2e_{18}c_{10}^3a_6^3 -$

$1200a_5^5c_9^2e_{18}c_{10}^2a_6^2c_8 + 1200a_5^6c_9^2e_{18}c_{10}a_6c_8^2 - 400a_5^3c_9^2e_{12}a_6^4c_{10}^3 + 1200a_5^4c_9^2e_{12}a_6^3c_{10}^2c_8 - 1200a_5^5c_9^2e_{12}a_6^2c_{10}c_8^2 - 384a_5^5c_9^2c_{10}^2a_6c_8^3 -$

$400a_5^7c_9^2e_{18}c_8^3 + 96a_5^2c_9^2c_{10}^5a_6^4 + 512a_5^6d_{19}a_6c_9^4d_{10} +$

$640a_5^5d_{19}a_6^2c_9^3d_{11}c_{10} + 512a_5^6d_8c_9^4d_{12}a_6 + 40a_5^3d_{14}a_6^4c_9^3d_{11}c_{10} - 640a_5^4d_{14}a_6^3c_9^3d_{11}c_8 + 512a_5^4d_{14}a_6^3c_9^4d_{10} - 512a_5^3d_{14}a_6^4c_9^4d_{12} -$

$640a_5^4d_{18}a_6^3c_9^3d_{11}c_{10} + 640a_5^5d_{18}a_6^2c_9^3d_{11}c_8 - 512a_5^5d_{18}a_6^2c_9^4d_{10} + 512a_5^4d_{18}a_6^3c_9^4d_{12} - 640a_5^6d_8c_9^3d_{11}c_{10}a_6 + 640a_5^7d_8c_9^3d_{11}c_8 -$

$512a_5^5d_{19}a_6^2c_9^4d_{12} - 1344c_{10}a_6^2c_8a_5^5c_{15}c_9^2e_{13} + 1344c_{10}a_6^3c_8a_5^4c_{11}c_9^2e_{13} - 672a_5^5c_{10}^2a_6^2c_7c_9^2e_{13} - 672a_5^3c_{10}^2a_6^4c_{11}c_9^2e_{13} +$

$672a_5^4c_{10}^2a_6^3c_{15}c_9^2e_{13} - 512b_8c_9^4b_5a_5^5e_{26}a_6 + 512b_8c_9^4b_5a_5^4e_{11}a_6^2 - 512b_8c_9^3b_5a_5^6c_7e_{13} + 640b_8c_9^3b_5a_5^5e_{12}a_6c_8 + 672b_8c_9^2b_5a_5^6c_8^2e_{13} +$

$512b_8c_9^3b_5a_5^5c_{15}a_6e_{13} - 512b_8c_9^3b_5a_5^4c_{11}a_6^2e_{13} + 672b_8c_9^2b_5a_5^4c_{10}^2a_6^2e_{13} - 1344b_8c_9^2b_5a_5^5c_{10}a_6c_8e_{13} - 640b_8c_9^3b_5a_5^6d_{11}d_9 +$

$512b_8c_9^4b_5a_5^6e_{17} + 640b_8c_9^3b_5a_5^5d_{11}d_{21}a_6 + 640b_8c_9^3b_5^2a_5^5d_{11}c_{10} - 640b_8c_9^3b_5a_5^4d_{11}d_{13}a_6^2 + 256b_8^2c_9^3b_5^2a_5^5e_{13} + 640b_8c_9^3b_5a_5^5e_{18}c_{10}a_6 -$

$640b_8c_9^3b_5a_5^6e_{18}c_8 - 640b_8c_9^3b_5a_5^4e_{12}a_6^2c_{10} + 512b_8c_9^4b_9a_6^4e_{11}a_5^2 + 512b_8c_9^4b_9a_6^2e_{17}a_5^4 + 640b_8c_9^3b_9a_6^3a_5^3e_{12}c_8 -$

$640b_8c_9^3b_9a_6^2d_{11}a_5^4d_9 + 512b_8^2c_9^3b_9a_6^2b_5a_5^3e_{13} - 1344b_8c_9^2b_9a_6^3c_{10}c_8a_5^3e_{13} + 672b_8c_9^2b_9a_6^2c_8^2a_5^4e_{13} + 672b_8c_9^2b_9a_6^4a_5^2c_{10}^2e_{13} -$
$512b_8c_9^3b_9a_6^2c_7a_5^4e_{13} - 512b_8c_9^4b_9a_6^3e_{26}a_5^3 + 640b_8c_9^3b_9a_6^3d_{11}a_5^3d_{21} - 640b_8c_9^3b_9a_6^4d_{11}a_5^2d_{13} + 256b_8^2c_9^3b_9^2a_6^4e_{13}a_5 -$

$640b_8c_9^3b_9a_6^2a_5^4e_{18}c_8 + 512b_8c_9^4b_{10}a_6^2a_5^4e_{26} - 512b_8c_9^4b_{10}a_6^3a_5^3e_{11} - 512b_8c_9^4b_{10}a_6a_5^5e_{17} + 512b_8c_9^3b_{10}a_6a_5^5c_7e_{13} -$

$512b_8^2c_9^3b_{10}a_6a_5^4b_5e_{13} - 512b_8^2c_9^3b_{10}a_6^3a_5^2b_9e_{13} + 256b_8^2c_9^3b_{10}^2a_6^2a_5^3e_13 - 640b_8c_9^3b_{10}a_6^2a_5^4e_{12}c_8 - 640b_8c_9^3b_9a_6^4a_5^2e_{12}c_{10} +$

$640b_8c_9^3b_9a_6^3a_5^3e_{18}c_{10} + 1344b_8c_9^2b_{10}a_6^2a_5^4c_{10}c_8e_{13} - 672b_8c_9^2b_{10}a_6a_5^5c_8^2e_{13} + 640b_8c_9^3b_{10}a_6a_5^5d_{11}d_9 - 512b_8c_9^3b_{10}a_6^2a_5^4c_{15}e_{13} +$

$512b_8c_9^3b_{10}a_6^3a_5^3c_{11}e_{13} - 672b_8c_9^2b_{10}a_6^3a_5^3c_{10}^2e_{13} + 640b_8c_9^3b_{10}a_6^3a_5^3d_{11}d_{13} - 640b_8c_9^3b_{10}a_6^2a_5^4d_{11}d_{21} + 640b_8c_9^3b_{10}a_6a_5^5e_{18}c_8 -$

$512b_8c_9^4c_{15}a_6a_5^5d_9 - 512b_8c_9^4c_7a_5^5d_{21}a_6 - 512b_8c_9^4c_{15}a_6^3a_5^3d_{13} + 512b_8c_9^4c_7a_5^6d_9 + 512b_8c_9^4c_7a_5^4d_{13}a_6^2 + 512b_8c_9^4c_{15}a_6^2a_5^4d_{21} +$
$640b_8c_9^3b_{10}a_6^3a_5^3e_12c_{10} - 640b_8c_9^3b_{10}a_6^2a_5^4e_{18}c_{10} + 512b_8c_9^4c_{11}a_6^2a_5^4d_9 +$

$512b_8c_9^4c_{11}a_6^4a_5^2d_{13} + 512b_8^2c_9^4b_{10}a_6a_5^4d_9 + 512b_8^2c_9^4b_{10}a_6^3a_5^2d_{13} - 512b_8c_9^4c_{11}a_6^3a_5^3d_{21} + 512b_8^2c_9^4b_5a_5^4d_{21}a_6 - 512b_8^2c_9^4b_5a_5^3d_{13}a_6^2 +$

$512b_8^2c_9^4b_9a_6^3d_{21}a_5^2 - 512b_8^2c_9^4b_9a_6^4d_{13}a_5 - 512b_8^2c_9^4b_9a_6^2d_9a_5^3 - 512b_8^2c_9^4b_{10}a_6^2a_5^3d_{21} - 512b_8^2c_9^4b_5a_5^5d_9 - 1024b_8c_9^5b_9b_5^2a_5^4 -$

$512b_8c_9^4a_5^3d_{14}a_6^3c_8 - 512b_8c_9^4a_5^5d_8c_{10}a_6 + 512b_8c_9^4a_5^2d_{14}a_6^4c_{10} - 384b_8c_9^3a_5^4d_{13}a_6^2c_8^2 + 384b_8c_9^3a_5^3d_{21}a_6^3c_{10}^2 + 768b_8c_9^3a_5^3d_{13}a_6^3c_{10}c_8 +$

$768b_8c_9^3a_5^5d_9c_{10}a_6c_8 - 384b_8c_9^3a_5^2d_{13}a_6^4c_{10}^2 - 384b_8c_9^3a_5^4d_9c_{10}^2a_6^2 - 768b_8c_9^3a_5^4d_{21}a_6^2c_{10}c_8 + 384b_8c_9^3a_5^5d_{21}a_6c_8^2 + 512b_8c_9^4a_5^4d_{19}a_6^2c_{10} - 512b_8c_9^4a_5^5d_{19}a_6c_8 - 512b_8c_9^4a_5^3d_{18}a_6^3c_{10} + 512b_8c_9^4a_5^4d_{18}a_6^2c_8 + 512b_8c_9^4a_5^6d_8c_8 - 384b_8c_9^3a_5^6d_9c_8^2 - 2048b_8c_9^5c_{13}a_6a_5^4b_5 + 3072b_8c_9^5c_{12}a_6^2a_5^3b_5 + 1024b_8c_9^5c_{14}a_5^5b_5 + 1024b_8c_9^5d_{16}a_6^3a_5^3 + 276a_5^3c_9e_{13}c_{10}^4a_6^4 - 1104a_5^4c_9e_{13}c_{10}^3a_6^3c_8 + 1656a_5^5c_9e_{13}c_{10}^2a_6^2c_8^2 - 1104a_5^6c_9e_{13}c_{10}a_6c_8^3 + 276a_5^7c_9e_{13}c_8^4 - 1024b_8c_9^5d_7a_5^6 + 768a_5^4c_9^4c_{10}^2c_{14}a_6^2 - 768a_5^5c_9^4c_{10}c_{14}a_6c_8 - 768a_5^5c_9^4c_{10}^2c_6a_6 + 768a_5^6c_9^4c_{10}c_6c_8 - 768a_5^3c_9^4c_{10}c_{12}a_6^3c_8 + 768a_5^6c_9^4e_{16}c_{10}a_6 + 768a_5^4c_9^4e_{24}a_6^3c_{10} - 768a_5^5c_9^4e_{24}a_6^2c_8 - 768a_5^5c_9^4e_{27}a_6^2c_{10} + 768a_5^6c_9^4e_{27}a_6c_8 - 768a_5^3c_9^4e_{10}a_6^4c_{10} + 768a_5^4c_9^4e_{10}a_6^3c_8 - 768a_5^3c_9^4c_{10}^2c_{13}a_6^3 + 768a_5^4c_9^4c_{10}c_{13}a_6^2c_8 + 768a_5^2c_9^4c_{10}^2c_{12}a_6^4 + 640c_{15}a_6^2a_5^5c_9^3e_{12}c_8 - 512c_{15}a_6^2a_5^5c_9^4e_{26} + 512c_{15}a_6^3a_5^4c_9^4e_{11} + 512c_{15}a_6a_5^6c_9^4e_{17} - 640c_{15}a_6a_5^6c_9^3d_{11}d_9 + 256c_{15}^2a_6^2a_5^5c_9^3e_{13} - 640c_{15}a_6^3a_5^4c_9^3d_{11}d_{13} + 640c_{15}a_6^2a_5^5c_9^3d_{11}d_{21} + 512c_7a_5^6c_9^4e_{26}a_6 - 512c_7a_5^5c_9^4e_{11}a_6^2 + 512b_8c_9^3b_9a_6^3c_{15}a_5^3e_{13} - 512b_8c_9^3b_9a_6^4c_{11}a_5^2e_{13} - 640c_7a_5^6c_9^3e_{12}a_6c_8 - 640c_{15}a_6^3a_5^4c_9^3e_{12}c_10 + 640c_{15}a_6^2a_5^5c_9^3e_{18}c_10 - 640c_{15}a_6a_5^6c_9^3e_{18}c_8 - 640c_7a_5^4c_9^3d_{11}c_10b_9a_6^2 - 640c_7a_5^6c_9^3d_{11}c_10b_5 - 512c_7a_5^6c_9^3c_{15}a_6e_{13} + 640c_7a_5^5c_9^3d_{11}d_{13}a_6^2 - 640c_7a_5^6c_9^3d_{11}d_{21}a_6 + 640c_7a_5^5c_9^3e_{12}a_6^2c_10 - 640c_7a_5^6c_9^3e_{18}c_10a_6 + 640c_7a_5^7c_9^3e_{18}c_8 + 640c_7a_5^5c_9^3d_{11}c_10b_{10}a_6 + 640c_7a_5^7c_9^3d_{11}d_9 + 256c_7^2a_5^7c_9^3e_{13} - 512c_{11}a_6^4a_5^3c_9^4e_{11} - 512c_{11}a_6^2a_5^5c_9^4e_{17} - 640c_{11}a_6^3a_5^4c_9^3e_{12}c_8 + 512c_{11}a_6^3a_5^4c_9^4e_{26} + 640c_{11}a_6^2a_5^5c_9^3d_{11}d_9 - 512c_{11}a_6^3a_5^4c_9^3c_{15}e_{13} + 256c_{11}^2a_6^4a_5^3c_9^3e_{13} + 512c_{11}a_6^2a_5^5c_9^3c_7e_{13} - 512c_7a_5^7c_9^4e_{17} + 640c_{11}a_6^4a_5^3c_9^3e_{12}c_10 - 640c_{11}a_6^3a_5^4c_9^3e_{18}c_10 - 672c_8^2a_5^7c_7c_9^2e_{13} + 640c_{11}a_6^2a_5^5c_9^3e_{18}c_8 + 640c_{11}a_6^4a_5^3c_9^3d_{11}d_{13} - 640c_{11}a_6^3a_5^4c_9^3d_{11}d_{21} + 672c_8^2a_5^6c_{15}a_6c_9^2e_{13} - 672c_8^2a_5^5c_{11}a_6^2c_9^2e_{13} + 1344c_{10}a_6c_8a_5^6c_7c_9^2e_{13};$

$\varphi_{\mathbf{6}}(\mathbf{a_i}, \mathbf{b_i}, \mathbf{c_i}, \mathbf{d_{11}}) = (-16b_9c_9^2b_5 - 4d_{11}b_9b_6^2 + 4b_8d_{11}b_{10}b_6 - 4b_8^2d_{11}b_5 - 4c_9c_{10}b_{10}b_6 + 8c_9c_{10}b_5b_8 + c_8^2b_8^2 - 2c_8b_8c_{10}b_6 - 4c_8b_8b_{10}c_9 + 8c_8b_9b_6c_9 + c_{10}^2b_6^2 + 4b_{10}^2c_9^2);$

$\varphi_{\mathbf{7}}(\mathbf{a_i}, \mathbf{b_i}, \mathbf{c_i}, \mathbf{d_i}, \mathbf{e_i}) = 15c_{10}a_6b_8d_{11}c_8 + 9b_8c_{10}^2a_6^2d_{11} - 18b_8c_{10}a_6d_{11}c_8a_5 - 3c_{10}a_6e_{13}a_5c_8 - 9e_{13}a_5c_{10}^2a_6^2 + 18e_{13}a_5^2c_{10}a_6c_8 - 15c_8^2a_5b_8d_{11} + 9b_8c_8^2a_5^2d_{11} + 3c_8^2a_5^2e_{13} - 9e_{13}a_5^3c_8^2 - 20b_8d_{11}^2b_{10}a_6a_5 + 20b_8d_{11}^2b_9a_6^2 + 20b_8d_{11}^2b_5a_5^2 - 20c_7a_5^3d_{11}^2 + 20c_{15}a_6a_5^2d_{11}^2 - 20c_{11}a_6^2a_5d_{11}^2 - 12d_{11}c_{10}a_6d_{10}a_5^2 + 12d_{11}c_{10}a_6^2d_{12}a_5 + 12d_{11}c_8a_5^3d_{10} - 12d_{11}c_8a_5^2d_{12}a_6.$

Usamos o Maple para achar as condições da Proposição 3.4. Dada $P = (x, y, f(x, y, z))$ fizemos mudanças de coordenadas na fonte e na meta para que $(x, y, f(x, y, z))$ seja equivalente às formas normais do Teorema 3.1. Para dar uma idéia dos cálculos, faremos o caso 4_1^1. Os outros casos são análogos mas em alguns deles as contas são mais complicadas.

Denotaremos o k-jato de f por Fk. Como 4_1^1 é 4-determinada então podemos trabalhar com o seu 4-jato. Os termos dependentes de x e y podem ser eliminados com as duas primeiras coordenadas de $(x, y, f(x, y, z))$. Para a singularidade do tipo 4_1^1, temos que $coef(z^2) = 0$ e $coef(z^3) = 0$. Temos então no Maple:

$> F2 := a5 * x * z + a6 * y * z :$

$> F3 := b5 * y^2 * z + b6 * y * z^2 + b8 * z^2 * x + b9 * z * x^2 + b10 * x * y * z :$

$> F4 := c6*y^3*z+c7*y^2*z^2+c8*y*z^3+c9*z^4+c10*z^3*x+c11*z^2*x^2+c12*z*x^3+c13*x^2*y*z+c14*x*y^2*z+c15*x*y*z^2 :$

Vamos achar as condições sobre os coeficientes ai, bi e ci para termos singularidade 4_1^1. Suponha sem perda de generalidade

que $a5$ é não nulo.

$> readlib(mtaylor):$

$> F := F2 + F3 + F4:$

Para eliminar $a6x * y$:

$> q := collect(F, [x, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(x = X - coeff(coeff(coeff(q, x, 0), y, 1), z, 1) * y/a5, [X, y, z], 5):$

Para eliminar $y^2 * z$:

$> q := collect(m, [X, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(X = x - coeff(coeff(coeff(q, X, 0), y, 2), z, 1) * y^2/a5, [x, y, z], 5):$

Para eliminar $x^2 * z$:

$> q := collect(m, [x, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(x = X - coeff(coeff(coeff(q, x, 2), y, 0), z, 1) * X^2/a5, [X, y, z], 5):$

Para eliminar $x * y * z$:

$> q := collect(m, [X, y, z]):$

$m := mtaylor(subs(X = x - coeff(coeff(coeff(q, X, 1), y, 1), z, 1) * x * y/a5, [x, y, z], 5):$

Para eliminar $y^3 * z$:

$> q := collect(m, [x, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(x = X - coeff(coeff(coeff(q, x, 0), y, 3), z, 1) * y^3/a5, [X, y, z], 5):$

Para eliminar $x * z^3$:

$> q := collect(m, [X, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(z = Z - coeff(coeff(coeff(q, X, 1), y, 0), z, 3) * Z^3/a5, [X, y, Z], 5):$

Para eliminar $x^2 * z^2$:

$> q := collect(m, [X, y, Z]):$

$> m := mtaylor(subs(Z = z - coeff(coeff(coeff(q, X, 2), y, 0), Z, 2) * X * z^2/a5, [X, y, z], 5):$

Para eliminar $x^3 * z$:

$> q := collect(m, [X, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(X = x - coeff(coeff(coeff(q, X, 3), y, 0), z, 1) * x^3/a5, [x, y, z], 5):$

Para eliminar $x^2 * y * z$:

$> q := collect(m, [x, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(x = X - coeff(coeff(coeff(q, x, 2), y, 1), z, 1) * X^2 * y/a5, [X, y, z], 5):$

Para eliminar $x * y^2 * z$:

$> q := collect(m, [X, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(X = x - coeff(coeff(coeff(q, X, 1), y, 2), z, 1) * x * y^2/a5, [x, y, z], 5):$

Para eliminar $x * y * z^2$:

$> q := collect(m, [x, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(z = Z - coeff(coeff(coeff(q, x, 1), y, 1), z, 2) * y * Z^2/a5, [x, y, Z], 5):$

Para eliminar $y^2 * z^2$, temos que ter o novo coeficiente de $y * z^2$, $b6 - b8a6/a5$, diferente de zero:

$> q := collect(m, [x, y, Z]):$

$> m := mtaylor(subs(y = Y - coeff(coeff(coeff(q, x, 0), y, 2), Z, 2) * Y^2/(b6 - b8a6/a5), [x, Y, Z], 5):$

Para eliminar $y * z^3$:

$> q := collect(m, [x, Y, Z]):$

$> m := mtaylor(subs(Z = z - coeff(coeff(coeff(q, x, 0), Y, 1), Z, 3) * z^2/(2 * (b6 - b8a6/a5)), q), [x, Y, z], 5):$

Para eliminar $x * z^2$:

$> q := collect(m, [x, Y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(Y = y - coeff(coeff(coeff(q, x, 1), Y, 0), z, 2) * x/(b6 - b8a6/a5), q), [x, y, z], 5):$

Para eliminar $x * z^3$:

$> q := collect(m, [x, y, z]):$

$> m := mtaylor(subs(z = Z - coeff(coeff(coeff(q, x, 1), y, 0), z, 3) * Z^3/a5, [x, y, Z], 5);$

$$a5xZ + (b6 - b8a6/a5)yZ^2 + c9Z^4.$$

Para termos a singularidade 4_1^1 temos que ter os coeficientes da equação anterior distintos de zero, e $coef(z^2) = a_3 = 0$, $coef(z^3) = b_7 = 0$. Isto demonstra este caso.

3.4 Demonstrações das Proposições 3.8-3.13

Para não perder a noção geométrica de alguns resultados deste capítulo, optamos por fazer nesta seção algumas demonstrações que são muito extensas.

3.4.1 Demostração da Proposição 3.8

Prova: Suponha que P tem uma singularidade 3_{A_2} na origem, e tome, sem perda de generalidade $P(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ tal que $j^3 f = a_1x^2 + a_2y^2 + a_4xy + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3 + b_8xz^2 + b_9x^2z + b_{10}xyz$ com $b_7 \neq 0$. O espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f em V_3 é dado pelos vetores u_i, $i = 1, \cdots, 10$ (ver Lema 3.6). Quando $a_4^2 - 4a_1a_2 \neq 0$ (ou seja, a origem não é umbílico parcial), um transversal à órbita pode ser dado por $T = \mathbb{R}\{z^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, y^2z, x^2z, xyz\}$ e um elemento de T é $\bar{f} = j^3 f + \bar{a}_3z^2 + \bar{b}_1x^3 + \bar{b}_2x^2y + \bar{b}_3xy^2 + \bar{b}_4y^3 + \bar{b}_5y^2z + \bar{b}_9x^2z + \bar{b}_{10}xyz$, onde $\bar{a}_3$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$, $\bar{b}_4$, $\bar{b}_5$, $\bar{b}_9$, $\bar{b}_{10} \in \mathbb{R}$.

Consideremos no transversal a projeção na direção singular sobre o espaço tangente, $(\alpha, \beta, 1, 0)$, ou seja $P(x, y, z) \simeq (x, y, \bar{f}(x + \alpha z, y + \beta z, z))$. Neste transversal, temos uma singularidade 3_{A_2} se

$$coef(xz) = 2a_1\alpha + a_4\beta = 0,$$

$$coef(yz) = a_4\alpha + 2a_2\beta = 0,$$

$$coef(z^2) = \bar{a}_3 + a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0, \text{ e}$$

$$coef(xyz)(4coef(xz^2).coef(yz^2) - 3coef(xyz).coef(z^3)) - 4(coef(y^2z).coef(xz^2)^2 -$$

$$(3coef(y^2z).coef(z^3) - coef(yz^2)^2)coef(x^2z)) = 0.$$

Logo como o determinante das duas primeiras equações é diferente de zero (condição para T ser transversal), então a única solução é $\alpha = \beta = 0$. Substituindo estes valores na terceira equação temos $\bar{a}_3 = 0$ e substituindo na quarta equação temos que o primeiro jato desta equação é dado por $(12b_7b_9 - 4b_8^2)\bar{b}_5 + (4b_8b_6 - 6b_7b_{10})\bar{b}_{10} + (12b_5b_7 - 4b_6^2)\bar{b}_9 = 0$. Observe que é suficiente termos o primeiro jato já que estamos interessados no tangente da variedade.

Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato 3_{A_2} em V_3, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3)+T_f3_{A_2}=V_3$, e assim saberemos quando $\theta^{-1}(3_{A_2})$ é variedade em $\mathbb{R}^3$ de codimensão igual a dois.

O espaço tangente do estrato 3_{A_2} em V_3 é a interseção dos núcleos de duas formas diferenciáveis ξ_1 e ξ_2. Como ξ_1 e ξ_2 têm que anular o tangente ao estrato 3_{A_2} no transversal e os geradores do espaço tangente de $\mathcal{G}.f$, então

$\xi_1 = da_3$ e

$\xi_2 = (12b_7b_9 - 4b_8^2)db_5 + (12b_7b_5 - 4b_6^2)db_9 + (4b_8b_6 - 6b_7b_{10})db_{10} + (4b_6b_{10} - 8b_5b_8)db_8 + (-8b_6b_9 + 4b_8b_{10})db_6 - \frac{1}{3b_7}(20b_8b_6b_{10} - 20b_5b_8^2 - 20b_6^2b_9 - 6b_7b_{10}^2 + 24b_7b_5b_9)db_7 - \frac{1}{(-b_{10}^2+4b_5b_9)(4a_2a_1-a_4^2)}(-2a_2b_{10}^4b_8+16b_5b_8b_2a_4b_6b_{10}-48b_9^2b_4a_4b_6^2+48b_8b_9b_4a_4b_6b_{10}-16b_5^2b_8^2b_2a_4+16b_5b_8^2b_3a_4b_{10} + 16b_9b_3a_4b_{10}b_6^2 - 12b_4a_4b_8^2b_{10}^2 - 4b_2a_4b_6^2b_{10}^2 + 16b_5^2a_4b_6b_9^2 + 96a_2b_1b_8^2b_5^2 - 32a_2b_9^2b_5^2b_8 + 8a_2b_3b_{10}^2b_8^2 + 32a_2b_3b_9^2b_6^2 + 24a_2b_1b_6^2b_{10}^2 - 8b_3a_4b_8b_6b_{10}^2 + b_{10}^4a_4b_6 - 8b_{10}^2a_4b_6b_5b_9 - 32b_3a_4b_8b_6b_5b_9 - 96a_2b_5b_8b_1b_6b_{10} + 64a_2b_5b_8b_2b_6b_9 + 16a_2b_9b_5b_8b_{10}^2 - 32a_2b_8b_3b_9b_6b_{10} - 32a_2b_5b_2b_{10}b_8^2 + 16a_2b_8b_2b_6b_{10}^2 - 32a_2b_2b_6^2b_{10}b_9)da_5 - (\frac{1}{a_4(-b_{10}^2+4b_5b_9)}(48b_1b_8^2b_5^2 - 16b_9^2b_5^2b_8 - 16b_5b_2b_{10}b_8^2 - 48b_5b_8b_1b_6b_{10} + 32b_5b_8b_2b_6b_9 + 8b_9b_5b_8b_{10}^2 - 16b_8b_3b_9b_6b_{10} - b_{10}^4b_8 + 4b_3b_{10}^2b_8^2 + 8b_8b_2b_6b_{10}^2 + 16b_3b_9^2b_6^2 - 16b_2b_6^2b_{10}b_9 + 12b_1b_6^2b_{10}^2) - \frac{8a_1b_5b_9-2a_1b_{10}^2}{a_4(-b_{10}^2+4b_5b_9)^2(4a_2a_1-a_4^2)}(-2a_2b_{10}^4b_8 + 16b_5b_8b_2a_4b_6b_{10}-48b_9^2b_4a_4b_6^2+48b_8b_9b_4a_4b_6b_{10}-16b_5^2b_8^2b_2a_4+16b_5b_8^2b_3a_4b_{10}+16b_9b_3a_4b_{10}b_6^2 - 12b_4a_4b_8^2b_{10}^2 - 4b_2a_4b_6^2b_{10}^2 + 16b_5^2a_4b_6b_9^2 + 96a_2b_1b_8^2b_5^2 - 32a_2b_9^2b_5^2b_8 + 8a_2b_3b_{10}^2b_8^2 + 32a_2b_3b_9^2b_6^2 + 24a_2b_1b_6^2b_{10}^2 - 8b_3a_4b_8b_6b_{10}^2 + b_{10}^4a_4b_6 - 8b_{10}^2a_4b_6b_5b_9 - 32b_3a_4b_8b_6b_5b_9 - 96a_2b_5b_8b_1b_6b_{10} + 64a_2b_5b_8b_2b_6b_9 + 16a_2b_9b_5b_8b_{10}^2 - 32a_2b_8b_3b_9b_6b_{10} - 32a_2b_5b_2b_{10}b_8^2 + 16a_2b_8b_2b_6b_{10}^2 - 32a_2b_2b_6^2b_{10}b_9))da_6.$

Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_3, são:

$v_1 = 3b_1x^2 + b_{10}yz + 2b_2xy + b_3y^2 + b_8z^2 + 2b_9xz + (-4a_1^3 + 4c_1 - a_4^2a_1)x^3 + (3c_2 - 6a_4a_1^2 - (2a_2a_1+a_4^2)a_4)yx^2 + 3c_{12}zx^2 + (-3a_2a_4^2 + 2c_3 - 2a_4^2a_1 - 4a_1^2a_2)y^2x + 2c_{11}z^2x + 2c_{13}xyz + c_{15}yz^2 + c_{10}z^3 + (c_4 - 2a_2^2a_4 - 2a_4a_1a_2)y^3 + c_{14}y^2z;$

$v_2 = 3b_4y^2 + b_{10}xz + b_2x^2 + 2b_3xy + 2b_5yz + b_6z^2 + (c_2 - 2a_4a_1^2 - 2a_4a_1a_2)x^3 + (2c_3 - 3a_4^2a_1 - 2(2a_2a_1 + a_4^2)a_2)yx^2 + c_{13}x^2z + (3c_4 - 6a_2^2a_4 - a_4^3 - 2a_4a_1a_2)y^2x + c_{15}xz^2 + 2c_{14}xyz + 2c_7yz^2 + c_8z^3 + (-4a_2^3 + 4c_5 - a_2a_4^2)y^3 + 3c_6y^2z;$

$v_3 = 3b_7z^2 + b_{10}xy + b_5y^2 + 2b_6yz + 2b_8xz + b_9x^2 + c_{13}x^2y + c_{14}xy^2 + 2c_{15}xyz + 4c_9z^3 + 2c_7y^2z + c_6y^3 + 3c_8yz^2 + 3c_{10}z^2x + 2c_{11}zx^2 + c_{12}x^3.$

A imagem de θ não é transversal ao estrato-3_{A_2} se, e somente se, $\mathbb{R}\cdot\{v_1, v_2, v_3\}$ + kernel $\xi_1 \cap$ kernel $\xi_2 \subsetneq V_3$. Como kernel $\xi_1 \cap$ kernel ξ_2 tem codimensão dois, esta não

transversalidade significa que existem dois vetores, linearmente independentes, $\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3$ $(j = 1, 2)$, tal que

$$\xi_1(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = 0$$
$$\xi_2(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = 0$$

para $j = 1, 2$. Isto é, fazendo $x = \lambda_j$, $y = \mu_j$, $z = \beta_j$, teremos que ter duas soluções linearmente independentes para o sistema:

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0 \tag{1}$$

$$B_1 x + B_2 y + B_3 z = 0, \tag{2}$$

onde, $A_1 = \xi_1(v_1) = b_8$, $A_2 = \xi_1(v_2) = b_6$, $A_3 = \xi_1(v_3) = 3b_7$,

$B_1 = \xi_2(v_1) = -(-2a_1b_{10}^5b_6 + 3c_{10}a_4^2b_{10}^4 + 8c_{15}b_6b_9b_{10}^2a_4^2 - 32c_{15}b_6b_9b_{10}^2a_2a_1 + 32c_{11}b_6b_{10}^3a_2a_1 + 64c_{13}b_6^2b_9b_{10}a_2a_1 -$
$16c_{13}b_6^2b_9b_{10}a_4^2 - 64c_{14}b_6^2b_9^2a_2a_1 - 8c_{11}b_6b_{10}^3a_4^2 + 128b_5c_{15}b_6b_9^2a_2a_1 + 32b_5c_{11}b_6b_{10}b_9a_4^2 - 192b_5^2b_8^2c_{12}a_2a_1 - 48b_5^2b_8^2b_{10}b_1a_4 -$
$32b_5^2b_8^2b_9b_2a_4 + 16b_5^2b_8b_{10}b_9^2a_4 + 256b_5^2b_8c_{11}b_9a_2a_1 - 64b_5^2b_8c_{11}b_9a_4^2 - 192b_5^2c_{10}a_2a_1b_9^2 - 32b_5^2b_{10}a_1b_6b_9^2 + 32b_5^2b_8^2b_{10}a_1b_2 +$
$192b_5^2b_8^2b_9a_2b_1 + 32b_5^2b_9^3b_6a_4 + 48b_5^2b_8^2c_{12}a_4^2 - 64b_5^2b_8b_9^3a_2 + 48b_5^2c_{10}a_4^2b_9^2 + 16b_8^2b_9a_2b_3b_{10}^2 - 24b_8^2b_9b_4a_4b_{10}^2 + 24b_8^2a_1b_4b_{10}^3 -$
$16b_8^2c_{14}b_{10}^2a_2a_1 - 8b_8b_2b_{10}^3a_4b_6 + 2b_9b_6a_4b_{10}^4 + 32b_8b_9a_2b_2b_{10}^2b_6 + 64b_8c_{14}b_9b_6b_{10}a_2a_1 - 16b_8c_{14}b_9b_6b_{10}a_4^2 + 16b_8c_{15}b_{10}^3a_2a_1 -$
$96b_8a_1b_9b_4b_6b_{10}^2 - 64b_8b_9^2a_2b_3b_6b_{10} + 16b_8a_1b_3b_6b_{10}^3 + 8b_8c_{13}b_6b_{10}^2a_4^2 - 32b_8c_{13}b_6b_{10}^2a_2a_1 + 96b_8b_9^2b_4a_4b_6b_{10} + b_8b_{10}^5a_4 +$
$8b_9b_2a_4b_{10}^2b_6^2 + 8a_1b_2b_6^2b_{10}^3 - 4b_8c_{15}b_{10}^3a_4^2 - 4b_8b_9a_2b_{10}^4 + 4b_8^2c_{14}b_{10}^2a_4^2 - 4b_8^2b_3b_{10}^3a_4 + 96b_{10}a_1b_9^2b_4b_6^2 - 64b_9^2a_2b_2b_{10}b_6^2 +$
$48b_9a_2b_1b_6^2b_{10}^2 + 16b_9^2b_3a_4b_{10}b_6^2 + 64b_9^3a_2b_3b_6^2 - 32a_1b_3b_6^2b_9b_{10}^2 - 12c_{10}a_2a_1b_{10}^4 + 16c_{14}b_6^2b_9^2a_4^2 - 96b_9^3b_4a_4b_6^2 - 48c_{12}b_6^2b_{10}^2a_2a_1 -$
$12b_1b_6^2b_{10}^3a_4 + 12c_{12}b_6^2b_{10}^2a_4^2 - 128b_5c_{11}b_6b_{10}b_9a_2a_1 - 24b_5c_{10}a_4^2b_{10}^2b_9 - 32b_5c_{15}b_6b_9^2a_4^2 + 16b_5a_1b_{10}^3b_6b_9 + 16b_5b_8^2b_2b_{10}^2a_4 -$
$32b_5b_8^2a_1b_3b_{10}^2 - 16b_5b_8^2c_{13}b_{10}a_4^2 + 32b_5b_8b_9^2a_2b_{10}^2 + 128b_5b_8b_9^2a_2b_2b_6 + 16b_5b_8c_{11}b_{10}^2a_4^2 + 16b_5b_8c_{15}b_{10}b_9a_4^2 - 64b_5b_8^2b_9a_2b_2b_{10} +$
$32b_5b_8^2b_9b_3a_4b_{10} + 64b_5b_8^2c_{13}b_{10}a_2a_1 - 48b_5b_8c_{12}b_6b_{10}a_4^2 + 64b_5b_8b_{10}a_1b_3b_6b_9 - 64b_5b_8c_{11}b_{10}^2a_2a_1 - 128b_5b_8c_{13}b_6b_9a_2a_1 -$
$16b_5b_9^2b_6a_4b_{10}^2 - 192b_5b_8b_9a_2b_1b_6b_{10} + 192b_5b_8c_{12}b_6b_{10}a_2a_1 - 8b_5b_8b_9b_{10}^3a_4 + 96b_5c_{10}a_2a_1b_{10}^2b_9 - 64b_5b_8b_9^2b_3a_4b_6 +$
$32b_5b_8c_{13}b_6b_9a_4^2 + 48b_5b_8b_1a_4b_6b_{10}^2 - 32b_5b_8a_1b_2b_6b_{10}^2 - 64b_5b_8c_{15}b_{10}b_9a_2a_1)/((-b_{10}^2 + 4b_5b_9)(4a_2a_1 - a_4^2))$,

$B_2 = \xi_2(v_2) = -(-2b_8a_2b_{10}^5 + b_{10}^5a_4b_6 + 32b_8c_7b_{10}^3a_2a_1 + 48b_8b_9b_4a_4b_6b_{10}^2 - 48b_8c_6b_9b_6b_{10}a_4^2 - 8b_8b_3b_{10}^3a_4b_6 -$
$32b_8b_9a_2b_3b_6b_{10}^2 - 8b_8c_7b_{10}^3a_4^2 + 12b_8^2c_6b_{10}^2a_4^2 - 192c_6b_6^2b_9^2a_2a_1 - 48b_{10}b_9^2b_4a_4b_6^2 - 16c_{13}b_6^2b_{10}^2a_2a_1 - 16c_{14}b_6^2b_9b_{10}a_4^2 -$
$32b_9a_2b_2b_{10}^2b_6^2 + 32b_{10}b_9^2a_2b_3b_6^2 + 48c_6b_6^2b_9^2a_4^2 + 16c_{15}b_6b_{10}^3a_2a_1 + 3c_8a_4^2b_{10}^4 - 64c_7b_6b_9b_{10}^2a_2a_1 + 16c_7b_6b_9b_{10}^2a_4^2 +$
$64c_{14}b_6^2b_9b_{10}a_2a_1 + 8b_8^2a_2b_3b_{10}^3 - 12b_8^2b_4a_4b_{10}^3 + 16b_3b_{10}^2a_4b_6^2b_9 - 4b_2b_6^2b_{10}^3a_4 - 48b_8^2c_6b_{10}^2a_2a_1 + 4c_{13}b_6^2b_{10}^2a_4^2 - 4c_{15}b_6b_{10}^3a_4^2 -$
$12c_8a_2a_1b_{10}^4 + 24a_2b_1b_6^2b_{10}^3 - 96b_5b_8a_2b_1b_6b_{10}^2 + 64b_5b_8^2c_{14}b_{10}a_2a_1 + 64b_5b_8c_{13}b_6b_{10}a_2a_1 + 32b_5b_8c_{14}b_6b_9a_4^2 - 8b_5b_9b_6a_4b_{10}^3 -$
$32b_5b_8^2a_2b_2b_{10}^2 - 16b_5b_8^2c_{14}b_{10}a_4^2 + 16b_5b_8b_9a_2b_{10}^3 + 8b_5b_8c_{15}b_{10}^2a_4^2 + 16b_5c_{15}b_6b_{10}b_9a_4^2 + 32b_5a_1b_3b_8b_6b_{10}^2 + 16b_5a_1b_2b_6^2b_{10}^2 +$
$48b_5a_1b_4b_8^2b_{10}^2 + 32b_5b_2b_6^2b_{10}b_9a_4 + 64b_5b_8b_{10}b_9a_2b_2b_6 - 64b_5a_1b_9b_3b_{10}b_6^2 + 192b_5a_1b_9^2b_4b_6^2 - 192b_5a_1b_8b_9b_4b_6b_{10} -$
$64b_5c_7b_6b_9^2a_4^2 + 96b_5c_8a_2a_1b_{10}^2b_9 + 256b_5c_7b_6b_9^2a_2a_1 - 24b_5c_8a_4^2b_{10}^2b_9 - 64b_5c_{15}b_6b_{10}b_9a_2a_1 - 32b_5b_3b_9^2b_6^2a_4 - 24b_5b_1b_6^2b_{10}^2a_4 +$
$8b_5b_3b_{10}^2b_8^2a_4 - 128b_5b_8c_7b_{10}b_9a_2a_1 - 32b_5b_8c_{15}b_{10}^2a_2a_1 + 32b_5b_8c_7b_{10}b_9a_4^2 - 128b_5b_8c_{14}b_6b_9a_2a_1 - 16b_5b_8c_{13}b_6b_{10}a_4^2 +$
$16b_5^2b_8^2c_{13}a_4^2 + 48b_5^2c_8a_4^2b_9^2 + 2b_5b_{10}^4b_8a_4 - 4b_5a_1b_{10}^4b_6 - 64b_5^2b_8a_1b_2b_6b_{10} - 64b_5^2b_8b_2b_6b_9a_4 + 128b_5^2b_8a_1b_3b_6b_9 +$

$128b_5^2b_8c_{15}b_9a_2a_1 - 32b_5^2b_8b_{10}b_9^2a_2 + 96b_5^2b_8b_1a_4b_6b_{10} - 16b_5^2b_8b_9b_{10}^2a_4 - 32b_5^2b_8c_{15}b_9a_4^2 - 192b_5^2c_8a_2a_1b_9^2 + 32b_5^2a_1b_{10}^2b_6b_9 +$
$16b_5^2b_{10}b_9^2b_6a_4 - 64b_5^2b_8^2a_1b_3b_{10} + 96b_5^2b_8^2b_{10}a_2b_1 - 64b_5^2b_8^2c_{13}a_2a_1 + 16b_5^2b_8^2b_{10}b_2a_4 + 64b_5^3b_8^2a_1b_2 - 96b_5^3b_8^2b_1a_4 + 16b_8a_2b_2b_{10}^3b_6 +$
$192b_8c_6b_9b_6b_{10}a_2a_1 - 32b_8c_{14}b_6b_{10}^2a_2a_1 + 8b_8c_{14}b_6b_{10}^2a_4^2 + 32b_5^3b_9^2a_4b_8 - 64b_5^3a_1b_6b_9^2)/((-b_{10}^2 + 4b_5b_9)(4a_2a_1 - a_4^2)),$

$B_3 = \xi_2(v_3) = -4(-a_1b_{10}^4b_6^2 + 3c_9a_4^2b_{10}^4 + 2b_8c_{15}b_6b_{10}^2a_4^2 - 24b_8b_9^2b_4a_4b_6^2 - 6b_8^2b_3a_4b_{10}^2b_6 + 8b_8^2a_2b_2b_{10}^2b_6 + 12b_8^2b_6a_1b_4b_{10}^2 -$
$8b_8^2c_7b_{10}^2a_2a_1 - 16a_1b_3b_6^3b_9b_{10} + 8b_9b_2a_4b_6^3b_{10} + 6c_8b_6b_9b_{10}^2a_4^2 + 12c_{10}b_6b_{10}^3a_2a_1 - 8c_{11}b_6^2b_{10}^2a_2a_1 - 32c_7b_6^2b_9^2a_2a_1 -$
$4c_{15}b_6^2b_9b_{10}a_4^2 + 8b_5b_8^3b_3a_4b_{10} + 8b_5b_8^2a_2b_{10}^2b_9 - 4b_5b_8^2c_{15}b_{10}a_4^2 + 6b_5b_8c_{10}b_{10}^2a_4^2 + 8b_5a_1b_{10}^2b_6^2b_9 - 16b_5b_8^3a_2b_2b_{10} -$
$24b_5c_9a_4^2b_{10}^2b_9 - 24b_5c_8b_6b_9^2a_4^2 - 192b_5^2c_9a_2a_1b_9^2 - 24b_5^2b_8c_{10}b_9a_4^2 + 16b_5^2b_8a_4b_6b_9^2 - 24b_5^2b_8^2b_6b_1a_4 + 16b_5^2b_8^2b_6a_1b_2 -$
$32b_5^2b_8^2c_{11}a_2a_1 + 12b_8c_8b_{10}^3a_2a_1 - 6b_8b_2a_4b_6^2b_{10}^2 + 16b_8a_2b_3b_9^2b_6^2 + 12b_8a_2b_1b_6^2b_{10}^2 + 8b_8a_1b_3b_6^2b_{10}^2 + 96b_5^2b_8c_{10}b_9a_2a_1 +$
$4b_8^3a_2b_3b_{10}^2 - b_8^2a_2b_{10}^4 + 2c_{11}b_6^2b_{10}^2a_4^2 - 3c_{10}b_6b_{10}^3a_4^2 + 8c_7b_6^2b_9^2a_4^2 + 2b_8^2c_7b_{10}^2a_4^2 - 6b_8^3b_4a_4b_{10}^2 + 16b_8b_9b_3a_4b_{10}b_6^2 -$
$48b_8a_1b_9b_4b_6^2b_{10} - 8b_8c_{15}b_6b_{10}^2a_2a_1 - 8b_8c_7b_9b_6b_{10}a_4^2 - 16b_8a_2b_2b_6^2b_{10}b_9 + 48a_1b_9^2b_4b_6^3 + 4a_1b_2b_6^3b_{10}^2 - 6b_1b_6^3b_{10}^2a_4 +$
$24b_8^2b_9b_4a_4b_6b_{10} - 16b_8^2b_9a_2b_3b_6b_{10} - 8b_9^2b_3a_4b_6^3 - 24c_8b_6b_9b_{10}^2a_2a_1 + 16c_{15}b_6^2b_9b_{10}a_2a_1 + 32b_8c_7b_9b_6b_{10}a_2a_1 - 12c_9a_2a_1b_{10}^4 +$
$32b_5b_8c_{11}b_6b_{10}a_2a_1 - 48b_5c_{10}b_6b_{10}b_9a_2a_1 - 3b_8c_8b_{10}^3a_4^2 + b_8b_{10}^4a_4b_6 + 48b_5^2b_8^3a_2b_1 - 48b_5b_8c_8b_{10}b_9a_2a_1 - 8b_5^2b_8^3b_2a_4 -$
$32b_5b_8c_{15}b_6b_9a_2a_1 + 48b_5^2c_9a_4^2b_9^2 - 16b_5^2a_1b_6^2b_9^2 + 8b_5^2b_8^2c_{11}a_4^2 - 16b_5^2b_8^2b_9^2a_2 - 24b_5b_8c_{10}b_{10}^2a_2a_1 - 16b_5b_8a_1b_2b_6^2b_{10} +$
$12b_5b_8c_8b_{10}b_9a_4^2 - 16b_5b_8b_9b_2a_4b_6^2 + 32b_5b_8a_1b_3b_6^2b_9 + 24b_5b_8b_1a_4b_6^2b_{10} + 8b_5b_8c_{15}b_6b_9a_4^2 - 8b_5b_8b_9b_6a_4b_{10}^2 - 8b_5b_8c_{11}b_6b_{10}a_4^2 +$
$16b_5b_8^2c_{15}b_{10}a_2a_1 - 16b_5b_8^2b_9b_3a_4b_6 - 16b_5b_8^2b_6a_1b_3b_{10} + 32b_5b_8^2b_9a_2b_2b_6 + 16b_5b_8^2b_2a_4b_6b_{10} - 48b_5b_8^2a_2b_1b_6b_{10} +$
$96b_5c_8b_6b_9^2a_2a_1 + 96b_5c_9a_2a_1b_{10}^2b_9 + 12b_5c_{10}b_6b_{10}b_9a_4^2)/((-b_{10}^2 + 4b_5b_9)(4a_2a_1 - a_4^2)).$

No caso em que $A_iB_j \neq 0$ para algum $i, j = 1, 2, 3$, (1) e (2) são equações de planos. Para termos duas soluções linearmente independentes, estes dois planos devem ser paralelos. Caso contrário eles se interceptariam em uma só reta e isso daria apenas uma solução.

