



# Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta

Programação dinâmica II



# Programação dinâmica

- Ao contrário do que ocorre em programação linear, não há uma *regra* para se trabalhar com programação dinâmica.
- Cada caso é um caso...  
(*e vice-versa*)



- Três características básicas:

1. O problema pode ser dividido em *etapas*.

Ex.: No problema de dimensionamento de lotes, cada início de período é uma etapa.



- Três características básicas:

2. Em cada etapa, é possível definir o *estado* da solução.

Ex.: no PDL, quantidade de peças em estoque.



- Três características básicas:

3. A cada etapa, toma-se uma *decisão* que influencia o estado da etapa seguinte.

Ex.: no PDL, quanto se produzir.

- 
- Para se saber a que estado leva uma decisão, é preciso definir uma função, chamada de *função de transição*.

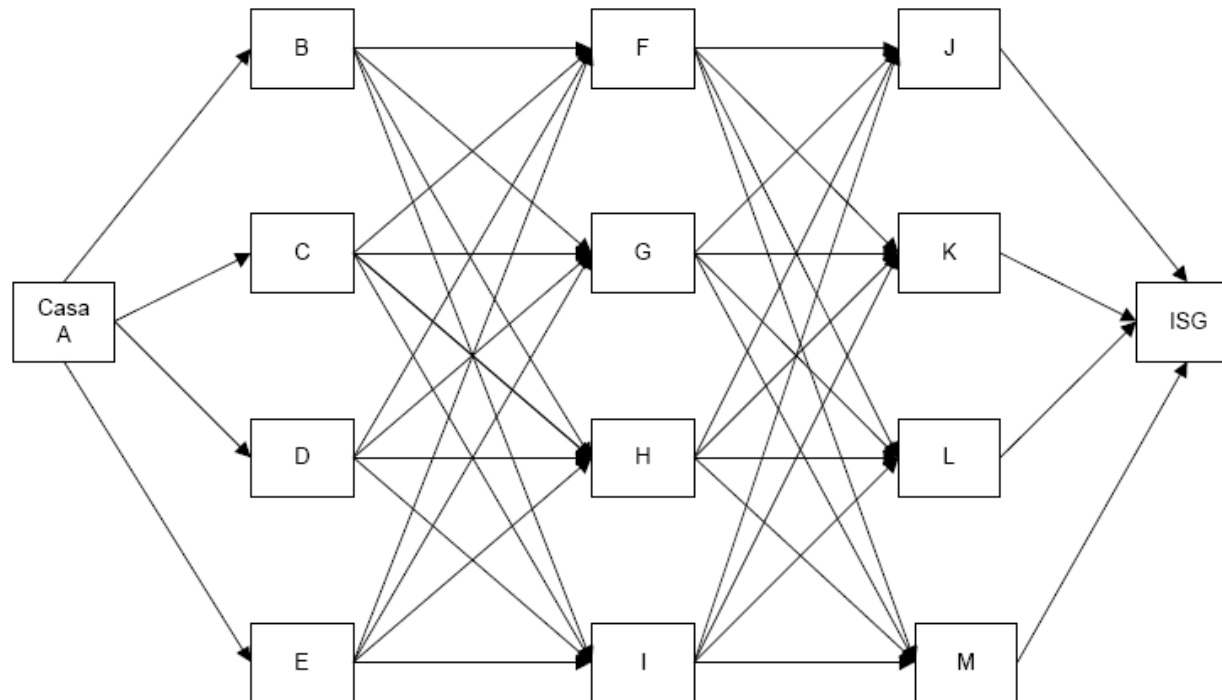
## Princípio da otimalidade (Bellman, 1959)



