Cálculo II

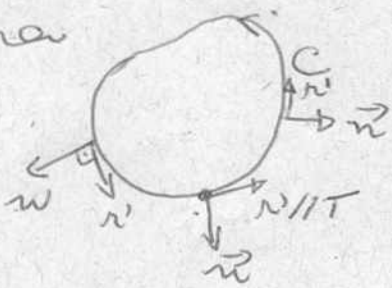
Integrais de linha e Teoremas de Green, Stokes e Gauss no plano.

- $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

Curva C é fechada nestes teoremas

- $C: r(t) = (x(t), y(t))$
  - $r'(t) = (x', y')$ vetor tangente à curva
  - $T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ vetor tg unitário

- $n(t) = \dfrac{(y', -x')}{\|r'(t)\|}$ vetor normal unitário para fora



- $dr = \|r'(t)\| dt$

- diferencial de comprimento de arco:

$$ds = \|r'(t)\| dt \quad \text{(conforme Cálculo I)}$$

$$\text{div } F = P_x + Q_y$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, F = (0, 0, Q_x - P_y)$$

$$\vec{K} = (0, 0, 1)$$

Explique as igualdades:

(1) $\oint_C F\, dr = \int_C P\,dx + Q\,dy$

(2) $\oint_C F\, dr = \oint \dfrac{F.r'(t)}{\|r'(t)\|} \cdot ds = \oint_C F.T\, ds$

(3) $\oint_C F.n\, ds = \oint_C P\,dy - Q\,dx$

(4) Por que tangente é $r'(t) = (x', y')$ implica normal $(y', -x')$?

(5) Porque o versor de $(y', -x')$ é

$$\frac{(y', -x')}{||r'(t)||} \; ?$$

(6) Por que as integrais do lado direito de Green e Stokes também são iguais?

$$\iint_D Q_x - P_y \, dA = \iint_D \vec{\text{rot}F} \cdot \vec{K} \, dA$$

(7) Como $\oint_C F n \, ds = \oint_C P dy - Q dx$ (por (3))

use Teo. Green para $F_1 = (-Q, P)$ e chegue na integral dupla do T. Gauss.

(8) Use a curva C: $r(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}\, t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$. Desenhe-a.

Para $t = \pi/2$ e $t = \pi$:

Calcule $r'(t)$ e $n(t)$ e represente-os no seu desenho. $n(t)$ aponta para fora da região ~~dentro dele D~~ delimitada por C? Desenhe também os vetores $(-y', x')$ para $t = \pi/2$ e $t = \pi$. O que eles representam?