Sabemos que $A_3 = 3b_7 \neq 0$ para 3_{A_2}, logo podemos dividir em dois casos:

(i) Se $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ a equação (2) gera o espaço todo. Portanto, basta tomar duas soluções linearmente independentes do plano (1).

(ii) Se existir um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A_1 - \lambda B_1 = 0$, $A_2 - \lambda B_2 = 0$ e $A_3 - \lambda B_3 = 0$ então os planos são paralelos. Portanto, existem duas soluções linearmente independentes.

Mas genericamente, ou seja, quando $B_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, 3$ e $A_j - \lambda B_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, 3$, vale o fato que imagem de θ é transversal ao estrato-3_{A_2}. Então, pelo Teorema 1.25, a variedade 3_{A_2} em M, que é igual a $\theta^{-1}(3_{A_2})$ é uma variedade de codimensão dois, o que significa que é uma curva (ver Figura 3.1). ■

3.4.2 Demostração da Proposição 3.9

Prova: Suponha que P tem uma singularidade 4_1^2 na origem, e tome, sem perda de generalidade $P(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z))$ tal que $j^3 f = a_1x^2 + a_2y^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_8xz^2 + b_9x^2z + b_{10}xyz$ com $a_5 \neq 0$ e $b_6a_5 - b_8a_6 = 0$. O espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f em V_3 é dado pelos vetores u_i, $i = 1, \cdots, 10$ (ver Lema 3.6). Quando $a_6b_8(a_5^3b_5 - a_2a_5^2b_8 - a_5^2a_6b_{10} + a_4a_5a_6b_8 - a_1a_6^2b_8 + a_6^2b_9) \neq 0$ um transversal à órbita pode ser dado por $T = \mathbb{R}\{y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, y^2z, x^2z, xyz, z^3\}$ e um elemento de T é dado por $\bar{f} = j^3f + \bar{a}_2y^2 + \bar{b}_1x^3 + \bar{b}_2x^2y + \bar{b}_3xy^2 + \bar{b}_4y^3 + \bar{b}_5y^2z + \bar{b}_7z^3 + \bar{b}_9x^2z + \bar{b}_{10}xyz$, onde $\bar{a}_3$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$, $\bar{b}_4$, $\bar{b}_5$, $\bar{b}_7$, $\bar{b}_9$, $\bar{b}_{10} \in \mathbb{R}$.

Consideremos no transversal a projeção na direção singular sobre o espaço tangente, $(\alpha, \beta, 1, 0)$, ou seja $P(x,y,z) = (x, y, \bar{f}(x + \alpha z, y + \beta z, z))$. Neste transversal, temos uma singularidade 4_1^2 se

$$coef(z^2) = a_5\alpha + a_6\beta + a_1\alpha^2 + (a_2 + \bar{a}_2)\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0,$$

$$coef(yz^2).coef(xz) - coef(xz^2).coef(yz) = (2b_6a_1 + b_{10}a_5 - b_8a_4 - 2b_9a_6)\alpha +$$

$$(b_6a_4 + 2b_5a_5 - 2b_8a_2 - b_{10}a_6)\beta + O_1(2) = 0, \text{ e}$$

$$coef(z^3) = \bar{b}_7 + b_8\alpha + b_6\beta + O_2(2) = 0,$$

onde $O_1(2)$ e $O_2(2)$ são os termos de ordem maior ou igual a dois em α, β, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$ e são nulos se $\alpha = \beta = 0$. Como $a_5 \neq 0$, da primeira equação pelo Teorema da Função Implícita temos que α é uma função de β onde o primeiro jato é $\alpha = -\frac{a_6}{a_5}\beta$. Substituindo α na segunda equação temos que genericamente o coeficiente de β é não nulo e portanto a solução próxima do zero é $\beta = 0$. Logo $\alpha = 0$. A terceira condição nos dá então $\bar{b}_7 = 0$, que é a condição para termos singularidade 4_1^2 no transversal.

Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-4_1^2 em V_3, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_f4_1^2 = V_3$, e assim saberemos quando $\theta^{-1}(4_1^2)$ é variedade em $\mathbb{R}^3$ de codimensão igual a um.

O espaço tangente do estrato-4_1^2 em V_3 é o núcleo de uma forma diferenciável ξ. Como ξ tem que anular o tangente ao estrato-4_1^2 no transversal e os geradores do espaço tangente de $\mathcal{G}.f$, então $\xi = -b_8da_2 + a_5da_3$. Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_3, são:

$$v_1 = b_{10}yz + 3b_1x^2 + b_8z^2 + 2b_9zx + 2b_2xy + b_3y^2 + (-4a_1^3 - a_4^2a_1 + 4c_1 - a_5^2a_1)x^3 + (-(2a_2a_1 + a_4^2)a_4 - 6a_4a_1^2 + 3c_2 - (a_6a_1 + a_5a_4)a_5)x^2y + (-6a_5a_1^2 + 3c_{12} - a_5^3 - (a_6a_1 + a_5a_4)a_4)zx^2 +$$

$(-2a_4^2a_1 - 4a_1^2a_2 - 3a_2a_4^2 + 2c_3 - (a_6a_4 + a_5a_2)a_5)xy^2 + (2c_{13} - (2a_6a_4 + 2a_5a_2)a_4 - 4a_4a_5a_1 - 4a_1^2a_6 - 2a_6a_5^2)zyx + (-2a_5^2a_1 + 2c_{11} - a_6a_5a_4)z^2x + (-2a_4a_1a_2 - 2a_2^2a_4 - a_6a_2a_5 + c_4)y^3 + (-3a_6a_2a_4 + c_{14} - 2a_5a_1a_2 - 2a_4a_1a_6 - a_6^2a_5)zy^2 + (-a_6^2a_4 - 2a_5a_1a_6 + c_{15})z^2y + c_{10}z^3;$

$v_2 = 3b_4y^2 + b_2x^2 + b_{10}xz + 2b_5yz + b_6z^2 + 2b_3xy + (-a_5a_1a_6 - 2a_4a_1^2 - 2a_4a_1a_2 + c_2)x^3 + (2c_3 - (a_6a_1 + a_5a_4)a_6 - 2(2a_2a_1 + a_4^2)a_2 - 3a_4^2a_1)x^2y + (-a_6a_5^2 - 2(a_6a_1 + a_5a_4)a_2 - 3a_4a_5a_1 + c_{13})zx^2 + (3c_4 - (a_6a_4 + a_5a_2)a_6 - a_4^3 - 6a_2^2a_4 - 2a_4a_1a_2)xy^2 + (2c_{14} - 2a_6^2a_5 - 2(2a_6a_4 + 2a_5a_2)a_2 - 2a_4a_1a_6 - 2a_4^2a_5)zyx + (-a_4a_5^2 + c_{15} - 2a_6a_2a_5)z^2x + (-a_6^2a_2 - a_2a_4^2 + 4c_5 - 4a_2^3)y^3 + (3c_6 - a_6^3 - a_4a_5a_2 - a_4^2a_6 - 6a_6a_2^2)zy^2 + (2c_7 - 2a_6^2a_2 - a_6a_5a_4)z^2y + c_8z^3;$

$v_3 = 2b_8zx + b_{10}xy + b_5y^2 + b_9x^2 + 2b_6yz + (c_{12} - 2a_5a_1^2 - a_4a_1a_6)x^3 + (-3a_4a_5a_1 + c_{13} - (2a_2a_1 + a_4^2)a_6)x^2y + (2c_{11} - 3a_5^2a_1 - (a_6a_1 + a_5a_4)a_6)zx^2 + (c_{14} - 2a_5a_1a_2 - a_4^2a_5 - 3a_6a_2a_4)xy^2 + (-2a_5a_1a_6 + 2c_{15} - (2a_6a_4 + 2a_5a_2)a_6 - 2a_4a_5^2)zyx + (-a_6^2a_5 + 3c_{10} - a_5^3)z^2x + (c_6 - 2a_6a_2^2 - a_4a_5a_2)y^3 + (-3a_6^2a_2 + 2c_7 - a5^2a2 - a6a5a4)zy^2 + (-a6^3 - a6a5^2 + 3c_8)z^2y + 4c_9z^3.$

A imagem de θ não é transversal ao estrato 4_1^2 se, e somente se, $\mathbb{R}\cdot\{v_1, v_2, v_3\}$ + kernel $\xi \subsetneq V_3$. Como kernel ξ tem codimensão 1, esta não transversalidade significa que v_1, v_2, v_3 pertencem ao kernel ξ. Isto é se, e somente se,

$$\begin{aligned} \xi(v_1) = 0 &\Leftrightarrow -b_8^2 + a_5c_{10} = 0, \\ \xi(v_2) = 0 &\Leftrightarrow -b_8b_6 + a_5c_8 = 0, \\ \xi(v_3) = 0 &\Leftrightarrow a_5c_9 = 0. \end{aligned}$$

Como temos uma singularidade 4_1^2 então $\xi(v_3) \neq 0$, e portanto a imagem de θ é sempre transversal ao estrato 4_1^2. Consequentemente, pelo Teorema 1.25, a variedade 4_1^2 em M, que é igual a $\theta^{-1}(4_1^2)$ é sempre uma superfície suave de codimensão 1 em M, isto é, de dimensão dois (ver Figura 3.1). ■

3.4.3 Demostração da Proposição 3.10

Prova: Suponha que P tem uma singularidade 4_1^3 na origem, e tome, sem perda de generalidade $P(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ tal que $j^4f = a_1x^2 + a_2y^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_8z^2x + b_9zx^2 + b_{10}xyz + c_1x^4 + c_2x^3y + c_3x^2y^2 + c_4xy^3 + c_5y^4 + c_6y^3z + c_7y^2z^2 + c_8yz^3 + c_9z^4 + c_{10}z^3x + c_{11}z^2x^2 + c_{12}zx^3 + c_{13}x^2yz + c_{14}xy^2z + c_{15}xyz^2$

com $a_5 \neq 0$ e $c_9 \neq 0$. O espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f em V_4 é dado pelos vetores u_i, $i = 1, \cdots, 10$ (ver Lema 3.6). Quando $a_6 b_8(a_5^3 b_5 - a_2 a_5^2 b_8 - a_5^2 a_6 b_{10} + a_4 a_5 a_6 b_8 - a_1 a_6^2 b_8 + a_6^2 b_9) \neq 0$ (mesma condição do transversal para 4_1^2), um transversal à órbita pode ser dado por $T = \mathbb{R}\{y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, y^2z, x^2z, xyz, z^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, y^3z, y^2z^2, yz^3, xz^3, x^2z^2, x^3z, x^2yz, xy^2z, xyz^2\}$, e um elemento de T é $\bar{f} = j^4 f + \bar{a}_2 y^2 + \bar{b}_1 x^3 + \bar{b}_2 x^2 y + \bar{b}_3 xy^2 + \bar{b}_4 y^3 + \bar{b}_5 y^2 z + \bar{b}_7 z^3 + \bar{b}_9 x^2 z + \bar{b}_{10} xyz + \bar{c}_1 x^4 + \bar{c}_2 x^3 y + \bar{c}_3 x^2 y^2 + \bar{c}_4 xy^3 + \bar{c}_5 y^4 + \bar{c}_6 y^3 z + \bar{c}_7 y^2 z^2 + \bar{c}_8 yz^3 + \bar{c}_{10} xz^3 + \bar{c}_{11} x^2 z^2 + \bar{c}_{12} x^3 z + \bar{c}_{13} x^2 yz + \bar{c}_{14} xy^2 z + \bar{c}_{15} xyz^2$ onde $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i \in \mathbb{R}$.

Consideremos no transversal a projeção na direção singular sobre o espaço tangente, $(\alpha, \beta, 1, 0)$. Ou seja $P(x, y, z) = (x, y, \bar{f}(x + \alpha z, y + \beta z, z))$. Neste transversal, temos uma singularidade 4_1^3 se

$$coef(z^2) = a_5\alpha + a_6\beta + a_1\alpha^2 + (a_2 + \bar{a}_2)\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0,$$

$$coef(yz^2).coef(xz) - coef(xz^2).coef(yz) = (2b_6a_1 + b_{10}a_5 - b_8a_4 - 2b_9a_6)\alpha +$$

$$(b_6a_4 + 2b_5a_5 - 2b_8a_2 - b_{10}a_6)\beta + O_1(2) = 0,$$

$$coef(z^3) = \bar{b}_7 + b_8\alpha + b_6\beta + O_2(2) = 0, \text{ e}$$

$$-\frac{3}{8}(-coef(xz^3)coef(yz)/coef(xz) + coef(yz^3))^2/coef(z^4) + coef(x^2z^2).$$

$$coef(yz)^2/coef(xz)^2 + coef(y^2z^2) - coef(xyz^2)coef(yz)/coef(xz) - coef(xz^2)(-coef(xyz).$$

$$coef(yz)/coef(xz) + coef(x^2z)coef(yz)^2/(coef(xz)^2) + coef(y^2z))/coef(xz) = 0$$

onde $O_1(2)$ e $O_2(2)$ são os termos de ordem maior ou igual a dois em α, β, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$ e são nulos se $\alpha = \beta = 0$.

Analogamente ao caso 4_1^2 temos que genericamente as soluções são $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Substituindo estes valores nas terceira e quarta equações temos que a terceira equação é dada por $\bar{b}_7 = 0$ e a quarta condição é $\frac{3}{4a_5c_9}(-c_{10}a_6/a_5 + c_8)a_6\bar{c}_{10} - \frac{3}{4c_9}(-c_{10}a_6/a_5 + c_8)\bar{c}_8 - \frac{a_6}{a_5}\bar{c}_{15} + \frac{a_6^2}{a_5^2}\bar{c}_{11} + \frac{b_8a_6}{a_5^2}\bar{b}_{10} - \frac{b_8a_6^2}{a_5^3}\bar{b}_9 - \frac{b_8}{a_5}\bar{b}_5 + \bar{c}_7 - \frac{3a_6^2}{8a_5^2c_9}\bar{c}_{10}^2 + \frac{3a_6}{4a_5c_9}\bar{c}_8\bar{c}_{10} - \frac{3}{8c_9}\bar{c}_8^2$. É suficiente olharmos para o primeiro jato já que estamos interessados no tangente da variedade.

Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-4_1^3 em V_4, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_f 4_1^3 = V_4$, e assim saberemos quando $\theta^{-1}(4_1^3)$ é variedade em $\mathbb{R}^3$ de codimensão igual a dois.

O espaço tangente do estrato-4_1^3 em V_4 é a interseção dos núcleos de duas formas diferenciáveis ξ_1 e ξ_2. Como ξ_1 e ξ_2 têm que anular o tangente ao estrato-4_1^3 no transversal e os geradores do espaço tangente de $\mathcal{G}.f$, então

$\xi_1 = -b_8da_2 + a_5da_3$ e

$$\xi_2 = (-3a_5^7c_8^3 + 48a_5^7c_6c_9^2 + 3a_5^4a_6^3c_{10}^3 - 48a_5^4b_8a_4c_9^2a_6b_{10} - 32a_5^4b_8a_6a_1b_5c_9^2 + 24a_5^4a_4c_9a_6^2c_{10}^2 - 9a_5^5c_8a_6^2c_{10}^2 + 48a_5^5a_6^2c_{13}c_9^2 +$$

$$16a_5^5c_9^2b_{10}^2a_6 + 16a_5^5b_8a_4b_5c_9^2 + 32a_5^5c_9^2a_6b_9b_5 - 24a_5^5a_4c_9c_8a_6c_{10} + 32a_5^5c_9^2c_{15}a_6a_4 + 48a_5^5b_8a_6b_3c_9^2 + 24a_5^5b_8c_8a_6b_{10}c_9 +$$

$$24a_5^5b_8a_6c_{10}b_5c_9 - 48a_5^6b_8b_4c_9^2 - 48a_5^6a_6c_{14}c_9^2 + 9a_5^6c_8^2a_6c_{10} - 24a_5^6b_8c_8b_5c_9 - 16a_5^6c_9^2b_{10}b_5 + 32a_5^3c_9^2a_6^3b_9^2 - 48a_5^4a_6^3c_9^2c_{12} -$$

$$32a_5^4c_9^2c_{15}a_6^2a_1 - 24a_5^4b_8a_6^2c_{10}b_{10}c_9 - 24a_5^4b_8c_8a_6^2b_9c_9 - 48a_5^4b_8a_6^2b_2c_9^2 + 24a_5^4c_9c_{10}c_8a_6^2a_1 - 64a_5^4a_4c_9^2c_{11}a_6^2 - 48a_5^4c_9^2b_{10}a_6^2b_9 -$$

$$96a_5^2b_8c_9^2a_6^3b_9a_1 + 48a_5^3b_8a_6^3c_9^2b_1 + 24a_5^3b_8a_6^3c_{10}b_9c_9 + 64a_5^3b_8c_9^2b_{10}a_6^2a_1 + 80a_5^3b_8a_4c_9^2a_6^2b_9 - 24a_5^3c_9c_{10}^2a_6^3a_1 + 64a_5^3c_9^2a_6^3c_{11}a_1 -$$

$$64a_2a_5^4b_8c_9^2a_6b_9 + 32a_2a_5^5b_8c_9^2b_{10} - 24a_2a_5^5c_9c_{10}^2a_6 + 64a_2a_5^5c_9^2a_6c_{11} - 32a_2a_5^6c_9^2c_{15} + 24a_2a_5^6c_9c_{10}c_8)db_6 + (-3a_5^3a_6^4c_{10}^3 +$$

$$32a_5^6b_5^2c_9^2 + 3a_5^6a_6c_8^3 + 32a_5^4a_6^2c_9^2b_9b_5 - 32a_5^4a_6^2c_9^2c_{15}a_4 + 9a_5^4a_6^3c_8c_{10}^2 + 24a_5^4a_6^2c_9c_{10}c_8a_4 - 9a_5^5a_6^2c_8^2c_{10} + 48a_5^5a_6^2c_{14}c_9^2 +$$

$$48a_5^5b_8a_6b_4c_9^2 + 24a_5^5b_8a_6c_8b_5c_9 - 48a_5^5a_6b_{10}c_9^2b_5 - 48a_5^6a_6c_6c_9^2 + 48a_5^3a_6^4c_9^2c_{12} - 16a_5^3a_6^3c_9^2b_9b_{10} - 24a_5^3a_6^3c_9c_{10}^2a_4 -$$

$$24a_5^3a_6^3c_9a_1c_8c_{10} - 48a_5^4a_6^3c_{13}c_9^2 + 16a_5^4b_{10}^2c_9^2a_6^2 - 48a_5^4b_8a_6^2b_3c_9^2 - 24a_5^4b_8a_6^2c_{10}b_5c_9 + 16a_5^4b_8b_5c_9^2a_4a_6 - 24a_5^4b_8a_6^2c_8b_{10}c_9 +$$

$$64a_5b_8a_6^4c_9^2a_1b_9 - 64a_5^2a_6^4c_9^2a_1c_{11} + 24a_5^2a_6^4c_9a_1c_{10}^2 - 24a_5^2b_8a_6^4c_{10}b_9c_9 - 48a_5^2b_8a_6^4c_9^2b_1 - 32a_5^2b_8a_6^3c_9^2a_1b_{10} - 48a_5^2b_8a_6^3a_4c_9^2b_9 +$$

$$24a_5^3b_8a_6^3c_8b_9c_9 + 24a_5^3b_8a_6^3c_{10}b_{10}c_9 + 48a_5^3b_8a_6^3b_2c_9^2 + 64a_5^3a_6^3a_4c_9^2c_{11} + 16a_5^3b_8a_6^2a_4c_9^2b_{10} + 32a_5^3a_6^3c_9^2a_1c_{15} + 24a_2a_5^4a_6^2c_9c_{10}^2 -$$

$$24a_2a_5^5a_6c_9c_{10}c_8 + 32a_2a_5^5a_6c_9^2c_{15} - 32a_2a_5^5b_8b_5c_9^2 - 64a_2a_5^4a_6^2c_9^2c_{11} + 32a_2a_5^3b_8a_6^2c_9^2b_9)db_8 + (32a_5^4a_6^3c_9^2b_9 + 32a_5^4b_8a_6^2c_9^2a_4 -$$

$$32a_5^3b_8a_6^3c_9^2a_1 - 32a_2a_5^5b_8a_6c_9^2 - 32a_5^5a_6^2c_9^2b_{10} + 32a_5^6a_6c_9^2b_5)dc_{15} + (-24a_5^6c_9a_6c_{10}b_5 - 24a_5^4c_9a_6^3c_{10}b_9 + 24a_5^5b_8c_9c_8a_6a_4 -$$

$$24a_2a_5^6b_8c_9c_8 + 24a_2a_5^5b_8c_9a_6c_{10} + 24a_5^7c_9c_8b_5 + 24a_5^3b_8c_9a_6^3c_{10}a_1 - 24a_5^4b_8c_9c_8a_6^2a_1 + 24a_5^5c_9a_6^2c_{10}b_{10} - 24a_5^6c_9c_8a_6b_{10} +$$

$$24a_5^5c_9c_8a_6^2b_9 - 24a_5^4b_8c_9a_6^2c_{10}a_4)dc_8 + (32a_5^4b_8c_9^2a_6^2a_1 + 32a_2a_5^6b_8c_9^2 - 32a_5^5b_8c_9^2a_6a_4 + 32a_5^6c_9^2a_6b_{10} - 32a_5^7c_9^2b_5 -$$

$$32a_5^5c_9^2a_6^2b_9)dc_7 + (-32a_5^5b_8c_9^2a_6b_{10} - 32a_2a_5^5c_9^2b_8^2 - 32a_5^3b_8^2c_9^2a_6^2a_1 + 32a_5^6b_8c_9^2b_5 + 32a_5^4b_8^2c_9^2a_6a_4 + 32a_5^4b_8c_9^2a_6^2b_9)db_5 +$$

$$(32a_5^4a_6^3c_9^2b_{10} - 32a_5^3b_8a_6^3c_9^2a_4 - 32a_5^3a_6^4c_9^2b_9 - 32a_5^5a_6^2c_9^2b_5 + 32a_5^2b_8a_6^4c_9^2a_1 + 32a_2a_5^4b_8a_6^2c_9^2)dc_{11} + (24a_5^5a_6^2c_9c_{10}b_5 +$$

$$24a_5^5a_6^2c_9c_8b_{10} - 24a_5^4a_6^3c_9c_8b_9 - 24a_5^2b_8a_6^4c_9c_{10}a_1 - 24a_2a_5^4b_8a_6^2c_9c_{10} - 24a_5^6a_6c_9c_8b_5 + 24a_2a_5^5b_8a_6c_9c_8 + 24a_5^3b_8a_6^3c_9c_8a_1 -$$

$$24a_5^4b_8a_6^2c_9c_8a_4 + 24a_5^3a_6^4c_9c_{10}b_9 - 24a_5^4a_6^3c_9c_{10}b_{10} + 24a_5^3b_8a_6^3c_9c_{10}a_4)dc_{10} + (32a_5^4b_8a_6^2c_9^2b_{10} - 32a_5^3b_8a_6^3c_9^2b_9 -$$

$$32a_5^3b_8^2a_6^2c_9^2a_4 + 32a_2a_5^4b_8^2a_6c_9^2 + 32a_5^2b_8^2a_6^3c_9^2a_1 - 32a_5^5b_8a_6c_9^2b_5)db_{10} + (32a_5^2b_8^2a_6^3c_9^2a_4 - 32a_2a_5^3b_8^2a_6^2c_9^2 - 32a_5b_8^2a_6^4c_9^2a_1 +$$

$$32a_5^4b_8a_6^2c_9^2b_5 + 32a_5^2b_8a_6^4c_9^2b_9 - 32a_5^3b_8a_6^3c_9^2b_{10})db_9 + (12a_2a_5^6b_8c_8^2 - 24a_5^5c_8a_6^2c_{10}b_{10} - 12a_5^5c_8^2a_6^2b_9 - 12a_5^3a_6^4c_{10}^2b_9 +$$

$$24a_5^6c_8a_6c_{10}b_5 + 12a_5^6c_8^2a_6b_{10} - 12a_5^3b_8a_6^3c_{10}^2a_4 - 12a_5^5a_6^2c_{10}^2b_5 + 12a_5^4a_6^3c_{10}^2b_{10} - 24a_2a_5^5b_8c_8a_6c_{10} - 12a_5^5b_8c_8^2a_6a_4 -$$

$$12a_5^7c_8^2b_5 + 12a_2a_5^4b_8a_6^2c_{10}^2 + 24a_5^4c_8a_6^3c_{10}b_9 + 12a_5^4b_8c_8^2a_6^2a_1 - 24a_5^3b_8c_8a_6^3c_{10}a_1 + 24a_5^4b_8c_8a_6^2c_{10}a_4 + 12a_5^2b_8a_6^4c_{10}^2a_1)dc_9 +$$

$$(3a_5^6b_{10}c_8^3 + 16a_5^4b_{10}a_6^2c_{13}c_9^2 - 48a_5^4b_8b_9a_6c_8b_5c_9 + 96a_5^4a_6^2c_{12}c_9^2b_5 - 48a_5^4a_1a_6c_{10}c_9c_8b_5 + 33a_5^4c_{10}^2c_8a_6^2b_{10} + 16a_5^5c_{14}c_9^2b_{10}a_6 +$$

$$64a_5^4b_{10}c_9^2a_6b_9b_5 + 64a_5^4a_1c_{15}a_6c_9^2b_5 - 16a_5^4b_8b_3c_9^2b_{10}a_6 - 16a_5^4b_8c_{14}c_9^2a_4a_6 - 24a_5^4b_8^2a_4c_8b_5c_9 + 64a_5^4a_4c_9^2a_6c_{11}b_5 -$$

$$24a_5^4c_{15}c_9a_6^2c_{10}b_{10} - 48a_5^4a_6^2c_{11}c_9c_{10}b_5 - 24a_5^4c_{15}c_9c_8a_6^2b_9 - 24a_5^4b_8b_{10}a_6c_{10}b_5c_9 - 64a_5^5b_9b_5^2c_9^2 - 6a_5^5b_9a_6c_8^3 + 16a_5^5b_{10}^2c_9^2b_5 -$$

$$3a_5^5b_8a_4c_8^3 + 24a_5^5b_8b_{10}c_8b_5c_9 + 24a_5^5c_{15}c_9c_8a_6b_{10} - 21a_5^5c_{10}c_8^2a_6b_{10} - 24a_5^5c_{10}^2c_8a_6b_5 - 32a_5^5b_8b_3c_9^2b_5 - 32a_5^5a_4c_9^2c_{15}b_5 -$$

$$64a_5^5a_6c_{13}c_9^2b_5 + 96a_5^5b_9a_6c_6c_9^2 + 48a_5^5b_8a_4c_6c_9^2 + 24a_5^5a_4c_9c_{10}c_8b_5 + 48a_5^5a_6c_{11}c_9c_8b_5 + 24a_5^5c_{15}c_9a_6c_{10}b_5 + 48a_5^5b_8b_{10}b_4c_9^2 -$$

$$48a_5^6b_{10}c_6c_9^2 + 12a_5^6c_{10}c_8^2b_5 - 24a_5^6c_{15}c_9c_8b_5 + 32a_5^6c_{14}c_9^2b_5 - 48a_1a_6^4c_{10}b_9c_9b_8^2 - 15a_5^3c_{10}^3a_6^3b_{10} + 24a_5^3b_{10}c_9c_{10}c_8a_6^2a_1 +$$

$$16a_5^3b_{10}^2c_9^2a_6^2b_9 - 48a_5^3b_{10}a_6^3c_9^2c_{12} + 32a_5^3a_4c_{15}c_9^2a_6^2b_9 - 32a_5^3b_{10}c_9^2c_{15}a_6^2a_1 + 24a_5^3c_{15}c_9a_6^3c_{10}b_9 + 48a_5^3b_8^2a_1a_6c_8b_5c_9 +$$

$$12a_5^4c_{10}^3a_6^2b_5 - 16a_5^4b_{10}^3c_9^2a_6 + 21a_5^4b_8c_{10}c_8^2a_6a_4 - 24a_5^4b_8b_{10}^2c_8a_6c_9 + 64a_5^4b_8a_6b_2c_9^2b_5 - 96a_5^4b_8a_1a_6c_6c_9^2 + 64a_5^4b_8a_1b_5^2c_9^2 +$$

$$6a_5^4b_8a_1a_6c_8^3 - 48a_5^4a_6^2c_{11}c_9c_8b_{10} - 96a_5^4b_8b_9a_6b_4c_9^2 - 24a_5^4a_4c_9c_{10}^2a_6b_5 - 24a_5^4b_8c_{15}c_9c_8a_6a_4 - 64a_5^4b_9a_6^2c_{14}c_9^2 - 48a_5^4b_8^2a_4b_4c_9^2 +$$

$$48a_5b_8a_6^4c_{11}c_9c_{10}a_1 + 64a_5b_8a_4c_9^2a_6^3b_9^2 - 18a_5b_8c_{10}^3a_6^4a_1 - 64a_5b_8b_{10}c_9^2a_6^3b_9a_1 + 48a_5b_8a_6^4c_{10}b_9^2c_9 - 48a_5b_8^2a_4a_6^3c_9^2b_1 +$$

$$16a_5b_8^2a_4^2c_9^2a_6^2b_9 + 48a_5b_8^2a_1a_6^3c_8b_9c_9 + 48a_5b_8^2a_1a_6^3c_{10}b_{10}c_9 - 24a_5^2b_8^2a_4a_6^2c_{10}b_{10}c_9 + 24a_5b_8^2a_4a_6^3c_{10}b_9c_9 - 48a_5^2a_6^4c_{11}c_9c_{10}b_9 -$$

$$
\begin{aligned}
&24a_5^2b_{10}c_9c_{10}^2a_6^3a_1 - 24a_5^2b_8^2a_4c_8a_6^2b_9c_9 - 64a_5^2a_4a_6^3c_{11}c_9^2b_9 + 32a_5b_8^2a_1a_6^3b_2c_9^2 + 18a_5^2c_{10}^3a_6^4b_9 + 64a_5^2b_{10}c_9^2a_6^3c_{11}a_1 - \\
&16a_5^2b_8^2a_4^2c_9^2a_6b_{10} + 24a_5^2a_4c_{10}^2c_9a_6^3b_9 - 32a_5^2b_8a_1a_6^3c_{13}c_9^2 - 48a_5^2b_8a_6^3c_8b_9^2c_9 - 48a_5^2b_8^2a_1a_6^2c_{10}b_5c_9 - 48a_5^2b_8^2a_1a_6^2c_8b_{10}c_9 + \\
&15a_5^2b_8c_{10}^3a_6^3a_4 + 16a_5^2b_8^2a_4a_6^2b_2c_9^2 - 48a_5^2b_8a_6^3c_{11}c_9c_8a_1 + 48a_5^2b_8b_{10}a_6^3c_9^2b_1 - 24a_5^2b_8c_{15}c_9a_6^3c_{10}a_1 - 72a_5^2b_8b_{10}a_6^3c_{10}b_9c_9 - \\
&48a_5^2b_8a_6^3c_{11}c_9c_{10}a_4 - 33a_5^3b_8c_{10}^2c_8a_6^2a_4 - 96a_5^3b_8a_6^2b_1c_9^2b_5 + 32a_5^2b_8b_{10}^2c_9^2a_6^2a_1 - 32a_5^2b_8b_9a_6^3b_2c_9^2 + 48a_5^2b_8a_4a_6^3c_9^2c_{12} + \\
&42a_5^2b_8c_{10}^2c_8a_6^3a_1 + 192a_5^2b_8a_1b_5a_6^2c_9^2b_9 + 24a_5^3b_8^2a_4a_6c_{10}b_5c_9 - 42a_5^3c_{10}^2c_8a_6^3b_9 + 16a_5^3b_8^2b_3c_9^2a_4a_6 - 128a_5^3b_8b_{10}a_6a_1b_5c_9^2 + \\
&24a_5^3b_8^2a_4c_8a_6b_{10}c_9 - 128a_5^3a_1c_{11}a_6^2c_9^2b_5 - 16a_5^3b_8a_4a_6^2c_{13}c_9^2 + 96a_5^3b_8^2a_1a_6b_4c_9^2 + 48a_5^3a_6^3c_{11}c_9c_{10}b_{10} - 64a_5^2b_8b_{10}a_4c_9^2a_6^2b_9 - \\
&16a_5^3b_8b_{10}a_6^2b_2c_9^2 - 30a_5^3b_8c_{10}c_8^2a_6^2a_1 + 24a_5^3b_8b_{10}^2a_6^2c_{10}c_9 + 16a_5^3b_8^2a_4^2b_5c_9^2 + 48a_5^3b_8b_9a_6^2c_{10}b_5c_9 + 48a_5^3a_1a_6^2c_{10}^2c_9b_5 + \\
&48a_5^3b_8a_6^2c_{11}c_9c_8a_4 + 32a_5^3b_8b_{10}^2a_4c_9^2a_6 + 64a_5^3b_8b_9a_6^2b_3c_9^2 + 72a_5^3b_8b_{10}c_8a_6^2b_9c_9 + 24a_5^3b_8c_{15}c_9a_6^2c_{10}a_4 + 24a_5^3b_8c_{15}c_9c_8a_6^2a_1 + \\
&64a_5^3b_8a_1a_6^2c_{14}c_9^2 + 30a_5^4c_{10}c_8^2a_6^2b_9 - 64a_5^3b_8a_4c_9^2a_6b_9b_5 + 48a_5^3a_6^3c_{11}c_9c_8b_9 + 32a_5^3b_9a_6^3c_{13}c_9^2 - 24a_5^3a_4c_{10}c_9c_8a_6^2b_9 - \\
&64a_5^3a_6^2c_9^2b_9^2b_5 - 64a_5^2b_8^2a_1a_6^2b_3c_9^2 + 128a_2a_5^3b_9a_6^2c_9^2c_{11} + 48a_2a_5^3b_8a_6^2c_{11}c_9c_{10} + 64a_2a_5^3b_8b_{10}c_9^2a_6b_9 - 12a_2a_5^3b_8c_{10}^3a_6^2 - \\
&64a_2a_5^2a_6^2c_9^2b_9^2b_8 + 96a_2a_5^2b_8^2a_6^2b_1c_9^2 + 64a_2a_5^2b_8^2a_1a_6b_{10}c_9^2 - 48a_2a_5^3b_9a_6^2c_9c_{10}^2 + 24a_2a_5^4b_8c_{10}^2c_8a_6 - 24a_2a_5^5b_{10}c_9c_{10}c_8 - \\
&12a_2a_5^5b_8c_{10}c_8^2 + 64a_2a_5^4b_8b_9b_5c_9^2 + 32a_2a_5^5b_{10}c_9^2c_{15} + 32a_2a_5^4b_8^2b_3c_9^2 - 32a_2a_5^4b_8b_{10}^2c_9^2 - 32a_2a_5^5b_8c_{14}c_9^2 - 64a_2a_5^4b_{10}c_9^2a_6c_{11} - \\
&24a_2a_5^4b_8c_{15}c_9a_6c_{10} - 64a_2a_1a_6^2c_9^2b_9b_8^2a_5 + 64a_2a_5^4b_8a_6c_{13}c_9^2 + 24a_2a_5^5b_8c_{15}c_9c_8 - 64a_2a_5^3b_8^2a_1b_5c_9^2 - 48a_2a_5^4b_8a_6c_{11}c_9c_8 - \\
&64a_2a_5^3b_8^2a_6b_2c_9^2 - 64a_2a_5^4b_9a_6c_9^2c_{15} + 48a_2a_5^4b_9a_6c_9c_{10}c_8 + 24a_2a_5^4b_{10}c_9c_{10}^2a_6 - 96a_2a_5^3b_8a_6^2c_{12}c_9^2)da_3 + (3a_5^6b_8c_8^3 + \\
&24a_5^5b_8^2c_8b_5c_9 - 48a_5^4b_8^2a_6b_3c_9^2 - 16a_5^4b_8^2a_4b_5c_9^2 - 24a_5^4c_{10}c_9c_8a_6^2b_9 + 32a_5^4c_{15}c_9^2a_6^2b_9 + 32a_5^4b_8c_9^2a_6b_9b_5 + 48a_5^5b_8^2b_4c_9^2 - 48a_5^6b_8c_6c_9^2 - \\
&9a_5^5b_8c_8^2a_6c_{10} - 32a_5^5c_9^2c_{15}a_6b_{10} + 24a_5^5c_9c_{10}c_8a_6b_{10} - 64a_5^5c_9^2a_6c_{11}b_5 + 48a_5^5b_8a_6c_{14}c_9^2 + 24a_5^5c_9c_{10}^2a_6b_5 - 16a_5^5b_8c_9^2b_{10}b_5 + \\
&32a_5^6c_9^2c_{15}b_5 - 24a_5^6c_9c_{10}c_8b_5 + 24a_5^3b_8^2c_8a_6^2b_9c_9 + 16a_5^3b_8^2a_4c_9^2a_6b_{10} + 32a_5^3b_8^2a_6a_1b_5c_9^2 + 24a_5^3b_8^2a_6^2c_{10}b_{10}c_9 + 16a_5^4b_8c_9^2b_{10}^2a_6 - \\
&24a_5^4b_8^2c_8a_6b_{10}c_9 + 9a_5^4b_8c_8a_6^2c_{10}^2 - 48a_5^4b_8a_6^2c_{13}c_9^2 - 24a_5^4c_9c_{10}^2a_6^2b_{10} + 64a_5^4c_9^2a_6^2c_{11}b_{10} - 24a_5^4b_8^2a_6c_{10}b_5c_9 + 32a_5b8^2c_9^2a_6^3b_9a_1 - \\
&24a_5^2b_8^2a_6^3c_{10}b_9c_9 - 16a_5^2b_8^2a_4c_9^2a_6^2b_9 - 48a_5^2b_8^2a_6^3c_9^2b_1 + 32a_5^2b_8c_9^2a_6^3b_9^2 + 48a_5^3b_8^2a_6^2b_2c_9^2 - 3a_5^3b_8a_6^3c_{10}^3 + 48a_5^3b_8a_6^3c_9^2c_{12} - \\
&64a_5^3a_6^3c_{11}c_9^2b_9 - 48a_5^3b_8c_9^2b_{10}a_6^2b_9 + 24a_5^3c_{10}^2c_9a_6^3b_9 - 32a_5^2b_8^2c_9^2b_{10}a_6^2a_1)da_6 + (64a5^4c_{11}a6^2c_9^2b_5 - 24a5^4a6^2c_{10}^2c_9b_5 + \\
&32a5^4c_{15}a6^2c_9^2b_{10} - 24a5^4b_8^2a6c_8b_5c_9 + 80a5^4b_8b_5a6b_{10}c_9^2 - 32a5^5b_8b_5^2c_9^2 - 3a5^5b_8a6c_8^3 - 32a5^5c_{15}a6c_9^2b_5 + 24a5^5a6c_{10}c_9c_8b_5 + \\
&48a5^5b_8a6c_6c_9^2 + 24a5^3a6^3c_{10}c_9c_8b_9 + 48a5^3b_8^2a6^2b_3c_9^2 + 24a5^3b_8^2a6^2c_{10}b_5c_9 + 9a5^4b_8a6^2c_8^2c_{10} - 48a5^4b_8^2a6b_4c_9^2 - \\
&48a5^4b_8a6^2c_{14}c_9^2 - 64a5b_8a6^4b_9^2c_9^2 - 16a5b_8^2a6^3a4c_9^2b_9 + 48a5b_8^2a6^4c_9^2b_1 + 24a5b_8^2a6^4c_{10}b_9c_9 + 16a5^2b_8^2a6^2a4c_9^2b_{10} - \\
&24a5^2a6^4c_{10}^2c_9b_9 + 64a5^2c_{11}a6^4c_9^2b_9 - 24a5^2b_8^2a6^3c_{10}b_{10}c_9 - 48a5^2b_8^2a6^3b_2c_9^2 - 24a5^2b_8^2a6^3c_8b_9c_9 - 48a5^2b_8a6^4c_9^2c_{12} + \\
&3a5^2b_8a6^4c_{10}^3 + 112a5^2b_8a6^3b_9c_9^2b_{10} + 24a5^3b_8^2a6^2c_8b_{10}c_9 - 16a5^3b_8^2b_5c_9^2a4a6 - 9a5^3b_8a6^3c_8c_{10}^2 - 96a5^3b_8b_5a6^2c_9^2b_9 + \\
&48a5^3b_8a6^3c_{13}c_9^2 - 48a5^3b_8b_{10}^2c_9^2a6^2 - 24a5^4a6^2c_{10}c_9c_8b_{10} - 32a5^3c_{15}a6^3c_9^2b_9 - 64a5^3c_{11}a6^3c_9^2b_{10} + 24a5^3a6^3c_{10}^2c_9b_{10} + \\
&32a2a5^2b_8^2a6^2c_9^2b_9 - 32a2a5^3b_8^2a6b_{10}c_9^2 + 32a2a5^4b_8^2b_5c_9^2)da_5.
\end{aligned}
$$

Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_4 são v_1, v_2, v_3 que podem ser facilmente calculados (ver Proposição 2.5).