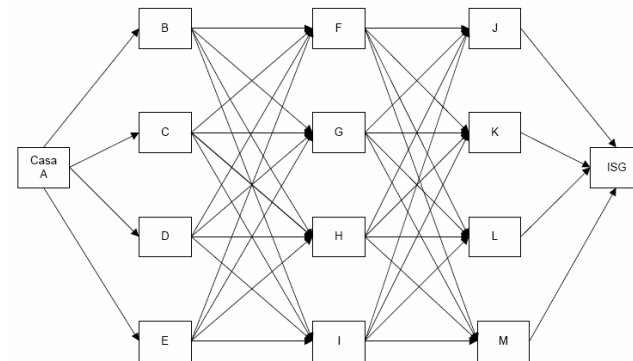
“Para um dado estado do sistema, a política ótima para os estados remanescentes é **independente da política de decisão adotada em estados anteriores**”

# Exemplo

Admita-se um aluno que pretende minimizar o custo de transporte entre a sua residência e o ISG utilizando os vários meios de transporte disponíveis na rede seguinte:



# Distâncias

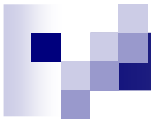


	B	C	D	E
Casa (A)	20	25	15	30

	F	G	H	I
B	90	85	70	75
C	75	70	85	80
D	85	75	80	90
E	95	90	105	95

	J	K	L	M
F	55	60	70	65
G	70	75	65	80
H	75	55	70	65
I	65	70	75	60

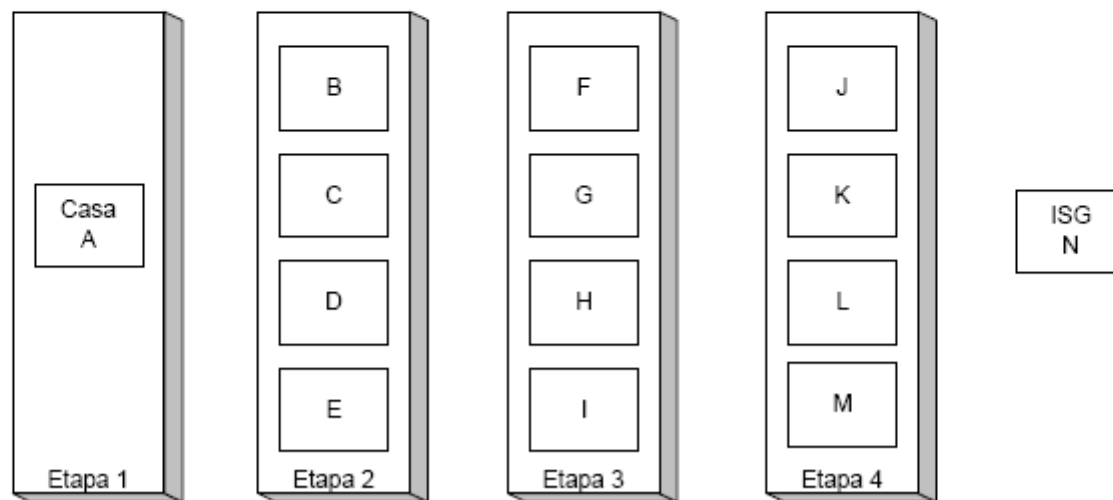
	ISG (N)
J	30
K	30
L	30
M	30




Da análise da rede e matrizes de custos conclui-se que:

A rede não apresenta sub circuitos e o aluno sempre que atinge um dado vértice da rede(estado) tem que decidir qual o vértice seguinte do seu itinerário.

Sendo a casa do aluno o ponto inicial do itinerário as ETAPAS DE DECISÃO agrupam os vértices extremos de caminhos elementares com o mesmo comprimento relativamente ao ponto inicial pelo que o problema tem quatro Etapas (n=4) como mostra a figura seguinte:





Em cada uma das Etapas existe uma Variável de Estado ( $s_n$ ):

- Etapa 1:  $\{s_1 = \text{Casa do aluno}\}$
- Etapa 2 :  $\{s_2 = \text{B ou C ou D ou E}\}$
- Etapa 3 :  $\{s_3 = \text{F ou G ou H ou I}\}$
- Etapa 4 :  $\{s_4 = \text{J ou K ou L ou M}\}$

Em cada uma das Etapas existe uma Variável de Decisão ( $x_n$ ):

- Etapa 1 :  $\{x_1 = \text{B ou C ou D ou E}\}$

Quando o aluno está em casa (etapa 1) tem que decidir se segue para B, C, D ou E que são os estados possíveis da etapa seguinte (etapa 2).

