Lista 6.1 Green, Gauss, Stokes no plano. Calc II

1. Calcule a área da região limitada pela curva $x = t - sent,\ y = 1 - cost,\ 0 \leq t \leq 2\pi$, e pelo eixo Ox. **Resp.** 3π.

2. Calcule (primeiro usando o teorema de Green e depois usando integração dupla) a área da região limitada pela elipse $x = acost,\ y = bsent,\ 0 \leq t \leq 2\pi$, onde $a > 0$ e $b > 0$. **Resp.** $ab\pi$

3. Usando o Teorema de Green, calcule a área da região limitada pela reta $y = x$ e pela curva $(x, y) = (t^3 + t, t^5 + t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Desenhe a região. **Resp.:** $\frac{5}{24}$.

4. Calcule $\oint_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\gamma$ e $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$, onde γ é uma curva fechada, simples, C^1 por partes, orientada em sentido antihorário, cujo traço é a fronteira de um conjunto para o qual vale o teorema de Green, $\overrightarrow{n}$ é a normal unitária externa e $\overrightarrow{F}(x, y) = (2x + y)\overrightarrow{i} + (3x - y)\overrightarrow{j}$.

5. Calcule $\oint < \overrightarrow{F}, d\gamma >$, e $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$, onde $\overrightarrow{F}(x, y) = 4x^3y^3\overrightarrow{i} + (3x^4y^2 + 5x)\overrightarrow{j}$ e γ a fronteira do quadrado de vértice $(-1, 0),\ (0, -1),\ (1, 0)$ e $(0, 1)$ e $\overrightarrow{n}$ é a normal unitária externa.

6. Verifique o teorema de Green para $\oint_\gamma [(2x^2 + y)dx + (3x^2 - y^2)dy]$, onde γ é a circunferência de centro na origem e raio 1.

7. Verifique o teorema de Green para $\oint_\gamma [(4x^3 + y^2)dx + (5x - y)dy]$, onde γ é a elipse dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

8. Verifique o teorema de Stokes para $\overrightarrow{F}(x, y) = (x^2 + 3y^2)\overrightarrow{i} + (5x - y^2)\overrightarrow{j}$, onde γ é a fronteira da região $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

9. Comprovar o Teorema de Green nos casos abaixo, isto é, verifique que

$$\oint_{\partial C} Pdx + Qdy = \iint_C \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y} \right)$$

   (a) $\oint_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ sendo C o domínio limitado entre $y = x^2$ e $y = x$.
   (b) $\vec{F} = xy\vec{i} - 2xy\vec{j}$, C é o retângulo $1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3$.
   (c) $\vec{F} = (\frac{2}{3} - x^2y)\vec{i} + x^2y^2\vec{j}$, C é o triângulo de vértices (0,0),(1,0),(1,1).

10. Usando o Teorema de Green, calcular:
   (a) $\oint_\gamma e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$ sobre o retângulo de vértices: $(0,0), (1,0), (1, \pi/2)$ e $(0, \pi/2)$
   (b) $\oint_\gamma 2x^2y^3dx + 3xydy$ em que γ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

11. Usando integral de linha, calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x + 2$ e $y = x^2$.

12. Usando integral de linha, calcule a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas curvas $4y = x$, $y = 4x$ e $xy = 4$.

13. Calcule $\oint_C \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ e $\oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, em que C é o arco de parábola $y = x^2 - 1,\ -1 \leq x \leq 2$, seguido pelo segmento de (2,3) a (-1,0). (Aplicar o Teorema de Stokes no plano a uma região que não contenha a origem!!!).

14. Calcule $\int_C \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$ e $\int_C \frac{(y, -x)}{x^2 + y^2} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$ (onde $\overrightarrow{n}$ é a normal unitária externa) para a curva do exercício anterior. (Aplicar o Teorema da divergência no plano a uma região que não contenha a origem!!!).

15. Seja $\overrightarrow{F}(x, y) = x^3y^3\overrightarrow{i} + \left(3y - \frac{3}{4}x^2y^4\right)\overrightarrow{j}$ e seja $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\ t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$, onde $\overrightarrow{n}$ é a normal com componente $y \geq 0$. **Dica:** Escolha um conjunto conveniente e aplique o Teorema da Divergência no Plano. **Resp.:** $\frac{3\pi}{4}$.