A imagem de θ não é transversal ao estrato-4_1^3 se, e somente se, $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\}$ + kernel $\xi_1 \cap$ kernel $\xi_2 \subsetneq V_4$. Como kernel $\xi_1 \cap$ kernel ξ_2 tem codimensão dois, esta não transversalidade significa que existem dois vetores, linearmente independentes, $\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3$

$(j = 1, 2)$, tal que

$$\xi_1(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = 0$$
$$\xi_2(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = 0$$

para $j = 1, 2$. Isto é, fazendo $x = \lambda_j$, $y = \mu_j$, $z = \beta_j$, teremos que ter duas soluções linearmente independentes para o sistema:

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0 \tag{1}$$

$$B_1 x + B_2 y + B_3 z = 0, \tag{2}$$

onde $A_1 = \xi_1(v_1) = -b_8^2 + a_5 c_{10}$, $A_2 = \xi_1(v_2) = -b_8 b_6 + a_5 c_8$, $A_3 = \xi_1(v_3) = 4a_5 c_9$,

$B_1 = -3a_5^7 c_8^3 c_{15} + 21a_5^4 b_8^2 c_{10} c_8^2 a_6 a_4 - 96a_5^4 b_8 a_6^2 c_8 b_{10} c_9 c_{11} + 32a_5^4 b_8 a_6 a_1 b_5 c_9^2 c_{15} - 128a_5^4 b_8 b_9 a_6^2 c_{14} c_9^2 - 48a_5^4 b_8 a_1 a_6 c_{10} c_9 c_8 b_5 +$
$96a_5^4 b_8 b_5 c_9^2 a_4 a_6 c_{11} - 96a_5^4 b_8^2 a_1 a_6 c_6 c_9^2 + 64a_5^4 b_8^2 a_6 b_2 c_9^2 b_5 + 42a_5^4 b_8 b_{10} c_8 a_6^2 c_{10}^2 - 96a_5^4 b_8 a_6^2 c_{10} b_5 c_9 c_{11} + 96a_5^4 a_6^3 c_9^2 d_{14} b_{10} -$
$16a_5^4 b_8^2 b_{10} a_4 b_5 c_9^2 - 128a_5^4 a_4 c_9^2 c_{11} a_6^2 c_{15} + 12a_5^4 b_8 d_{12} c_8^2 a_6^2 a_1 - 48a_5^4 b_8 c_8 a_6^2 b_9 c_9 c_{15} + 16a_5^4 b_8^2 c_9^2 c_{14} a_6 a_4 - 24a_5^4 b_8 c_9 c_8 d_{21} a_6^2 a_1 -$
$24a_5^4 b_8 a_4 c_9 c_{10}^2 a_6 b_5 + 48a_5^4 c_9^2 b_{10} a_6^2 b_9 c_{15} + 24a_5^4 a_4 c_9 a_6^2 c_{10}^2 c_{15} + 18a_5^4 a_6^3 c_8 c_{10}^2 c_{11} - 48a_5^4 b_8 a_6^2 b_2 c_9^2 c_{15} + 48a_5^4 b_8 b_9 a_6^2 c_8^2 c_{10} -$
$48a_5^4 b_8 a_4 c_9^2 a_6 b_{10} c_{15} + 24a_5^4 b_8 d_{12} c_8 a_6^2 c_{10} a_4 - 48a_5^4 b_8^2 b_{10}^2 c_8 a_6 c_9 - 24a_5^4 b_8^2 c_{15} c_9 c_8 a_6 a_4 + 24a_5^5 b_{10} c_9 c_{10}^2 a_6 b_5 + 48a_5^5 b_8^2 b_{10} c_8 b_5 c_9 -$
$64a_5^4 b_8^2 b_{10} a_6 b_3 c_9^2 + 24a_5^5 c_9 c_8 d_{21} a_6^2 b_9 - 160a_5^5 b_{10} c_9^2 a_6 c_{11} b_5 + 24a_5^5 b_{10}^2 c_9 c_{10} c_8 a_6 - 24a_5^5 d_{12} c_8 a_6^2 c_{10} b_{10} + 48a_5^5 b_9 a_6 c_9 c_{10} c_8 b_5 +$
$24a_5^5 c_9 a_6^2 c_{10} d_{21} b_{10} - 32a_5^5 d_1 9 c_9^2 a_6^2 b_9 - 96a_5^5 a_6^2 c_9^2 d_{14} b_5 - 12a_5^5 d_{12} a_6^2 c_{10}^2 b_5 - 12a_5^5 d_{12} c_8^2 a_6^2 b_9 - 32a_5^5 b_8^2 b_3 c_9^2 b_5 + 96a_5^5 a_6^2 c_{14} c_9^2 c_{11} +$
$48a_5^5 a_6^2 c_{13} c_9^2 c_{15} - 18a_5^5 a_6^2 c_8^2 c_{10} c_{11} + 32a_5^5 c_9^2 c_{15}^2 a_6 a_4 - 9a_5^5 c_8 a_6^2 c_{10}^2 c_{15} - 32a_5^5 c_9^2 a_6 b_9 b_5 c_{15} + 48a_5^5 a_6^2 c_9 c_{10} d_{13} b_5 - 16a_5^5 c_9^2 b_{10}^2 a_6 c_{15} -$
$64a_5^5 a_6^2 c_9^2 d_{18} b_{10} - 24a_5^5 a_4 c_9 c_8 a_6 c_{10} c_{15} + 48a_5^5 a_6^2 c_9 c_8 d_{13} b_{10} - 128a_5^5 b_8 b_9 b_5^2 c_9^2 + 48a_5^5 b_8 a_6 c_{10} b_5 c_9 c_{15} + 96a_5^5 b_8^2 b_{10} b_4 c_9^2 +$
$48a_5^5 b_8^2 a_4 c_6 c_9^2 - 30a_5^5 b_8 b_{10} c_8^2 a_6 c_{10} + 96a_5^5 b_8 a_6 c_8 b_5 c_9 c_{11} - 128a_5^5 b_8 a_6 c_9^2 c_{13} b_5 + 96a_5^5 b_8 a_6 b_4 c_9^2 c_{11} - 12a_5^5 b_8 d_{12} c_8^2 a_6 a_4 -$
$32a_5^5 b_8 d_1 9 c_9^2 a_6 a_4 + 32a_5^5 b_8 c_{14} c_9^2 b_{10} a_6 + 192a_5^5 b_8 b_9 a_6 c_6 c_9^2 + 12a_5^6 b_8 c_{10} c_8^2 b_5 + 64a_5^6 b_8 c_9^2 c_{14} b_5 - 24a_5^5 b_8 c_{10}^2 c_8 a_6 b_5 +$
$24a_5^5 b_8 a_4 c_9 c_{10} c_8 b_5 - 24a_5^6 c_9 c_8 d_{21} a_6 b_{10} + 48a_5^5 b_8 c_8 a_6 b_{10} c_9 c_{15} + 48a_5^5 b_8 a_6 b_3 c_9^2 c_{15} - 24a_5^6 c_9 a_6 c_{10} d_{21} b_5 + 9a_5^6 c_8^2 a_6 c_{10} c_{15} +$
$12a_5^6 d_{12} c_8^2 a_6 b_{10} - 12a_5^5 b_8 b_9 a_6 c_8^3 - 48a_5^6 b_8 b_4 c_9^2 c_{15} - 48a_5^6 a_6 c_9 c_8 d_{13} b_5 + 24a_5^6 d_{12} c_8 a_6 c_{10} b_5 + 64a_5^6 b_5^2 c_9^2 c_{11} - 24a_5^6 b_{10} c_9 c_{10} c_8 b_5 +$
$64a_5^6 a_6 c_9^2 d_{18} b_5 - 48a_5^6 a_6 c_{14} c_9^2 c_{15} + 16a_5^6 c_9^2 b_{10} b_5 c_{15} - 96a_5^6 a_6 c_6 c_9^2 c_{11} + 32a_5^6 d_1 9 c_9^2 a_6 b_{10} - 32a_5^7 d_1 9 c_9^2 b_5 - 48a_5^6 b_8 c_8 b_5 c_9 c_{15} -$
$96a_5^6 b_8 b_{10} c_6 c_9^2 + 24a_5^7 c_9 c_8 d_{21} b_5 + 48a_5^7 c_6 c_9^2 c_{15} - 12a_5^7 d_{12} c_8^2 b_5 + 6a_5^6 b_8 b_{10} c_8^3 + 6a_5^6 a_6 c_8^3 c_{11} - 3a_5^5 b_8^2 a_4 c_8^3 + 3a_5^4 a_6^3 c_{10}^3 c_{15} -$
$48a_1 a_6^4 c_{10} b_9 c_9 b_8^3 - 33a_5^3 b_8^2 c_{10}^2 c_8 a_6^2 a_4 + 112a_5^3 b_8 a_4 c_9^2 a_6^2 b_9 c_{15} + 48a_5^3 b_8 a_6^3 c_9 c_8 d_{13} a_1 + 24a_5^3 b_8^2 c_{15} c_9 c_8 a_6^2 a_1 + 48a_5^3 b_8 a_6^3 c_9^2 b_1 c_{15} +$
$64a_5^3 b_8 b_9 a_6^3 c_{13} c_9^2 - 96a_5^3 b_8 a_6^3 c_9^2 d_{14} a_4 + 48a_5^3 b_8^2 b_{10}^2 a_4 c_9^2 a_6 + 48a_5^3 b_8 a_6^3 c_9 c_{10} d_{13} a_4 + 24a_5^3 b_8^2 c_{15} c_9 a_6^2 c_{10} a_4 - 24a_5^3 b_8 d_{12} c_8 a_6^3 c_{10} a_1 +$
$48a_5^3 b_8 a_6^3 c_{10} b_9 c_9 c_{15} + 32a_5^3 b_8 c_9^2 b_{10} a_6^2 a_1 c_{15} -$
$12a_5^3 b_8 d_{12} a_6^3 c_{10}^2 a_4 + 96a_5^3 b_8 a_6^3 c_{10} b_{10} c_9 c_{11} + 96a_5^3 b_8 a_6^3 c_8 b_9 c_9 c_{11} - 256a_5^3 b_8 b_9^2 b_5 a_6^2 c_9^2 + 96a_5^3 b_8 a_6^3 b_2 c_9^2 c_{11} + 24a_5^3 b_8 b_{10} c_9 c_{10} c_8 a_6^2 a_1 -$
$24a_5^3 b_8 a_4 c_{10} c_9 c_8 a_6^2 b_9 - 128a_5^3 b_8 a_1 c_{11} a_6^2 c_9^2 b_5 - 96a_5^3 b_8 b_{10} a_6^3 c_9^2 c_{12} - 64a_5^3 b_8 a_6^3 c_9^2 d_{18} a_1 - 32a_5^3 c_9^2 a_6^3 b_9^2 c_{15} - 60a_5^3 b_8 b_9 a_6^3 c_8 c_{10}^2 -$
$128a_5^3 b_8 b_9 b_{10}^2 c_9^2 a_6^2 + 24a_5^3 b_8 c_9 a_6^3 c_{10} d_{21} a_1 + 48a_5^3 b_8 a_1 a_6^2 c_{10}^2 c_9 b_5 - 48a_5^4 a_6^3 c_9 c_{10} d_{13} b_{10} - 24a_5^4 b_8^3 a_4 c_8 b_5 c_9 - 48a_5^3 a_6^3 c_9 a_1 c_8 c_{10} c_{11} -$
$24a_5^3 c_9 c_{10}^2 a_6^3 a_1 c_{15} + 128a_5^3 c_9^2 a_6^3 c_{11} a_1 c_{15} - 12a_5^3 d_{12} a_6^4 c_{10}^2 b_9 + 96a_5^3 a_6^4 c_9^2 c_{12} c_{11} + 128a_5^3 a_6^3 a_4 c_9^2 c_{11}^2 + 16a_5^3 b_8^3 a_4^2 b_5 c_9^2 -$
$224a_5^3 b_9 c_{11} a_6^3 c_9^2 b_{10} - 96a_5^3 a_6^4 c_9^2 d_{14} b_9 - 16a_5^5 b_8 a_4 b_5 c_9^2 c_{15} + 24a_5^5 b_8 c_9 c_8 d_{21} a_6 a_4 + 24a_5^4 d_{12} c_8 a_6^3 c_{10} b_9 + 48a_5^3 a_6^4 c_9 c_{10} d_{13} b_9 +$
$72a_5^3 b_9 a_6^3 c_{10}^2 c_9 b_{10} - 48a_5^3 a_6^3 a_4 c_9 c_{10}^2 c_{11} + 48a_5^3 b_9^2 a_6^3 c_{10} c_9 c_8 + 64a_5^4 b_8 a_6^2 c_9^2 d_{18} a_4 + 12a_5^4 b_8 c_{10}^3 a_6^2 b_5 + 64a_5^4 b_8^2 a_1 b_5^2 c_9^2 -$
$48a_5^4 b_8 a_6^2 c_9 c_8 d_{13} a_4 - 24a_5^4 b_8 c_9 a_6^2 c_{10} d_{21} a_4 - 192a_5^4 b_8^2 b_9 a_6 b_4 c_9^2 - 48a_5^4 b_8^2 b_{10} a_6 c_{10} b_5 c_9 - 48a_5^4 b_8^3 a_4 b_4 c_9^2 + 12a_5^4 d_{12} a_6^3 c_{10}^2 b_{10} -$

$24a_5^4b_{10}^2c_9c_{10}^2a_6^2-96a_5^4b_8^2b_9a_6c_8b_5c_9+64a_5^4a_6^3c_9^2d_{18}b_9+96a_5^4b_{10}^2c_9^2a_6^2c_{11}-48a_5^4a_6^3c_9^2c_{12}c_{15}-32a_5^4c_9^2c_{15}^2a_6^2a_1-48a_5^4b_9a_6^2c_9c_{10}^2b_5+$
$192a_5^4a_6^2c_9^2b_9c_{11}b_5-24a_5^4c_9a_6^3c_{10}d_{21}b_9-48a_5^4a_6^3c_9c_8d_{13}b_9-72a_5^4b_9a_6^2c_{10}c_9c_8b_{10}+24a_5^4c_9c_{10}c_8a_6^2a_1c_{15}-96a_5^4a_6^3c_{13}c_9^2c_{11}-$
$96a_5^4b_8a_6^2b_3c_9^2c_{11}+32a_5^4b_8d_19c_9^2a_6^2a_1+32a_5^4b_8b_{10}a_6^2c_{13}c_9^2+192a_5^4b_8a_6^2c_9^2c_{12}b_5+256a_5^4b_8b_9b_5a_6b_{10}c_9^2-48a_5^4b_8a_6^2c_{10}b_{10}c_9c_{15}+$
$48a_5^4a_6^2a_4c_9c_8c_{10}c_{11}+32a_5^3b_8a_6^2a_4c_9^2b_{10}c_{11}+32a_5^3b_8^2c_9^2c_{14}a_6^2a_1+24a_2a_5^5c_{15}c_9c_8b_8^2+128a_5b_8a_6^4c_9^2a_1b_9c_{11}-128a_5b_8b_9^3a_6^4c_9^2-$
$96a_5b_8^2a_6^4c_9^2c_{12}a_1+96a_5b_8^2b_9^2a_6^4c_{10}c_9+32a_5b_8^2b_9^2a_6^3a_4c_9^2+48a_5b_8^3a_1a_6^3c_{10}b_{10}c_9+48a_5b_8^2a_6^4c_{11}c_9c_{10}a_1+16a_5b_8^3a_4^2c_9^2a_6^2b_9+$
$96a_5b_8^2b_9a_6^4c_9^2b_1-32a_5b_8^2b_{10}c_9^2a_6^3b_9a_1+24a_5b_8^3a_4a_6^3c_{10}b_9c_9+48a_5b_8^3a_1a_6^3c_8b_9c_9+32a_5b_8^3a_1a_6^3b_2c_9^2+42a_5^2b_8^2c_{10}^2c_8a_6^3a_1-$
$48a_5b_8^3a_4a_6^3c_9^2b_1-18a_5b_8^2c_{10}^3a_6^4a_1+48a_5^2a_6^4c_9a_1c_{10}^2c_{11}-48a_5^2b_8^2b_9a_6^2a_4c_9^2b_{10}+15a_5^2b_8^2c_{10}^3a_6^3a_4-24a_5^2b_8^3a_4a_6^2c_{10}b_{10}c_9-$
$48a_5^2b_8^3a_1a_6^2c_{10}b_5c_9-24a_5^2b_8^3a_4c_8a_6^2b_9c_9-48a_5^2b_8^3a_1a_6^2c_8b_{10}c_9+16a_5^2b_8^3a_4a_6^2b_2c_9^2-48a_5^2b_9^2a_6^4c_{10}^2c_9-128a_5^2b_8^2b_9a_6^3b_2c_9^2-$
$48a_5^2b_8^2a_6^3c_{11}c_9c_{10}a_4+24a_5^2b_8b_9a_6^4c_{10}^3+144a_5^2b_8^2a_6^3c_9^2c_{12}a_4-24a_5^2b_8^2c_{15}c_9a_6^3c_{10}a_1+32a_5^2b_8^2a_6^3c_9^2c_{13}a_1-64a_5^2b_8^3a_1a_6^2b_3c_9^2-$
$16a_5^2b_8^3a_4^2c_9^2a_6b_{10}+12a_5^2b_8d_{12}a_6^4c_{10}^2a_1-96a_5^2b_8^2b_9^2a_6^3c_8c_9-144a_5^2b_8^2b_9a_6^3c_{10}b_{10}c_9+96a_5^2b_8a_6^4c_9^2d_{14}a_1+192a_5^2b_8^2a_1b_5a_6^2c_9^2b_9+$
$256a_5^2b_8b_9^2a_6^3c_9^2b_{10}-48a_5^2b_8^2a_6^3c_{11}c_9c_8a_1-160a_5^2b_8a_6^3a_4c_9^2b_9c_{11}-48a_5^2b_8a_6^4c_9c_{10}d_{13}a_1-96a_5^2b_8c_9^2a_6^3b_9a_1c_{15}+128a_5^2b_9^2c_{11}a_6^4c_9^2-$
$128a_5^2a_6^4c_9^2a_1c_{11}^2-24a_5^2b_8b_{10}c_9c_{10}^2a_6^3a_1+96a_5^3b_8^2b_9a_6^2c_{10}b_5c_9+48a_5^3b_8^2b_{10}^2a_6^2c_{10}c_9+96a_5^3b_8^3a_1a_6b_4c_9^2+24a_5^3b_8^3a_4a_6c_{10}b_5c_9+$
$24a_5^3b_8^3a_4c_8a_6b_{10}c_9+16a_5^3b_8^3b_3c_9^2a_4a_6+24a_5^2b_8a_4c_{10}^2c_9a_6^3b_9-96a_5^2b_8a_6^4c_{10}b_9c_9c_{11}-96a_5^2b_8a_6^4c_9^2b_1c_{11}-30a_5^3b_8^2c_{10}c_8^2a_6^2a_1+$
$144a_5^3b_8^2b_9a_6^2c_8b_{10}c_9+48a_5^3b_8^3a_1a_6c_8b_5c_9+48a_5^3b_8^2a_6^2c_{11}c_9c_8a_4-80a_5^3b_8^2a_6^2c_9^2c_{13}a_4-96a_5^3b_8^2b_{10}a_6a_1b_5c_9^2-6a_5^3a_6^4c_{10}^3c_{11}+$
$160a_5^3b_8^2b_9a_6^2b_3c_9^2-18a_5^3b_8b_{10}a_6^3c_{10}^3-96a_5^3b_8^2a_6^2b_1c_9^2b_5-96a_5^3b_8^2b_9b_5c_9^2a_4a_6+32a_5^3b_8^2a_6^2b_2c_9^2b_{10}-64a_2a_5^5b_8b_5c_9^2c_{11}-$
$128a_2a_5^4a_6^2c_9^2c_{11}^2-24a_2a_5^5c_9c_{10}^2a_6c_{15}+64a_2a_5^2b_8^3a_1a_6b_{10}c_9^2 48a_2a_5^3b_8b_9a_6^2c_9c_{10}^2+48a_2a_5^3b_8^2a_6^2c_{11}c_9c_{10}-64a_2a_5^3b_8^3a_6b_2c_9^2-$
$12a_2a_5^5c_{10}c_8^2b_8^2-64a_2a_5^5c_{14}c_9^2b_8^2-24a_2a_5^6b_8c_9c_8d_{21}+96a_2a_5^2b_8^3a_6^2b_1c_9^2-$
$192a_2a_5^3b_8^2a_6^2c_9^2c_{12}-64a_2a_5^3b_8^3a_1b_5c_9^2+24a_2a_5^6c_9c_{10}c_8c_{15}+48a_2a_5^4a_6^2c_9c_{10}^2c_{11}+12a_2a_5^4b_8d_{12}a_6^2c_{10}^2+24a_2a_5^4b_8^2c_{10}^2c_8a_6+$
$128a_2a_5^4b_8^2b_9b_5c_9^2+128a_2a_5^5c_9^2a_6c_{11}c_{15}+32a_2a_5^6b_8d_19c_9^2+12a_2a_5^6b_8d_{12}c_8^2-64a_2a_5^5b_8a_6c_9^2d_{18}-32a_2a_5^6c_9^2c_{15}^2-12a_2a_5^3b_8^2c_{10}^3a_6^2+$
$6a_5^4b_8^2a_1a_6c_8^3-48a_2a_5^5a_6c_9c_{10}c_8c_{11}+48a_2a_5^5b_8a_6c_9c_8d_{13}-24a_2a_5^5b_{10}c_9c_{10}c_8b_8+24a_2a_5^5b_8c_9a_6c_{10}d_{21}-24a_2a_5^5b_8d_{12}c_8a_6c_{10}-$
$64a_2a_1a_6^2c_9^2b_9b_8^3a_5+24a_2a_5^4b_8b_{10}c_9c_{10}^2a_6-48a_2a_5^4b_8^2a_6c_{11}c_9c_8+128a_2a_5^4b_8^2a_6c_9^2c_{13}-64a_2a_5^4b_8b_{10}c_9^2a_6c_{11}+96a_2a_5^4b_8a_6^2c_9^2d_{14}-$
$24a_2a_5^4b_8^2c_{15}c_9a_6c_{10}-48a_2a_5^4b_8a_6^2c_9c_{10}d_{13}-128a_2a_5^4b_8c_9^2a_6b_9c_{15}+48a_2a_5^4b_8b_9a_6c_9c_{10}c_8+64a_2a_5^5b_{10}c_9^2c_{15}b_8+$
$192a_2a_5^3b_8a_6^2c_9^2b_9c_{11}-32a_2a_5^4b_8^2b_{10}^2c_9^2+32a_2a_5^4b_3c_9^2b_8^3,$

$B_2=\xi_2(v_2)=-(6a_5^8c_8^3c_7-32a_5b_8^3a_6^4a_1b_2c_9^2-48a_5^3b_8^2b_{10}^2a_6^2a_4c_9^2+64a_2a_5c_9^2b_8^3a_6^3b_9a_1-64a_2a_5^4c_9^2b_8^2a_6b_9b_5+64a_2a_5^2c_9^2b_8^2a_6^3b_9^2-$
$16a_4a_5^4c_9^2b_8^2a_6b_{10}b_5-96a_2a_5^3c_9^2b_8^2b_{10}a_6^2b_9-32a_6c_{14}a_5^5c_9^2b_8^2a_2+16a_4^2a_5^2c_9^2b_8^3a_6^2b_{10}-64a_4a_5c_9^2b_8^2a_6^4b_9^2+80a_4a_5^2c_9^2b_8^2a_6^3b_9b_{10}+$
$64b_8^2a_6^3b_2a_5^3c_9^2b_{10}+64b_8^3a_6^2b_2a_5^3c_9^2a_2-160b_8^2a_6^2b_2a_5^4c_9^2b_5+3c_8^3a_5^5b_8^2a_6a_4-48a_6^4c_9^2c_{12}a_5^2b_8^2a_4-16a_4^2a_5c_9^2b_8^3a_6^3b_9+80a_6^2c_{14}a_5^4c_9^2b_8^2a_4+$
$96a_6^3c_9^2c_{12}a_5^3b_8^2a_2+48b_8^3b_4a_5^4c_9^2a_6a_4-96b_8^2b_4a_5^6c_9^2b_5-6b_8c_8^3a_5^7b_5-48a_6^2c_{10}b_8^2b_{10}a_5^4c_9b_5+96c_6a_5^6c_9^2b_8^2a_2-15a_6^4c_{10}^3a_5^2b_8^2a_4+$
$64a_6a_1b_8^3b_5a_5^3c_9^2a_2-24a_6^2c_{10}b_8^3b_5a_5^3c_9a_4-16a_4^2a_5^3b_8^3b_5c_9^2a_6+24a_6^3c_{10}b_8^3b_{10}a_5^2c_9a_4-144c_6a_5^5c_9^2b_8^2a_6a_4-16b_8^3a_6^2b_3a_5^3c_9^2a_4-$
$32b_8^2a_6^2b_3a_5^4c_9^2b_{10}-16a_6^3c_{13}a_5^3c_9^2b_8^2a_4-32a_6^2c_{13}a_5^4c_9^2b_8^2a_2-16b_8^3a_6^3b_2a_5^2c_9^2a_4+24c_8a_5^4b_8^3b_5c_9a_6a_4-128a_6a_1b_8^2b_5^2a_5^4c_9^2+$
$32a_4a_5^5b_8^2b_5^2c_9^2+48a_6c_{10}b_8^2b_5^2a_5^5c_9-48c_8a_5^6b_8^2b_5^2c_9+12a_6^3c_{10}^3a_5^3b_8^2a_2-24c_8a_5^4a_6^2c_{10}^2b_8^2a_2-24c_8a_5^3b_8^3a_6^2b_{10}c_9a_4-21c_8^2a_5^4a_6^2c_{10}b_8^2a_4+$
$12c_8^2a_5^5a_6c_{10}b_8^2a_2+33c_8a_5^3a_6^3c_{10}^2b_8^2a_4+24c_8a_5^2b_8^3a_6^3b_9c_9a_4-48c_8a_5^3b_8^2a_6^3b_{10}c_9b_9+48c_8a_5^5b_8^2a_6b_{10}c_9b_5+64b_8a_5^6b_{10}b_5^2c_9^2+$
$12b_8c_8^2a_5^5a_6^2c_{10}b_{10}+24b_8a_4a_5^4c_9a_6^2c_{10}^2b_5+6b_8c_8^2a_5^6a_6c_{10}b_5-24b_8a_4a_5^5c_9c_8a_6c_{10}b_5-16b_8a_4a_5^4c_9^2c_{15}a_6^2b_{10}+12b_8a_6^4c_{10}^3a_5^3b_{10}+$
$64b_8a_2a_5^4c_9^2a_6^2c_{11}b_{10}+24b_8a_2a_5^5c_9c_{10}c_8a_6b_{10}-24b_8a_2a_5^4c_9c_{10}^2a_6^2b_{10}-$
$32b_8a_2a_5^5c_9^2c_{15}a_6b_{10}-192b_8a_6^3c_9^2c_{12}a_5^4b_5+96b_8a_6^4c_9^2c_{12}a_5^3b_{10}-32b_8a_6^2c_{14}a_5^5c_9^2b_{10}+32b_8a_2a_5^6c_9^2c_{15}b_5-6b_8a_6^3c_{10}^3a_5^4b_5-$

$64b_8a_6c_{14}a_5^6c_9^2b_5 - 32b_8a_6^3c_{13}a_5^4c_9^2b_{10} + 128b_8a_6^2c_{13}a_5^5c_9^2b_5 - 64b_8a_4a_5^4c_9^2c_{11}a_6^2b_5 + 16b_8a_4a_5^5c_9^2c_{15}a_6b_5 + 6b_8c_8a_5^5a_6^2c_{10}^2b_5 -$

$128b_8a_5^5b_{10}^2a_6c_9^2b_5 - 128b_8a_5^3b_{10}^2a_6^3b_9c_9^2 + 128b_8a_5^4b_{10}a_6^2b_9c_9^2b_5 + 64b_8b_9^2a_5^2a_6^4c_9^2b_{10} + 96b_8c_6a_5^6c_9^2a_6b_{10} + 128b_8^2a_6b_3a_5^5c_9^2b_5 -$

$32b_8^3a_6b_3a_5^4c_9^2a_2 - 96a_6^3c_9^2b_8^3b_1a_5^2a_2 - 96a_6^4c_9^2b_8^2b_1a_5^2b_{10} - 24b_8c_8a_5^4a_6^3c_{10}^2b_{10} + 48a_6^4c_9^2b_8^3b_1a_5a_4 + 192a_6^3c_9^2b_8^2b_1a_5^3b_5 +$

$64a_6^4c_9^2a_1b_8^2b_9b_{10}a_5 + 192a_6^2c_9^2a_1b_8^2b_{10}a_5^3b_5 + 64b_8a_5^4b_{10}^3c_9^2a_6^2 - 256a_6^3c_9^2a_1b_8^2b_9a_5^2b_5 + 64a_2a_5^4c_9^2b_8^2b_{10}^2a_6 - 32a_6^3c_9^2a_1b_8^2b_{10}^2a_5^2 -$

$32a_2a_5^5c_9^2b_8^2b_{10}b_5 - 64a_2a_5^2c_9^2b_8^3b_{10}a_6^2a_1 + 24c_{10}^2a_5^3c_9a_6^4b_{10}b_9 - 48c_{10}^2a_5^6c_9a_6b_5^2 - 64a_6^4c_{11}a_5^3c_9^2b_{10}b_9 + 64a_6^3c_{11}a_5^4c_9^2b_{10}^2 +$

$64a_6^4c_{11}a_5^2c_9^2a_4b_8b_9 - 128a_6^3c_{11}a_5^3c_9^2b_8a_2b_9 - 192a_6^2c_{11}a_5^5c_9^2b_5b_{10} + 128a_6^3c_{11}a_5^4c_9^2b_5b_9 + 128a_6c_{11}a_5^6c_9^2b_5^2 - 24a_5a_6^4c_{10}b_8^3b_9c_9a_4 +$

$48a_5^2a_6^4c_{10}b_8^2b_9c_9b_{10} + 16c_{15}a_5^3c_9^2a_4b_8a_6^3b_9 + 48c_{15}a_5^4c_9^2b_{10}a_6^3b_9 - 48c_{15}a_5^5c_9^2b_{10}^2a_6^2 + 32c_{15}a_5^4c_9^2b_8a_2a_6^2b_9 + 144c_{15}a_5^6c_9^2b_5a_6b_{10} -$

$96c_{15}a_5^5c_9^2b_5a_6^2b_9 - 96c_{15}a_5^7c_9^2b_5^2 - 24c_{10}^2a_5^2c_9a_6^4a_4b_8b_9 + 48c_{10}a_5^7c_9c_8b_5^2 + 48c_{10}a_5^5c_9c_8b_5a_6^2b_9 - 72c_{10}a_5^6c_9c_8b_5a_6b_{10} +$

$24c_{10}a_5^5c_9c_8b_{10}^2a_6^2 - 24c_{10}^2a_5^4c_9a_6^3b_{10}^2 - 24c_{10}a_5^4c_9c_8b_{10}a_6^3b_9 - 48c_{10}a_5^4c_9c_8b_8a_2a_6^2b_9 - 48c_{10}^2a_5^4c_9a_6^3b_5b_9 + 24c_{10}a_5^3c_9c_8a_4b_8a_6^3b_9 +$

$72c_{10}^2a_5^5c_9a_6^2b_5b_{10} + 48c_{10}^2a_5^3c_9a_6^3b_8a_2b_9 + 48a_6^5a_1c_{10}b_9c_9b_8^3 + 18a_5^6c_8a_6^2c_{10}^2c_7 - 192a_5^5b_8a_6^2b_9c_6c_9^2 - 96a_5^4b_8a_6^3c_9^2b_1c_7 +$

$24a_5^4b_8^2a_6^2c_{15}c_9c_8a_4 + 24a_5^2b_8a_6^4b_{10}c_9c_{10}^2a_1 + 64a_5^2b_8^3a_6^3a_1b_3c_9^2 - 96a_5^6a_6^2c_{13}c_9^2c_7 - 32a_5^6c_9^2b_{10}^2a_6c_7 + 96a_5^6b_8d_8c_9^2a_6a_4 -$

$48a_5^6b_8c_9c_8d_9a_6a_4 - 48a_5^6b_8a_6c_{10}b_5c_9c_7 - 32a_5^6b_8a_4b_5c_9^2c_7 - 96a_5^6b_8a_6b_3c_9^2c_7 - 48a_5^6b_8a_6b_4c_9^2c_{15} - 64a_5^6c_9^2c_{15}a_6a_4c_7 -$

$48a_5^6c_9a_6^2c_{10}d_9b_{10} - 24a_5^6a_6^2c_9c_{10}d_{21}b_5 - 24a_5^6a_6^2c_9c_8d_{21}b_{10} + 12a_5^6d_{10}c_8^2a_6^2b_9 - 64a_5^6c_9^2a_6b_9b_5c_7 + 12a_5^6d_{10}a_6^2c_{10}^2b_5 +$

$48a_5^6a_4c_9c_8a_6c_{10}c_7 + 24a_5^6d_{10}c_8a_6^2c_{10}b_{10} - 48a_5^6c_9c_8d_9a_6^2b_9 + 96a_5^6d_8c_9^2a_6^2b_9 + 32a_5^6a_6^2c_9^2d_{18}b_5 - 48a_5^6a_6^2c_{14}c_9^2c_{15} +$

$9a_5^6a_6^2c_8^2c_{10}c_{15} + 64a_5^6a_6^2c_9^2d_19b_{10} + 48a_5^5b_8c_8a_6^2b_9c_9c_7 + 96a_5^5c_9^2b_{10}a_6^2b_9c_7 - 48a_5^5a_4c_9a_6^2c_{10}^2c_7 + 128a_5^5a_4c_9^2c_{11}a_6^2c_7 -$

$48a_5^5c_9c_{10}c_8a_6^2a_1c_7 + 96a_5^5b_8a_6^2b_2c_9^2c_7 + 96a_5^5b_8a_4c_9^2a_6b_{10}c_7 + 48a_5^5b_8a_6^2c_{10}b_{10}c_9c_7 - 24a_5^5b_8d_{10}c_8a_6^2c_{10}a_4 - 12a_5^5b_8d_{10}c_8^2a_6^2a_1 +$

$48a_5^5b_8c_9c_8d_9a_6^2a_1 + 64a_5^5b_8a_6a_1b_5c_9^2c_7 + 24a_5^5b_8a_6^2c_9c_8d_{21}a_4 - 96a_5^5b_8d_8c_9^2a_6^2a_1 + 48a_5^5b_8a_6^2b_3c_9^2c_{15} - 64a_5^5a_6^3c_9^2d_19b_9 +$

$12a_5^4b_8d_{10}a_6^3c_{10}^2a_4 + 128a_5^4b_8a_6^3b_9c_{14}c_9^2 + 32a_5^4b_8a_6^3c_9^2d_{18}a_4 - 30a_5^4b_8a_6^3c_{10}c_8^2b_9 - 48a_5^4b_8a_6^3b_2c_9^2c_{15} + 64a_5^4b_8a_6^3c_9^2d_19a_1 +$

$48a_5^4c_9c_{10}^2a_6^3a_1c_7 + 24a_5^4a_6^3c_9a_1c_8c_{10}c_{15} + 24a_5^4a_6^3a_4c_9c_{10}^2c_{15} - 128a_5^4c_9^2a_6^3c_{11}a_1c_7 - 24a_5^4a_6^4c_9c_{10}d_{21}b_9 - 64a_5^4a_6^3a_4c_9^2c_{11}c_{15} +$

$96a_5^4b_8^2a_6^2b_9b_4c_9^2 - 32a_2a_5^6a_6c_9^2c_{15}^2 + 64a_2a_5^7c_9^2c_{15}c_7 - 12a_2a_5^7b_8d_{10}c_8^2 - 48a_2a_5^6b_8c_9a_6c_{10}d_9 + 64a_2a_5^6b_8a_6c_9^2d_19 +$

$24a_2a_5^6a_6c_9c_{10}c_8c_{15} + 48a_2a_5^6c_9c_{10}^2a_6c_7 - 128a_2a_5^6c_9^2a_6c_{11}c_7 - 24a_2a_5^5b_8^2a_6c_{15}c_9c_8 - 32a_2a_5^5b_8a_6^2c_9^2d_{18} + 24a_2a_5^5b_8a_6^2c_9c_{10}d_{21} -$

$12a_2a_5^5b_8d_{10}a_6^2c_{10}^2 + 128a_2a_5^5b_8c_9^2a_6b_9c_7 - 24a_2a_5^5a_6^2c_9c_{10}^2c_{15} + 64a_2a_5^5a_6^2c_9^2c_{11}c_{15} + 24a_2a_5^4b_8^2a_6^2c_{15}c_9c_{10} + 48a_2a_5^4b_8^2a_6^2c_{11}c_9c_8 -$

$48a_2a_5^3b_8^2a_6^3c_{11}c_9c_{10} - 18a_5^2b_8a_6^5c_{10}^3b_9 - 48a_5b_8^3a_6^4a_1c_8b_9c_9 - 48a_5b_8^3a_6^4a_1c_{10}b_{10}c_9 - 48a_5b_8^2a_6^5c_{11}c_9c_{10}a_1 + 18a_5b_8^2a_6^5c_{10}^3a_1 -$

$48a_5b_8^2a_6^5c_{10}b_9^2c_9 - 48a_5^8c_9c_8d_9b_5 + 48a_5^7b_8c_8b_5c_9c_7 + 96a_5^7b_8b_4c_9^2c_7 + 48a_5^7c_9a_6c_{10}d_9b_5 - 96a_5^7d_8c_9^2a_6b_{10} - 18a_5^7c_8^2a_6c_{10}c_7 +$

$48a_5^7a_6c_6c_9^2c_{15} + 48a_5^7c_9c_8d_9a_6b_{10} + 32a_5^7c_9^2b_{10}b_5c_7 + 96a_5^7a_6c_{14}c_9^2c_7 + 24a_5^7a_6c_9c_8d_{21}b_5 - 64a_5^7a_6c_9^2d_19b_5 - 24a_5^7d_{10}c_8a_6c_{10}b_5 -$

$12a_5^7d_{10}c_8^2a_6b_{10} + 12a_5^6b_8d_{10}c_8^2a_6a_4 - 48a_5^6b_8c_8a_6b_{10}c_9c_7 - 96a_2a_5^7b_8d_8c_9^2 + 48a_5^5b_8c_9a_6^2c_{10}d_9a_4 - 48a_5^5b_8a_6^2c_{11}c_9c_8b_5 -$

$64a_5^5b_8a_6^2c_9^2d_19a_4 + 96a_5^5a_6^3c_9^2c_{12}c_7 - 12a_5^5d_{10}a_6^3c_{10}^2b_{10} + 48a_5^5a_6^3c_{13}c_9^2c_{15} - 9a_5^5a_6^3c_8c_{10}^2c_{15} + 32a_5^5a_6^2c_9^2c_{15}^2a_4 - 32a_5^5a_6^3c_9^2d_{18}b_{10} +$

$6a_5^5b_8a_6^2b_9c_8^3 - 24a_5^5d_{10}c_8a_6^3c_{10}b_9 - 24a_5^5a_6^2a_4c_9c_8c_{10}c_{15} + 48a_5^5c_9a_6^3c_{10}d_9b_9 + 24a_5^5a_6^3c_9c_{10}d_{21}b_{10} + 24a_5^5a_6^3c_9c_8d_{21}b_9 +$

$64a_5^5c_9^2c_{15}a_6^2a_1c_7 + 192a_5^4b_8^2a_6^2a_1c_6c_9^2 - 48a_5^4b_8c_9a_6^3c_{10}d_9a_1 - 24a_5^4b_8a_6^3c_9c_{10}d_{21}a_4 - 24a_5^4b_8a_6^3c_9c_8d_{21}a_1 + 48a_5^4b_8a_6^3c_{11}c_9c_8b_{10} +$