- Etapa 2 :  $\{x_2 = \text{F ou G ou H ou I}\}$

Estando na etapa 2 o aluno poderá estar em B ou C ou D ou E (estados da etapa 2) onde deverá decidir se segue para F ou G ou H ou I que são os estados possíveis da etapa seguinte (etapa 3).

- Etapa 3 :  $\{x_3 = \text{J ou K ou L ou M}\}$

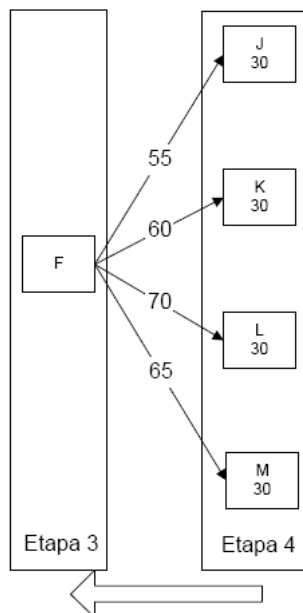
Estando na etapa 3 o aluno poderá estar em F ou G ou H ou I (estados da etapa 3) onde deverá decidir se segue para F ou G ou H ou I que são os estados possíveis da etapa seguinte (etapa 4).

- Etapa 4 :  $\{x_4 = \text{ISG}\}$

Estando na etapa 4 o aluno poderá estar em J ou K ou L ou M (estados da etapa 4) onde só poderá decidir que segue para o ISG (objectivo final).

Estabelecidas as “n” Etapas, os “s<sub>n</sub>” Estados de cada etapa, e as “x<sub>n</sub>” Variáveis de Decisão é necessário fixar a relação entre estados → **Função de Transição**  $f_n^*(s)$ .

Fazendo o estudo no sentido inverso (**última etapa → primeira etapa**), esta função serve para estabelecer uma relação recursiva que identifica a política ótima na etapa “n” conhecida que seja a política ótima na etapa “n+1”. Sendo “c<sub>sx<sub>n</sub></sub>” o custo do transporte associado à decisão x<sub>n</sub>, quando o aluno se encontra no estado “s<sub>n</sub>” (vértice da rede da etapa “n”), tem-se para o encaminhamento  $f_n^*(s) = \text{Min} \{ c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n) \}$ .



Seja a etapa n=3 e nesta o estado s<sub>3</sub> = F.

Na etapa “n+1= 4” a decisão ótima para qualquer dos estados s<sub>4</sub> = J ou K ou L ou M tem o valor  $f_4^*(x_4 = ISG) = 30\$$ .

A ligação de F a cada destes estados da etapa 4 tem os seguintes custos:

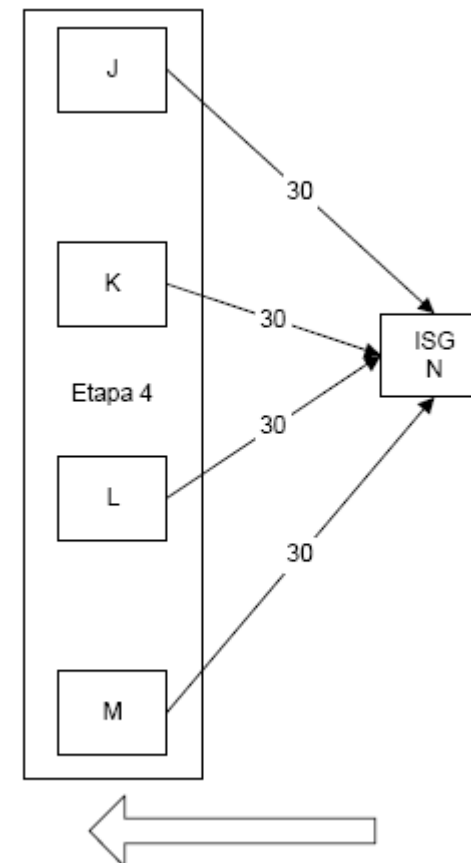
- para J: 55\$ (implica x<sub>3</sub> = J)
- para K: 60\$ (implica x<sub>3</sub> = K)
- para L: 70\$ (implica x<sub>3</sub> = L)
- para M: 65\$ (implica x<sub>3</sub> = M)

