Em $\mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ | Cálculo II

Para os teoremas de Stokes, e de Gauss (ou divergência) em $\mathbb{R}^3$, a novidade é o cálculo de $d\mathbf{S}$ e dS.

$\boxed{d\mathbf{S} = \vec{n}\, dS}$ onde $\vec{n}$ = versor normal da superfície S

e $dS = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\, dA$ onde a superfície S é dada por $z = g(x, y)$.

1) Qual a integral que calcula a área da superfície?

2) Mostre que $\iint_S F\, d\mathbf{S} = \iint_D (-P g_x - Q g_y + R)\, dA$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$, D é a projeção da superfície S.

3) no teorema de Gauss aparece $\iint_S F\, d\mathbf{S}$ e no teorema de Stokes aparece $\iint_S \operatorname{rot} F\, d\mathbf{S}$

Qual a diferença entre elas (para montá-las)?

4) a) Desenhe uma superfície e curva usadas para teorema de Stokes.

b) Desenhe uma superfície e sólido usados para teorema de Gauss. Desenhe os vetores normais para que a superfície seja orientada positivamente. Destaque no desenho a superfície e o sólido.

4.1) Por que o Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^2$ é consequência do teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$? (Compare $d\mathbf{S}$ com $\vec{k}\, dA$ quando $S \subset \mathbb{R}^2$ isto é S é dada por $z=0$)

5) Se for mais conveniente projetar a superf. S sobre o plano yz ou xz !!

Por exemplo S dada por $y = h(x,z)$

D região de projeção de S no plano xz

então

$$\iint_S f(x,y,z)\boxed{dS} = \iint_D f(x, h(x,z), z)\boxed{\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}\, dA}$$

(iguais)

e para $f(x,y,z) = 1$:

$$\iint_S \boxed{dS} = \iint_D \boxed{\sqrt{(h_x)^2 + (h_y)^2 + 1}\, dA}$$

Como ficam as integrais acima se escolhermos projetar a superf S sobre o plano yz ?

6) Quem são os vetores normais (versores) para as superfícies dadas por:

a) $z = f(x,y)$

b) $y = h(x,z)$

c) $x = g(y,z)$

?

7) Ache a área da superfície $y = x^2 + z^2$ com $x^2 + z^2 \le 4$.

8) Por que $\iint_S dS = \iint_D dA$ se S for superfície plana, ou seja superfície contida em $\mathbb{R}^2$?