$48a_5^2b_8^2a_6^4c_{11}c_9c_{10}a_4 + 48a_5^2b_8^2a_6^4c_8b_9^2c_9 + 24a_5^2b_8^2a_6^4c_{15}c_9c_{10}a_1 + 32a_5^2b_8^2a_6^4b_9b_2c_9^2 - 64a_5^2b_8a_6^4c_9^2a_1b_9c_{15} - 64a_5^2b_8a_6^4b_{10}c_9^2c_{11}a_1 +$

$48a_5^2b_8a_6^5c_{11}c_9c_{10}b_9 + 96a_5^3b_8^2b_5a_4c_9^2a_6^2b_9 - 64a_5^3b_8^2a_6^3b_9b_3c_9^2 + 30a_5^3b_8^2a_6^3c_{10}c_8^2a_1 + 192a_5^3b_8c_9^2a_6^3b_9a_1c_7 - 24a_5^3b_8a_6^3b_{10}c_9c_{10}c_8a_1 +$

$128a_5^3b_8a_6^3a_1c_{11}c_9^2b_5 - 32a_5^3b_8a_6^4c_9^2d_{18}a_1 - 48a_5^3b_8^3a_6^2a_1c_8b_5c_9 - 96a_5^3b_8^3a_6^2a_1b_4c_9^2 - 160a_5^4b_8a_4c_9^2a_6^2b_9c_7 - 48a_5^4b_8a_6^3c_{10}b_9c_9c_7 -$

$128a_5^4b_8c_9^2b_{10}a_6^2a_1c_7 - 64a_5^4b_8a_6^2a_1c_{15}c_9^2b_5 + 48a_5^4b_8a_6^2a_1c_{10}c_9c_8b_5 + 48a_5^4b_8a_6^3c_{11}c_9c_{10}b_5 +$

$24a_5^4b_8d_{10}c_8a_6^3c_{10}a_1 - 64a_5^4c_9^2a_6^3b_9^2c_7 + 12a_5^4d_{10}a_6^4c_{10}^2b_9 + 32a_5^4a_6^4c_9^2d_{18}b_9 - 48a_5^4a_6^4c_9^2c_{12}c_{15} - 32a_5^4a_6^3c_9^2a_1c_{15}^2 - 6a_5^4b_8^2a_6^2a_1c_8^3 -$

$48a_5^3b_8^2a_6^3c_{11}c_9c_8a_4-128a_5^3b_8^2a_6^3a_1c_{14}c_9^2-24a_5^3b_8^2a_6^3c_{15}c_9c_{10}a_4-24a_5^3b_8^2a_6^3c_{15}c_9c_8a_1-12a_5^3b_8d_{10}a_6^4c_{10}^2a_1-48a_5^3b_8a_6^3a_1c_{10}^2c_9b_5+$

$48a_5^3b_8a_6^4c_9^2b_1c_{15}-48a_5^3b_8a_6^4c_{11}c_9c_8b_9+42a_5^3b_8a_6^4c_{10}^2c_8b_9+64a_5^3b_8a_6^3c_9^2a_1b_{10}c_{15}-48a_5^3b_8a_6^4c_{11}c_9c_{10}b_{10}+24a_5^3b_8a_6^4c_9c_{10}d_{21}a_1+$

$64a_5^3a_6^4c_9^2a_1c_{11}c_{15}-24a_5^3a_6^4c_9a_1c_{10}^2c_{15}-64a_5^3b_8a_6^4b_9c_{13}c_9^2+48a_5^2b_8^3a_6^3a_1c_{10}b_5c_9+48a_5^2b_8^3a_6^3a_1c_8b_{10}c_9-42a_5^2b_8^2a_6^4c_{10}^2c_8a_1+$

$48a_5^2b_8^2a_6^4c_{11}c_9c_8a_1+64a_5^2b_8^2a_6^4a_1c_{13}c_9^2+12a_5^8d_{10}c_8^2b_5+96a_5^8d_8c_9^2b_5-96a_5^8c_6c_9^2c_7-3a_5^7a_6c_8^3c_{15}-6a_5^5a_6^3c_{10}^3c_7+3a_5^4a_6^4c_{10}^3c_{15}+$

$24a_2a_5^6b_8d_{10}c_8a_6c_{10}+48a_2a_5^7b_8c_9c_8d_9-48a_2a_5^7c_9c_{10}c_8c_7-24a_2a_5^6b_8a_6c_9c_8d_{21}-64a_2a_5^6b_8c_9^2b_{10}c_7)/a_5,$

$B_3=\xi_2(v_3)=-9a_5^3a_6^4c_{10}^4-120a_2a_5^5b_8d_{11}c_8a_6c_{10}+64a_2a_5^2c_9^2b_8^3a_6^2b_9+96a_2a_5^5b_8c_9a_6c_{10}d_{10}-64a_2a_5^3c_9^2b_8^3a_6b_{10}+$

$96a_2a_5^5b_8a_6c_9c_8d_{12}-96a_2a_5^4b_8a_6^2c_9c_{10}d_{12}+96a_2a_5^3a_6^2c_9^2b_9c_{10}b_8-192a_2a_5^4b_8c_9^2a_6b_9c_8+96a_2a_5^5a_6c_9^2c_{15}c_{10}+192a_2a_5^5c_9^2a_6c_{11}c_8+$

$64a_2a_5^4a_6c_9^2c_{15}b_8^2+60a_2a_5^4b_8d_{11}a_6^2c_{10}^2+96a_2a_5^4b_8a_6^2c_9^2d13-192a_2a_5^4a_6^2c_9^2c_{11}c_{10}-96a_2a_5^6b_8c_9c_8d_{10}-64a_2a_5^3a_6^2c_9^2c_{11}b_8^2-$

$96a_2a_5^5b_8a_6c_9^2d_{21}+72a_2a_5^4a_6^2c_9c_{10}^3+96a_2a_5^5b_8c_9^2b_{10}c_8-144a_2a_5^5c_9c_{10}^2a_6c_8-64a_2a_5^5c_9^2c_7b_8^2-96a_2a_5^5b_8b_5c_9^2c_{10}-$

$144a_5^4b_8a_6^2b_3c_9^2c_{10}+64a_5^2b_8^3a_6^2a_1b_5c_9^2-144a_5^6b_8b_4c_9^2c_8-72a_5^6b_8c_8^2b_5c_9+96a_5^7c_9c_8d_{10}b_5+120a_5^6d_{11}c_8a_6c_{10}b_5+96a_5^6b_5^2c_9^2c_{10}-$

$96a_5^6a_6c_9c_8d_{12}b_5-60a_5^7d_{11}c_8^2b_5+64a_6^4c_9^2b_9a_1b_8^3+144a_5^7c_6c_9^2c_8-96a_5^7d_9c_9^2b_5+36a_5^6c_8^3a_6c_{10}-48a_5^6c_9^2b_{10}b_5c_8+96a_5^6a_6c_9^2d_{21}b_5-$

$96a_5^6c_9a_6c_{10}d_{10}b_5-96a_5^6c_9c_8d_{10}a_6b_{10}-144a_5^6a_6c_6c_9^2c_{10}-144a_5^6a_6c_{14}c_9^2c_8+60a_5^6d_{11}c_8^2a_6b_{10}+96a_5^6d_9c_9^2a_6b_{10}+64a_5^6b_8c_9^2c_7b_5+$

$144a_5^5b_8a_6b_3c_9^2c_8-96a_5^5a_6^2c_9^2d_{21}b_{10}-96a_5^5b_8d_9c_9^2a_6a_4+144a_5^5a_6^2c_{14}c_9^2c_{10}+36a_5^4a_6^3c_{10}^3c_8-72a_5^5a_4c_9c_8^2a_6c_{10}-60a_5^5d_{11}c_8^2a_6^2b_9+$

$144a_5^5a_6^2c_{13}c_9^2c_8+48a_5^5c_9^2b_{10}^2a_6c_8+144a_5^5b_8a_6c_{10}b_5c_9c_8-60a_5^5d_{11}a_6^2c_{10}^2b_5+96a_5^5b_8c_9c_8d_{10}a_6a_4+96a_5^5c_9^2c_{15}a_6a_4c_8-$

$120a_5^5d_{11}c_8a_6^2c_{10}b_{10}-144a_5^5a_6b_{10}c_9^2b_5c_{10}+96a_5^5a_6^2c_9c_{10}d_{12}b_5+96a_5^5c_9a_6^2c_{10}d_{10}b_{10}-54a_5^5c_8^2a_6^2c_{10}^2-64a_5^5b_5^2c_9^2b_8^2-$

$64a_5^5b_8c_{15}a_6c_9^2b_5+96a_5^5c_9^2a_6b_9b_5c_8-96a_5^5a_6^2c_9^2d_{13}b_5-60a_5^5b_8d_{11}c_8^2a_6a_4+120a_5^4d_{11}c_8a_6^3c_{10}b_9-96a_5^4a_6^2c_9^2c_{15}a_4c_{10}-$

$96a_5^4c_9a_6^3c_{10}d_{10}b_9+96a_5^5c_9c_8d_{10}a_6^2b_9+96a_5^5a_6^2c_9c_8d_{12}b_{10}+48a_5^5b_8a_4b_5c_9^2c_8-72a_5^3a_6^3a_4c_9c_{10}^3+72a_5^5b_8c_8^2a_6b_{10}c_9-$

$144a_5^4a_6^3c_9^2c_{12}c_8-96a_5^4b_8a_6^2c_9c_8d_{12}a_4+60a_5^4d_{11}a_6^3c_{10}^2b_{10}+96a_5^4a_6^3c_9^2d_{21}b_9+144a_5^5b_8a_6b_4c_9^2c_{10}+96a_5^4a_6^3c_9^2d_{13}b_{10}-$

$96a_5^4b_8a_6a_1b_5c_9^2c_8+48a_5^4b_{10}^2c_9^2a_6^2c_{10}-144a_5^4a_6^3c_{13}c_9^2c_{10}-96a_5^5d_9c_9^2a_6^2b_9-64a_5^5b_8c_9^2c_7a_6b_{10}-96a_5^4b_8c_9c_8d_{10}a_6^2a_1+$

$96a_5^4b_8a_6^2c_9^2d_{21}a_4+120a_5^4b_8d_{11}c_8a_6^2c_{10}a_4+144a_5^4a_4c_9a_6^2c_{10}^2c_8+72a_5^4c_9c_{10}c_8^2a_6^2a_1-96a_5^4a_6^3c_9c_{10}d_{12}b_{10}-96a_5^4c_9^2c_{15}a_6^2a_1c_8-$

$96a_5^3a_6^4c_9^2d_{13}b_9-144a_5^4c_9^2b_{10}a_6^2b_9c_8+144a_5^3a_6^4c_9^2c_{12}c_{10}-60a_5^3d_{11}a_6^4c_{10}^2b_9-96a_5^4a_6^3c_9c_8d_{12}b_9-192a_5^4a_4c_9^2c_{11}a_6^2c_8+$

$96a_5^4a_6^2c_9^2b_9c_{10}b_5-64a_5b_8^2a_6^4b_9^2c_9^2+48a_5^3b_8a_6^2a_4c_9^2b_{10}c_{10}-72a_5^4b_8c_8^2a_6^2b_9c_9-72a_5^4b_8a_6^2c_{10}^2c_9b_5+64a_5^4b_8c_{11}a_6^2c_9^2b_5-$

$144a_5^4b_8a_6^2b_2c_9^2c_8+72a_5^2a_6^4c_9a_1c_{10}^3+96a_5^3b_8a_6^3c_9c_{10}d_{12}a_4+96a_5^3b_8c_9a_6^3c_{10}d_{10}a_1+60a_5^4b_8d_{11}c_8^2a_6^2a_1+96a_5^3b_8a_6^3c_9c_8d_{12}a_1-$

$64a_5^3b_8^2b_{10}^2c_9^2a_6^2-144a_5^4b_8a_6^2c_{10}b_{10}c_9c_8+96a_5^3c_9^2a_6^3b_9^2c_8+64a_5^4b_8c_{15}a_6^2c_9^2b_{10}+64a_5^4b_8c_9^2c_7a_6^2b_9+48a_5^4b_8b_5c_9^2a_4a_6c_{10}-$

$144a_5^4b_8a_4c_9^2a_6b_{10}c_8+96a_5^4b_8d_9c_9^2a_6^2a_1-96a_5^4b_8c_9a_6^2c_{10}d_{10}a_4-128a_5^3b_8^2b_5a_6^2c_9^2b_9+144a_5^3b_8a_6^3c_{10}b_9c_9c_8+128a_5^4b_8^2b_5a_6b_{10}c_9^2+$

$64a_5^4b_8^2c_9^2c_7a_6a_4-120a_5^3b_8d_{11}c_8a_6^3c_{10}a_1+240a_5^3b_8a_4c_9^2a_6^2b_9c_8-96a_5^2b_8a_6^3c_9^2a_1b_{10}c_{10}+96a_5^2b_8a_6^4c_9^2d_{13}a_1+60a_5^2b_8d_{11}a_6^4c_{10}^2a_1-$

$72a_5^2b_8a_6^4c_{10}^2c_9b_9+128a_5^2b_8^2a_6^3b_9c_9^2b_{10}+64a_5^2b_8^2a_6^3c_9^2c_{15}a_1+64a_2a_5^4b_8^3b_5c_9^2+64a_5^2b_8^2a_6^3c_9^2c_{11}a_4+64a_5^2b_8^3a_6^2a_4c_9^2b_{10}+$

$60a_2a_5^6b_8d_{11}c_8^2-64a_5^3b_8^2a_6^2c_9^2c_{15}a_4-64a_5^3b_8^2c_9^2c_7a_6^2a_1+96a_2a_5^6b_8d_9c_9^2-60a_5^3b_8d_{11}a_6^3c_{10}^2a_4+144a_5^3b_8a_6^3b_2c_9^2c_{10}+72a_2a_5^6c_9c_{10}c_8^2-$

$64a_5^3b_8c_{15}a_6^3c_9^2b_9-96a_2a_5^6c_9^2c_{15}c_8-96a_5^3b_8a_6^3c_9^2d_{13}a_4-96a_5^3b_8a_6^3c_9^2d_{21}a_1+$

$144a_5^3b_8a_6^3c_9^2b_1c_8-64a_5^3b_8c_{11}a_6^3c_9^2b_{10}+72a_5^3b_8a_6^3c_{10}^2c_9b_{10}+192a_5^3c_9^2a_6^3c_{11}a_1c_8-144a_5^3c_9c_{10}^2a_6^3a_1c_8+96a_5^3a_6^4c_9c_{10}d_{12}b_9+$

$192a5^3b_8c_9^2b_{10}a6^2a1c_8-48a5^3a6^3c_9^2b_9c_{10}b_{10}+96a5^3a6^3c_9^2a1c_{15}c_{10}+192a5^3a6^3a4c_9^2c_{11}c_{10}-64a5^3b_5c_9^2a4a6b_8^3-$

$144a5^2b_8a6^4c_9^2b_1c_{10}-144a5^2b_8a6^3a4c_9^2b_9c_{10}+64a5^2b_8c_{11}a6^4c_9^2b_9-192a5^2a6^4c_9^2a1c_{11}c_{10}-96a5^2b_8a6^4c_9c_{10}d_{12}a1-$

$288a5^2b_8c_9^2a6^3b_9a1c_8-64a5b_8^3a6^3a4c_9^2b_9-64a5b_8^2a6^4c_9^2c_{11}a1-64a5b_8^3a6^3c_9^2b_{10}a1+192a5a6^4c_9^2a1b_9c_{10}b_8-9a5^7c_8^4.$

No caso em que $A_iB_j\neq 0$ para algum $i,j=1,2,3$, (1) e (2) são equações de planos.

Para termos duas soluções linearmente independentes, estes dois planos devem ser paralelos. Caso contrário eles se interceptariam em uma só reta e isso daria apenas uma solução.

Sabemos que $A_3 = 4a_5c_9 \neq 0$ para 4_1^3, logo podemos dividir em dois casos:

(i) Se $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ a equação (2) gera o espaço todo. Portanto, basta tomar duas soluções linearmente independentes do plano (1).

(ii) Se existir um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A_1 - \lambda B_1 = 0$, $A_2 - \lambda B_2 = 0$ e $A_3 - \lambda B_3 = 0$ então os planos são paralelos. Portanto, existem duas soluções linearmente independentes.

Mas genericamente, ou seja, quando $B_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, 3$, e $A_j - \lambda B_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, 3$, vale o fato que imagem de θ é transversal ao estrato-4_1^3. Então pelo Teorema 1.25, a variedade 4_1^3 em M, que é igual a $\theta^{-1}(4_1^3)$ é uma variedade suave de codimensão dois, o que significa que é uma curva (ver Figura 3.1). ■

3.4.4 Demostração da Proposição 3.12

Prova: Suponha que P tem uma singularidade 5_1 na origem, e tome, sem perda de generalidade $P(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ tal que $j^4 f = a_1x^2 + a_2y^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_8z^2x + b_9zx^2 + b_{10}xyz + c_1x^4 + c_2x^3y + c_3x^2y^2 + c_4xy^3 + c_5y^4 + c_6y^3z + c_7y^2z^2 + c_8yz^3 + c_{10}z^3x + c_{11}z^2x^2 + c_{12}zx^3 + c_{13}x^2yz + c_{14}xy^2z + c_{15}xyz^2$. O espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f em V_4 é dado pelos vetores u_i, $i = 1, \cdots, 10$ (ver Lema 3.6). Um transversal à órbita pode ser sempre dado por $T = \mathbb{R}\{y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, y^2z, x^2z, xyz, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, y^3z, y^2z^2, yz^3, z^4, xz^3, x^2z^2, x^3z, x^2yz, xy^2z, xyz^2\}$, e um elemento de T é $\bar{f} = j^4 f + \bar{a}_2y^2 + \bar{b}_1x^3 + \bar{b}_2x^2y + \bar{b}_3xy^2 + \bar{b}_4y^3 + \bar{b}_5y^2z + \bar{b}_9x^2z + \bar{b}_{10}xyz + \bar{c}_1x^4 + \bar{c}_2x^3y + \bar{c}_3x^2y^2 + \bar{c}_4xy^3 + \bar{c}_5y^4 + \bar{c}_6y^3z + \bar{c}_7y^2z^2 + \bar{c}_8yz^3 + \bar{c}_9z^4 + \bar{c}_{10}xz^3 + \bar{c}_{11}x^2z^2 + \bar{c}_{12}x^3z + \bar{c}_{13}x^2yz + \bar{c}_{14}xy^2z + \bar{c}_{15}xyz^2$ onde $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i \in \mathbb{R}$.

Consideremos no transversal a projeção na direção singular sobre o espaço tangente, $(\alpha, \beta, 1, 0)$. Ou seja $P(x, y, z) = (x, y, \bar{f}(x + \alpha z, y + \beta z, z))$. Neste transversal, temos uma singularidade 5_1 se

$$coef(z^2) = a_5\alpha + a_6\beta + a_1\alpha^2 + (a_2 + \bar{a}_2)\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0,$$

$$coef(z^3) = b_8\alpha + b_6\beta + O_1(2) = 0, \text{ e}$$

$$coef(z^4) = \bar{c}_9 + c_{10}\alpha + c_8\beta + O_2(2)$$

onde $O_1(2)$ e $O_2(2)$ são os termos de ordem maior ou igual a dois em α, β, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ e são nulos se $\alpha = \beta = 0$. Como $a_5 \neq 0$, da primeira equação pelo Teorema da Função Implícita temos que α é uma função de β onde o primeiro jato é $\alpha = -\frac{a_6}{a_5}\beta$. Substituindo α na segunda equação temos que genericamente o coeficiente de β é não nulo e portanto a solução próxima do zero é $\beta = 0$. Logo $\alpha = 0$. A terceira condição nos dá então $\bar{c}_9 = 0$, que é a condição para termos singularidade 5_1 no transversal.

Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-5_1 em V_4, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_f 5_1 = V_4$, e assim saberemos quando $\theta^{-1}(5_1)$ é variedade em $\mathbb{R}^3$ de codimensão igual a um.

O espaço tangente ao estrato 5_1 em V_4 é o núcleo de uma forma diferenciável ξ. Como ξ tem que anular o tangente ao estrato 5_1 no transversal e os geradores do tangente de $\mathcal{G}.f$, então $\xi = (c_8b_8 - b_6c_{10})da_3 + (a_6c_{10} - a_5c_8)db_7 + (b_6a_5 - b_8a_6)dc_9$, onde $b_6a_5 - b_8a_6 \neq 0$, pois a singularidade é do tipo 5_1 (ver Proposição 3.4).

Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_4 (ver Proposição 2.5) são v_1, v_2, v_3, que podem ser facilmente calculados.

A imagem de θ não é transversal ao estrato 5_1 se, e somente se, $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\}$ + kernel $\xi \subsetneq V_4$, o que significa que v_1, v_2, v_3 pertencem ao kernel ξ. Isto é se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\xi(v_1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad c_8b_8^2 - c_{10}a_5c_8 - b_6c_{10}b_8 + a_6c_{10}^2 + (b_6a_5 - b_8a_6)d_{12} = 0,\\
\xi(v_2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad c_8b_8b_6 - a_5c_8^2 - b_6^2c_{10} + a_6c_{10}c_8 + (b_6a_5 - b_8a_6)d_{10} = 0,\\
\xi(v_3) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (b_6a_5 - b_8a_6)d_{11} = 0.
\end{aligned}$$

Como temos uma singularidade 5_1 então $\xi(v_3) = 4(b_6a_5 - b_8a_6)d_{11} \neq 0$, e portanto a imagem de θ é sempre transversal ao estrato 5_1. Consequentemente, pelo Teorema 1.25, $\theta^{-1}(5_1)$ é uma superfície suave de codimensão 1 em M, isto é, de dimensão dois (ver Figura 3.1). ■

3.4.5 Demostração da Proposição 3.13

Prova: Suponha que P tem uma singularidade 5_2 na origem, e tome, sem perda de generalidade $P(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ tal que $j^4f = a_1x^2 + a_2y^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_8z^2x + b_9zx^2 + b_{10}xyz + c_1x^4 + c_2x^3y + c_3x^2y^2 + c_4xy^3 +$

$c_5y^4+c_6y^3z+c_7y^2z^2+c_8yz^3+c_{10}z^3x+c_{11}z^2x^2+c_{12}zx^3+c_{13}x^2yz+c_{14}xy^2z+c_{15}xyz^2$ com $a_5 \neq 0$. O espaço tangente à $\mathcal{G}$-órbita de f em V_4 é dado pelos vetores u_i, $i = 1, \cdots, 10$ (ver Lema 3.6). Quando $a_6b_8(a_5^3b_5 - a_2a_5^2b_8 - a_5^2a_6b_{10} + a_4a_5a_6b_8 - a_1a_6^2b_8 + a_5a_6^2b_9) \neq 0$ (mesma condição do transversal para 4_1^2), um transversal à órbita pode ser dado por $T = \mathbb{R}\{y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, y^2z, x^2z, xyz, z^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, y^3z, y^2z^2, yz^3, xz^3, x^2z^2, x^3z, x^2yz, xy^2z, xyz^2\}$ então um elemento deste transversal é dado por $\bar{f} = j^4f + \bar{a}_2y^2 + \bar{b}_1x^3 + \bar{b}_2x^2y + \bar{b}_3xy^2 + \bar{b}_4y^3 + \bar{b}_5y^2z + \bar{b}_7z^3 + \bar{b}_9x^2z + \bar{b}_{10}xyz + \bar{c}_1x^4 + \bar{c}_2x^3y + \bar{c}_3x^2y^2 + \bar{c}_4xy^3 + \bar{c}_5y^4 + \bar{c}_6y^3z + \bar{c}_7y^2z^2 + \bar{c}_8yz^3 + \bar{c}_{10}xz^3 + \bar{c}_{11}x^2z^2 + \bar{c}_{12}x^3z + \bar{c}_{13}x^2yz + \bar{c}_{14}xy^2z + \bar{c}_{15}xyz^2$ onde $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i \in \mathbb{R}$.

Consideremos no transversal a projeção na direção singular sobre o espaço tangente, $(\alpha, \beta, 1, 0)$. Ou seja $P(x, y, z) = (x, y, \bar{f}(x + \alpha z, y + \beta z, z))$. Neste transversal, temos uma singularidade 5_2 se

$$coef(z^2) = a_5\alpha + a_6\beta + a_1\alpha^2 + (a_2 + \bar{a}_2)\beta^2 + a_4\alpha\beta = 0,$$

$$coef(yz^2).coef(xz) - coef(xz^2).coef(yz) = (2b_6a_1 + b_{10}a_5 - b_8a_4 - 2b_9a_6)\alpha +$$

$$(b_6a_4 + 2b_5a_5 - 2b_8a_2 - b_{10}a_6)\beta + O_1(2) = 0,$$

$$coef(z^3) = \bar{b}_7 + b_8\alpha + b_6\beta + O_2(2) = 0, \text{ e}$$

$$coef(z^4) = \bar{c}_9 + c_{10}\alpha + c_8\beta + O_3(2)$$

onde $O_i(2)$, $i = 1, 2, 3$ são os termos de ordem maior ou igual a dois em α, β, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ e são nulos se $\alpha = \beta = 0$.

Analogamente ao caso 4_1^2 temos que genericamente as soluções são $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Substituindo estes valores nas terceira e quarta equações temos que a terceira equação é dada por $\bar{b}_7 = 0$ e a quarta condição é $\bar{c}_9 = 0$.

Queremos saber quando a imagem de θ é transversal ao estrato-5_2 em V_4, isto é, quando $d_p\theta(\mathbb{R}^3) + T_f5_2^3 = V_4$, e assim saberemos quando $\theta^{-1}(5_2)$ é variedade em $\mathbb{R}^3$ de codimensão igual a dois.

O espaço tangente do estrato-5_2 em V_4 é a interseção dos núcleos de duas formas diferenciáveis ξ_1 e ξ_2. Como ξ_1 e ξ_2 têm que anular o tangente ao estrato-5_2 no transversal e os geradores do espaço tangente de $\mathcal{G}.f$, então

$\xi_1 = b_8da_2 - a_5da_3$ e

$\xi_2 = (-b_8a_5^2c_{10}a_6 + b_8a_5^3c_8)db_6 + (b_6a_5^2c_{10}a_6 - b_6a_5^3c_8)db_8 + (-2b_8b_5a_5^3 + 2b_8a_6b_{10}a_5^2 - 2b_8^2a_6a_4a_5 + 2b_8^2a_2a_5^2 - 2b_8a_5a_6^2b_9 + 2b_8^2a_6^2a_1)dc_9 + (a_4a_5b_8^2c_8 + 2b_8c_{10}b_5a_5^2 - 2b_8^2a_6a_1c_8 + a_4b_8^2a_6c_{10} -$

$b_8c_{10}a_6b_{10}a_5 - b_8b_{10}a_5^2c_8 + 2b_8a_6b_9c_8a_5 - 2c_{10}b_8^2a_2a_5)da_3 + (b_8^2a_5c_{10}a_6 - b_8^2a_5^2c_8)da_6 + (b_8b_6a5^2c_8 - b_8b_6a5c_{10}a6)da_5$.

Note que a condição para T ser transversal, implica que ξ_2 não é uma 1-forma nula, pois o coeficiente de dc_9 é diferente de zero.

Os geradores do espaço tangente à imagem de θ em V_4 são v_1, v_2, v_3 que podem ser facilmente calculados (ver Proposição 2.5).

A imagem de θ não é transversal ao estrato-5_2 se, e somente se, $\mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3\}$ + kernel $\xi_1 \cap$ kernel $\xi_2 \subsetneq V_4$. Como kernel $\xi_1 \cap$kernel ξ_2 tem codimensão dois, esta não transversalidade significa que existem dois vetores, linearmente independentes, $\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3$ $(j = 1, 2)$, tal que

$$\xi_1(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = 0$$
$$\xi_2(\lambda_j v_1 + \mu_j v_2 + \beta_j v_3) = 0$$

para $j = 1, 2$. Isto é, fazendo $x = \lambda_j$, $y = \mu_j$, $z = \beta_j$, teremos que ter duas soluções linearmente independentes para o sistema:

$$A_1x + A_2y + A_3z = 0 \tag{1}$$

$$B_1x + B_2y + B_3z = 0, \tag{2}$$

onde $A_1 = \xi_1(v_1) = b_8^2 - a_5c_{10}$, $A_2 = \xi_1(v_2) = b_8b_6 - a_5c_8$, $A_3 = \xi_1(v_3) = 0$,

$B_1 = \xi_2(v_1) = b_8a_5^3c_8c_{15} + 2b_8a_6^2a_5c_{10}c_{11} - 2b_8a_6a_5^2c_8c_{11} - b_8a_5^2c_{10}a_6c_{15} - 2d_{12}b_8b_5a_5^3 + 2d_{12}b_8^2a_2a_5^2 + 2d_{12}b_8^2a_6^2a_1 + a_4a_5b_8^3c_8 + 2b_8^2c_{10}b_5a_5^2 - 2b_8^3a_6a_1c_8 + a_4b_8^3a_6c_{10} - 2b_8^2b_{10}a_5^2c_8 - 2c_{10}b_8^3a_2a_5 - 2b_9b_8^2a_6^2c_{10} + 2d_{12}b_8a_6b_{10}a_5^2 - 2d_{12}b_8^2a_6a_4a_5 - 2d_{12}b_8a_5a_6^2b_9 + 4b_8^2a_6b_9c_8a_5$,

$B_2 = \xi_2(v_2) = b_8(2c_8b_8a_5a_6^2b_9 - 2b_5b_8a_5^3c_8 - 2c_8b_8^2a_6^2a_1 + a_4b_8^2a_6^2c_{10} + 4b_5b_8a_5^2c_{10}a_6 - 2b_{10}b_8a_6^2a_5c_{10} - 2a_6c_{10}b_8^2a_2a_5 + c_8b_8^2a_6a_4a_5 - 2a_5^3c_{10}a_6c_7 + a_6^2a_5^2c_{10}c_{15} - a_6a_5^3c_8c_{15} + 2d_{10}a_5^3a_6b_{10} + 2d_{10}a_5^3b_8a_2 - 2d_{10}a_5^2a_6^2b_9 + 2a_5^4c_8c_7 - 2d_{10}a_5^4b_5 - 2d_{10}a_5^2b_8a_6a_4 + 2d_{10}a_5b_8a_6^2a_1)/a_5$,

$B_3 = \xi_2(v_3) = b_8(-6a_5^2c_{10}a_6c_8 + 3a_5^3c_8^2 + 3a_6^2a_5c_{10}^2 - 10d_{11}b_5a_5^3 + 10d_{11}a_6b_{10}a_5^2 - 10d_{11}b_8a_6a_4a_5 + 10d_{11}b_8a_2a_5^2 - 10d_{11}a_5a_6^2b_9 + 10d_{11}b_8a6^2a_1)$.

No caso em que $A_iB_j \neq 0$ para algum $i, j = 1, 2, 3$, (1) e (2) são equações de planos. Para termos duas soluções linearmente independentes, estes dois planos devem ser paralelos. Caso contrário eles se interceptariam em uma só reta e isso daria apenas uma solução.

Note que $A_1 = b_8^2 - a_5c_{10} = 0$ e $A_2 = b_6b_8 - c_8a_5 = 0$ não pode ocorrer já que para 5_2 temos que ter $b_8a_6 - b_6a_5 = 0$ e $c_8a_5 - c_{10}a_6 \neq 0$ (ver Proposição 3.4). Como $A_3 = 0$ podemos dividir em dois casos:

(i) Se $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ a equação (2) gera o espaço todo. Portanto, basta tomar duas soluções linearmente independentes do plano (1).

(ii) Se existir um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A_1 - \lambda B_1 = 0$, $A_2 - \lambda B_2 = 0$ e $\lambda B_3 = 0$ então os planos são paralelos. Portanto, existem duas soluções linearmente independentes.

Mas genericamente, ou seja, quando $B_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, 3$, $A_j - \lambda B_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, 3$, vale o fato que imagem de θ é transversal ao estrato-5_2. Então pelo Teorema 1.25, $\theta^{-1}(5_2)$ é uma variedade suave de codimensão dois em M, o que significa que é uma curva (ver Figura 3.1). ■

Capítulo 4

Dualidade

Neste capítulo relacionamos a família de funções altura H, estudada no segundo capítulo, com a família de projeções ortogonais P estudada no terceiro capítulo. Cada uma destas famílias fornece uma estratificação do espaço de parâmetros S^3. Mostramos que existem relações entre certos estratos de uma família com certos estratos da outra. Isto estenderá resultados já obtidos por Bruce e Fuster em [10] onde eles consideram estas mesmas famílias mas para superfícies em $\mathbb{R}^3$. Estudamos também o comportamento das projeções de M em torno de um ponto umbílico plano parcial (isto é, um ponto onde M tem contato do tipo D_4 com o hiperplano tangente).

Existe uma relação de dualidade entre certas partes do conjunto bifurcação da função altura H e do conjunto bifurcação da aplicação projeção P em alguns casos de subvariedade em $\mathbb{R}^n$. Para curvas e para superfícies em $\mathbb{R}^3$, esta dualidade é dada por Bruce e Fuster [10]. A dualidade é usada para entender a geometria da subvariedade em questão. Por exemplo, é mostrado que no caso de superfície em $\mathbb{R}^3$, o dual de um ponto A_3 (ponto de cúspide) do $Bif(H)$ é uma gaivota (ponto de inflexão) do $Bif(P)$. Uma generalização destes resultados é encontrado em Bruce [5]. Mas só em Bruce, Giblin e Tari [14] os resultados de dualidade cobrem toda a lista de Rieger [45]. Também neste artigo, são feitos as correspondências entre as transições em famílias a 1-parâmetro dos conjuntos bifurcações das funções altura e das projeções ortogonais.

Em [34], Mochida estendeu resultados de dualidade obtidos por Bruce e Fuster para hipersuperfícies e subvariedades mergulhadas de codimensão 2 em $\mathbb{R}^n$. Em [16], Bruce e Nogueira mostraram a dualidade dos conjuntos bifurcações de H e P para curvas e superfícies (resultados locais e multilocais) em $\mathbb{R}^4$. Além disso, é mostrado que existe dualidade entre o conjunto bifurcação da família de projeções de superfícies em planos

com os conjuntos de bifurcações das famílias H e P.

Também encontramos resultados de dualidade em [20].

4.1 O resultado de dualidade entre H e P

Nesta seção apresentamos resultados locais e multilocais de dualidade para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$. Antes de entrarmos em detalhes sobre os resultados obtidos, vamos definir a dualidade em S^3, de uma maneira análoga à [10] e [16].

Sejam S uma variedade de dimensão dois mergulhada no espaço projetivo 3-dimensional $\mathbb{P}^3$ e $p \in S$ um ponto regular. Então o espaço tangente a S em p pode ser pensado como um hiperplano pela origem em $\mathbb{R}^4$, digamos, $\sum_0^3 a_i x_i = 0$. A este plano corresponde um ponto $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ no espaço projetivo dual $\mathbb{P}^{3*}$. O conjunto formado por tais pontos quando p varia sobre o conjunto dos pontos regulares de S é o dual de S, que denotaremos por S^* (algumas vezes tomamos o fecho). Note que $\mathbb{P}^3$ pode ser pensado como o conjunto de retas pela origem $0 \in \mathbb{R}^4$ enquanto que $\mathbb{P}^{3*}$ pode ser visto como o conjuto de hiperplanos pela origem $0 \in \mathbb{R}^4$.

A seguir daremos uma outra maneira de definir o dual a qual faremos uso aqui.

Considere a esfera S^3 em $\mathbb{R}^4$. Dados uma superfície regular $S \subset S^3$ e um ponto $p \in S$, existe uma única esfera S^2 equatorial em S^3 tangente a S em p, ou seja S^2 é a única esfera obtida pela interseção de S^3 com o hiperplano gerado pelo vetor posição p e pelo espaço tangente a S em p. Logo, temos um par de polos p^* (ver Figura 4.1). Quando fazemos p variar sobre S estes polos traçam em S^3 uma outra superfície, que é a `superfície dual` de S, que denotamos por $\overset{\vee}{S}$. Em S^3 temos duas cópias do dual de S, mas se considerarmos S em $\mathbb{P}^3$, temos apenas uma superfície dual.

Pelo Teorema de Transversalidade de Thom para a maioria dos pontos $u \in S^3$, as funções H_u e P_u são estáveis. Portanto, as únicas singularidades locais para H_u são os pontos críticos de Morse com valores críticos distintos, e para P_u são as singularidades $II, 3_{A_0}$ e 4_1^1. Para as H_u e P_u não estáveis podemos definir os conjuntos a seguir.

Definição 4.1 *O* `conjunto bifurcação` *da função altura é dado por*

$$Bif(H) = \{u \in S^3 : H_u \text{ não é estável}\},$$

e o da projeção ortogonal é

$$Bif(P) = \{u \in S^3 : P_u \text{ não é estável}\}.$$

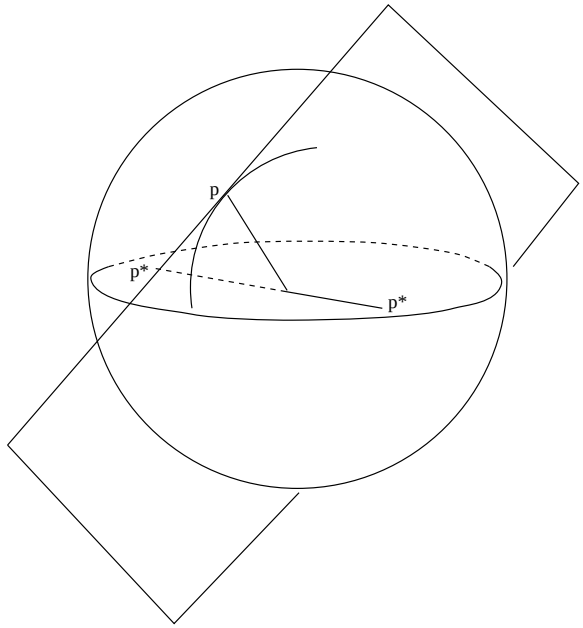

Figura 4.1: Dualidade

Segundo a definição acima, o conjunto bifurcação da família H consiste das direções $u \in S^3$ para as quais a função H_u tem singularidade local do tipo A_2 ou pior (ou seja, A_3 ou A_4), ou então uma bitangência, isto é, uma singularidade multilocal do tipo $2A_1$ (ou pior). Ou seja, o conjunto bifurcação de H é formado principalmente por dois estratos onde um é formado pelas direções normais nos pontos parabólicos e o outro pelas direções normais a hiperplanos bitangentes. A parte regular de $Bif(H)$ que corresponde às singularidades locais será denotada por $Bif(H, A_2)$. Já a parte regular que corresponde às singularidades multilocais será denotada por $Bif(H, 2A_1)$.

O conjunto bifurcação da família P consiste das direções $u \in S^3$ para as quais a projeção P_u tem uma singularidade local do tipo 3_{A_1} ou pior (ou seja, $3_{A_2}, 3_{A_3}, 4_2^2$ ou 4_2^3), ou do tipo 4_1^2 ou pior (ou seja, $4_1^3, 4_1^4$), ou tem uma singularidade multilocal do tipo $2II$ (ou pior). Respectivamente, as partes regulares de $Bif(P)$ que correspondem a estes estratos serão denotadas por $Bif(P, 3_{A_1}), Bif(P, 4_1^2)$ e $Bif(P, 2II)$. O segundo destes subconjuntos não é correspondente aos pontos parabólicos e portanto não é detectado pela dualidade.

Provaremos agora o teorema de dualidade. Observamos aqui que a relação entre os estratos locais é também provada em [34] usando um método diferente do nosso.

Teorema 4.2 (Teorema de dualidade) *Seja M uma hipersuperfície genérica em $\mathbb{R}^4$. Então $Bif(\overset{\vee}{H}, A_2) = Bif(P, 3_{A_1})$ e $Bif(\overset{\vee}{H}, 2A_1) = Bif(P, 2II)$. Similarmente*

$Bif(H, A_2) = Bif(\overset{\vee}{P}, 3_{A_1})$ *e* $Bif(H, 2A_1) = Bif(\overset{\vee}{P}, 2II)$.

Prova: Seja $p \in M$. Se o contato de M com hiperplanos for mais degenerado que a singularidade A_1, então p é ponto parabólico. Sem perda de generalidade, podemos supor $p = (0,0,0,0)$ e fixarmos coordenadas locais (x, y, z, w) em p tal que o eixo-w seja normal a M em p, e o espaço-(x, y, z) seja o espaço tangente em p. Podemos desta forma, escrever M na forma de Monge $(x, y, z, f(x, y, z))$ tal que $f = f_x = f_y = f_z = 0$ em $(0,0,0)$. Além disso, por uma rotação dos eixos podemos supor $j^2 f = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2$, ou seja, $f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 0$ em $(0,0,0)$. Logo, o hiperplano degenerado em p é dado por $w = 0$ e a direção normal unitária é $(0,0,0,1)$. O 2-jato de f é $a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2$, com $a_1 a_2 \neq 0$ e $a_3 = 0$ (pois, se $a_3 \neq 0$ o contato de M com o hiperplano $w = 0$ seria do tipo A_1, e se $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$, o contato de M com $w = 0$ seria do tipo D_4 e isto não nos interessa por enquanto).

Queremos saber agora, qual é a direção dual de $(0,0,0,1)$. O que precisamos, então, é identificar os hiperplanos próximos do hiperplano $w = 0$ que têm contato degenerado com M em pontos próximos de p. No ponto $(x, y, z, f(x, y, z))$ próximo de p, suponha que os hiperplanos degenerados próximos a $w = 0$ sejam dados por $Rx + Sy + Tz + f(x, y, z) = const$, com R, S, T funções de (x, y, z). A condição para este hiperplano ser tangente à hipersuperfície no ponto dado é

$$\begin{aligned} R + f_x &= 0 \\ S + f_y &= 0 \\ T + f_z &= 0. \end{aligned}$$

A condição para que este contato seja degenerado é dada pelo determinante da Hessiana de H igual a zero, onde $H = \langle (x, y, z, f(x, y, z)), (R, S, T, 1) \rangle = Rx + Sy + Tz + f(x, y, z)$, ou seja, é dado por

$$f_{xx} f_{yy} f_{zz} - f_{xx} f_{yz}^2 - f_{yy} f_{xz}^2 - f_{zz} f_{xy}^2 + 2 f_{xy} f_{xz} f_{yz} = 0,$$

cujo primeiro jato é $8a_1 a_2 b_8 x + 8a_1 a_2 b_6 y + 24 a_1 a_2 b_7 z$. Como $b_7 \neq 0$ pois a singularidade é do tipo A_2 (ver Proposição 2.3), então z é função de (x, y). Logo, R, S, T são funções de x, y da forma:

$$\begin{aligned} R &= -2a_1 x + O_1(2) \\ S &= -2a_2 y + O_2(2) \\ T &= O_3(2). \end{aligned}$$

Assim, o estrato A_2 é uma superfície regular, já que $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$ pois o contato com o hiperplano $w = 0$ é do tipo A_2. Sendo assim, o hiperplano tangente a este estrato é dado por $T = 0$, e então, a direção dual de $(0,0,0,1)$ é $(0,0,1,0)$. Consideremos agora, a projeção nesta direção dual. Como $(0,0,1,0)$ pertence ao hiperplano tangente então obteremos uma projeção singular. A projeção, nesta direção, é da forma $(X, Y, f(X,Y,Z))$. Como $b_7 \neq 0$, podemos fazer as seguintes mudanças:
$Z = z - \frac{coef(XZ^2)}{3b_7}X$, para eliminar XZ^2 na 3ª coordenada, onde $coef(XZ^2)$ é o coeficiente de XZ^2;
$z = Z - \frac{coef(Yz^2)}{3b_7}Y$, para eliminar Yz^2 na 3ª coordenada, onde $coef(Yz^2)$ é o coeficiente de Yz^2.