# Procedimento “de trás pra frente”

- $x_5$  (o último estado) é o destino final.  $f^*(x_5) = 0$ ;
- Para  $x_4$ :

$s \backslash x_4$	$f_4(s, x_4) = c_{sx_4}$		$f_4^*(s)$	$x_4^*$
	ISG			
J	30		30	ISG
K	30		30	ISG
L	30		30	ISG
M	30		30	ISG

$$f_n^*(s) = \text{Min} \{ c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n) \}$$



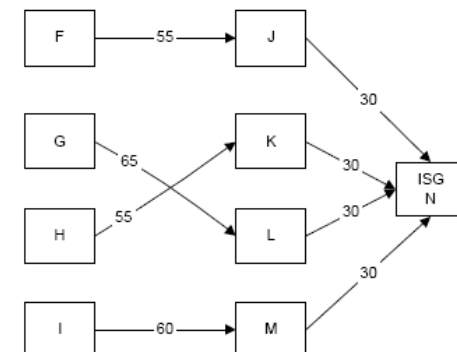
# Procedimento “de trás pra frente”

- Para  $x_3$  (nesse caso há de se considerar que cada estado  $x_3$  pode levar a vários estados  $x_4$ ):

$$f_n^*(s) = \text{Min} \{ c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n) \}$$

s \ x <sub>3</sub>	$f_3(s, x_3) = c_{sx_3} + f_4^*(x_3)$				$f_3^*(s)$	$x_3^*$
	J	K	L	M		
F	55+30=85*	60+30=90	70+30=100	65+30=95	85	J
G	70+30=100	75+30=105	65+30=95*	80+30=110	95	L
H	75+30=105	55+30=85*	70+30=100	65+30=95	85	K
I	65+30=95	70+30=100	75+30=105	60+30=90*	90	M

Nota:  $f_4^*(x_3) = f_4^*(s_4)$  com  $s_4 = \{J, K, L, M\}$  que são os estados da etapa 4



# Procedimento “de trás pra frente”

- Analogamente para  $x_2$ :

$$f_n^*(s) = \text{Min} \{ c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n) \}$$

$s \backslash x_2$	$f_2(s, x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$				$f_2^*(s)$	$x_2^*$
	F	G	H	I		
B	90+85=175	85+95=180	70+85=155*	75+90=165	155	H
C	75+85=160*	70+95=165	85+85=170	80+90=170	160	F
D	85+85=170	75+95=170	80+85=165*	90+90=180	165	H
E	95+85=180*	90+95=185	105+85=190	95+90=185	180	F

Nota:  $f_3^*(x_2) = f_3^*(s)$  com  $s = \{F, G, H, I\}$  que são os estados da etapa 3

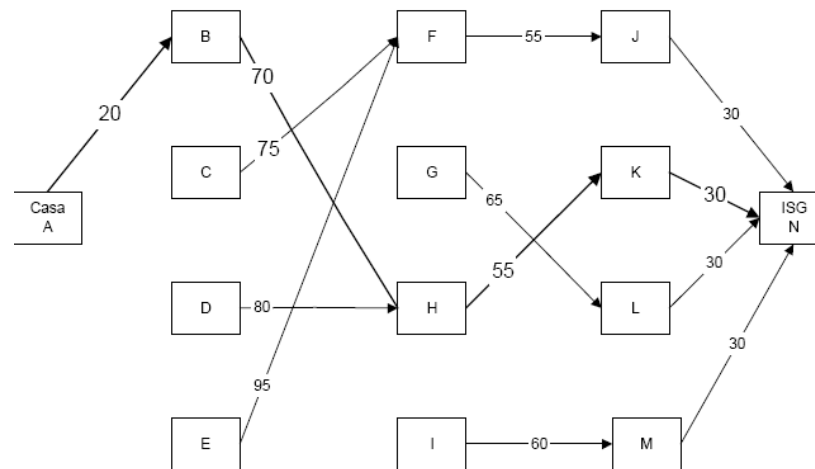
# Procedimento “de trás pra frente”