Logo, temos que a projeção é equivalente a $(X, Y, (AX^2+BXY+CY^2)Z+b_7Z^3)$. Esta por sua vez, é equivalente a $(X, Y, (\pm X^2 \pm Y^2)Z + Z^3)$, se e somente se, $B^2 - 4AC \neq 0$, ou seja, $3b_{10}^2b_7 - 4b_{10}b_6b_8 + 4b_6^2b_9 - 12b_5b_7b_9 + 4b_5b_8^2 \neq 0$. Isto é, genericamente a projeção possui singularidade do tipo 3_{A_1}.

Considere agora o conjunto $Bif(P, 2II)$ (caso multilocal). Seja $u(x,y)$ a parametrização deste estrato de dimensão dois. Sejam $p_1 = \alpha(x,y)$ e $p_2 = \beta(x,y)$ os pontos do tipo A_1 no mesmo nível. Em outras palavras, projetando M na direção $u(x,y) \in T_{p_1}M = T_{p_2}M$, p_1 e p_2 são pontos cujas imagens são superfícies tangentes. Como $\alpha(x,y) - \beta(x,y)$ é múltiplo de $u(x,y)$ então $< \alpha(x,y) - \beta(x,y), N(\alpha(x,y)) >= 0$, onde $N(\alpha(x,y))$ é o vetor normal à hipersuperfície no ponto $\alpha(x,y)$. Já sabemos também que $N(\alpha(x,y)) = \pm N(\beta(x,y))$. O espaço tangente ao estrato $Bif(P, 2II)$ é gerado por $\alpha - \beta$, $\alpha_x - \beta_x$ e $\alpha_y - \beta_y$. Ou seja, $\alpha - \beta$, $\alpha_x - \beta_x$ e $\alpha_y - \beta_y$ geram o mesmo espaço que $u(x,y)$, $u_x(x,y)$ e $u_y(x,y)$, basta notar que $\alpha(x,y) - \beta(x,y) = \lambda(x,y)u(x,y)$ e que $\lambda(x,y) \neq 0$. Como α_x, β_x, α_y e β_y pertencem a $T_{p_i}M$, $i = 1, 2$, então:

$$\begin{aligned} < \alpha(x,y) - \beta(x,y), N(\alpha(x,y)) > &= 0 \\ < \alpha_x(x,y) - \beta_x(x,y), N(\alpha(x,y)) > &= 0 \\ < \alpha_y(x,y) - \beta_y(x,y), N(\alpha(x,y)) > &= 0. \end{aligned}$$

Logo o vetor normal $N(\alpha(x,y))$ é o vetor dual de $u(x,y)$, e portanto mostramos que $Bif(\overset{\vee}{P}, 2II) = Bif(H, 2A_1)$.

As outras duas igualdades do teorema segue do que foi provado acima e do fato que para qualquer superfície regular S vale que $(\overset{\vee}{S})^{\vee} = S$. ■

4.1.1 Conseqüências

Daremos agora as consequências do Teorema 4.2. Para isto precisamos da seguinte definição (ver também [44]). Um ponto de uma superfície M em S^3 é parabólico (respectivamente, cúspide de Gauss) se M e a esfera tangente máxima neste ponto têm contato A_2 (respectivamente, A_3).

Proposição 4.3 *Seja u a direção normal em um ponto parabólico sobre M e u^* a correspondente direção dual que determina uma projeção de $M \to \mathbb{R}^3$. Então genericamente, a função altura correspondente a u tem uma singularidade A_k, $k \geq 3$, se, e somente se, a direção dual u^* determina uma projeção sobre M do tipo 4_2^2 ou 4_2^3.*

Prova: Seja $p \in M$. Sem perda de generalidade podemos supor $p = (0,0,0,0)$. Já vimos que sempre podemos escrever M localmente como o gráfico de uma função $f(x,y,z)$ onde $j^2 f(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2$. Desta forma, pela prova do Teorema 4.2, temos que a direção normal à M em p é $(0,0,0,1)$ e que a direção dual é $(0,0,1,0)$.

Para a função altura na direção $(0,0,0,1)$ ter uma singularidade do tipo A_k, $k \geq 3$, devemos ter os novos coeficientes de z^2 e de z^3 iguais a zero. Neste caso, o 3-jato da projeção dual, isto é da projeção na direção $(0,0,1,0)$, é equivalente a

$$(x, y, b_9x^2z + b_8xz^2 + b_{10}xyz + b_5y^2z + b_6yz^2).$$

Em $A_{k\geq 3}$ como o coeficiente de z^3 é nulo temos que ter $b_6 \neq 0$ ou $b_8 \neq 0$, senão o conjunto parabólico seria singular (ver Proposição 2.10). Sem perda de generalidade podemos supor que $b_8 \neq 0$, e então o 3-jato da projeção é equivalente a

$$(x, y, b_8xz^2 + (Ax^2 + Bxy + Cy^2)z)$$

onde, $A = b_9$, $B = (b_8b_{10} - 2b_9b_6)/b_8$ e $C = (b_5b_8^2 - b_{10}b_6b_8 + b_9b_6^2)/b_8^2$.

Se $B^2 - 4AC \neq 0$ genericamente a projeção terá uma singularidade do tipo 4_2^2. Observemos que as condições para H_u ter singularidade $A_{k\geq 3}$ não anulam $B^2 - 4AC$. Se $B^2 - 4AC = 0$ então a singularidade é genericamente do tipo 4_2^3.

Analogamente se a projeção na direção $(0,0,1,0)$, $(x, y, f(x,y,z))$, tem singularidade do tipo 4_2^2 (ou 4_2^3) então temos que $j^3 f = a_1x^2 + a_2y^2 + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_8xz^2 + b_9x^2z + b_{10}xyz$. Logo, temos $f \simeq x^2 + y^2 + \lambda z^4$, onde λ é uma expressão em termos dos coeficientes de f. Ou seja, a função altura na direção $(0,0,0,1)$ (que é a direção dual de $(0,0,1,0)$) tem uma singularidade $A_{k\geq 3}$. ■

Com o Teorema 4.2 temos que $Bif(H, A_2)$ e $Bif(P, 3_{A_1})$ são superfícies correspondentes, ou seja, são duais. Pela Proposição 4.3 temos que, genericamente, a curva A_3 da primeira superfície que é cúspide de Gauss corresponde, por dualidade, à curva 4_2^2 da segunda superfície. Pelos resultados de dualidade de Bruce [9], segue-se que a curva 4_2^2 é o conjunto dos pontos parabólicos de $Bif(P, 3_{A_1})$, ver Figura 4.2.

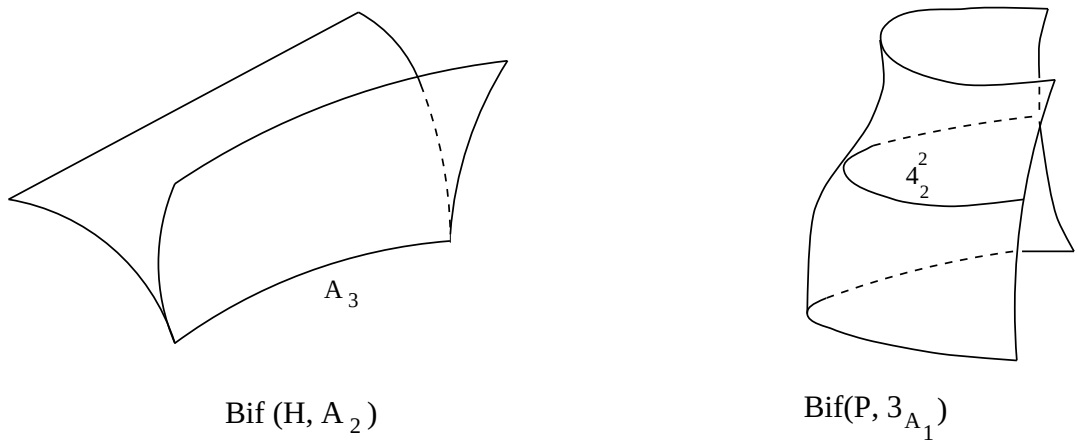

Figura 4.2: Conjuntos de Bifurcações

Corolário 4.4 *H_{u^*} tem singularidade A_3 se, e somente se, u é ponto parabólico de $Bif(P, 3_{A_1})$, H_{u^*} tem singularidade A_4 se, e somente se, u é cúspide de Gauss de $Bif(P, 3_{A_1})$.*

Prova: Suponha que u é um ponto parabólico de $Bif(P, 3_{A_1}) = Bif(\overset{\vee}{H}, A_2)$ (Teorema de Dualidade 4.2) então por propriedade de dualidade $u^* \in Bif(H, A_2)$ é um ponto de cúspide, isto é, H_{u^*} tem singularidade A_3. Suponha que u é cúspide Edge de Gauss de $Bif(P, 3_{A_1}) = Bif(\overset{\vee}{H}, A_2)$ então por propriedade de dualidade $u^* \in Bif(H, A_2)$ é um rabo de andorinha, isto é, H_{u^*} tem singularidade A_4. A recíproca destas implicações são provadas analogamente. ■

O caso geral é uma consequência direta do Teorema 2.1 em [13] se tivermos a definição de curva ridge em S^3. Então temos uma conjectura.

Conjectura 4.5 *Suponha que a curva parabólica de $Bif(P, 3_{A_1})$ é regular. Então H sobre $Bif(P, 3_{A_1})$ tem singularidade A_k, $k \geq 3$ se, e somente se, as curvas parabólica e ridge de $Bif(P, 3_{A_1})$, têm contato $k-2$ em u.*

Proposição 4.6 *Considere o conjunto $Bif(H, A_2)$ e um ponto u pertencente a este estrato. Então a projeção ao longo de u^* tem uma singularidade 3_{A_k}, $k \geq 1$ se, e somente se, a função altura correspondente a u tem singularidade A_2. Além disso, P_{u^*} tem singularidade 3_{A_1} se, e somente se, u não é um ponto parabólico de $Bif(H, A_2)$, P_{u^*} tem singularidade 3_{A_2} se, e somente se, u é um ponto parabólico de $Bif(H, A_2)$, P_{u^*} tem singularidade 3_{A_3} se, e somente se, u é cúspide de Gauss de $Bif(H, A_2)$.*

Prova: Para provar a primeira afirmação basta notar que pelo Teorema 4.2 temos que $Bif(\overset{\vee}{H}, A_2) = Bif(P, 3_{A_1})$ e pela Proposição 4.3 temos que singularidade A_k, $k \geq 3$, de H_u corresponde a singularidade 4_2^2 (ou 4_2^3) de P_{u^*}. No caso em que $Bif(H, A_2)$ é uma superfície regular, o seu dual é o discriminante da família da função altura sobre $Bif(H, A_2)$ (ver [9]). Seja u um ponto A_k, $1 \leq k \leq 3$ de $Bif(H, A_2)$, ou seja, $Bif(\overset{\vee}{H}, A_2) = \Delta(A_k)$. Pelo Teorema 3.5 $\Delta(A_k) = Bif(P, 3_{A_k})$ e isto significa que P_{u^*} tem singularidade 3_{A_k}.

Por outro lado, se P_{u^*} tem singularidade 3_{A_k} então temos pela Proposição 3.5 que $Bif(P, 3_{A_k}) = \Delta(A_k)$. No caso $k = 1$, como $\Delta(A_1)$ é regular em u^* então por propriedade de dualidade temos que $u \in Bif(H, A_2)$ não é ponto parabólico. No caso $k = 2$ temos que como $\Delta(A_2)$ é cuspidal edge em u^* então por propriedade de dualidade temos que $u \in Bif(H, A_2)$ é ponto parabólico. Finalmente, no caso $k = 3$, como $\Delta(A_3)$ é rabo de andorinha em u^* então por propriedade de dualidade temos que $u \in Bif(H, A_2)$ é cúspide de Gauss. ■

4.2 Umbílicos planos parciais

A seguir, estudamos o que acontece com a projeção nas direções duais em um ponto umbílico plano parcial p, ou seja, um ponto para o qual a função altura ao longo da normal tem uma singularidade D_4.

Neste ponto p, podemos supor que $j^2 f(x, y, z) = a_1 x^2$. Assim, toda direção no hiperplano tangente a M da forma $(0, \beta, \gamma, 0)$ é direção assintótica, estas direções podem ser representadas pelo círculo unitário em $(0, \beta, \gamma, 0)$. Nosso objetivo, é descrever o comportamento de projeções nestas direções.

Localmente, podemos escrever o 3-jato da parametrização de M da forma $(x, y, z, x^2 + C(x, y, z))$ onde $C(x, y, z) = b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_8 x z^2 + b_9 x^2 z + b_{10} x y z + y^3 \pm y z^2$.

Suponha que $\gamma \neq 0$. Podemos então considerar a direção de projeção $(0, \beta, 1, 0)$. Projetando nesta direção, a projeção é dada por $P(x, y, z) = (x, y - \beta z, f(x, y, z))$, que podemos escrever da forma

$$P(X, Y, Z) = (X, Y, f(X, Y + \beta Z, Z)).$$

Fazendo mudanças de coordenadas na meta usando a primeira e a segunda coordenadas de P, o j^3P é equivalente a $(X, Y, (\beta^3 \pm \beta)Z^3 + (b_9 + b_2\beta)X^2Z + (b_{10} + 2b_3\beta)XYZ + (b_8 + b_{10}\beta + b_3\beta^2)XZ^2 + (3\beta)Y^2Z + (3\beta^2 \pm 1)YZ^2)$.

Se $\beta^3 \pm \beta = C(0, \beta, 1) \neq 0$, as seguintes mudanças podem ser feitas:
$Z = z - \frac{coef(XZ^2)}{3C(0,\beta,1)}X$, para eliminar XZ^2 na 3ª coordenada, onde $coef(XZ^2)$ é o coeficiente de XZ^2;
$z = Z - \frac{coef(Yz^2)}{3C(0,\beta,1)}Y$, para eliminar Yz^2 na 3ª coordenada, onde $coef(Yz^2)$ é o coeficiente de Yz^2.

Logo, teremos que j^3P é equivalente a $(X, Y, (AX^2 + BXY + CY^2)Z + DZ^3)$ e este por sua vez, é equivalente a $(X, Y, (\pm X^2 \pm Y^2)Z + Z^3)$, se e somente se, $B^2 - 4AC \neq 0$, e $D \neq 0$.

Temos:

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 + \lambda_1\beta + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\beta^3 = 0 \tag{4.1}$$

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(\beta^2 \pm 1) = C(0, \beta, 1) = 0 \tag{4.2}$$

onde

$\lambda_0 = 3b_{10}^2b_7 + 4b_5b_8^2 - 4b_{10}b_6b_8 - 12b_5b_7b_9 + 4b_6^2b_9,$

$\lambda_1 = -b_{10}^2b_6 + 12b_{10}b_3b_7 - 8b_8b_6b_3 + 4b_6^2b_2 + 4b_6b_5b_9 + 12b_4b_8^2 - 12b_5b_7b_2 - 36b_9b_4b_7,$

$\lambda_2 = -b_{10}^2b_5 + 12b_3^2b_7 + 12b_4b_{10}b_8 - 8b_8b_3b_5 + 4b_6b_5b_2 - 12b_9b_6b_4 + 4b_9b_5^2 - 36b_2b_4b_7,$

$\lambda_3 = 3b_{10}^2b_4 - 4b_{10}b_3b_5 + 4b_3^2b_6 - 12b_2b_6b_4 + 4b_5^2b_2.$

Portanto existem 3 ou 1 direções no círculo unitário em $(0, \beta, \gamma, 0)$ para as quais as projeções são genericamente do tipo 3_{A_2}. Existem 3 ou 1 direções, para as quais as projeções são genericamente do tipo 4_2^2. Em particular para D_4^- teremos 3 direções, e para D_4^+ teremos uma direção.

Se $\gamma = 0$, podemos então considerar a direção de projeção $(0, 1, 0, 0)$. Projetando nesta direção, a projeção é dada por $P(X, Y, Z) = (X, Z, f(X, Y, Z))$. Fazendo mudanças de coordenadas na meta usando a primeira e a segunda coordenadas de P, o j^3P é equivalente a $(X, Z, b_2X^2Y + b_3XY^2 + b_4Y^3 + b_5Y^2Z + b_6YZ^2 + b_{10}XYZ)$. Genericamente $b_4 \neq 0$, portanto as seguintes mudanças podem ser feitas:

$Y = y - \frac{coef(XY^2)}{3b_4}X$, para eliminar XY^2 na 3ª coordenada, onde $coef(XY^2)$ é o coeficiente de XY^2;
$y = Y - \frac{coef(y^2Z)}{3b_4}Z$, para eliminar y^2Z na 3ª coordenada, onde $coef(y^2Z)$ é o coeficiente de y^2Z.

Logo, teremos que P é equivalente a $(X, Z, (A_1X^2 + B_1XZ + C_1Z^2)Y + b_4Y^3)$. Este por sua vez, é equivalente a $(X, Z, (\pm X^2 \pm Z^2)Y + Y^3)$ se, e somente se, ${B_1}^2 - 4A_1C_1 = 3b_{10}^2b_4 - 4b_{10}b_5b_3 + 4b_3^2b_6 - 12b_2b_4b_6 + 4b_2b_5^2 \neq 0,$ e $b_4 \neq 0$.

Concluímos então que genericamente a projeção nestas direções possuem singularidades do tipo 3_{A_1}.

O argumento anterior demonstra a seguinte proposição.

Proposição 4.7 *Seja p um ponto umbílico plano parcial da hipersuperfície M. Existe um círculo de direções em T_pM, tal que genericamente, a projeção é do tipo 3_{A_1}. Há também 1 ou 3 direções sobre este círculo para as quais as projeções são do tipo 3_{A_2} e 1 ou 3 direções onde a projeção correspondente é do tipo 4_2^2.*

Na Figura 4.3 ilustramos todas as possibilidades para as direções do círculo em T_pM, conforme a Proposição 4.7 e indicamos aquelas que ocorrem.

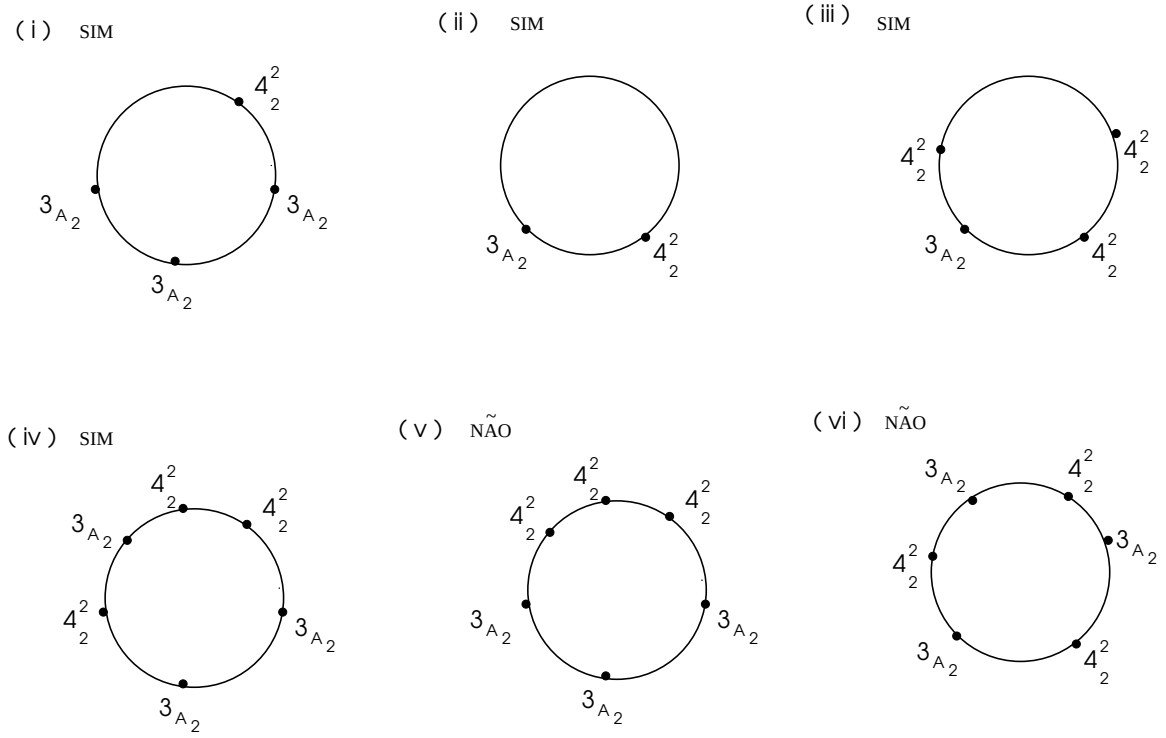

Figura 4.3: Os tipos de singularidades da projeção em um ponto umbílico parcial

Daremos agora, alguns exemplos numéricos dos casos (i) até (iv). Seja $j^3(f) = x^2 + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3 + b_8xz^2 + b_9x^2z + b_{10}xyz$.

Para o caso (i) faça $b_1 = b_1, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 1$, $b_8 = b_9 = b_{10} = 0$ e então as cúbicas (1) e (2) serão $-4\beta^3 - 20\beta^2 - 8\beta = 0$, cujas raízes são 0, $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$, e $\beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 = 0$, cuja única raiz real é -1.

Para o caso (ii) faça $b_1 = b_1, b_2 = -1, b_3 = 0, b_4 = b_5 = 1, b_6 = 0, b_7 = 1$, $b_8 = 1, b_9 = b_{10} = 0$.

Para o caso (iii) faça $b_1 = b_1, b_2 = -1, b_3 = 0, b_4 = 100, b_5 = 1, b_6 = -10, b_7 = 1$, $b_8 = b_9 = b_{10} = 0$.

Para o caso (iv) faça $b_1 = b_1, b_2 = 1, b_3 = -20, b_4 = 100, b_5 = -10, b_6 = -10, b_7 = 1$, $b_8 = b_9 = b_{10} = 0$.

Provaremos a seguir que os últimos dois casos que aparecem na Figura 4.3, não podem ocorrer.

Para estes casos queremos que cada cúbica, (1) e (2), tenha três raízes reais e todas distintas. Sem perda de generalidade, podemos fixar $b_4 = 1, b_6 = -1, b_5 = b_7 = 0$. Assim, as equações (1) e (2) serão, respectivamente,

$$4b_{10}b_8 + 4b_9 + (b_{10}^2 + 8b_3b_8 + 4b_2 + 12b_8^2)\beta + (12b_8b_{10} + 12b_9)\beta^2 + (3b_{10}^2 - 4b_3^2 + 12b_2)\beta^3 = 0,$$

e

$$\beta(\beta^2 - 1) = 0.$$

Desta forma as raízes da segunda cúbica ficam fixas: -1, 0 e 1 e nós vamos estudar o que acontece com as raízes da outra cúbica (isto abrange todos os casos).

Queremos saber se é possível encontrar raízes reais distintas a, b e c para a primeira cúbica tais que satisfaçam os casos (v) e (vi) da Figura 4.3. Ou seja, para o caso (v) temos que ter a, b e c entre 0 e 1, ou entre -1 e 0, ou todos maiores que 1, ou todos menores que -1. Para o caso (vi) temos que ter $a > 1$, $0 < b < 1$ e $-1 < c < 0$, ou $a < -1$, $0 < b < 1$ e $-1 < c < 0$.

Supondo que a primeira cúbica tem raízes a, b e c, podemos escrevê-la como

$$(\beta - a)(\beta - b)(\beta - c).$$

Sendo assim, teremos que resolver

$$4b_8b_{10} + 4b_9 = -abc,$$

$$b_{10}^2 + 8b_3b_8 + 4b_2 + 12b_8^2 = ab + (a + b)c,$$

$$12b_8b_{10} + 12b_9 = -(a+b+c),$$

$$3b_{10}^2 - 4b_3^2 + 12b_2 = 1.$$

Como consequência da primeira e da terceira igualdade temos que

$$a + b + c = 3abc.$$

Ou seja, $a = \frac{b+c}{3bc-1}$ se $3bc - 1 \neq 0$, caso contrário b e c são imaginários. Para o caso (v) temos que encontrar, por exemplo, raízes a, b e c distintas tais que sejam todas maiores que zero e menores que um. Supondo que $0 < b < 1$ e $0 < c < 1$, provemos que $0 < a < 1$ não pode acontecer.

Caso(a) Se $3bc - 1 > 0$: $a < 1 \Rightarrow b + c < 3bc - 1 \Rightarrow b(1 - 3c) < -1 - c$.

(i) Se $1 - 3c > 0$: $b < \frac{-1-c}{1-3c}$. Como por hipótese $b > 0$, então $\frac{-1-c}{1-3c} > 0$ implica que $-1 - c > 1 - 3c$, ou seja, $c > 1$ (absurdo).

(ii) Se $1 - 3c < 0$: $b > \frac{-1-c}{1-3c}$. Como por hipótese $b < 1$, então $\frac{-1-c}{1-3c} < 1$ implica que $-1 - c > 1 - 3c$, ou seja, $c > 1$ (absurdo).

Caso(b) Se $3bc - 1 < 0$: $a > 0 \Rightarrow b + c < 0$ (absurdo).

De maneira análoga, provamos que não existem raízes distintas a, b e c maiores que -1 e menores que 0, ou todas maiores que 1, ou todas menores que -1. Sendo assim, concluímos que o caso (v) não ocorre.

Também de maneira análoga, provamos que os casos $a > 1$, $0 < b < 1$ e $-1 < c < 0$, ou $a < -1, 0 < b < 1$ e $-1 < c < 0$ não ocorrem. O que elimina a possibilidade de ocorrer o caso (vi) da Figura 4.3.

Capítulo 5

Germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$

5.1 Introdução

No próximo capítulo estudamos o contato de uma hipersuperfície M com planos. Este contato é estudado, como veremos, através das $\mathcal{A}$-singularidades de germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. Existe uma família natural a 4-parâmetros de projeções de M em planos, e as singularidades que ocorrem genericamente nesta família são aquelas de $\mathcal{A}_e$-codimensão (ou codimensão do estrato se houver presença de módulos) ≤ 4. Portanto precisamos da lista de todas as $\mathcal{A}$-singularidades de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ de codimensão menor ou igual a 4. Em [46], encontramos os germes desejados que podem ser escritos da forma $(x, f(x, y) \pm z^2)$. É preciso então complementar esta lista. Faremos isso usando o programa "Transversal", no Maple, feito por Neil Kirk [27]. A classificação é feita por indução sobre os k-jatos. Usando o Teorema da Transversal Completa 1.11 obtemos os germes em $J^{k+1}(3, 2)$ cujo k- jato é F. Usando mudanças escalares e o Lema de Mather 1.7 obtemos as órbitas em $J^{k+1}(3, 2)$ cujo k-jato é F. O programa "Transversal"ajuda na aplicação do Lema de Mather. Consideramos então cada órbita e aplicamos o critério de determinação finita, Corolário 1.5, para verificar se o germe é $k + 1$-determinado. Na prática este processo envolve o cálculo de determinantes de matrizes. O problema principal é achar as matrizes adequadas (e não errar nos cálculos). O programa Transversal pode ser usado para verificar se um germe é k-determinado. Além disso, Kirk usa os resultados de [15, 17] no seu programa. Observamos que o programa não produz listas de singularidades mas é uma ferramenta para verificar se um germe é finitamente determinado, aplicar o Lema de Mather, calcular a codimensão, obter um desdobramento versal, etc. Muitas contas e truques precisam ser feitos (à mão) durante o uso do "Transversal".

Ainda neste capítulo deduzimos os modelos das deformações dos discriminantes das singularidades de codimensão menor ou igual a dois. Fizemos também um reconhecimento geométrico das singularidades de codimensão ≤ 1 e de seus desdobramentos versais através do conjunto dos pontos críticos e do discriminante.

5.2 As singularidades de corank 1

Vamos considerar germes de $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ da forma $F(x, y) = (x, f(x, y))$.

Lema 5.1 *[46] Todo germe $F : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$, $n > 1$, de corank 1 é $\mathcal{A}$-equivalente a um germe da forma $h(x, y, z) = (x, f(x, y_1, \cdots, y_m) + \sum_{i=1}^{n-m-1} \varepsilon z_i^2)$, onde $f(0, y_1, \cdots, y_m) \in m_n^3$ e $\varepsilon = \pm 1$, e $cod(\mathcal{A}, h) = cod(\mathcal{A}, (x, g)) + n - m - 1$.*

Assim se tomarmos $m = 1$ o lema acima reduz a classificação de germes $F : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ para a classificação de germes $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ de corank 1. Encontramos em Rieger [45] uma classificação de germes simples e não simples de $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. Pela observação do parágrafo anterior temos que em nosso caso, $n = 3$, vale o seguinte teorema.

Teorema 5.2 *[46] As $\mathcal{A}$-classes das singularidades de germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ de corank 1, equivalentes a $(x, f(x, y) \pm z^2)$ e de codimensão ≤ 4 são dada na Tabela 1:*

Tabela 1:

Tipo	*Forma normal*	$\mathcal{A}_e$*-cod*	*simples (s/n)*
1	(x, y)	0	s
2	$(x, y^2 \pm z^2)$	0	s
3	$(x, xy + y^3 \pm z^2)$	0	s
4_k	$(x, y^3 + (\pm 1)^{k-1} x^k y \pm z^2), 2 \leq k \leq 5$	$k - 1$	s
5	$(x, xy + y^4 \pm z^2)$	1	s
6	$(x, xy + y^5 \pm y^7 \pm z^2)$	2	s
7	$(x, xy + y^5 \pm z^2)$	3	s
8	$(x, xy + y^6 \pm y^8 + ay^9 \pm z^2)$	4	n
11_{2k+1}	$(x, xy^2 + y^4 + y^{2k+1} \pm z^2), 2 \leq k \leq 4)$	k	s
12	$(x, xy^2 + y^5 + y^6 \pm z^2)$	3	s
13	$(x, xy^2 + y^5 \pm y^9 \pm z^2)$	4	s
16	$(x, x^2 y + y^4 \pm y^5 \pm z^2)$	3	s
17	$(x, x^2 y + y^4 \pm z^2)$	4	s

Observação 5.3 *Os germes de tipo* $2, 3$ *na tabela do Teorema 5.2 são chamados, respectivamente, de dobra e cúspide, e são estáveis. O germe* 4_2 *é denominado lábios/bicos (dependendo do sinal* $+$ *ou* $-$*, respectivamente). Os germes* 5*,* 4_3*,* 6 *e* 11_5 *são conhecidos respectivamente como rabo de andorinha, ganso, borboleta e gaivota.*

Teorema 5.4 *As* $\mathcal{A}$*-classes das singularidades de* $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ *de corank* 1 *e de* $\mathcal{A}_e$*-codimensão ou codimensão do estrato (quando houver presença de módulos)* ≤ 4 *que não estão listadas no Teorema 5.2 são as da Tabela* 2*:*

Tabela 2*:*

Tipo	*Forma normal*	$\mathcal{A}_e$*-cod*	*g. determinação*
N_1	$(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3 \pm z^5)$ $a \neq 0$, $4a^3 \pm 27 \neq 0$	3 (2†)	5
N_2	$(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3)$, $a \neq 0$, $4a^3 + 27 \neq 0$	4 (3†)	3
N_3	$(x, xy + y^3 + z^3 \pm y^3z)$	3	4
N_4	$(x, xy \pm y^2z + z^3 \pm z^5)$	3	5
N_5	$(x, xy \pm y^3 + yz^2 + z^5)$	3	5
N_6	$(x, xy \pm y^2z + z^3)$	4	3
N_7	$(x, xy + y^3 + z^3 \pm y^4z)$	4	5
N_8	$(x, xy + z^3 \pm y^4 + y^3z + ay^4z + b(y^6 + \lambda y^5z))$, $b \neq 0$	6 (4†)	6
N_9	$(x, xy + yz^2 \pm y^4 + z^5 + ay^6)$	5 (4†)	6
N_{10}	$(x, xy + y^2z + yz^3 \pm z^4 + az^6)$	5 (4†)	6
N_{11}	$(x, xy \pm y^3 + yz^2 + z^7)$	4	7
N_{12}	$(x, xyz \pm y^2z + z^3 + ax^2y + bx^2z + cyz^3 + z^4)$	7∗ (4†)	4

onde λ *é uma constante.*

† codimensão do estrato

∗ excluindo os valores excepcionais dos módulos $4b - 1 = 0$ e $4b - 1 + 6ac = 0$.

Prova: Nosso interesse é nos germes de corank 1, portanto podemos escrever $F(x, y, z) = (x, f(x, y, z))$. Escrevendo $j^2f = x\phi(x, y, z) + \psi(y, z)$, os germes que não podem ser escritos da forma $(x, f(x, y) \pm z^2)$ (ou seja $m = 2$ no Lema 5.1) correspondem ao caso $\psi \equiv 0$. Então para completar a tabela do Teorema 5.2, precisamos considerar $j^2f = x\phi(x, y, z)$. Não é difícil ver que as órbitas no $J^2(3, 2)$ deste tipo são (x, xy) e $(x, 0)$. Vamos classificar por indução, nos nivéis dos k-jatos, germes com 2-jato (x, xy) e $(x, 0)$.

(1) $j^2F = (x, xy)$.

Temos $F_x = (1, y)$, $F_y = (0, x)$, $F_z = (0, 0)$. Portanto,

$$H^3(3,2) \subset T(J^3\mathcal{G}_1).j^3F + \mathbb{R}.\{y^2z, y^3, yz^2, z^3\}.$$

Segue do Teorema da Transversal Completa 1.10 que qualquer 3-jato com 2-jato (x, xy) é equivalente a $(x, xy + ay^2z + by^3 + cyz^2 + dz^3)$ onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Fazendo mudanças lineares de variáveis e mudanças escalares obtemos as seguintes órbitas no $J^3(3,2)$.

No caso em que $d \neq 0$, fazemos uma mudança de coordenada na fonte para eliminar yz^2 e denotamos por $\bar{a}$ e $\bar{b}$ os novos coeficientes de y^2z e y^3 respectivamente, então temos:

$$(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3),\ se\ \bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0,$$
$$(x, xy + y^3 + z^3),\ se\ \bar{b} \neq 0\ e\ \bar{a} = 0,$$
$$(x, xy \pm y^2z + z^3),\ se\ \bar{a} \neq 0\ e\ \bar{b} = 0,$$
$$(x, xy + z^3),\ se\ \bar{a} = 0\ e\ \bar{b} = 0.$$

No caso em que $d = 0$ e $c \neq 0$, fazemos uma mudança de coordenada na fonte para eliminar y^2z e denotamos o novo coeficiente de y^3 por $\bar{b}$. Assim temos:

$$(x, xy \pm y^3 + yz^2),\ se\ \bar{b} \neq 0,$$
$$(x, xy + yz^2),\ se\ \bar{b} = 0.$$

No caso em que $d = 0$ e $c = 0$, temos:

$$(x, xy + y^2z),\ se\ a \neq 0,$$
$$(x, xy + y^3),\ se\ b \neq 0\ e\ a = 0,$$
$$(x, xy),\ se\ a = 0\ e\ b = 0.$$

Usando o "Transversal" mostramos que os últimos 2 casos são ramos que geram germes de $\mathcal{A}_e$- codimensão ≥ 5 portanto não vão ser seguidos.

O 3-jato $(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3)$:

O uso do "Transversal" neste caso será mostrado na Seção 5.3. Usando o "Transversal" mostramos que a é um módulo e também que o 4-transversal é vazio. O 5-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{z^5\}$ e as órbitas no $J^5(3,2)$ são $(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3 \pm z^5)$ se $4a^3 \pm 27 \neq 0$ e $a \neq 0$, e $(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3)$ se $4a^3 + 27 \neq 0$ e $a \neq 0$. Ambos os germes são 5-determinados. O primeiro (N_1) tem codimensão 3, mas a codimensão do estrato é 2 (cálculo feito no "Transversal"), enquanto o segundo (N_2) tem codimensão 4 com a

codimensão do estrato igual a 3. Não foi possível fazer os casos $4a^3 \pm 27 = 0$ devido a complexidade das contas. O caso $a = 0$ é considerado a seguir.

O 3-jato $(x, xy + y^3 + z^3)$:

O 4-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{y^3z\}$. As órbitas no $J^4(3,2)$ são $(x, xy + y^3 + z^3 \pm y^3z)$ e $(x, xy + y^3 + z^3)$. No primeiro caso (N_3) o 5-transversal é vazio e então no $J^5(3,2)$ temos a órbita $(x, xy + y^3 + z^3 \pm y^3z)$ que é 4-determinada e tem codimensão 3. No outro caso, o 5-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{y^4z\}$ e então no $J^5(3,2)$ temos $(x, xy + y^3 + z^3 \pm y^4z)$ e $(x, xy + y^3 + z^3)$. Para o primeiro (N_7) o 6-transversal é vazio e então em $J^6(3,2)$ temos $(x, xy + y^3 + z^3 \pm y^4z)$ que é 5-determinado e tem codimensão 4. O segundo gera germes de codimensão ≥ 5.

O 3 jato $(x, xy \pm y^2z + z^3)$:

O 4-transversal é vazio e o 5-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{z^5\}$. As órbitas no $J^5(3,2)$ são $(x, xy \pm y^2z + z^3 \pm z^5)$ e $(x, xy \pm y^2z + z^3)$. As duas órbitas são 5-determinadas sendo que a primeira (N_4) tem codimensão 3, e a segunda (N_6) tem codimensão 4.

O 3 jato $(x, xy + z^3)$:

O 4-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{y^4, y^3z\}$. Os germes no $J^4(3,2)$ são $(x, xy+z^3+y^3z \pm y^4)$ e $(x, xy + z^3 + y^3z)$. O 5-transversal do primeiro é dado por $\mathbb{R}.\{y^4z\}$ e o 6-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{y^6, y^5z\}$. A órbita no $J^6(3,2)$ é $(x, xy+z^3 \pm y^4+y^3z+ay^4z+b(y^6+\lambda y^5z))$ onde a e b são módulos e $b = 0$ é um valor excepcional. Estes germes (N_8) são 6-determinados e têm codimensão 6, com a codimensão do estrato igual a 4 se $b \neq 0$. O 5-transversal do segundo germe é dado por $\mathbb{R}.\{y^5\}$, e o germe no $J^5(3,2)$ é $(x, xy + z^3 + y^3z \pm z^5)$. Este gera germes de codimensão maior ou igual a 5 que não nos interessam.

O 3 jato $(x, xy \pm y^3 + yz^2)$:

O 4-transversal é vazio. O 5-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{z^5\}$. As órbitas no $J^5(3,2)$ são $(x, xy \pm y^3 + yz^2 + z^5)$ e $(x, xy \pm y^3 + yz^2)$. A primeira (N_5) é 5-determinada e tem codimensão 3. A segunda tem o 6-transversal vazio e o 7-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{z^7\}$. Então temos no $J^7(3,2)$, a órbita (N_{11}) $(x, xy \pm y^3 + yz^2 + z^7)$ que é 7-determinada e tem codimensão 4.

O 3-jato $(x, xy + yz^2)$:

O 4-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{y^4\}$ e o 5-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{z^5\}$. As órbitas no $J^5(3,2)$ são $(x, xy + yz^2 \pm y^4 + z^5)$ e $(x, xy + yz^2 \pm y^4)$. Esta segunda gera germes de codimensão ≥ 5 que não nos interessam. O 6-transversal da primeira é dado por $\mathbb{R}.\{y^6\}$, e então a órbita em $J^6(3,2)$ é $(x, xy + yz^2 \pm y^4 + z^5 + ay^6)$ onde a é um módulo. Estes germes (N_9) são 6-determinados e tem codimensão 5 com a codimensão do estrato igual a 4.

O 3-jato $(x, xy + y^2z)$:

O 4-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{z^4, yz^3\}$. Os germes em $J^4(3,2)$ são $(x, xy+y^2z+yz^3 \pm z^4)$ e $(x, xy + y^2z \pm z^4)$. Para estes dois germes o 5-transversal é vazio e o 6-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{z^6\}$. As órbitas em $J^6(3,2)$ são então $(x, xy + y^2z + yz^3 \pm z^4 + az^6)$, $(x, xy + y^2z \pm z^4 \pm z^6)$ e $(x, xy + y^2z \pm z^4)$. A primeira (N_{10}) é 6-determinada e tem codimensão 5 com codimensão do estrato igual a 4, onde a é um módulo. O 7-transversal de $(x, xy+y^2z \pm z^4 \pm z^6)$ é dado por $\mathbb{R}.\{z^7\}$. Então em $J^7(3,2)$ temos $(x, xy+y^2z \pm z^4 \pm z^6 + az^7)$ que gera germes de codimensão maior ou igual a 6. O caso $(x, xy + y^2z \pm z^4)$ também gera germes de codimensão maior ou igual a 6.

O 3-jato $(x, xy + y^3)$:

O 4-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{y^3z, y^2z^2, yz^3, z^4\}$. A órbita no $J^4(3,2)$ é $(x, xy + y^3 + ay^3z + by^2z^2 + cyz^3 + z^4)$ que gera germes de codimensão ≥ 5.

O 3-jato (x, xy):

O 4-tranversal é dado por $\mathbb{R}.\{y^4, y^3z, y^2z^2, yz^3, z^4\}$. Os germes gerados são de codimensão ≥ 6.

(2) $j^2F = (x, 0)$.

O 4-transversal deste germe é dado por $\mathbb{R}.\{xyz, z^3, y^2z, x^2y, x^2z\}$ e o 5-transversal é dado por $\mathbb{R}.\{yz^3, z^4\}$. A órbita no $J^5(3,2)$ é $(x, xyz \pm y^2z + z^3 + ax^2y + bx^2z + cyz^3 + z^4)$ (N_{12}) que é 4-determinada e tem codimensão 7 com codimensão do estrato igual a 4, onde a, b e c são módulos, cujos valores excepcionais são $4b-1 = 0$ e $4b-1+6ac = 0$. Qualquer outro subcaso deste terá $\mathcal{A}_e$-codimensão maior ou igual a 5. ■

Proposição 5.5 *Os desdobramentos versais para a lista de germes da Tabela* 2 *são dados na Tabela* 3. *Observamos que na presença dos módulos, estes parâmetros são também*

considerados como parâmetros do desdobramento versal.

Tabela 3:

Tipo	Desdobramento versal
N_1	$(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3 \pm z^5 + u_1z + u_2y^2)$
N_2	$(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3 + u_1z + u_2y^2 + u_3y^5)$,
N_3	$(x, xy + y^3 + z^3 \pm y^3z + u_1z + u_2yz + u_3y^2z)$
N_4	$(x, xy \pm y^2z + z^3 \pm z^5 + u_1z + u_2y^2 + u_3y^3)$
N_5	$(x, xy \pm y^3 + yz^2 + z^5 + u_1z + u_2y^2 + u_3z^3)$
N_6	$(x, xy \pm y^2z + z^3 + u_1z + u_2y^2 + u_3y^3 + u_4y^4z)$
N_7	$(x, xy + y^3 + z^3 \pm y^4z + u_1z + u_2yz + u_3y^2z + u_4y^3z)$
N_8	$(x, xy + z^3 \pm y^4 + y^3z + ay^4z + by^6 + cy^5z + u_1z + u_2yz + u_3y^2 + u_4y^3)$
N_9	$(x, xy + yz^2 \pm y^4 + z^5 + ay^6 + u_1z + u_2y^2 + u_3y^3 + u_4z^3)$
N_{10}	$(x, xy + y^2z + yz^3 \pm z^4 + az^6 + u_1z + u_2z^2 + u_3yz^2 + u_4z^3)$
N_{11}	$(x, xy \pm y^3 + yz^2 + z^7 + u_1z + u_2y^2 + u_3y^3 + u_4y^5)$
N_{12}	$(x, xyz \pm y^2z + z^3 + ax^2y + bx^2z + cyz^3 + z^4 + u_1y + u_2z + u_3xy + u_4y^2)$

Prova: Usamos o programa "Transversal" para achar o tangente de cada singularidade. Com a função "pcomp" este programa fornece os vetores que estão no transversal. Ilustramos os casos N_1 e N_2 na Seção 5.3. ■

5.3 Exemplo dos cálculos feitos no "Transversal"

Como já comentamos, o programa "Transversal", feito por Neil Kirk, foi uma ferramenta que usamos para obter os resultados do Teorema 5.4 e da Proposição 5.5. Para informações sobre o uso do "Transversal" ver [27]. Faremos aqui um exemplo destes cálculos para a singularidade não simples $(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3)$.

Consideramos o 2-jato (x, xy). O comando a seguir é para que o programa trabalhe com as corretas dimensões e álgebra de Lie L e o Maple responde imprimindo os valores. As coordenadas x, y, z são denotadas por x_1, x_2, x_3 por causa do "Transversal".

$> setup_Aclassn(3, 2, [0, x1]);$

$$liealg = stdjacobian$$

$$equiv = A$$

$$compltrans = true$$

$$source_dim = 3$$

$$source_power = 2$$

$$target_power = 2$$

$$nilp = true_order$$

$$R_nilp:$$

$$[[x2,1],[x3,1],[x3,2]]$$

$$L_nilp:$$

$$[[2,1]]$$

$$nilp_source_wt:$$

$$[1,2,3]$$

$$nilp_target_wt:$$

$$[-1,0]$$

$$jetcalc_verbosity = 1$$

$> f := [x1, x1 * x2];$
$> jetcalc(f, 3);$
O comando acima calcula uma base para $L\mathcal{A}.f$ e seu espaço complementar em $J(3,2)$. Podemos usar uma das rotinas 'print' para ver os geradores destes espaços. Como queremos a transversal completa, usamos:
$> pcomp();$

$$[0, x2^3]$$

$$[0, x3x2^2]$$

$$[0, x3^2x2]$$

$$[0, x3^3]$$

Com cálculos feitos à mão sabemos que o 4-jato é da forma $(x_1, x_1x_2 + x_3^3 + ax_2^2x_3 + x_2^3)$. Usando o Transversal temos $a = 0$ é um valor excepcional (caso tratado separadamente) e que para $a \neq 0$, $x_2^2x_3$ não pertence ao tangente e então pelo Lema de Mather não podemos reduzir à uma única órbita. Então a é um módulo.
$> f2 := [x1, x1 * x2 + x3^3 + a * x2^2 * x3 + x2^3];$
$> jetcalc(f2, 4);$
$> pcomp();$

$$[0, x3^4]$$

Temos então $(x_1, x_1x_2 + x_3^3 + ax_2^2x_3 + x_2^3 + bx_3^4)$. Usando o Transversal temos que se $a \neq 0$ e $27 + 4a^3 \neq 0$ então x_3^4 pertence ao tangente e então pelo Lema de Mather podemos reduzir à uma única órbita para qualquer b. (Observamos aqui que em todos os casos checamos à parte a condição (2) do Lema de Mather 1.7 com o "Transversal".) Então o 3-jato é equivalente ao 2-jato.
$> f3 := f2;$
$> jetcalc(f3, 5);$
$> pcomp();$

$$[0, x3^5]$$

Temos então $(x_1, x_1x_2 + x_3^3 + ax_2^2x_3 + x_2^3 + cx_3^5)$. Usando o Transversal temos que se $a \neq 0$ e $\pm 27 + 4a^3 \neq 0$ então x_3^5 pertence ao tangente se $c \neq 0$ e $c = 0$ é um valor excepcional. Então pelo Lema de Mather podemos reduzir à uma única órbita se $c \neq 0$. Para $c \neq 0$ temos $(x_1, x_1x_2 + x_3^3 + ax_2^2x_3 + x_2^3 \pm x_3^5)$.
$> f4 := [x1, x1 * x2 + x3^3 + a * x2^2 * x3 + x2^3 + x3^5];$
$> jetcalc(f4, 6);$
$> pcomp();$

*** THE NORMAL SPACE IS EMPTY***

$> jetcalc(f4, 7);$
$> pcomp();$

*** THE NORMAL SPACE IS EMPTY ***

$> classify(f4, 8, 9);$

the 8 transversal is empty

---

the 9 transversal is empty

---

germ, $[x1, x1x2 + x3^3 + ax2^2x3 + x2^3 + x3^5]$

degree limits, 8, 9

all transversals were empty

$> classify(f4, 10, 11);$

the 10 transversal is empty

---

the 11 transversal is empty

---

germ, $[x1, x1x2 + x3^3 + ax2^2x3 + x2^3 + x3^5]$

degree limits, 10, 11

all transversals were empty

Segue pelo Corolário 1.5, que nos diz que um germe é k-determinado, se os sucessivos transversais de grau $k+1$ até grau $2k+1$ são vazios, que $f4$ é 5-determinada.
Para $c = 0$:
$> f5 := [x1, x1 * x2 + x3^3 + a * x2^2 * x3 + x2^3];$
$> jetcalc(f5, 6);$
$> pcomp();$

*** THE NORMAL SPACE IS EMPTY ***

$> jetcalc(f5, 7);$
$> pcomp();$

*** THE NORMAL SPACE IS EMPTY ***

$> classify(f5, 8, 9);$

the 8 transversal is empty

---

the 9 transversal is empty

---

germ, $[x1, x1x2 + x3^3 + ax2^2x3 + x2^3]$

degree limits, 8, 9
all transversals were empty

$> classify(f5, 10, 11);$

the 10 transversal is empty

---

the 11 transversal is empty

---

germ, $[x1, x1x2 + x3^3 + ax2^2x3 + x2^3]$

degree limits, 10, 11

all transversals were empty

Temos então que $f5$ é 5-determinada.
Para o cálculo da codimensão:
$> f4 := [x1, x1 * x2 + x3^3 + a * x2^2 * x3 + x2^3 + x3^5];$
$> jetcalc(f4, 5);$
$> codim;$

3

$> pcomp();$

$[0, x3]$

$[0, x2^2]$

$[0, x2^3]$

Portanto $f4$ tem $\mathcal{A}_e$-codim= 3, mas a codimensão do estrato é 2. Um desdobramento versal é dado por $(x1, x1 * x2 + x3^3 + a * x2^2 * x3 + x2^3 + x3^5 + u1 * x3 + u2 * x2^2)$. Note que a também é um dos parâmetros deste desdobramento.
$> f5 := [x1, x1 * x2 + x3^3 + a * x2^2 * x3 + x2^3];$
$> jetcalc(f5, 5);$

$> codim;$

$$4$$

$> pcomp();$

$$[0, x3]$$

$$[0, x2^2]$$

$$[0, x2^3]$$

$$[0, x2^5]$$

Portanto $f5$ tem $\mathcal{A}_e$-codim= 4, mas a codimensão do estrato é 3. Um desdobramento versal é dado por $(x1, x1 * x2 + x3^3 + a * x2^2 * x3 + x2^3 + u1 * x3 + u2 * x2^2 + u3 * x2^5)$. Note que a também é um dos parâmetros deste desdobramento.

5.4 Diagramas de bifurcação das singularidades simples de codim ≤ 2

Nesta seção estudamos as deformações das singularidades simples de $\mathcal{A}_e$-codimensão ≤ 2 usando um desdobramento versal de cada singularidade. Observamos que para as singularidades da forma $F = (x, f(x, y) \pm z^2)$, o conjunto dos pontos críticos é dado por $z = 0$ e $f_y = 0$ e portanto o discriminante de f é o mesmo de $(x, f(x, y))$. Portanto, todas as informações geométricas sobre estas singularidades podem ser deduzidas das singularidades de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ver por exemplo [26, 49]).

<u>*Dobra*</u>: $F = (x, y^2 \pm z^2)$, $\Sigma = \{(x, 0, 0)\}$, $\Delta = \{(x, 0)\}$ que é uma curva regular.

<u>*Cúspide*</u>: $F = (x, xy + y^3 \pm z^2)$, $\Sigma = \{(x, y, 0); x = -3y^2\}$, o discriminante é dado por $\Delta = \{(-3y^2, -2y^3)\}$ que é uma cúspide.

<u>*Rabo de andorinha*</u>: $F = (x, xy + y^4 \pm z^2)$, os pontos críticos são parametrizados por $x = -4y^3$ e $z = 0$, e o discriminante é dado por $\Delta = \{(-4y^3, -3y^4)\}$. Considerando o desdobramento versal $\overline{F}(x, y, z, u) = (x, xy + y^4 \pm z^2 + uy^2)$, os pontos críticos de $\overline{F}_u$ são $\Sigma(\overline{F}_u) = \{(x, y, 0) : x + 4y^3 + 2uy = 0\}$, e o discriminante de $\overline{F}_u$ é dado por $\Delta(\overline{F}_u) = \{(-4y^3 - 2uy, -3y^4 - uy^2)\}$. As deformações da curva $\Delta(\overline{F}_u)$ são dadas na

Figura 5.1, onde duas cúspides aparecem em um lado da transição.

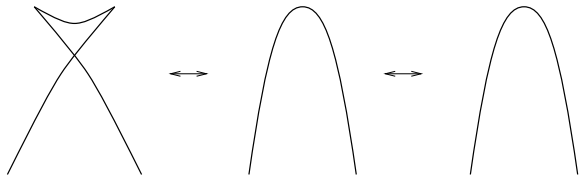

Figura 5.1: Transições do rabo de andorinha

<u>*Lábios/Bicos*</u>: Considere o desdobramento versal $\overline{F}(x, y, z, u) = (x, y^3 \pm x^2y \pm z^2 + uy)$. O conjunto dos pontos críticos $\Sigma(\overline{F}_u)$ é dado pelas equações $3y^2 \pm x^2 + u = 0$ e $z = 0$. Isto significa que $\Sigma(\overline{F}_u)$ passa pelas transições de Morse (Figura 5.2). As transições do discriminante são dadas na mesma figura.

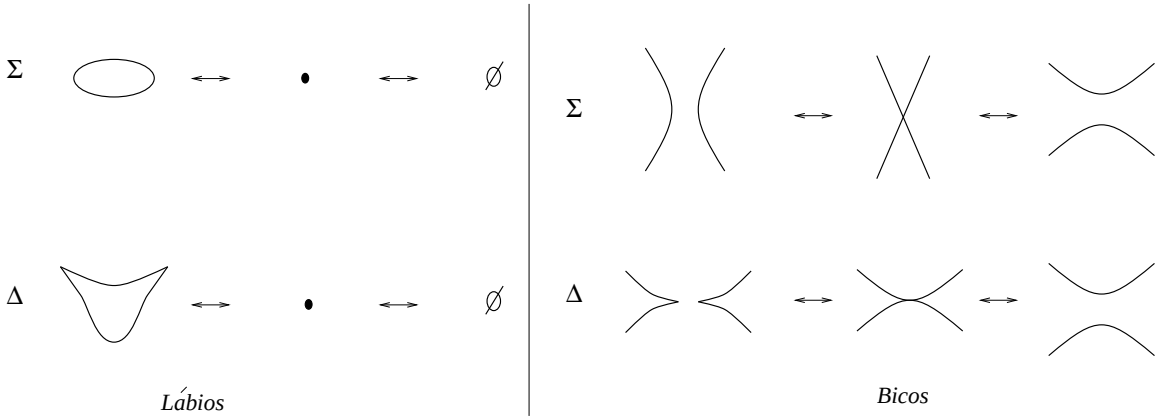

Figura 5.2: Transições de lábios/bicos

<u>*Ganso*</u>: Um desdobramento versal é dado por $\overline{F}(x, y, z, u) = (x, y^3+x^3y\pm z^2+u_1y+u_2xy)$. As transições no conjunto discriminante $\Delta(\overline{F}_u)$ são dadas na Figura 5.3.

<u>*Borboleta*</u>: Considerando o desdobramento versal $\overline{F}(x, y, z, u) = (x, xy + y^5 \pm y^7 \pm z^2 + u_1y^2 + u_2y^3)$, as bifurcações do conjunto discriminante $\Delta(\overline{F}_u)$ são mostradas na Figura 5.4.

<u>*Gaivota*</u>: Seja $\overline{F}(x, y, z, u) = (x, xy^2 + y^4 + y^5 \pm z^2 + u_1y + u_2y^3)$ o desdobramento versal da singularidade gaivota. Ver na Figura 5.5 o diagrama de bifurcação do conjunto discriminante $\Delta(\overline{F}_u)$.

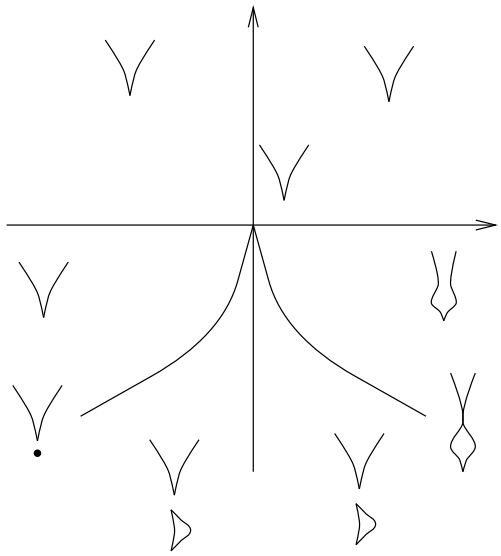

Figura 5.3: Diagrama de bifurcação da singularidade ganso

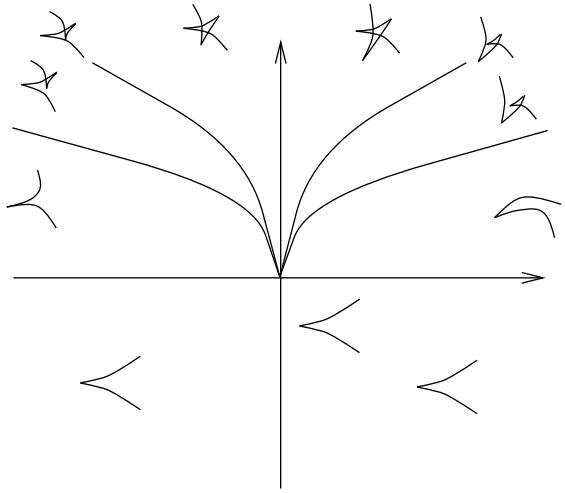

Figura 5.4: Diagrama de bifurcação da singularidade borboleta

Comentário sobre N_1: Temos que esta singularidade tem a forma normal $(x, xy + y^3 + ay^2z + z^3 \pm z^5)$ que é equivalente à forma normal $(x, xy + ay^3 \pm y^2z + z^3 + y^5)$ encontrada em [26] (esta singularidade é a única órbita do Teorema 5.4 encontrada também por Hawes [26], o interesse dela é estudar singularidades de codimensão ≤ 2 e aplicar os resultados à robótica). Um desdobramento versal é dado por $\overline{F}(x, y, z, u) = (x, xy + ay^3 \pm y^2z + z^3 + y^5 + u_1z + u_2y^2)$. Os casos $+$ e $-$ são estudados separadamente em [26] e as bifurcações do conjunto discriminante $\Delta(\overline{F}_u)$ são mostradas também em [26].

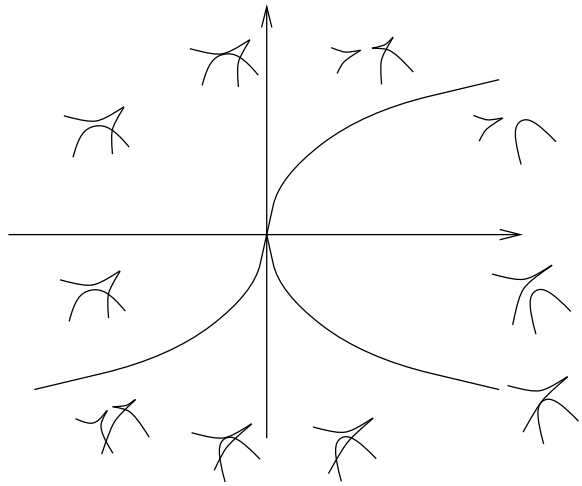

Figura 5.5: Diagrama de bifurcação da singularidade gaivota

5.5 Condições geométricas para reconhecimento de singularidades de $\mathcal{A}_e$-codim ≤ 1

Em [30] e [48] encontramos condições geométricas para reconhecimento de singularidades de $\mathcal{A}_e$-codimensão ≤ 1 de aplicações de $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. Estendemos aqui estes resultados para germes $F : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. Quando F é de rank 1, nós podemos fazer mudanças de coordenadas na fonte e na meta e escrever $F(x, y, z) = (x, f(x, y, z))$. A diferencial de F em um ponto (x, y, z) é então

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

A aplicação F é singular em (x, y, z) se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$. O conjunto crítico de F é

$$\Sigma = \{(x,y,z); \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0\}$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} G: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) \end{array}$$

Dizemos que $\Sigma = G^{-1}(0)$ é regular se G é regular, isto é, tem rank máximo em $(0, 0, 0)$.

Lema 5.6 *De acordo com nossa definição, se Σ é regular então $F(x, y, z) \simeq (x, f(x, y) \pm z^2)$.*

Prova: Se $\Sigma = G^{-1}(0)$ é regular então G tem rank 2. Ou seja, temos que ter:

$$f_{xy}(0,0,0)f_{yz}(0,0,0) - f_{xz}(0,0,0)f_{yy}(0,0,0) \neq 0, \text{ ou} \qquad (1)$$

$$f_{xy}(0,0,0)f_{zz}(0,0,0) - f_{xz}(0,0,0)f_{yz}(0,0,0) \neq 0, \text{ ou} \qquad (2)$$

$$f_{yy}(0,0,0)f_{zz}(0,0,0) - f_{yz}^2(0,0,0) \neq 0. \qquad (3)$$

Para isto ocorrer precisamos que

$$f_{xz}^2(0,0,0) + f_{yz}^2(0,0,0) + f_{zz}^2(0,0,0) \neq 0.$$

Considere a expressão da fórmula de Taylor de $f(x,y,z)$ no $(0,0,0)$. Se $f_{zz}(0,0,0) \neq 0$ então aparece o termo z^2 em $f(x,y,z)$ e assim temos que $f(x,y,z) \simeq f(x,y) \pm z^2$. Caso contrário, se $f_{yz}(0,0,0) \neq 0$ podemos fazer a mudança de coordenada $y = Y + z$ e então aparecerá o termo z^2 em $f(x,y,z)$. Se $f_{zz}(0,0,0) = f_{yz}(0,0,0) = 0$, então de $(1), (2)$ e (3) temos que $f_{xz}(0,0,0)f_{yy}(0,0,0) \neq 0$ o que implica $f_{yy}(0,0,0) \neq 0$, assim podemos fazer $y = Y + z$ e teremos o termo z^2 em $f(x,y,z)$. Logo $f(x,y,z) \simeq f(x,y) \pm z^2$. ■

Observemos que podemos ter Σ regular e G singular, por exemplo tome $G = (x, x^3 - z^2)$. Logo $G^{-1}(0) = \{(0,y,0)\}$ é regular, mas G não tem rank máximo em $(0,0,0)$.

Então quando Σ é regular (no sentido acima, isto é, G tem rank 2), temos $F(x,y,z) \simeq (x, f(x,y) \pm z^2)$. Portanto, $\Sigma = \{(x,y,0); f_y(x,y) = 0\}$ é uma curva regular. Podemos tomar $\phi : I \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de Σ, onde I denota uma vizinhança do 0 em $\mathbb{R}$. A ordem de contato de Σ com o plano núcleo de $DF(0,0,0)$, $ker(DF(0,0,0))$, é a ordem de anulamento das derivadas de $F \circ \phi$ em 0.

Lema 5.7 *(i) A ordem de contato de Σ com $ker(DF(0,0,0))$ é independente da parametrização de Σ.*
(ii) Quando Σ é regular, a ordem de contato de Σ com $ker(DF(0,0,0))$ é um $\mathcal{A}$-invariante.

Prova: (i) Sejam ϕ e ψ duas parametrizações locais de Σ na origem. Então $F \circ \psi = F \circ \phi \circ (\phi^{-1} \circ \psi)$ com $(\phi^{-1} \circ \psi)(0) = 0$ e $(\phi^{-1} \circ \psi)'(0) \neq 0$. É fácil verificar que $(F \circ \phi)(0) = (F \circ \phi)'(0) = \cdots = (F \circ \phi)^{(n)}(0) = 0$ e $(F \circ \phi)^{(n+1)}(0) \neq 0$ se, e somente se, $(F \circ \psi)(0) = (F \circ \psi)'(0) = \cdots = (F \circ \psi)^{(n)}(0) = 0$ e $(F \circ \psi)^{(n+1)}(0) \neq 0$.

(ii) Seja G um germe $\mathcal{A}$-equivalente a F. Podemos escrever $G = k \circ F \circ h$ para algum (h, k) em $\mathcal{A}$. Temos que $DG(x, y, z) = Dk(F(h(x, y, z))).DF(h(x, y, z)).\ Dh(x, y, z)$, e como h e k são germes de difeomorfismos segue que $(x, y, z) \in \Sigma_G$ se, e somente se, $h(x, y, z) \in \Sigma_F$. Isto é, $\Sigma_F = h(\Sigma_G)$. Se ϕ é uma parametrização de Σ_G, então $h \circ \phi$ é uma parametrização de Σ_F. Da expressão (acima) de DG em termos de DF, deduzimos que $(G \circ \phi)(0) = (G \circ \phi)'(0) = \cdots = (G \circ \phi)^{(n)}(0) = 0$ e $(G \circ \phi)^{(n+1)}(0) \neq 0$ se, e somente se, $(F \circ (h \circ \phi))(0) = (F \circ (h \circ \phi))'(0) = \cdots = (F \circ (h \circ \phi))^{(n)}(0) = 0$ e $(F \circ (h \circ \phi))^{(n+1)}(0) \neq 0$. Isto prova a afirmação (ii). ■

A seguir faremos o reconhecimento geométrico das aplicações dobra, cúspide e rabo de andorinha usando a ordem de contato de Σ e $ker(DF(0, 0, 0))$. Seja $F(x, y, z) = (x, f(x, y, z))$. Nestes casos o conjunto Σ é regular e então temos $F(x, y, z) \simeq (x, f(x, y) \pm z^2)$. Segundo o Lema 5.7, o contato de Σ e $ker(DF(0, 0, 0))$ é invariante, então nos próximos resultados podemos trabalhar com $F = (x, f(x, y) \pm z^2)$.

Para simplificar as condições vamos considerar os novos coeficientes de f, após as mudanças de coordenadas necessárias para escrevermos $F(x, y, z) \simeq (x, f(x, y) \pm z^2)$. Lembrando que os termos que dependem só de x podem ser eliminados por mudanças de coordenadas na meta podemos escrever o 4-jato de F com $j^4(f(x, y)) = a_2y^2 + a_4xy + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + c_2x^3y + c_3x^2y^2 + c_4xy^3 + c_5y^4$.

Denotamos por ϕ a parametrização local do conjunto crítico Σ.

Proposição 5.8 *Seja $F : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ um germe de aplicação singular com Σ regular. Então,*
(i) F é uma aplicação dobra se, e somente se, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0$.
(ii) F é uma aplicação cúspide se, e somente se, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq 0$ e $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) \neq 0$.

Prova: Para a dobra basta considerar o 2-jato pois ela é 2-determinada. Não é difícil ver que F é equivalente a $(x, y^2 \pm z^2)$ se, e somente se, $a_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0$. No caso (ii), temos que ter $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$, como a cúspide é 3-determinada então precisamos do 3-jato de f. Então F é equivalente a $(x, xy + y^3 \pm z^2)$ se, e somente se, $a_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq 0$ e $b_4 = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) \neq 0$. ■

Proposição 5.9 *Seja $F : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ singular e suponha que Σ é regular. Então:*
(i) F é uma aplicação dobra se, e somente se, $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) \neq 0$.
(ii) F é uma aplicação cúspide se, e somente se, $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) = 0$ e $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(0) \neq 0$.

Prova: Mostraremos aqui a equivalência desta proposição com a Proposição 5.8. Sejam $F(x, y, z) = (x, f(x, y) \pm z^2)$, e ϕ uma parametrização local de $\Sigma = \{(x, y, 0); f_y(x, y) = 0\}$ satisfazendo $\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = (-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi(t)), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi(t)), 0)$, onde $\phi(t) = (\phi_1(t), 0)$.

Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(t) &= DF(\phi(t)).\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t)) & \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi_1(t)) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi_1(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi_1(t)) \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t)).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi_1(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t)).\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi_1(t)) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi_1(t)). \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t)) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Na origem, $\phi_1(0) = (0, 0)$. Então, $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0). \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \end{pmatrix}$.

Logo pela Proposição 5.8 temos que F é dobra se, e somente se, $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) \neq 0$.

Diferenciando a expressão acima temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi_1(t)). \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t)) \end{pmatrix} \\
&= -\{-\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\phi_1(t)).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi_1(t)) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\phi_1(t)).\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi_1(t))\} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t)) \end{pmatrix} \\
&\quad -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi_1(t)). \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t))) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) = 0$, então

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(0) = -\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0).\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \end{pmatrix}.$$

Logo pela Proposição 5.8 temos que F é cúspide se, e somente se, $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(0) \neq 0$. ■

Observação 5.10 *As condições* $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) \neq 0$ *para dobra e* $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(0) \neq 0$ *para cúspide, refletem a ordem de contato de* Σ *com o núcleo de* $DF(0,0,0)$. *A aplicação* F *é uma aplicação dobra se, e somente se,* Σ *e o conjunto* $ker(DF(0,0,0))$ *são transversais na origem.* F *é uma aplicação cúspide se, e somente se,* Σ *e* $ker(DF(0,0,0))$ *têm contato* 2 *na origem (ver Figura 5.6).*

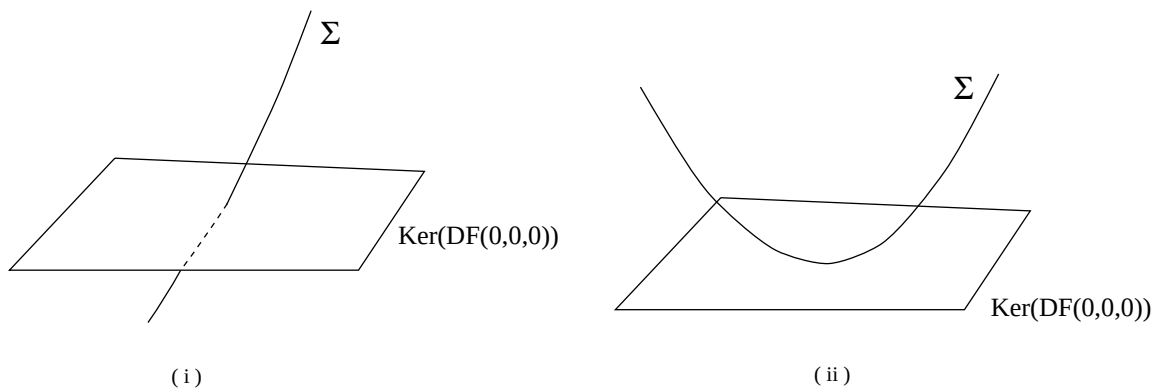

Figura 5.6: Aplicação dobra (i), aplicação cúspide (ii)

Um germe de aplicação de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ é uma aplicação rabo de andorinha se ela é $\mathcal{A}$-equivalente ao germe $(x, xy + y^4 \pm z^2)$. Como antes, estamos considerando Σ regular e portanto $F(x,y,z) = (x, f(x,y) \pm z^2)$.

Proposição 5.11 *Seja* $F : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ *singular e suponha que* Σ *é regular. Então* F *é uma aplicação rabo de andorinha se, e somente se,* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq 0$, *e* $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0,0) \neq 0$.

Prova: Consideremos o 4-jato de f. Para F ser rabo de andorinha, precisamos ter $a_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$, senão F seria dobra, $a_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq 0$ para que o 2-jato seja equivalente a $xy \pm z^2$, e $b_4 = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 0$, senão F seria cúspide. Fazendo as mudanças de coordenadas
$y = y - \frac{coef(xy^2)}{coef(xy)}y^2$,
$y = y - \frac{coef(x^2y)}{coef(xy)}xy$,
$y = y - \frac{coef(x^3y)}{coef(xy)}x^2y$,
$y = y - \frac{coef(x^2y^2)}{coef(xy)}xy^2$,
$y = y - \frac{coef(x^3y)}{coef(xy)}x^2y$,
$y = y - \frac{coef(xy^3)}{coef(xy)}y^3$, temos que $(x, f(x,y) \pm z^2)$ é equivalente a $(x, a_4xy + c_5y^4 \pm z^2)$. Ou seja, F será um rabo de andorinha se também tivermos também $c_5 = \frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0,0) \neq 0$. ■

Proposição 5.12 *Seja* $F : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ *singular e suponha que* Σ *é regular. Então* F *é uma aplicação rabo de andorinha se, e somente se,* $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(0) = 0$ *e* $\frac{\partial^3}{\partial t^3}(F \circ \phi)(0) \neq 0$.

Prova: Pela prova da Proposição 5.9 temos que $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(0) = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0).\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

Diferenciando a expressão de $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(t)$ encontrada na prova da Proposição 5.9, e fazendo $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0).\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, deduzimos que

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}(F \circ \phi)(0) = -\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0,0).(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0))^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \end{pmatrix}.$$

Assim, $\frac{\partial}{\partial t}(F \circ \phi)(0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \circ \phi)(0) = 0$ e $\frac{\partial^3}{\partial t^3}(F \circ \phi)(0) \neq 0$ se, e somente se, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq 0$, e $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0,0) \neq 0$. Então pela Proposição 5.11 temos que F é uma aplicação rabo de andorinha. ■

As condições da Proposição 5.12 expressa o contato do conjunto crítico Σ com o plano $ker(DF(0,0,0))$.

Corolário 5.13 *Uma aplicação* $F : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ *de rank* 1 *na origem e com conjunto crítico localmente regular é uma aplicação rabo de andorinha se, e somente se, seu conjunto crítico* Σ *tem contato* 3 *com o núcleo de* $DF(0,0,0)$ *na origem (ver Figura 5.7).*

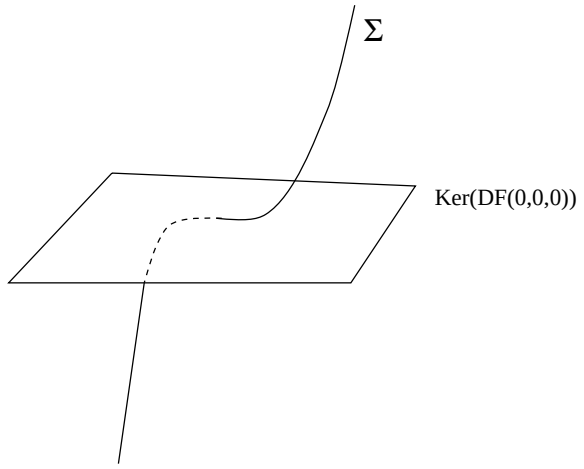

Figura 5.7: Aplicação rabo de andorinha

A forma normal de uma aplicação lábios/bicos é $(x, y^3 \pm x^2 y \pm z^2)$. Neste caso o conjunto crítico Σ não é regular. Então, o critério usado anteriormente, que consiste em

olhar a ordem de contato de Σ com o $kerDF(0,0,0)$ na origem, para identificar o tipo de singularidade de F, não é suficiente. Agora que o conjunto crítico é singular, uma condição algébrica adicional é necessária para reconhecer o germe lábios/bicos.

Seja $F : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ um germe de aplicação simples de rank 1. Então $F(x,y,z) \simeq (x, f(x,y) \pm z^2)$.

Proposição 5.14 *Um germe de aplicação singular simples $F = (x, f(x,y) \pm z^2)$ é uma aplicação lábios/bicos se, e somente se, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) \neq 0$ e $(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0))^2 - \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0).\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) \neq 0$.*

Prova: Para termos lábios/bicos precisamos que o 2-jato de $(x, f(x,y) \pm z^2)$ seja equivalente a $(x, \pm z^2)$, então temos que ter $a_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$ e $a_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$. Então F é equivalente a lábios/bicos se, e somente se, $b_4 = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) \neq 0$ e $b_3^2 - 3b_2b_4 = \frac{1}{4}((\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0))^2 - \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0).\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)) \neq 0$, pois assim a mudança de coordenada $y = y - \frac{coef(xy^2)}{3coef(y^3)}x$ torna F equivalente a $(x, a_3z^2 - \frac{b_3^2 - 3b_2b_4}{3b_4}x^2y + b_4y^3)$. ■

Proposição 5.15 *O germe $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}, 0$ é um germe de uma função de Morse se, e somente se, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, e $(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2})^2(0,0) - \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0).\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) \neq 0$.*

Prova: A prova segue imediatamente da expressão de Taylor de $\frac{\partial f}{\partial y}$ na vizinhança da origem,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0).y + \\ & \frac{1}{2}\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0).x^2 + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0).xy + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.y^2\} + O_3(x,y).\end{aligned}$$ ■

Lema 5.16 *Sejam F e G dois germes $\mathcal{A}$-equivalentes. Então o conjunto crítico de F é o zero de uma função de Morse se, e somente se, o conjunto crítico de G é o zero de uma função de Morse.*

Prova: Se F é $\mathcal{A}$-equivalente a G então existem difeomorfismos h e k tal que $G = k \circ F \circ h$. Da prova do Lema 5.7 (ii) temos que $\Sigma_G = h(\Sigma_F)$. Se $\Sigma_F = f^{-1}(0)$ com f uma função de Morse, então $f \circ h$ é uma função de Morse e $\Sigma_G = (f \circ h)^{-1}(0)$. ■

Como conseqüência dos resultados anteriores, temos o corolário a seguir.

Corolário 5.17 *Seja F um germe singular simples equivalente a $(x, f(x,y) \pm z^2))$. Se $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) \neq 0$, então F é uma aplicação lábios/bicos se, e somente se, seu conjunto crítico é o zero de uma função de Morse.*

5.6 Reconhecimento geométrico dos desdobramentos versais das singularidades de $\mathcal{A}_e$-codim ≤ 1

Em [47] encontramos condições geométricas para mostrar quando temos um desdobramento versal de uma aplicação lábios/bicos ou rabo de andorinha de germes de $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. Estendemos aqui estes resultados para germes $F : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$.

Teorema 5.18 *Considere $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0$ onde $F(x,y,z,0) = (x, f(x,y) \pm z^2)$ é uma aplicação lábios/bicos em $(x,y,z) = (0,0,0)$ e escreva o conjunto crítico de F da forma*

$$\Sigma_F = \{(x,y,0,u) : \sigma(x,y,0,u) = 0\}.$$

A aplicação $F(x,y,z,u)$ é um desdobramento versal de $F(x,y,z,0)$ se, e somente se, $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(0,0,0,0) \neq 0$, ou seja se, e somente se, σ é um desdobramento versal da singularidade Morse $\sigma(x,y,0,0)$.

Prova: Seja $\tilde{F}$ um desdobramento de uma aplicação lábios/bicos

$$\tilde{F}(x,y,z,u) = (\tilde{F}_1(x,y,z,u), \tilde{F}_2(x,y,z,u), u).$$

Afirmação: Um desdobramento equivalente a $\tilde{F}(x,y,z,u) = (\tilde{F}_1(x,y,z,u), \tilde{F}_2(x, y,z,u), u)$ é $F(x,y,z,u) = (x, F_2(x,y,z,u), u)$ para alguma $F_2(x,y,z,u)$.

Prova da afirmação: Sem perda de generalidade podemos assumir $\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x} \neq 0$, pois a aplicação $(x,y,z) \mapsto (\tilde{F}_1(x,y,z,0), \tilde{F}_2(x,y,z,0))$ tem rank 1. Defina

$$\begin{array}{rll} H: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ & (x,y,z,u) & \mapsto (\tilde{F}_1(x,y,z,u), y, z, u) \end{array}$$

que é um difeomorfismo local. Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ (x,y,z,u) & & (\tilde{F}_1(x,y,z,u), \tilde{F}_2(x,y,z,u), u) \\ \downarrow H & & \downarrow id \\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ ((\tilde{F}_1(x,y,z,u), y, z, u) & & (\tilde{F}_1(x,y,z,u), \tilde{F}_2(x,y,z,u), u) \end{array}$$

onde $F_2(x,y,z,u) = \tilde{F}_2(\Pi_1 \circ \tilde{F}_1^{-1}(x,y,z,u), y, z, u)$ com $\Pi_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a projeção da primeira coordenada. Note que $\Pi_1 \circ \tilde{F} \circ H^{-1} = \Pi_1$, e assim $\tilde{F} \circ H^{-1} = (x, \tilde{F}_2(x,y,z,u), u)$.

Então F e $\tilde{F}$ são desdobramentos equivalentes pela Definição 1.13.

Podemos escrever então

$$F(x,y,z,u) = (x, g_1(x,y,z) + ug_2(x,y,z,u), u).$$

Como a aplicação $(x,y,z) \mapsto (x, g_1(x,y,z))$ tem uma singularidade lábios/bicos em $(0,0,0)$, então mudanças de coordenadas na fonte e na meta nos dão $F(x,y,z,0) = (x, y^3 \pm x^2y \pm z^2)$. Estas mudanças de coordenadas produzem

$$F(x,y,z,u) = (x, y^3 \pm x^2y \pm z^2 + u\bar{g}_2(x,y,z,u), u)$$

onde $\bar{g}_2$ é g_2 após as mudanças de coordenadas. Como a aplicação lábios/bicos é 3-determinada, podemos trabalhar no $J^3(x,y,z,u)$. O 3-jato de $u\bar{g}_2(x,y,z,u)$ é

$$j^3(u\bar{g}_2(x,y,z,u)) = \alpha(x,z,u)u + \beta(z,u)uy + a_1uy^2 + a_2uxy$$

para algum $\alpha(x,z,u)$, $\beta(z,u)$, a_1 e a_2, e

$$j^3F(x,y,z,u) = (x, y^3 \pm x^2y \pm z^2 + \alpha(x,z,u)u + \beta(z,u)uy + a_1uy^2 + a_2uxy, u).$$

Desejamos simplificar a segunda componente. Mudamos coordenadas na fonte fazendo $y = Y - \frac{a_1u}{3}$ para eliminarmos o termo a_1uy^2. Então

$$j^3F(x,y,z,u) = (x, y^3 \pm x^2y \pm z^2 + \alpha(x,z,u)u + \beta(z,u)uy + a_2uxy, u)$$

para novos $\alpha(x,z,u)$, $\beta(z,u)$ e revertendo para y. Uma mudança de coordenadas $x = X \mp \frac{a_2u}{2}$ elimina o termo a_2uxy resultando em

$$j^3F(x,y,z,u) = (x, y^3 \pm x^2y \pm z^2 + \alpha(x,z,u)u + (\beta(z,u)u \pm \frac{a_2^2}{4}u^2)y, u)$$

para um novo α, e revertendo novamente para x.

Podemos escrever $\alpha(x,z,u)u = \alpha_1(x,u)u + z\alpha_2(x,z,u)u$. Uma mudança de coodenada na fonte elimina $z\alpha_2u$, e nos dá um novo $\alpha_1(x,u)$. Uma mudança de coordenada na meta

$$(K,T,W) \mapsto (K, T - \alpha_1(K,W)W, W)$$

elimina $\alpha_1(x,u)u$.

Note que $\beta(z,u)$ tem grau 1 então

$$j^3F(x,y,z,u) = (x, y^3 \pm x^2y \pm z^2 + (a_3zu + \psi(u))y, u)$$

onde $\psi(u) = (a_4u + a_5 \pm \frac{a_2^2}{4}u)u$. Com mais uma mudança na fonte eliminamos a_3zuy e temos

$$j^3F(x,y,z,u) = (x, y^3 \pm x^2y \pm z^2 + \psi(u)y, u)$$

Usando o Teorema 1.15, temos que F é versal se, e somente se, $\psi'(0) \neq 0$.

Agora

$$\Sigma = \{(x,y,0,u); \sigma(x,y,z,u) = 3y^2 \pm x^2 + \psi(u) = 0\}.$$

Então $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(x,y,z,u) = \psi'(u)$. Em particular $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(0,0,0,0) = \psi'(0)$. Logo F é versal se, e somente se, $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(0,0,0,0) \neq 0$. Portanto, F é versal se, e somente se, σ é um desdobramento versal da singularidade Morse de Σ. ■

Definição 5.19 *O conjunto crítico de uma aplicação f pode ser denotado também por Σ^1. O conjunto dos pontos singulares de $f|_{\Sigma^1}$ é denotado por $\Sigma^{1,1}$.*

Teorema 5.20 *Seja $F(x,y,z,u)$ um desdobramento de uma aplicação rabo de andorinha. Então F é um desdobramento versal se, e somente se, $\Sigma_F^{1,1}$ é uma curva regular.*

Prova: O conjunto $\Sigma^{1,1}$ é invariante no sentido que se F e G são desdobramentos equivalentes (Definição 1.13) então existe um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0$ levando $\Sigma_F^{1,1}$ em $\Sigma_G^{1,1}$. Assim temos $\Sigma_G^{1,1} = \phi(\Sigma_F^{1,1})$.