- Analogamente para  $x_1$ :

$$f_n^*(s) = \text{Min} \{ c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n) \}$$

$s \backslash x_1$	$f_1(s, x_1) = c_{sx_1} + f_2^*(x_1)$				$f_1^*(s)$	$x_1^*$
	B	C	D	E		
Casa	20+155=175*	25+160=185	15+165=180	30+180=210	175	B

Nota:  $f_2^*(x_1) = f_2^*(s)$  com  $s = \{B, C, D, E\}$  que são os estados da etapa 2



## Exemplo nº 2 – Um problema de afectação múltipla (PD determinística e discreta)

Um aluno está prestes a iniciar a sua época de exames em três cadeiras sendo de 3 dias o tempo disponível para preparação. Adicionalmente o aluno durante um dia só estuda para um dos exames, por uma questão de método, e quer estar presente em todos eles.

A previsão do aluno para a classificação em cada uma das cadeiras, em função do tempo (dias) de preparação para cada uma delas, é a seguinte:

Dias \ Cadeiras	A	B	C
0	8	9	10
1	10	11	12
2	14	15	16
3	15	16	17

O aluno pretende saber qual o plano de estudo (dias de estudo/cadeira) que maximizará a média das classificações dos exames.

O problema pode resolver-se por recurso ao modelo de PL a seguir apresentado.

Considerando para variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o aluno estuda } i \text{ dias para a cadeira } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (i = 0,1,2,3 ; j = A,B,C)$$

tem-se:

$$\text{Max } \frac{1}{3} (8 x_{0A} + 10 x_{1A} + 14 x_{2A} + 15 x_{3A} + 9 x_{0B} + 11 x_{1B} + 15 x_{2B} + 16 x_{3B} + 10 x_{0C} + 12 x_{1C} + 16 x_{2C} + 17 x_{3C})$$

s.a

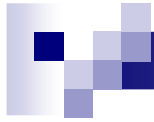
$$x_{0A} + x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 1$$

$$x_{0B} + x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 1$$

$$x_{0C} + x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 1$$

$$1 x_{1A} + 2 x_{2A} + 3 x_{3A} + 1 x_{1B} + 2 x_{2B} + 3 x_{3B} + 1 x_{1C} + 2 x_{2C} + 3 x_{3C} \leq 3$$