Seja

$$\begin{array}{rccl} F\colon & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0 & \to & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0 \\ & (x,y,z,u) & \mapsto & (F_1(x,y,z,u), F_2(x,y,z,u), u) \end{array}$$

um desdobramento de uma singularidade rabo de andorinha. O parâmetro de desdobramento é u. Por hipótese $(F_1(x,y,z,u), F_2(x,y,z,u))$ é equivalente a $(x, xy + y^4 \pm z^2)$. A aplicação rabo de andorinha tem rank 1, assim nós podemos escrever o desdobramento F como

$$F(x,y,z,u) = (x, F_2(x,y,z,u), u)$$

como na prova do Teorema 5.18 para alguma F_2.

Seja $F_2(x,y,z,u) = g_1(x,y,z) + ug_2(x,y,z,u)$. Assim em $u = 0$ temos $g_1(x,y,z) = F_2(x,y,z,0)$. Existem mudanças de coordenadas na fonte e na meta tal que $(x,\, g_1(x,y,z))$ pode ser escrita na forma $(x, xy + y^4 \pm z^2)$. Estas mudanças de coordenadas nos dão

$$F(x,y,z,u) = (x, xy + y^4 \pm z^2 + u\bar{g_2}(x,y,z,u), u)$$

para alguma $\bar{g_2}(x,y,z,u)$.

Como a aplicação rabo de andorinha é 4-determinada, podemos trabalhar no $J^4(x,y,z,u)$, isto é, não temos que considerar os termos de grau maior que 4. Agora

$$j^4(u\bar{g_2}(x,y,z,u)) = a_1uy^3 + \alpha(x,z,u)uy^2 + \beta(x,z,u)uy + \gamma_1(x,u)u + \gamma_2(x,z,u)uz$$

que nos dá

$$j^4F(x,y,z,u) = (x, xy + y^4 \pm z^2 + a_1uy^3 + \alpha uy^2 + \beta uy + \gamma_1 u + \gamma_2 uz, u),$$

onde α, β, γ_2 são funções de x, z, u e γ_1 é função de x, u. Com a mudança de coordenada $y = Y - \frac{a_1u}{4}$ na fonte obtemos

$$j^4F(x,y,z,u) = (x, xy + y^4 \pm z^2 + (\alpha u + \frac{3a_1^2}{8}u^2)y^2 + \bar{\beta}uy + \bar{\gamma_1}u + \gamma_2 uz, u)$$

revertendo para y novamente.

Uma mudança de coordenada na meta

$$(K,T,W) \mapsto (K, T - W\bar{\gamma_1}(K,W), W)$$

remove o termo $\gamma_1(x,u)u$, e a mudança na fonte $z = Z - u\gamma_2(x,z,u)/2$ remove o termo $uz\gamma_2$, onde possíveis termos que possam aparecer podem ser igualmente eliminados. O termo $\bar{\beta}uy$ pode ser eliminado com mudanças na meta se $\bar{\beta} = x^iu^j$, senão $\bar{\beta} = Z\bar{\bar{\beta}}$ e então podemos fazer a mudança de coordenada $Z = z - uy\bar{\bar{\beta}}/2$. Assim

$$j^4F(x,y,z,u) = (x, xy + y^4 \pm z^2 + (\alpha u + \theta u^2)y^2, u),$$

onde θ é uma nova constante para u^2y^2.

Lembrando que $\alpha(x,z,u)$ tem grau 1, temos que

$$J^4F(x,y,z,u) = (x, xy + y^4 \pm z^2 + (a_2xu + a_3zu + a_4u^2 + a_5u + \theta u^2)y^2, u)$$

que por mudanças de coordenadas na fonte é equivalente a

$$J^4F(x,y,z,u) = (x, xy + y^4 \pm z^2 + \psi(u)y^2, u),$$

onde $\psi(u) = (a_4 + \theta)u^2 + a_5 u$.

Aplicando o Teorema 1.15 temos que o desdobramento F é versal se, e somente se, $\psi'(0) \neq 0$.

Agora

$$\Sigma^1 = \{(x,y,0,u); x + 4y^3 + 2\psi(u)y = 0\}.$$

Da equação para Σ^1 temos $x = -4y^3 - 2\psi(u)y$. Então

$$F|_{\Sigma^1} = (-4y^3 - 2\psi(u)y, -3y^4 - \psi(u)y^2, u).$$

$\Sigma^{1,1}$ é o conjunto singular de $F|_{\Sigma^1}$ então

$$\Sigma^{1,1} = \{(x,y,0,u); 6y^2 + \psi(u) = 0\}.$$

Logo $\Sigma^{1,1}$ é uma curva regular em $(0,0,0,0)$ se, e somente se, $\psi'(0) \neq 0$. ■

Capítulo 6

Contato com planos

6.1 Introdução

Neste capítulo consideramos o contato de hipersuperfícies com planos. Neste caso temos uma família a quatro parâmetros de aplicações $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. Seguimos os mesmos passos de Bruce e Nogueira em [16] e de Nogueira em [39], onde o contato de superfícies em $\mathbb{R}^4$ com planos foi estudado. Bruce e Nogueira definem a família de projeções em $\mathbb{R}^2$ como:

$$\begin{array}{rlcl} \Pi: & \mathbb{R}^4 \times G(2,4) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (p,u) & \mapsto & (<p,a>,<p,b>) \end{array}$$

onde a e b são vetores linearmente independentes (os quais podemos supor unitários) que geram o plano $u \in G(2,4)$, e $G(2,4)$ é a Grassmaniana de 2-planos em $\mathbb{R}^4$. Observemos que o plano ortogonal a u é o núcleo da aplicação Π.

A princípio nos parece que esta família é de seis parâmetros. Mas foi mostrado em [39] que Π_u não depende dos vetores a e b, e sim do plano u. De fato, dado dois pares de geradores a, b e a', b' do plano u, podemos escrever $a = \alpha a' + \beta b'$ e $b = \gamma a' + \delta b'$. Então:

$(<p,a>,<p,b>) = (\alpha <p,a'> + \beta <p,b'>, \gamma <p,a'> + \delta <p,b'>)$.

Denotando por U, V as coordenadas do plano u e fazendo a mudança de coordenadas

$$\bar{U} = \delta U - \beta V$$

$$\bar{V} = \alpha V - \gamma U$$

temos

$$(< p, a >, < p, b >) \sim (\alpha\delta - \beta\gamma)(< p, a' >, < p, b' >).$$

Como $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, pois a e b são linearmente independentes, temos que

$$(< p, a >, < p, b >) \sim (< p, a' >, < p, b' >).$$

Portanto Π_u depende somente do plano u, isto é, a família Π de $\mathbb{R}^4 \times G(2,4)/\sim$ é de 4 parâmetros.

Restringindo agora a aplicação Π à hipersuperfície M, obtemos uma família de aplicações $\Pi : M \times G(2,4) \to \mathbb{R}^2$ que mede o contato de M com planos em $\mathbb{R}^4$. Mais precisamente, dado $u \in G(2,4)$, a aplicação Π_u quando restrita a M mede o contato entre M e o plano que é o complemento ortogonal do plano u.

Seja $p \in M$, por mudanças de coordenadas sempre podemos identificar p com a origem e fixar coordenadas locais (x, y, z, w) em $p = (0,0,0,0)$, tal que o eixo-w seja normal a M em p, e o espaço-(x, y, z) seja o espaço tangente a M em p. Assim podemos escrever M na forma de Monge, isto é, como um gráfico de uma função $w = f(x, y, z)$, tal que $f = f_x = f_y = f_z = 0$ em $(0,0,0)$. Logo, $\Pi|_M$ é dada por:

$$\begin{array}{lcl} \Pi : M \times G(2,4) & \to & \mathbb{R}^2 \\ ((x,y,z,f(x,y,z)),u) & \mapsto & (< (x,y,z,f(x,y,z)), a >, < (x,y,z,f(x,y,z)), b >) \end{array}$$

O ponto $p = (0,0,0)$ é singularidade de Π_u, isto é, o rank de $D_p\Pi$ não é máximo se, e somente se, o ortogonal de u está contido em T_pM, pois o ortogonal de u é o núcleo de Π, e a dimensão de T_pM e do ortogonal de u são respectivamente, três e dois. Temos então uma singularidade de corank 1, ou seja, a dimensão da imagem de Π é um. Sendo assim os vetores geradores do plano de projeção singular u devem ser tomados como um vetor a do espaço tangente e um vetor b normal a M em p. Podemos então fixar o vetor b que pode ser escolhido como o vetor unitário $(0,0,0,1)$. Como o vetor gerador a pertence ao espaço $T_pM =< (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) >$ então $a = (a_1, a_2, a_3, 0)$. Neste caso, podemos parametrizar todos os planos de projeções singulares pela esfera S^2, assim cada plano de projeção singular será gerado por um vetor de S^2 e pelo vetor $(0,0,0,1)$.

Daremos agora, uma forma simples para a família de projeções. Escolhemos um plano fixo, u_0, gerado pelos vetores $a = (1,0,0,0)$ e $b = (0,0,0,1)$. Os vetores $(1, \bar{\alpha_1}, \bar{\beta_1}, \bar{\gamma_1})$ e $(\bar{\alpha_2}, \bar{\beta_2}, \bar{\gamma_2}, 1)$ geram todos os planos perto do plano u_0. Para facilitar as contas, podemos pegar outros representantes destes planos, por exemplo, os vetores $(1, \beta_1, \gamma_1, 0)$ e $(0, \beta_2, \gamma_2, 1)$. Sabemos que vetores da forma $(1, \beta_1, \gamma_1, 0)$ e $(0, \beta_2, \gamma_2, 1)$ são vetores linear-

mente independentes então só precisamos provar que sempre existem vetores desta forma que pertencem ao plano gerado por $(1, \bar{\alpha_1}, \bar{\beta_1}, \bar{\gamma_1})$ e $(\bar{\alpha_2}, \bar{\beta_2}, \bar{\gamma_2}, 1)$. Para isto, basta tomar $\xi_1 = \xi_4 = 1/(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1})$, $\xi_2 = -\bar{\gamma_1}/(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1})$, e $\xi_3 = -\bar{\alpha_2}/(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1})$. Então teremos

$$\xi_1(1, \bar{\alpha_1}, \bar{\beta_1}, \bar{\gamma_1}) + \xi_2(\bar{\alpha_2}, \bar{\beta_2}, \bar{\gamma_2}, 1) = (1, (\bar{\alpha_1} - \bar{\gamma_1}\bar{\beta_2})/(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}), (\bar{\beta_1} - \bar{\gamma_1}\bar{\gamma_2})/(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}), 0),$$

$$\xi_3(1, \bar{\alpha_1}, \bar{\beta_1}, \bar{\gamma_1}) + \xi_4(\bar{\alpha_2}, \bar{\beta_2}, \bar{\gamma_2}, 1) = (0, (\bar{\beta_2} - \bar{\alpha_2}\bar{\alpha_1})/(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}), (\bar{\gamma_2} - \bar{\beta_1}\bar{\alpha_2})/(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}), 1),$$

onde $(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}) \neq 0$ pois α_2 e γ_1 são valores próximos do zero. Então, o plano gerado por $(1, \bar{\alpha_1}, \bar{\beta_1}, \bar{\gamma_1})$ e $(\bar{\alpha_2}, \bar{\beta_2}, \bar{\gamma_2}, 1)$ é também gerado pelos vetores $(1, \beta_1, \gamma_1, 0) = (1, (\bar{\alpha_1} - \bar{\gamma_1}\bar{\beta_2})/(1-\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}), (\bar{\beta_1}-\bar{\gamma_1}\bar{\gamma_2})/(1-\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}), 0)$ e $(0, \beta_2, \gamma_2, 1) = (0, (\bar{\beta_2}-\bar{\alpha_2}\bar{\alpha_1})/(1-\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}), (\bar{\gamma_2} - \bar{\beta_1}\bar{\alpha_2})/(1 - \bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}), 1)$.

Logo a aplicação Π restrita a M pode ser reescrita, na vizinhança da origem, como:

$$\begin{array}{lcl} \Pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ ((x, y, z, \beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2) & \mapsto & (x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \beta_2 y + \gamma_2 z + f(x, y, z)) \end{array}$$

Obtemos as condições necessárias e suficientes para que Π_{u_0}, tenha singularidades simples genéricas de codimensão menor ou igual a 2. Estudamos os tipos de singularidades que podem ocorrer em um ponto de M variando o plano de projeção. Mostramos as condições para que a família Π seja um desdobramento versal das singularidades de $\mathcal{A}_e$-codimensão menor ou igual a dois de Π_{u_0}.

6.2 As singularidades simples de codimensão ≤ 2 da projeção em planos

Fixando u_0 gerado pelos vetores $a = (1, 0, 0, 0)$ e $b = (0, 0, 0, 1)$, temos $\Pi_{u_0}(x, y, z) = (x, f(x, y, z))$, um germe de corank 1 de uma aplicação $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$. Observemos que as singularidades de Π não são alteradas por mudanças de coordenadas na fonte e na meta. Portanto, estamos interessados nas $\mathcal{A}$-órbitas de germes de $\mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$.

As singularidades que podemos esperar dos membros da família Π são as de codimensão ≤ 4, que é a dimensão do seu espaço de parâmetros. Este fato é uma consequência direta do teorema de transversalidade de Montaldi [37], pois a família Π é $\mathcal{A}$-versal. Estas singularidades são listadas nos Teoremas 5.2 e 5.4.

Para nossa tese, devido a complexidade das contas, restringimos-nos ao estudo da geometria das singularidades simples de Π_u de codimensão ≤ 2. A proposição a seguir mostra as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f em $(0, 0, 0)$, quando

$\Pi_{u_0} = (x, f(x,y,z))$ tem as singularidades de $\mathcal{A}_e$-codimensão ≤ 2 listadas no Teorema 5.2. Para simplificar as condições, vamos considerar os novos coeficientes de f, na projeção, após a mudança de coordenada $z = z - \frac{1}{2a_3}(a_5x + a_6y)$, necessária para escrevermos o 2-jato de f como $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy$, onde $a_3 \neq 0$. Escrevemos então o 7-jato de f como:

$j^7(f) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + b_5y^2z + b_6yz^2 + b_7z^3 + b_8z^2x + b_9zx^2 + b_{10}xyz + c_1x^4 + c_2x^3y + c_3x^2y^2 + c_4xy^3 + c_5y^4 + c_6y^3z + c_7y^2z^2 + c_8yz^3 + c_9z^4 + c_{10}z^3x + c_{11}z^2x^2 + c_{12}zx^3 + c_{13}x^2yz + c_{14}xy^2z + c_{15}xyz^2 + d_1x^5 + d_2x^4y + d_3x^3y^2 + d_4x^2y^3 + d_5xy^4 + d_6y^5 + d_7y^4z + d_8y^3z^2 + d_9y^2z^3 + d_{10}z^4y + d_{11}z^5 + d_{12}z^4x + d_{13}x^2z^3 + d_{14}x^3z^2 + d_{15}x^4z + d_{16}x^3yz + d_{17}x^2y^2z + d_{18}x^2yz^2 + d_{19}xy^2z^2 + d_{20}xy^3z + d_{21}xyz^3 + e_1x^6 + e_2x^5y + e_3x^4y^2 + e_4x^3y^3 + e_5x^2y^4 + e_6xy^5 + e_7y^6 + e_8y^5z + e_9y^4z^2 + e_{10}y^3z^3 + e_{11}y^2z^4 + e_{12}yz^5 + e_{13}z^6 + e_{14}xz^5 + e_{15}x^2z^4 + e_{16}x^3z^3 + e_{17}x^4z^2 + e_{18}x^5z + e_{19}x^4yz + e_{20}x^3y^2z + e_{21}x^3yz^2 + e_{22}x^2y^2z^2 + e_{23}x^2y^3z + e_{24}x^2yz^3 + e_{25}xy^4z + e_{26}xyz^4 + e_{27}xy^2z^3 + e_{28}xy^3z^2 + f_1x^7 + f_2x^6y + f_3x^5y^2 + f_4x^4y^3 + f_5x^3y^4 + f_6x^2y^5 + f_7xy^6 + f_8y^7 + f_9x^6z + f_{10}x^5z^2 + f_{11}x^4z^3 + f_{12}x^3z^4 + f_{13}x^2z^5 + f_{14}xz^6 + f_{15}z^7 + f_{16}y^6z + f_{17}y^5z^2 + f_{18}y^4z^3 + f_{19}y^3z^4 + f_{20}y^2z^5 + f_{21}yz^6 + f_{22}x^5yz + f_{23}x^4y^2z + f_{24}x^4yz^2 + f_{25}x^3y^3z + f_{26}x^3y^2z^2 + f_{27}x^3yz^3 + f_{28}x^2y^4z + f_{29}x^2y^3z^2 + f_{30}x^2y^2z^3 + f_{31}x^2yz^4 + f_{32}xy^5z + f_{33}xy^4z^2 + f_{34}xy^3z^3 + f_{35}xy^2z^4 + f_{36}xyz^5.$

Na prova da proposição a seguir usamos a k-determinação de cada singularidade, que são dadas em [45] e [46].

Proposição 6.1 *A projeção ortogonal* Π_{u_0} *tem as seguintes singularidades:*

$$
\begin{array}{lll}
3 & \Leftrightarrow & a_2 = 0,\ a_3 \neq 0, a_4 \neq 0, b_4 \neq 0\ ; \\
4_2 & \Leftrightarrow & a_2 = a_4 = 0,\ a_3 \neq 0, b_4 \neq 0, b_3^2 - 3b_2b_4 \neq 0; \\
4_3 & \Leftrightarrow & a_2 = a_4 = b_3^2 - 3b_2b_4 = 0, a_3 \neq 0, b_4 \neq 0,\ -54c_2a_3b_4^3 + 27b_{10}b_9b_4^3 + 8b_3^3c_5a_3 \\
 & & -2b_3^3b_5^2 - 9b_3b_4^2b_{10}^2 + 36b_3b_4^2c_3a_3 - 18b_3b_4^2b_5b_9 + 9b_3^2b_4b_{10}b_5 - 18b_3^2b_4c_4a_3 \neq 0; \\
5 & \Leftrightarrow & a_2 = b_4 = 0,\ a_3 \neq 0, a_4 \neq 0, 4a_3c_5 - b_5^2 \neq 0; \\
6 & \Leftrightarrow & a_2 = b_4 = 0, 4a_3c_5 - b_5^2 = 0,\ b_6b_5^2 + 4d_6a_3^2 - 2c_6b_5a_3 \neq 0,
\end{array}
$$

$-380b_3^2a_3^2b_6^2b_5^4 - 1520b_3^2a_3^4c_6^2b_5^2 - 288a_4^2c_6^2a_3^5e_7 - 60a_4^2b_6^2b_5^5b_7 + 36c_7^2b_5^4a_3^2a_4^2 + 144d_7^2b_5^2a_3^4a_4^2 + 5120d_6^2a_3^6c_4a_4 - 6080b_3^2a_3^6d_6^2 + 36a_4^2c_6^4a_3^4 - 28a_4^2b_6^4b_5^4 + 576e_7^2a_3^6a_4^2 + 9b_7^2b_5^6a_4^2 - 3040b_3^2a_3^4b_6b_5^2d_6 + 1520b_3^2a_3^3b_6b_5^3c_6 - 120b_3a_3^3b_6b_5^2a_4c_6^2 + 96b_3a_3^2b_6^2b_5^3a_4c_6 - 24b_3a_3b_6^3b_5^4a_4 + 96b_3a_3^4b_6b_5^2e_7a_4 - 12b_3a_3b_6b_5^5b_7a_4 + 24b_3a_3^2b_6b_5^4c_7a_4 - 48b_3a_3^3b_6b_5^3d_7a_4 + 6080b_3^2a_3^5d_6c_6b_5 - 96b_3a_3^5d_6a_4c_6^2 + 192b_3a_3^4d_6a_4c_6b_6b_5 - 96b_3a_3^3d_6a_4b_6^2b_5^2 + 384b_3a_3^6d_6e_7a_4 - 48b_3a_3^3d_6b_7b_5^3a_4 + 96b_3a_3^4d_6c_7b_5^2a_4 - 192b_3a_3^5d_6d_7b_5a_4 + 48b_3a_3^4c_6^3b_5a_4 - 192b_3a_3^5c_6b_5e_7a_4 + 24b_3a_3^2c_6b_5^4b_7a_4 - 48b_3a_3^3c_6b_5^3c_7a_4 + 96b_3a_3^4c_6b_5^2d_7a_4 - 16a_4^2c_6^3a_3^3b_6b_5 - 104a_4^2c_6^2a_3^2b_6^2b_5^2 -$

$156a_4^2c_6^2a_3^2b_7b_5^3 + 184a_4^2c_6^2a_3^3c_7b_5^2 - 112a_4^2c_6^2a_3^4d_7b_5 + 12a_4^2c_6a_3b_6^3b_5^3 + 576a_4^2c_6a_3^4b_6b_5e_7 +$
$216a_4^2c_6a_3b_6b_5^4b_7 - 240a_4^2c_6a_3^2b_6b_5^3c_7 + 96a_4^2c_6a_3^3b_6b_5^2d_7 - 288a_4^2b_6^2b_5^2e_7a_3^3 + 56a_4^2b_6^2b_5^4c_7a_3 +$
$16a_4^2b_6^2b_5^3d_7a_3^2 - 144e_7a_3^3a_4^2b_7b_5^3 + 288e_7a_3^4a_4^2c_7b_5^2 - 576e_7a_3^5a_4^2d_7b_5 - 36b_7b_5^5a_4^2c_7a_3 + 72b_7b_5^4a_4^2d_7a_3^2 -$
$144c_7b_5^3a_3^3a_4^2d_7 + 320b_6^2b_5^4c_4a_4a_3^2 - 1280b_6b_5^3d_6a_3^3b_{10}a_4 + 2560b_6b_5^2d_6a_3^4c_4a_4 + 640b_6b_5^4c_6a_3^2b_{10}a_4 -$
$1280b_6b_5^3c_6a_3^3c_4a_4 - 2560d_6^2a_3^5b_{10}b_5a_4 + 2560d_6a_3^4c_6b_5^2b_{10}a_4 -$
$5120d_6a_3^5c_6b_5c_4a_4 - 640c_6^2b_5^3a_3^3b_{10}a_4 + 1280c_6^2b_5^2a_3^4c_4a_4 - 160a_3b_6^2b_5^5b_{10}a_4 - 1024f_8a_3^6a_4^2d_6 -$
$256a_4^2c_6^2a_3^4b_6d_6 + 512a_4^2c_6a_3^5d_7d_6 - 256a_4^2b_6^3b_5^2d_6a_3^2 + 512a_4^2c_6a_3^3b_6^2b_5d_6 - 512a_4^2c_6a_3^4c_7b_5d_6 +$
$384a_4^2c_6a_3^3b_7b_5^2d_6 - 512a_4^2b_6b_5d_7a_3^4d_6 + 512a_4^2b_6b_5^2c_7a_3^3d_6 - 384a_4^2b_6b_5^3b_7d_6a_3^2 + 32c_8b_5^5a_3a_4^2b_6 +$
$128c_8b_5^3a_3^3a_4^2d_6 - 64c_8b_5^4a_3^2a_4^2c_6 - 64d_8b_5^4a_3^2a_4^2b_6 - 256d_8b_5^2a_3^4a_4^2d_6 + 128d_8b_5^3a_3^3a_4^2c_6 -$
$256f_8a_3^4a_4^2b_6b_5^2 + 512f_8a_3^5a_4^2c_6b_5 + 128e_{14}b_5^3a_3^3a_4^2b_6 + 512e_14b_5a_3^5a_4^2d_6 - 256e_{14}b_5^2a_3^4a_4^2c_6 \neq 0;$

$11_5 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = a_4 = b_4 = 0, a_3 \neq 0, b_3 \neq 0,\ 4a_3c_5 - b_5^2 \neq 0,\ 4c_5a_3(2b_2(2c_5a_3 - b_5^2) + b_{10}b_5b_3)$
$-8c_5a_3^2c_4b_3 + b_5^4b_2 - b_5^3b_{10}b_3 + 2b_5^2c_4b_3a_3 + b_6b_5^2b_3^2 + 4d_6b_3^2a_3^2 - 2c_6b_5b_3^2a_3 \neq 0.$

Prova: Dada $\Pi_{u_0} = (x, f(x,y,z))$, usamos o Maple para fazermos mudanças de coordenadas na fonte e fizemos também mudanças na meta para tornar $(x, f(x,y,z))$ equivalente às formas normais do Teorema 5.2. Assim, descobrimos as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f para identificar as singularidades dos tipos 3, 4_2, 4_3, 5, 6 e 11_5.

Para dar uma idéia dos cálculos, faremos o caso 4_2. Os outros casos são análogos. Denotaremos o k-jato de f por Fk. Como 4_2 é 3-determinada então podemos trabalhar com o seu 3-jato. Os termos dependentes só de x podem ser eliminados com mudanças de coordenadas na meta usando a primeira coordenada de $(x, f(x,y,z))$. Nestes casos temos que ter $a_3 \neq 0$. Temos então no Maple:

$> F2 := a2 * y^2 + a3 * z^2 + a4 * x * y :$

$> F3 := b2 * x^2 * y + b3 * x * y^2 + b4 * y^3 + b5 * y^2 * z + b6 * y * z^2 + b7 * z^3 + b8 * z^2 * x + b9 * z * x^2 + b10 * x * y * z :$

Vamos achar as condições sobre os coeficientes ai, bi e ci para termos singularidade 4_2.

$> q := collect(F2 + F3, [x, y, z]) :$

Para sumir com $x^2 * z$:

$> q := collect(m, [x, y, z]) :$

$> mtaylor(subs(z = Z - coeff(coeff(coeff(q, x, 2), y, 0), z, 1) * x^2/(2a_3), q), [x, y, Z], 4) :$

Para sumir com $y^2 * z$:

$> q := collect(m, [x, y, Z]) :$

$> m := mtaylor(subs(Z = z - coeff(coeff(coeff(q, x, 0), y, 2), Z, 1) * y^2/(2a_3), q), [x, y, z], 4) :$

Para sumir com $x * y * z$:

$> q := collect(m, [x, y, z]) :$

$> m := mtaylor(subs(z = Z - coeff(coeff(coeff(q, x, 1), y, 1), z, 1) * x * y/(2a_3), q), [x, y, Z], 4) :$

Para sumir com $x * z^2$:

$> q := collect(m, [x, y, Z]) :$

$> m := mtaylor(subs(Z = z - coeff(coeff(coeff(q, x, 1), y, 0), Z, 2) * x * z/(2a_3), q), [x, y, z], 4) :$

Para sumir com $y * z^2$:

$> q := collect(m, [x, y, z]) :$

$> m := mtaylor(subs(z = Z - coeff(coeff(coeff(q, x, 0), y, 1), z, 2) * y * Z/(2a_3), q), [x, y, Z], 4) :$

Para sumir com z^3:

$> q := collect(m, [x, y, Z]) :$

$> m := mtaylor(subs(Z = z - coeff(coeff(coeff(q, x, 0), y, 0), Z, 3) * z^2/(2a_3), q), [x, y, z], 4) :$

$> q := collect(m, [x, y, z]) :$

Precisamos que o coeficiente de y^2 seja igual a zero, senão teremos dobra:

$> cfy2 := coeff(coeff(coeff(q, x, 0), y, 2), z, 0) :$

$> s := subs(cfy2 = 0, q) :$

Precisamos que o coeficiente de $x * y$ seja igual a zero, senão teremos singularidade do tipo 3:

$> q := collect(s, [x, y, z]) :$

$> cfxy := coeff(coeff(coeff(q, x, 1), y, 1), z, 0) :$

$> s := subs(cfxy = 0, q) :$

Para termos lábios/bicos, precisamos que o novo coeficiente de y^3 seja diferente de zero.

$> cfy3 := coeff(coeff(coeff(q, x, 0), y, 3), z, 0) :$

$$b4$$

Portanto, para sumir com xy^2 podemos fazer:

$> mtaylor(subs(y = Y - coeff(coeff(coeff(q, x, 1), y, 2), z, 0) * x/(3b4), s), [x, Y, z], 4) :$

$$a3z^2 + (b2 - \frac{1}{3}\frac{b3^2}{b4})Yx^2 + b4Y^3$$

Os coeficientes da equação anterior devem ser distintos de zero para termos lábios/bicos. E os novos coeficientes de y^2 e de $x * y$ devem ser nulos:

$> simplify(cfy2);$

$$a2$$

$> simplify(cfxy);$

$$a4$$

■

6.3 Estratificação do espaço dos planos singulares

Como vimos anteriormente, um plano de projeção singular u em $p \in M$, pode sem perda de generalidade, ser gerado por um vetor a de S^2 mais o vetor $(0,0,0,1)$. Então estes planos podem ser identificados com a esfera S^2. Vamos então estudar os tipos de singularidades de Π_u, para $u \in S^2$.

A hipersuperfície é dada localmente em $p = (0,0,0)$ por $(x, y, z, f(x, y, z))$. Podemos fazer uma rotação tal que $j^2 f = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2$, e então teremos que as curvaturas principais em p são $k_i = a_i/2$, $i = 1, 2, 3$.

Proposição 6.2 *Sejam M dada localmente como $(x, y, z, f(x, y, z))$, onde $j^2 f = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2$ e $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S^2$.*
(1) Sobre um ponto elíptico de M a projeção $\Pi_u : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ tem singularidade do tipo dobra em qualquer direção de S^2.
(2) No ponto hiperbólico genericamente temos dobra exceto em dois círculos onde em cada círculo a singularidade é do tipo cúspide a menos de $0, 2, 4, 6, 8, 10$ ou 12 direções onde ocorrem singularidade rabo de andorinha.
(3) No ponto parabólico (supondo sem perda de generalidade $k_2 = 0$) genericamente temos dobra, mas no círculo dado por $\alpha_2 = 0$ em S^2 temos singularidade 4_2 exceto em 0 ou 2 direções onde temos singularidade 4_3. Além disso, se $k_1 k_3 < 0$ temos 2 direções sobre este círculo onde a singularidade é não simples, genericamente do tipo N_1.
(4) No ponto umbílico parcial genericamente temos singularidade do tipo 4_2. Temos 0 ou 2 círculos com singularidade 4_3; 0, 1 ou 3 círculos com singularidade do tipo 11_5; 0, 4 ou 12 direções onde a singularidade é do tipo 16 e na direção dada por $(0, 1, 0)$ temos singularidade do tipo N_{12}.

Prova: Seja $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S^2$. Vamos dividir o estudo de S^2 em três casos:

(a) quando $\alpha_1 \neq 0$, podemos tomar as direções $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que representam S^2 menos o círculo de direções $(0, \alpha_2, \alpha_3)$;

(b) quando $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 \neq 0$ então podemos tomar as direções $(0, \alpha_2, \alpha_3)$ que representam o círculo de direções que falta em (a), menos a direção $(0, 0, \alpha_3)$;

(c) quando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 \neq 0$, que representa a direção que falta em (b).

Para o caso (a), a projeção $\Pi = (< (x, y, z, f(x, y, z)), a >, < (x, y, z, f(x, y, z)), b >) = (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, f(x, y, z))$, onde $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$ e $b = (0, 0, 0, 1)$. Fazendo a

mudança de coordenada $X = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$, temos $\Pi = (x, f((x - \alpha_2 y - \alpha_3 z)/\alpha_1, y, z)$, ou seja,

$$j^2\Pi = (x, \frac{1}{\alpha_1^2}(a_1x^2 + (a_2\alpha_1^2 + a_1\alpha_2^2)y^2 + (a_1\alpha_3^2 + a_3\alpha_1^2)z^2 + 2a_1\alpha_2\alpha_3yz - 2a_1\alpha_3xz - 2a_1\alpha_2xy)). \quad (I)$$

Analisando a parte quadrática $q(y,z) = ((a_2\alpha_1^2 + a1\alpha_2^2)y^2 + 2a_1\alpha_2\alpha_3yz + (a_1\alpha_3^2 + a_3\alpha_1^2)z^2)/\alpha_1^2$ temos

$$\begin{pmatrix} q_{yy} & q_{yz} \\ q_{yz} & q_{zz} \end{pmatrix} = -4\frac{1}{\alpha_1^2}(a_2a_3\alpha_1^2 + a_1a_3\alpha_2^2 + a_1a_2\alpha_3^2).$$

Ou seja, a quadrática q é degenerada se, e somente se,

$$a_2a_3\alpha_1^2 + a_1a_3\alpha_2^2 + a_1a_2\alpha_3^2 = 0. \quad (II)$$

Para o caso (b), ou seja, usando as direções $(0, \alpha_2, \alpha_3)$ com $\alpha_2 \neq 0$, a projeção, após fazer a mudança de coordenada $Y = \alpha_2 y + \alpha_3 z$, é igual a $(y, f(x, \frac{1}{\alpha_2}y - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}z, z))$ cujo segundo jato é

$$(y, a_1x^2 + \frac{a_2}{\alpha_2^2}y^2 - \frac{2a_2\alpha_3}{\alpha_2^2}yz + \frac{a_2\alpha_3^2 + a_3\alpha_2^2}{\alpha_2^2}z^2). \quad (III)$$

Para o caso (c), ou seja, projetando na direção $(0, 0, \alpha_3)$ com $\alpha_3 \neq 0$, a projeção Π é $(z, f(x, y, \frac{1}{\alpha_3}z))$ com o 2-jato igual a

$$(z, a_1x^2 + a_2y^2 + \frac{a_3}{\alpha_3^2}z^2). \quad (IV)$$

(1) Para o ponto elíptico em qualquer direção de S^2 a projeção tem singularidade do tipo dobra, pois a_1, a_2 e a_3 têm os mesmos sinais. Neste ponto, sempre que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$, para o caso (a) temos que (II) não vale, ou seja $a_2a_3\alpha_1^2 + a_1a_3\alpha_2^2 + a_1a_2\alpha_3^2 \neq 0$, e então $\Pi \sim (x, y^2 \pm z^2)$; para o caso (b) temos que $a_1 \neq 0$ e $a_2\alpha_3^2 + a_3\alpha_2^2 \neq 0$, e então por (III), $\Pi \sim (y, x^2 \pm z^2)$; e para o caso (c) temos que $a_1a_2 \neq 0$ e portanto por (IV), $\Pi \sim (z, x^2 \pm y^2)$ (ver Figura 6.1).

(2) Vamos supor que p é um ponto hiperbólico. No caso (a), se (II) não está satisfeita sabemos que a singularidade é do tipo dobra $(x, y^2 \pm z^2)$. Vamos supor então que (II) está satisfeita. Neste caso a equação (II) determina um cone (que chamaremos cone das cúspides) na origem. Portanto, teremos dois círculos de direções (podemos considerar só um destes círculos, pois o outro é o seu simétrico e determina as mesmas direções), que são determinados pela intersecção do cone com S^2, onde a singularidade é pior que dobra. Sem perda de generalidade, podemos supor que o coeficiente de z^2 é diferente de zero,

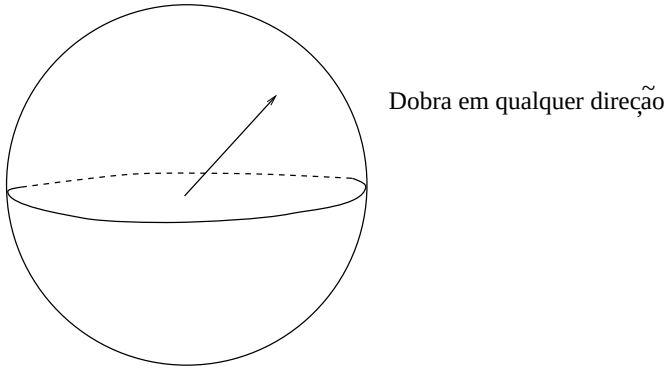

Figura 6.1: Ponto elíptico

ou seja, $a_1\alpha_3^2 + a_3\alpha_1^2 \neq 0$ (já que neste caso não podemos ter simultaneamente os novos coeficientes de yz, y^2 e z^2 iguais a zero, senão o ponto seria parabólico), e então a parte quadrática $q(y,z)$ é um quadrado perfeito:

$$\frac{a_1\alpha_3^2 + a_3\alpha_1^2}{\alpha_1^2}(z + \frac{a_1\alpha_2\alpha_3}{a_1\alpha_3^2 + a_3\alpha_1^2}y)^2.$$

Podemos fazer a mudança de coordenada $z = z + \frac{a_1\alpha_2\alpha_3}{a_1\alpha_3^2+a_3\alpha_1^2}y$ e então teremos $j^2\Pi = (x, \frac{a_1\alpha_3^2+a_3\alpha_1^2}{\alpha_1^2}z^2 - \frac{2a_1\alpha_2}{\alpha_1^2}xy - \frac{2a_1\alpha_3}{\alpha_1^2}x(z - \frac{a_1\alpha_2\alpha_3}{a_1\alpha_3^2+a_3\alpha_1^2}y))$. Precisamos que o coeficiente de xy seja diferente de zero para que a singularidade seja genericamente uma cúspide, e isto ocorre se, e somente se, $a_1a_3\alpha_2 \neq 0$. Mas isto é sempre verdade pois, o ponto é hiperbólico. Vejamos, se o novo coeficiente de xy fosse zero, teríamos $\alpha_2 = 0$, e então (II) e $a_1\alpha_3^2 + a_3\alpha_1^2 \neq 0$ implicaria em $a_2 = 2k_2 = 0$, que é absurdo. Então, quando (II) está satisfeita, nos pontos hiperbólicos podemos sempre reduzir o 2-jato de Π a $(x, xy \pm z^2)$. Vamos agora, analisar o novo coeficiente de y^3. No caso (a), isto é quando $\alpha_1 \neq 0$, podemos fazer $\alpha_1 = 1$ e ficamos com um polinômio de grau 6 em α_2, α_3:
$b_4a_3^3 - 2a_1\alpha_3^2\alpha_2b_3a_3^2 - a_1\alpha_3\alpha_2^3b_9a_3^2 - a_1^3\alpha_3^3\alpha_2^3b_7 + b_2\alpha_2^2a_3^3 - 2a_1^2\alpha_3^3\alpha_2b_5a_3 + a_1^2\alpha_3^3\alpha_2^2b_{10}a_3 - a_1^3\alpha_3^5\alpha_2b_5 - a_1\alpha_3\alpha_2b_5a_3^2 + a_1\alpha_3^2\alpha_2^2b_2a_3^2 - a_1^2\alpha_3^4\alpha_2b_3a_3 - a_1^2\alpha_3^2\alpha_2^3b_8a_3 + b_4a_1^2\alpha_3^4a_3 + a_1\alpha_3\alpha_2^2b_{10}a_3^2$
$+a_1^3\alpha_3^4\alpha_2^2b_6 + a_1^2\alpha_3^2\alpha_2^2b_6a_3 - b_1\alpha_2^3a_3^3 - b_3\alpha_2a_3^3 + b_4a_1^3\alpha_3^6 + 3b_4a_1\alpha_3^2a_3^2.$
Logo sobre o círculo (curva de grau 2 dada pela intersecção do cone e S^2) teremos $0, 2, 4, 6, 8, 10$, ou 12 direções (dadas pela interseção da curva de grau 2, dada pelo novo coeficiente de y^2 igual a zero, com a curva de grau 6 dada pelo novo coeficiente de y^3 igual a zero) onde a singularidade pode ser do tipo rabo de andorinha. Nas outras direções deste círculo, isto é onde o polinômio de grau 6 dado acima é diferente de zero, teremos sempre uma cúspide. Vamos analisar o caso (b), ou seja, a projeção na direção $(0, \alpha_2, \alpha_3)$ com $\alpha_2 \neq 0$. Se $k_2k_3 > 0$ teremos sempre dobra, pois novamente, o novo coeficiente de z^2

é diferente de zero. Mas se $k_2k_3 < 0$, teremos dobra exceto em duas direções onde o coeficiente de z^2 é nulo, $\alpha_3 = \pm\sqrt{\frac{-a_3\alpha_2^2}{a_2}}$. Neste caso, estas direções estão sobre os dois círculos que são a interseção do cone dado por (II) com S^2. Nestas direções genericamente temos singularidade do tipo cúspide, como já vimos anteriormente. Para o caso (c) temos que $a_1a_2 \neq 0$ e portanto $\Pi \sim (z, x^2 \pm y^2)$(ver Figura 6.2).

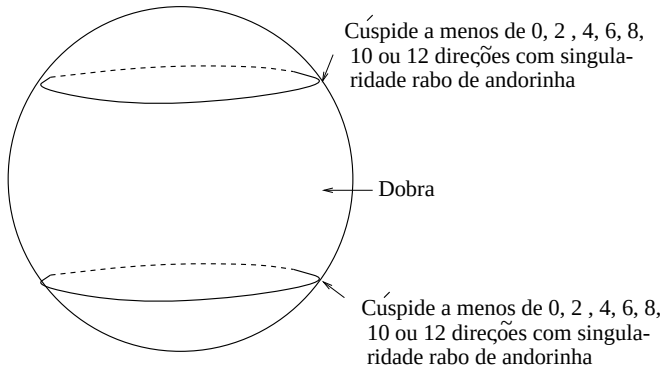

Figura 6.2: Ponto hiperbólico

(3) Vamos supor agora que p é um ponto parabólico. Sem perda de generalidade, podemos supor que $k_2 = \frac{a_2}{2} = 0$. Vamos ver o que acontece no caso (a). Se (II) não está satisfeita então teremos sempre singularidade do tipo dobra. Agora, suponha que (II) está satisfeita. Neste caso, a equação (II) determina um plano que contém a origem. Portanto, teremos um círculo de direção determinado pela interseção do plano com S^2, onde a singularidade é pior que dobra. Como $a_2 = 0$, então por (II) teremos que $\alpha_2 = 0$, conseqüentemente temos que os novos coeficientes de y^2 e de yz são nulos. Sem perda de generalidade, podemos fazer $\alpha_1 = 1$. Supondo que o novo coeficiente de z^2 é distinto de zero, ou seja, $a_1\alpha_3^2 + a_3 \neq 0$, e que o novo coeficiente de y^3, b_4, é diferente de zero, após mudanças de coordenadas temos que $j^3f = \frac{1}{3(a_1\alpha_3^2+a_3)^2b_4}(3\alpha_3^2a_1^2b_4b_6 - \alpha_3^2a_1^2b_5^2 - b_3^2a_3^2 + 3b_4b_2a_3^2 - 2\alpha_3a_1b_5b_3a_3 + 3\alpha_3a_1b_4b_{10}a_3)x^2y + b_4y^3 + (a_1\alpha_3^2 + a_3)z^2$. Ou seja, genericamente, no círculo dado pelo plano $\alpha_2 = 0$ interseção com S^2, temos singularidade 4_2. Se o coeficiente de x^2y for nulo teremos singularidade do tipo 4_3, e isto acontece em 0 ou 2 direções deste círculo. Por outro lado, se o coeficiente de z^2 for nulo, e isto acontece em duas direções $(1, \alpha_3)$ com $\alpha_3 = \pm\sqrt{\frac{-a_3}{a_1}}$ se $a_1a_3 < 0$ (isto é $k_1k_3 < 0$), teremos o dois jato da projeção equivalente a (x, xz) e portanto a singularidade será genericamente do tipo N_1. Para o caso (b), onde $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 \neq 0$, com $a_2 = 0$, temos $j^2\Pi = (y, a_1x^2 + a_3z^2)$. Logo a singularidade é do tipo dobra já que $a_1a_3 \neq 0$. Para o caso (c), se $a_2 = 0$, temos que $j^2\Pi = (z, a_1x^2 + \frac{a_3}{\alpha_3^2}z^2)$, então genericamente teremos a singularidade 4_2 já que $a_1 \neq 0$ e

z^2 pode ser eliminado com mudança de coordenadas na meta (ver Figura 6.3).