$$x_{ij} \in \{ 0, 1 \}, i = 0, 1, 2, 3, ; j = A, B, C$$



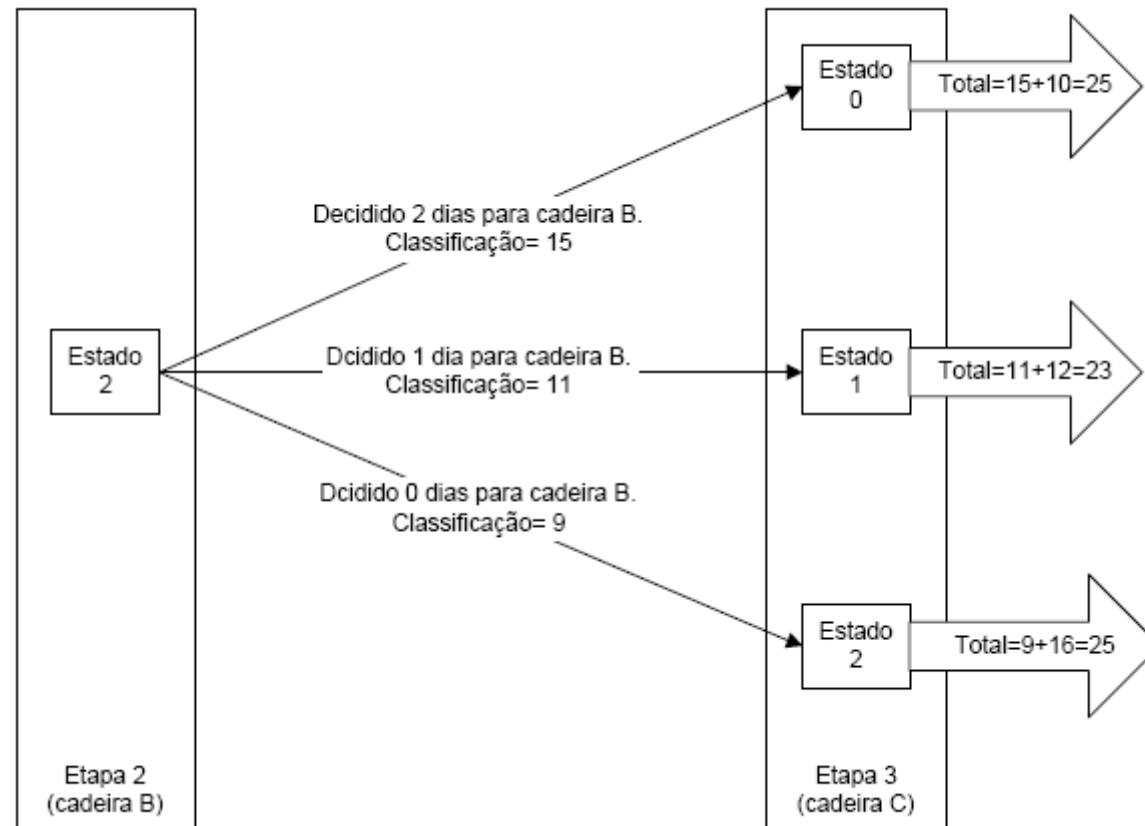
O processo de decisão consiste em escolher o número de dias de estudo para cada um dos três exames pelo que são identificáveis três momentos distintos (3 etapas) em que se decide o número de dias de estudo para as cadeiras A (etapa 1), B (etapa 2) e C (etapa 3) respectivamente.

*etapa*: momento de decidir em relação a uma dada matéria.

*decisão*: quantos dias estudar para essa matéria.

*estado*: quantos dias ainda tenho para estudar.

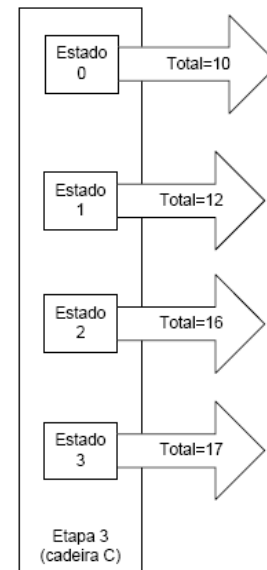
- Ex.            estar no estado 2 (ainda há 2 dias para estudar) na etapa 2 (cadeira B).



# Procedimento “de trás pra frente”

- Começar da decisão sobre o número de dias dedicados para a matéria C.
- Obviamente, todos os dias restantes vão ser dedicados a essa matéria.

$s_3$ \ $x_3$		
	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
0	10	0
1	12	1
2	16	2
3	17	3



■ Decisão sobre B.

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = c_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2)$				$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
	0	1	2	3		
0	9+10=19*				19	0
1	9+12=21*	11+10=21*			21	0 ou 1
2	9+16=25*	11+12=23	15+10=25*		25	0 ou 2
3	9+17=26	11+16=27*	15+12=27*	16+10=26	27	1 ou 2

- Decisão sobre A

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1) = c_1(x_1) + f_2^*(s_1 - x_1)$				$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
	0	1	2	3		
3	$8+27=35^*$	$10+25=35^*$	$14+21=35^*$	$15+19=34$	35	0, 1 ou 2



- Política ótima:

Solução	Cadeira A (dias)	Cadeira B (dias)	Cadeira C (dias)	Classificação acumulada
I	0	1	2	$8+11+16 = 35$
II	0	2	1	$8+15+12 = 35$
III	1	0	2	$10+9+16 = 35$
IV	1	2	0	$10+15+10 = 35$
V	2	0	1	$14+9+12 = 35$
VI	2	1	0	$14+11+10 = 35$