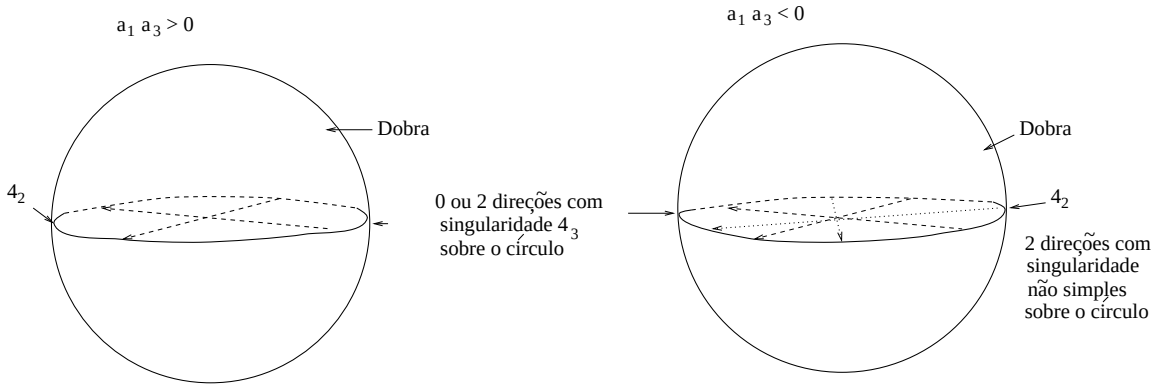

Figura 6.3: Ponto parabólico

(4) Vamos ver o que acontece se o ponto é umbílico plano parcial. Suponha sem perda de generalidade que $a_1 = a_3 = 0$ com $a_2 \neq 0$. Após a projeção com $\alpha_1 \neq 0$ e após mudanças de coordenadas teremos $(x, a_2y^2 + \frac{(b_9\alpha_1 - 3b_1\alpha_3)}{\alpha_1^3}x^2z + \frac{b_8\alpha_1^2 + 3b_1\alpha_3^2 - 2b_9\alpha_3\alpha_1}{\alpha_1^3}xz^2 + \frac{1}{\alpha_1^3}(-b_1\alpha_3^3 - b_8\alpha_3\alpha_1^2 + b_9\alpha_3^2\alpha_1 + b_7\alpha_1^3)z^3)$. Se o coeficiente de z^3, for diferente de zero, então teremos uma singularidade do tipo 4_2, basta fazer a mudança de coordenada $z = Z - coef(xz^2)x/3coef(z^3)$. Após esta mudança de coordenadas para eliminar xz^2 temos que o novo coeficiente de x^2z é nulo se, e somente se, $(-3b_1b_8 + b_9^2)\alpha_3^2 + (9b_1b_7 - b_9b_8)\alpha_1\alpha_3 + (b_8^2 - 3b_9b_7)\alpha_1^2$ for nulo. Teremos então 0 ou 2 planos de soluções, que passam pela origem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$, para esta equação. Cada plano intercepta a esfera de direções em 1 círculo, ou seja, nas direções destes círculos teremos singularidade 4_3 (ver Figura 6.4). Mas se o coeficiente de z^3 for zero, teremos 0, 1 ou 3 planos de soluções que também passam por $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$. Cada plano intercepta a esfera de direções em 1 círculo, onde a singularidade é do tipo 11_5. Se tivermos também o coeficiente de xz^2 igual a zero, onde temos 0 ou 2 planos cortando a esfera S^2, as intersecções destes dois círculos com os círculos resultantes do coeficiente de z^3 igual a zero, nos dão genericamente, $0, 4$ ou 12 pontos onde a singularidade é do tipo 16. Para o caso (b) onde $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 \neq 0$, se tivermos também $\alpha_3 \neq 0$ então $j^3\Pi = (y, a_2\alpha_3^2z^2/\alpha_2^2 + (3b_1b_8 - b_9^2)xy^2/(3b_1\alpha_3^2) + b_1x^3)$, ou seja, teremos singularidade do tipo 4_2. Se $\alpha_3 = 0$ então $j^2f = 0$ e então teremos genericamente a singularidade não simples N_{12}. Observamos que neste caso o plano ortogonal a $u =< (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) >$ é o plano de direções assintóticas. Para o caso (c) temos a singularidade do tipo 4_2 já que o segundo jato da projeção é equivalente a (z, y^2).

Portanto, fora de 0, 1 e 3 círculos referentes ao coeficiente de z^3 igual a zero e de 0 e 2 círculos referentes ao coeficiente de xz^2 igual a zero, teremos a singularidade lábios/bicos

exceto na direção dada por $(0,1,0)$ onde temos a singularidade N_{12}. Isto é, exceto nos dois pontos $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$ e fora de 0, 1, 2, 3, ou 5 círculos da esfera acontece a singularidade 4_2. ■

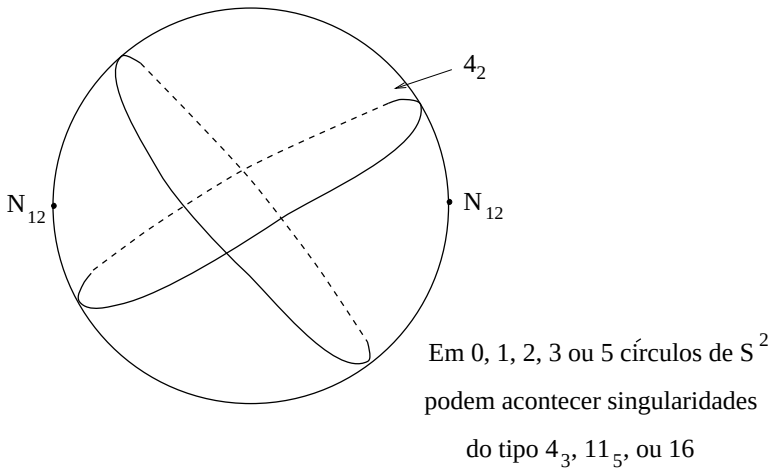

Figura 6.4: Ponto umbílico plano parcial

6.4 Desdobramento versal das singularidades simples de codimensão ≤ 2

Nesta seção, procuramos as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f, para Π ser uma deformação versal de $\Pi_{u_0} = (x, f(x,y,z))$, nos casos em que Π_{u_0} possui uma singularidade simples de codimensão ≤ 2.

A família de aplicações projeções de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\Pi : M \times G(2,4) \to \mathbb{R}^2$ é uma deformação da aplicação $\Pi_{u_0} = (x, f(x,y,z))$. Em coordenadas locais

$$\Pi(x,y,z,u) = (x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \beta_2 y + \gamma_2 z + f(x,y,z)),$$

onde $a = (1, \beta_1, \gamma_1, 0)$ e $b = (0, \beta_2, \gamma_2, 1)$. Fazendo a mudança de coordenada $X = x + \beta_1 y + \gamma_1 z$, teremos $\Pi_u(x,y,z) = (x, \beta_2 y + \gamma_2 z + f(x - \beta_1 y - \gamma_1 z, y, z))$. Portanto

$$\dot{\Pi}_{\gamma_1} = (0, -z f_x), \quad \dot{\Pi}_{\beta_1} = (0, -y f_x), \quad \dot{\Pi}_{\gamma_2} = (0, z), \quad \text{e} \quad \dot{\Pi}_{\beta_2} = (0, y).$$

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 6.3 *A família de aplicações projeções* Π *é um desdobramento versal das singularidades simples de codimensão* ≤ 2 *quando:*

4_2 : *sempre;*

$4_3 \Leftrightarrow b_3b_5(27b_1b_4^2 - b_3^3) \neq 0$;

5 : *sempre;*

$6 \Leftrightarrow b_5(2(a_3b_3b_6 - a_4a_3c_7) + 3b_5a_4b_7)(2a_3(2d_6a_3 - b_5c_6) + b_5^2b_6) \neq 0$ *e* $\phi(a_i, b_i, c_i, c_i, e_i, f_i) \neq 0$;

$11_5 \Leftrightarrow -8a_3c_5b_3b_{10} - 4a_3c_5b_5b_2 + 4a_3b_3^2c_6 + 6a_3c_4b_5b_3 + 3b_5^3b_2 - 4b_5b_3^2b_6 - b_{10}b_3b_5^2 \neq 0.$

Onde a expressão do polinômio ϕ *é igual a*

$$-280a_3^3a_4b_5^6b_3^2b_{10}c_6 - 1120a_3^3b_6d_6b_3a_4^2b_5^5b_{10} - 2800a_3^3b_6b_3a_4b_5^6b_{10}c_6 + 2240a_3^3b_6b_3a_4^3b_5^4d_7c_6 - 1008a_3^3b_6b_3a_4^2b_5^5c_6c_4 -$$
$$2240a_3^3b_6d_6a_4^3b_5^4b_{10}c_6 - 112a_3^3b_6a_4^3b_5^4c_6^2c_4 + 112a_3^3b_6a_4^3b_5^5d_7c_4 - 1344a_3^3b_6a_4^4b_5^4c_7e_7 + 2800a_3^4b_3a_4b_5^5c_6^2b_{10} - 1904a_3^4b_3a_4^3b_5^3c_6^2d_7 -$$
$$1344a_3^4b_3b_5^4a_4^3c_7e_7 + 784a_3^4b_3a_4^2b_5^4c_6^2c_4 - 672a_3^4b_3a_4^3b_5^4d_7^2 + 2688a_3^4a_4^4b_5^3c_7c_6e_7 + 448a_3^4a_4^3b_5^4d_7c_6c_4 - 1344a_3^4b_6^2a_4^3b_5^4c_4 +$$
$$2688a_3^4b_6b_5^3d_7a_4^4e_7 - 4032a_3^4b_6a_4^4b_5^2c_6^2e_7 - 1344a_3^4b_6a_4^3b_5^4b_{10}c_6 - 1344a_3^4b_6a_4^3b_5^4c_4e_7 + 560a_3^4b_6b_3a_4^2b_5^5b_{10} - 5600a_3^4b_6b_3a_4^2b_5^4d_7c_6 +$$
$$1344a_3^4b_6b_3a_4^3b_5^3c_6e_7 + 5600a_3^4b_6b_3a_4b_5^5c_6c_4 - 1680a_3^3d_6a_4^3b_5^5c_8b_3 - 672a_3^3b_6a_4^2b_5^5b_3^2d_7 - 5600a_3^3b_6d_6a_4^2b_5^6b_2 - 1120a_3^3b_6d_6a_4^4b_5^4d_8 -$$
$$560a_3^3b_6b_3a_4^3b_5^5e_{14} - 1400a_3^3b_6^2b_3a_4b_5^6c_4 + 1400a_3^3b_6^2b_3a_4^2b_5^5d_7 + 1344a_3^3b_6^2a_4^4b_5^3c_6e_7 + 952a_3^3b_6a_4^4b_5^4e_{14}c_6 + 168a_3^3b_6a_4^3b_5^5c_6d_5 +$$
$$728a_3^3b_6a_4^4b_5^3c_6^2d_7 + 3920a_3^3b_6d_6a_4^3b_5^5c_{14} + 3360a_3^3b_6^2d_6b_5^3d_7a_4^4 - 280a_3^3b_6a_4b_5^6b_3^2c_4 - 560a_3^3d_6a_4^3b_5^5c_7b_{10} + 1680a_3^3d_6a_4^4b_5^4d_7b_7 -$$
$$840a_3^3d_6a_4^4b_5^4c_8c_6 + 6440a_3^3d_6a_4^3b_5^5c_6b_8 - 1680a_3^3d_6a_4^3b_5^5b_7c_4 + 336a_3^3b_3a_4^2b_5^6c_7c_4 - 1120a_3^3b_3a_4^3b_5^5c_6d_8 + 1008a_3^3b_3a_4^3b_5^5c_7d_7 -$$
$$392a_3^3b_3a_4^2b_5^5c_6^2b_{10} + 1008a_3^3b_3a_4^3b_5^5b_7e_7 + 336a_3^3b_3a_4^2b_5^6d_7b_{10} - 280a_3^3a_4^3b_5^5d_7b_{10}c_6 - 1008a_3^3a_4^4b_5^4c_6b_7e_7 - 2240a_3^3b_6^2d_6a_4^3b_5^4c_4 -$$
$$784a_3^3a_4^3b_5^5c_7c_6c_4 - 672a_3^3a_4^4b_5^4c_7d_7c_6 + 1792a_3^3a_4^3b_5^5c_6^2c_{14} - 224a_4^4b_5^6c_7b_6^3 - 336a_3^2a_4^4b_5^6c_7d_8 + 140a_3^2b_6a_4^3b_5^6d_7b_{10} + 280a_3^2b_6a_4^4b_5^6e_{15} +$$
$$84a_3b_3a_4^2b_5^8b_7b_{10} - 84a_3a_4^3b_5^8b_7c_{14} - 280a_3a_4^4b_5^7c_9c_6 - 10a_3^2a_4^4b_5^7c_{15}c_6 + 168a_3^2a_4^3b_5^7d_7b_8 + 168a_3^2a_4^4b_5^5c_8c_6^2 + 168a_3^2a_4^3b_5^7b_7d_5 -$$
$$168a_3^2a_4^4b_5^6b_7e_{14} - 504a_3^2a_4^4b_5^6d_7c_8 + 168a_3^2a_4^3b_5^7c_7c_{14} - 1736a_3^2a_4^3b_5^6c_6^2b_8 + 420a_3^2a_4^4b_5^6d_9c_6 + 560a_3^2d_6a_4^4b_5^6c_9 - 336a_3^2b_6^2a_4^4b_5^5e_{14} -$$
$$112a_3^2b_6a_4^4b_5^5c_6d_8 - 1904a_3^2b_6a_4^3b_5^6c_6c_{14} + 700a_3^2b_6^2b_3a_4b_5^7b_{10} + 224a_3^2b_6a_4^3c_7b_5^6c_4 + 2800a_3^2b_6a_4^2b_5^7b_2c_6 + 980a_3^2b_6a_4^3b_5^5b_{10}c_6^2 -$$
$$140a_3^2b_6a_4^3b_5^7d_{20} - 2800a_3^3a_4^2b_5^6b_2c_6^2 + 336a_3^3a_4^4b_5^4c_6^2d_8 - 336a_3^3a_4^3b_5^6e_7b_8 + 20a_3^3d_6a_4^4b_5^6c_{15} - 840a_3^3d_6a_4^4b_5^5d_9 + 280a_3^3a_4^3b_5^6d_{20}c_6 +$$
$$336a_3^3a_4^3b_5^6b_{10}b_7 - 336a_3^3a_4^3b_5^6d_7c_{14} + 336a_3^3a_4^4b_5^5c_7e_{14} - 336a_3^3a_4^3b_5^6c_7d_5 - 560a_3^3a_4^4b_5^5e_{15}c_6 - 784a_3^3b_6b_5^4d_7^2a_4^4 + 672a_3^3b_6^2a_4^3b_5^5b_10 -$$
$$280a_3^3b_6a_4^4b_5^5f_{16} + 280a_3^3b_6a_4^3b_5^6e_6 + 504a_3^2b_6a_4^4b_5^5c_7d_7 + 1680a_3^2b_6d_6a_4^4b_5^5c_8 + 140a_3^2b_6a_4b_5^7b_3^2b_{10} + 560a_3^2b_6b_3a_4^3b_5^6d_8 +$$
$$504a_3^2b_6b_3a_4^2b_5^6b_{10}c_6 - 3640a_3^2b_6d_6a_4^3b_5^6b_8 - 896a_3^2b_6^2b_3b_5^5a_4^3d_7 + 224a_3^2b_6^2b_3a_4^2b_5^6c_4 - 840a_3^2b_6^2a_4^4b_5^4d_7c_6 + 672a_3^2b_6^2a_4^3b_5^5c_6c_4 +$$
$$420a_3^2d_6a_4^3b_5^6b_{10}b_7 - 2240a_4^3b_6d_6b_3b_5^3d_7a_4^3 + 560a_3^4d_6a_4b_5^5b_3^2b_{10} + 2240a_3^4b_6d_6a_4^3b_5^3c_6c_4 + 672a_3^3a_4^4b_5^5d_7d_8 + 1008a_3^3a_4^4b_5^5c_8e_7 -$$
$$1120a_3^3a_4^3b_5^4c_6^3b_{10} - 84a_3a_4^3b_5^8c_7b_8 - 112a_3b_6^2b_3a_4^2b_5^7b_{10} + 252a_3a_4^4b_5^7c_8c_7 + 168a_3a_4^4b_5^7d_8b_7 - 420a_3b_6b_3a_4^3b_5^7c_8 + 84a_3b_6a_4^4b_5^6b_7d_7 -$$
$$546a_3b_6a_4^4b_5^6c_8c_6 - 210a_3b_6^2a_4^3b_5^6b_{10}c_6 - 140a_3b_6a_4^3b_5^7c_7b_{10} + 1862a_3b_6a_4^3b_5^7b_8c_6 - 252a_3b_6a_4^3b_5^7b_7c_4 - 700a_3b_6^2a_4^2b_5^8b_2 -$$
$$224a_3b_6^3a_4^3b_5^6c_4 + 462a_3b_6^2a_4^3b_5^7c_{14} - 210a_3a_4^3b_5^7b_7b_{10}c_6 + 168a_3b_6^3b_5^5d_7a_4^4 + 5a_3b_6a_4^4b_5^8c_{15} - 210a_3b_6a_4^4b_5^7d_9 + 56a_3b_6^2a_4^4b_5^6d_8 -$$
$$3360a_3^4b_6d_6a_4^4b_5^2d_7c_6 + 1344a_3^4b_6a_4^2b_5^4e_7b_3^2 + 2240a_3^4b_6d_6b_3a_4^2b_5^4c_4 - 168a_3^2b_3a_4^2b_5^7c_7b_{10} + 840a_3^2b_3a_4^3b_5^6c_8c_6 - 168a_3^2b_3a_4^2b_5^7b_7c_4 -$$
$$672a_3^2b_3a_4^3b_5^6b_7d_7 + 672a_3^2a_4^3b_5^6b_7c_6c_4 + 280a_3^2a_4^3b_5^6c_7b_{10}c_6 + 168a_3^2a_4^4b_5^5b_7d_7c_6 + 56a_3^2b_6^2a_4^3b_5^6d_5 + 168b_5^7a_4^3b_6^2b_3b_7 - 42a_4^4b_5^7b_7c_7b_6 -$$
$$126a_4^4b_5^6b_7b_6^2c_6 + 126b_5^7a_4^4b_7^2c_6 + 5600a_3^4b_6d_6b_3a_4b_5^5b_{10} + 1120a_3^4d_6b_3a_4^2b_5^4c_6b_{10} - 560a_3^4d_6a_4^3b_5^5d_{20} - 672a_3^4b_3a_4^2b_5^5d_7c_4 +$$
$$1120a_3^4b_3a_4^3b_5^4c_6e_{14} + 5040a_3^4d_6a_4^3b_5^3c_6^2b_{10} - 6720a_3^4d_6a_4^3b_5^4c_6c_{14} + 2240a_3^4d_6a_4^3b_5^4c_7c_4 + 560a_3^4d_6a_4^3b_5^4d_7b_{10} + 11200a_3^4d_6a_4^2b_5^5b_2c_6 -$$

$3360a_3^4d_6a_4^4b_5^3d_7c_7+2240a_3^4d_6b_3a_4^3b_5^4d_8-672a_3^4b_3a_4^2b_5^5e_7b_{10}-16800a_3^4d_6b_3a_4^2b_5^4b_7c_6-2240a_3^4a_4^3b_5^3c_7d_6c_6b_3+336a_3a_4^3b_5^6b_6^2b_3c_7+$

$1050a_3b_6^2b_3b_7a_4^2b_5^7+952a_3a_4^4b_5^5c_7b_6^2c_6-168a_3b_6a_4^2b_5^7b_3^2b_7+112a_3^2a_4^4b_5^5c_7^2c_6-84a_3^2a_4^4b_5^4b_7c_6^3+224a_3b_5^6a_4^2b_6^3b_3^2-336a_3a_4^3b_5^5b_6^3b_3c_6-$

$1008a_3^2a_4^4b_5^4c_7c_6^2b_6 - 840a_3^2b_5^5a_4^4c_7b_7d_6 + 168a_3^2a_4^2b_5^6b_7c_6b_3^2 - 336a_3^2b_3a_4^3b_5^6c_7^2 - 896a_3^2a_4^3b_5^5c_7b_6c_6b_3 - 84a_3^2a_4^3b_5^5b_7c_6^2b_3 -$

$1120a_3b_6^3a_4^4b_5^4c_6^2 - 504a_3a_4^3b_5^6b_7b_6c_6b_3 - 56a_3a_4^4b_5^6c_7^2b_6 + 420a_3a_4^4b_5^5b_7c_6^2b_6 + 420a_3a_4^3b_5^7b_7c_7b_3 - 168a_3a_4^4b_5^6b_7c_7c_6 -$

$1232a_3^2a_4^2b_5^5b_6^2b_3^2c_6 + 1568a_3^2a_4^3b_5^4b_6^2b_3c_6^2 - 1400a_3^2b_6^2b_3c_7a_4^2b_5^6 + 1736a_3^2b_6^2a_4^4b_5^3c_6^3 + 1008a_3^2b_6^2a_4^4b_5^5b_7 + 1680a_3^2a_4^3b_5^5b_7b_6b_3d_6 -$

$840a_3^2a_4^4b_5^4b_7b_6c_6d_6 + 336a_3^2b_6a_4^2b_5^6b_3^2c_7 - 4200a_3^2b_6b_3a_4^2b_5^6b_7c_6 + 840a_3^3b_6b_3b_7a_4^3b_5^5 - 2688a_3^3a_4^3b_5^3b_6b_3c_6^3 - 728a_3^3b_6a_4^4b_5^2c_6^4 -$

$1344a_3^3b_6a_4^4b_5^4c_6b_7 + 1120a_3^3b_5^4a_4^4c_7^2d_6 - 336a_3^3a_4^2b_5^5c_7c_6b_3^2 + 4200a_3^3b_3a_4^2b_5^5b_7c_6^2 + 1120a_3^3a_4^3b_5^4c_7c_6^2b_3 + 5600a_3^3b_6b_3a_4^2b_5^5c_7c_6 -$

$1680a_3^3a_4^4b_5^5c_7b_7 + 2240a_3^2b_6^3a_4^4b_5^3c_6d_6 + 1400a_3^2b_6^3a_4^2b_5^5c_6b_3 - 2240a_3^2a_4^4b_5^4c_7b_6^2d_6 - 280a_3^2b_6^2a_4b_5^6b_3^3 + 504a_3^2a_4^4b_5^6b_7^2 -$

$7000a_3^3b_6^2b_5^4c_6^2a_4^2b_3 - 1344a_3^3b_6^2a_4^4b_5^4c_7 + 8400a_3^3b_6d_6a_4^2b_5^5b_7b_3 + 3360a_3^3a_4^4b_5^3c_7b_6c_6d_6 + 840a_3^3b_6a_4b_5^5c_6b_3^3 + 1792a_3^3a_4^2b_5^4b_6b_3^2c_6^2 -$

$5600a_3^4b_3a_4^2b_5^4c_7c_6^2 + 336a_3^4a_4^4b_5^3b_7c_6^2 + 1344a_3^3a_4^4b_5^3c_6b_6^3 + 2240a_3^3a_4^2b_5^4b_6^2b_3^2d_6 - 6720a_3^3b_6^2d_6a_4^4b_5^2c_6^2 + 1344a_3^4b_6c_6a_4^4b_5^3c_7 -$

$560a_3^4a_4b_5^4c_6^2b_3^3 - 784a_3^4a_4^2b_5^3b_3^2c_6^3 +$

$672a_3^4b_3^2a_4^2b_5^5b_7 - 1680a_3^4b_3a_4^3b_5^4c_6b_7 + 1456a_3^4b_3a_4^3b_5^2c_6^4 - 11200a_3^4b_6d_6b_3a_4^2b_5^4c_7 + 5600a_3^4b_6d_6c_6^3a_4^4b_5 - 5600a_3^4b_6b_5^5c_6b_3^3 +$

$11200a_3^4b_6b_3a_4^2b_5^3c_6^3 - 1120a_3^4b_6b_3b_5^4c_7a_4^3 + 2240a_3^5b_3a_4^3b_5^3c_7c_6 - 5600a_3^5b_3a_4^2b_5^2c_6^4 + 11200a_3^4b_6^2b_5^3a_4^2b_3c_6d_6 + 1344a_3^4b_6^2a_4^2b_5^4b_3^2 -$

$4032a_3^4b_6^2a_4^4b_5^2c_6^2 - 1344a_3^5a_4^2b_5^4c_7b_3^2 + 1120a_3^4b_6^2a_4^3b_5^3c_6b_3 - 1120a_3^4b_6d_6b_5^4a_4b_3^3 - 4480a_3^4a_4^2b_5^3b_6b_3^2d_6c_6 + 2240a_3^4a_4^3b_5^2b_6b_3d_6c_6^2 +$

$1344a_3^4c_7^2a_4^4b_5^4 + 1120a_3^5d_6b_5^3a_4c_6b_3^3 + 2240a_3^5d_6b_5^2a_4^2c_6^2b_3^2 - 2240a_3^5d_6c_6^3a_4^3b_5b_3 + 22400a_3^5d_6b_3a_4^2b_5^3c_7c_6 + 3360a_3^5d_6b_3a_4^3b_5^3b_7 +$

$5600a_3^5b_5^4c_6^2b_3^3 + 1400a_3^3b_6^2b_5^6b_3^3 - 112a_3^4c_6^5a_4^4b_5 - 4480a_3^7a_4^3b_3d_6c_6^2 + 22400a_3^6b_6c_6a_4^2b_5b_3d_6^2 + 4480a_3^6b_6c_6a_4^3b_5b_3d_6 -$

$22400a_3^6b_5^2c_7a_4^2b_3d_6^2 - 3360a_3^5b_6b_5^2c_6^2a_4^3b_3 + 4032a_3^5b_6c_6^3a_4^4b_5 + 16800a_3^5b_5^3b_7a_4^2b_3d_6^2 - 1120a_3^5d_6c_6^4a_4^4 - 33600a_3^5b_6d_6b_5^2a_4^2c_6^2b_3 +$

$1120a_3^5b_6b_5^4a_4b_3^3 - 2688a_3^5b_6a_4^2b_5^3c_6b_3^2 - 22400a_3^6d_6b_5^3c_6b_3^3 - 4480a_3^6d_6b_3c_7a_4^3b_5^2 + 22400a_3^6d_6b_3b_5c_6^3a_4^2 - 2240a_3^6b_5^3a_4c_6b_3^3 +$

$1344a_3^6b_5^2a_4^2c_6^2b_3^2 - 22400a_3^7d_6^2c_6^2a_4^2b_3 + 4480a_3^7d_6a_4b_5^2b_3^3 + 2240a_3^6c_6^3a_4^3b_5b_3 + 11200a_3^5b_6d_6b_5^4b_3^3 + 22400a_3^7d_6^2b_5^2b_3^3 -$

$1344a_3^6c_6^4a_4^4 - 126a_4^3b_5^8b_7^2b_3 + 224a_4^4b_5^5c_6b_6^4 + 42a_4^3b_5^9b_7b_8 - 126a_4^4b_5^8b_7c_8 + 140b_6a_4^4b_5^8c_9 + 168b_6^2a_4^4b_5^7c_8 - 476b_6^2a_4^3b_5^8b_8 +$

$2688a_3^6b_5^2d_7^2a_4^4 + 5376a_3^7c_6^2a_4^4e_7 + 5376a_3^7b_5^2c_4a_4^3e_7 - 5376a_3^6b_6c_6a_4^4b_5e_7 + 11200a_3^6d_6^2b_3a_4b_5^3b_{10} - 22400a_3^6d_6b_3a_4^2b_5^2d_7c_6 +$

$2240a_3^6d_6b_3a_4^2b_5^3b_{10} + 22400a_3^6d_6b_3a_4b_5^3c_6c_4 + 2688a_3^6b_3^2a_4^2b_5^3d7 + 560a_3^4a_4^4b_5^4c_6f_{16} + 672a_3^4a_4^3b_5^5e_7c_{14} - 672a_3^4a_4^3b_5^5b_7c_4 -$

$224a_3^4a_4^3b_5^4d5c_6^2+896a_3^4a_4^4b_5^3d7^2c_6+2688a_3^4a_4^4b_5^4d_7b_7-672a_3^4a_4^3b_5^5c7b_{10}+1120a_3^4d_6a_4^4b_5^4e_{15}-5600a_3^4a_4^3b_5^4b_8d_6^2+1344a_3^4b_6^2b_5^3d_7a_4^4+$

$560a_3^4a_4b_5^5b_3^2c6c4 + 672a_3^4a_4^2b_5^4b_3^2d_7c6 - 1120a_3^4b_6d_6a_4^3b_5^4d_5 + 105b_6a_4^3b_5^8b_7b_{10} - 896a_3^4a_4^4b_5^3c_6^2e_{14} - 1344a_3^4a_4^4b5^4d_8e_7 -$

$560a_3^4a_4^3b5^5c_6e_6 - 672a_3^4a_4^4b5^4d_7e_{14} - 336a_3^4a_4^3b5^3c_6^3c_4 + 224a_3^4a_4^4b5^2d_7c_6^3 + 672a_3^4a_4^3b5^5d_7d_5 + 2240a_3^6b3a_4^2b5^3c_6c_4 -$

$2240a_3^6b3a_4^3b5^2d_7c_6 + 5376a_3^6c_7a_4^4b5^2e_7 - 2688a_3^6b5^3c_4a_4^3d_7 - 2688a_3^6a_4^3b5^3e_7b10 - 1344a_3^6b5d_7a_4^4c_6^2 - 1344a_3^6a_4^3b5^2c_6^2c_4 -$

$4032a_3^5a_4^4b5^3b7e_7 - 4032a_3^5a_4^4b5^3d_7c_7 + 1344a_3^5a_4^4b5^3e_{14}e_7 + 2688a_3^5c_6^3a_4^4b5e_7 + 22400a_3^7d_6^2b3b5d_7a_4^2 - 22400a_3^7d_6^2b3b5^2c_4a_4 -$

$4480a_3^7d_6b3b5^2c_4a_4^2+4480a_3^7d_6b3b5d_7a_4^3-5376a_3^7b5^2a_4^2e_7b3^2-5376a_3^7b5d_7a_4^4e_7-2240a_3^5d_6b3a_4^3b5^3e_{14}-1120a_3^5d_6a_4b5^4b3^2c_4+$

$4480a_3^5d_6b3a_4^3b5^2d_7c_6 - 5600a_3^5d_6^2a_4^3b5^2b10c_6 - 11200a_3^5d_6b3a_4b5^4c_6b10 + 1344a_3^5b3a_4^2b_5^4c_4e_7 - 1120a3^5b_3a4^2b_5^4c_6b_{10} -$

$5600a3^5b_3a4b_5^4c_6^2c_4 - 1344a3^5b_3a4^3b_5^2c_6^2e_7 +$

$1344a3^5b_3a4^3b_5^3d_7e_7 + 5600a3^5b_3a4^2b_5^3c_6^2d_7 - 1344a3^5b_3^2a4^2b_5^3c_6e_7 - 4032a3^5a4^4b_5^2d_7c_6e_7 + 1344a3^5a4^3b_5^3c_6c_4e_7 +$

$5600a3^5d_6^2a4^3b_5^3c_{14} + 1120a3^5d_6a4^3b_5^4e_6 + 2240a3^5d_6b_5^2d_7^2a4^4 - 1120a3^5d_6a4^4b_5^3f_{16} -$

$11200a3^5b_6d_6b_3a4b_5^4c_4 + 1120a3^5b_6b_3b_5^3d_7a4^3 - 1120a3^5b_6b_3a4^2b_5^4c_4 + 2688a3^5b_6a4^3b_5^3c_6c_4 + 1120a3^5d_6a4^3b_5^3d_5c_6 -$

$1120a3^5d_6b_5d_7a4^4c_6^2 - 2240a3^5d_6b_5^3c_4a4^3d_7 - 2240a3^5d_6b_3a4^2b_5^3c_6c_4 + 1344a3^5a4^3b_5^4d_7b_{10} - 1344a3^5a4^3b_5^4d_5e_7 +$

$672a3^5a4^3b_5^3c_6^2b_{10} + 1344a3^5a4^3b_5^4c_7c_4 - 11200a3^5d_6^2a4^2b_5^4b_2 + 1120a3^5d_6a4^4b_5^2e_{14}c_6 + 11200a3^5b_6d_6b_3a4^2b_5^3d_7$

Prova: Não apresentamos aqui os cálculos para esta demonstração. A idéia é usar o Teorema 1.15 e a Observação 1.17, isto é, devemos mostrar que

$$j^k\left\{T\mathcal{A}_e\Pi + \mathbb{R}\left\{\dot{\Pi}_{\gamma_1}, \dot{\Pi}_{\beta_1}, \dot{\Pi}_{\gamma_2}, \dot{\Pi}_{\beta_2}\right\}\right\} = J^k(\mathcal{E}(3,2))$$

onde k é o grau de determinação de Π_{u_0}.

Nos casos 4_2 e 5 podemos usar os Teoremas 5.18 e 5.20 para demonstrar as afirmações desta proposição. Suponha $\Pi_u(x,y,z) = (x, \beta_2 y + \gamma_2 z + f(x - \beta_1 y - \gamma_1 z, y, z))$ tal que Π_{u_0} tem singularidade lábios/bicos na origem. Temos que o conjunto Σ_Π é sempre regular (isto segue de contas que não apresentamos aqui) e portanto como no Teorema 6.3, Π é sempre um desdobramento versal da singularidade lábios/bicos. Suponha agora que Π_{u_0} tem uma singularidade rabo de andorinha na origem. Mostramos que o conjunto $\Sigma_\Pi^{1,1}$ é sempre uma curva regular e portanto como no Teorema 6.3, pelo Teorema 5.20, Π é sempre um desdobramento versal da singularidade rabo de andorinha. ■

Referências Bibliográficas

[1] V.I. Arnold, Wavefront evolution and equivariant Morse lemma, *Commun. Pure and Appl. Math.*, 29 (1976), 557-582.

[2] , T. Banchoff, T. J. Gaffney and C. McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Pitman, New York, (1982).

[3] Th. Bröcker, L. Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes,* London Math. Soc. Lecture Note Series 17, (Cambridge University Press,1975).

[4] J. W. Bruce, Functions on discriminants, *J. London Math. Soc.* (2) 30 (1984), 551-567.

[5] J.W. Bruce, Generic geometry, transversality and projections, *J. London Math. Soc.* (2) 49 (1994), 183-194.

[6] J. W. Bruce, Generic functions on semialgebraic sets, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 37 (1986), 137-165.

[7] J. W. Bruce, Generic geometry and duality, in *Singularities, Lille 1991,* London Math. Soc. Lecture Note Series 201, Edited by J. P. Brasselet (Cambridge University Press, 1994) 29-60.

[8] J. W. Bruce, Projections and Reflections of generic surfaces in $\mathbb{R}^3$, *Math. Scand.* 54 (1984), 262-278.

[9] J.W. Bruce, The duals of generic hypersurfaces, *Math. Scand.* 49 (1981), 36-60.

[10] J.W. Bruce and M.C. Romero-Fuster, Duality and projections of curves and surfaces in 3-space, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 42 (1991), 433-441.

[11] J.W. Bruce, P.J. Giblin, *Curves and Singularities,* Cambridge University Press, 1984.

[12] J.W. Bruce, P.J. Giblin, F. Tari, Families of Surfaces: focal sets, ridges and umbilics, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 125 n° 2 (1999), 243-268.

[13] J.W. Bruce, P.J. Giblin, F. Tari, Families of Surfaces: height functions, Gauss Maps and duals, *Pitman Research Notes in Mathematical Series*, 333 (1995), 148-178.

[14] J.W. Bruce, P.J. Giblin, F. Tari, Families of Surfaces: height functions and projections to planes, *Math. Scand.,* 82 n° 2 (1998), 165-185.

[15] J. W. Bruce, N. Kirk, and A. A. du Plessis, Complete Transversals and the classifications of singularities, *Nonlinearity*, 10 n° 1 (1997), 253-275.

[16] J.W. Bruce and A.C. Nogueira, Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and duality, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 49 n° 196 (1998), 433-443.

[17] J. W. Bruce, A. A. du Plessis, C. T. C. Wall, Determinacy and unipotency, *Invent. Math.* 88 (1987), 521-554.

[18] J.W. Bruce and F. Tari, Families of surfaces in $\mathbb{R}^4$. Preprint, 1999.

[19] J. W. Bruce and T. V. Wilkinson, Folding maps and focal sets, *Proceedings of Warwick Symposium on Singularities*, Springer Lecture Notes In Math., vol. 1462 (1991), 63-72.

[20] J. W. Bruce, V. M. Zakalyukin, On the geometry of caustics, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) vol 80 (1997), 1-11.

[21] T. Gaffney and M.A.S. Ruas, Singularities of Orthogonal projections of surfaces in 3-space, preprint, (1977). (Notices of the *Am. Math. Soc.*, jan. 1978)

[22] T. Gaffney, The structure of $T\mathcal{A}(f)$, classification and an application to differential geometry, *Proccedings of Symposia in Pure Mathematics* (40) (American Mathematical Society, Providence, 1983), Part 1, 409-427.

[23] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, M. D. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas, Inflection points and topology of surfaces in 4-space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352 n° 7 (2000), 3029-3043.

[24] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Pitman Research Notes in Mathematics, (25) (1979).

[25] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable Mappings and their singularities*, Graduate Text in Mathematics, (14), Springer - Verlag, (New York, 1973), Heidelberg Berlin.

[26] W. Hawes, Multi-dimensional motions of the plane and space, Ph.D. Thesis, *University of Liverpool*, (1994).

[27] N. P. Kirk, Transversal, A maple package for singularity theory, Version 3.1, *University of Liverpool*, (1998).

[28] S. M. Lane, G. Birkhoff, *Álgebra, The Macmillan Company,* Collier-Macmillan Ltd, London, (1970), 386-87.

[29] J. A. Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces, *Ann. Math. Pura Appl.*, 83 (1969), 261-336.

[30] Yung-Chen Lu, *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory,* Springer-Verlag (1976).

[31] W. L. Marar, F. Tari, On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 119 (1996), 469-481.

[32] J. Martinet, *Singularities of Smooth Functions and Maps*, London Math. Soc. Lecture Note Series 58, (Cambridge University Press, 1982).

[33] J. N. Mather, Stability of $\mathbb{C}^\infty$ mappings, IV: Classification of stable germs by $\mathbb{R}$-algebras, *Publications Mathématiques*, 37 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris, 1970), 223-248.

[34] D.K.H. Mochida, Geometria genérica de subvariedades em codimensão maior que um em $\mathbb{R}^n$, *Tese de doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP*, (1993).

[35] D.K.H. Mochida, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas, The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint, *Geom. Dedicata* 54 n° 3 (1995), 323-332.

[36] D.K.H. Mochida, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas, Some global properties of surfaces in 4-space, *Proceedings of the 1st International Meeting on Geometry and Topology*, (Braga, 1997), 175-183 (eletronic), Cent. Mat. Univ. Minho, Braga, (1998).

[37] J. A. Montaldi, On contact between submanifolds, *Michigan Math. J.* 33 (1986), 195-199.

[38] J. A. Montaldi, On generic composite of maps, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 23 (1991), 81-85.

[39] A.C. Nogueira, Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e dualidade, *Tese de doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP*, (1998).

[40] V. H. J. Perez, Polar multiplicities of quasi- homogeneous map-germs $\mathbb{C}^3, 0 \to \mathbb{C}^3, 0$. Preprint, 1999.

[41] I. R. Porteous, *Geometric Differentiation*, Cambridge University Press, 1994.

[42] I. R. Porteous, The normal singularities of a submanifold, *Jour. Diff. Geom.*, 5 (1971), 543-564.

[43] I. R. Porteous, The normal singularities of surfaces in $\mathbb{R}^3$, *Proccedings of Symposia in Pure Mathematics*, Volume 40, Part 2, (American Mathematical Society, 1983, Providence), 379-394.

[44] I. R. Porteous, *Some remarks on duality in S^3,* Geometry and topology of caustics - Caustics '98, Banach center publications, volume 50, Institute of Mathematics, Polish academy of sciences, Warszawa (1999).

[45] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, *J. London Math. Soc.* (2) 36 n° 2 (1987), 351-369.

[46] J. H. Rieger, M. A. S. Ruas , Classification of $\mathcal{A}$-simple germs from k^n to k^2, *Compositio Math.* 79 n° 1 (1991), 99-108.

[47] J. E. Rycroft, A geometrical investigation into the projections of surfaces and space curves, *Ph.D. Thesis, University of Liverpool*, (1992).

[48] F. Tari, Some applications of singularity theory to the geometry of curves and surfaces, *Ph.D. Thesis, University of Liverpool*, (1990).

[49] F. Tari, Singularidades de aplicações diferenciáveis, *Notas didáticas do ICMC-USP, São Carlos*, 34 (1999).

[50] J.P. Thirin, New feature points based on geometric invariantes for 3D image registration, INRIA research report NO 1901, To appear in *Int. J. Computer Vision.*

[51] J. A. Thorpe, *Elementary topics in differential geometry*, Springer-Verlag New York - Heidelberg - Berlin, (1979).

[52] C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map germs, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 13 (1981), 481-539.

[53] T. Wilkinson, The Geometry of foldings maps, *Ph.D. Thesis, University of Newcastle Upon Tyne*, (1991).

[54] V. M. Zakalyukin, Metamorphoses of fronts depending on one parameter, *Functional Anal. Appl.* 10:2 (1976), 139-140.