

# Notas de Aula Sintetizadas de SMA354 - CÁLCULO II (4 créditos)

Wagner Vieira Leite Nunes  
Departamento de Matemática  
ICMC - USP

1.o semestre de 2020



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Integrais definidas</b>	<b>9</b>
2.1	Somatórios	9
2.1.1	Propriedades do somatório	10
2.2	Área	10
2.3	Soma de Riemann	19
2.4	Propriedades da integral definida	27
2.5	O teorema fundamental do Cálculo	36
2.6	Integração por partes	46
2.7	Integração por substituição para integrais definidas	49
<b>3</b>	<b>Integrais indefinidas</b>	<b>59</b>
3.1	Primitiva	59
3.2	Propriedades da primitiva	61
3.3	Integrais indefinidas	63
3.4	Propriedades da integral indefinida	64
3.5	Técnicas de integração	71
3.5.1	Substituição direta para a integral indefinida	71
3.5.2	Integração por partes para integral indefinida	76
<b>4</b>	<b>Aplicações de integrais definidas</b>	<b>87</b>
4.1	Logaritmo	87
4.2	Área	94
4.3	Método das fatias	106
4.4	Sólidos de revolução	113
4.5	Método dos cilindros	132
<b>5</b>	<b>Integrais impróprias de 1.a espécie</b>	<b>143</b>
5.1	Conceitos básicos	143
5.2	Propriedades da integral imprópria de 1.a espécie	153
<b>6</b>	<b>Funções a valores reais, de várias variáveis</b>	<b>167</b>
6.1	Definições e exemplos	167
6.2	Curvas de nível	179
6.3	Superfícies de nível	188

<b>7</b>	<b>Limite e continuidade</b>	<b>191</b>
7.1	Limite . . . . .	191
7.2	Continuidade . . . . .	215
<b>8</b>	<b>Derivadas parciais</b>	<b>223</b>
8.1	Definição de derivadas parciais . . . . .	223
8.2	Derivadas parciais de ordem superior . . . . .	239
<b>9</b>	<b>Regra da cadeia e vetor gradiente</b>	<b>253</b>
9.1	Regra da cadeia . . . . .	253
9.2	Vetor gradiente . . . . .	264
9.3	Derivada direcional . . . . .	276
<b>10</b>	<b>Plano tangente e reta normal</b>	<b>291</b>
10.1	Superfície parametrizada . . . . .	291
10.2	Plano tangente . . . . .	297
<b>11</b>	<b>Máximos e mínimos</b>	<b>311</b>
11.1	Definições . . . . .	311
11.2	Teste do hessiano . . . . .	321
11.3	Aplicando o teste do hessiano . . . . .	334
11.4	Encontrando máximo (ou mínimo) global . . . . .	337
11.5	Extremos globais em compactos . . . . .	344
<b>12</b>	<b>Multiplicadores de Lagrange</b>	<b>357</b>
12.1	Problema com um vínculo . . . . .	357
12.1.1	Introdução . . . . .	357
12.1.2	Teorema do multiplicador de Lagrange, para um vínculo . . . . .	357
12.1.3	Aplicações . . . . .	367
<b>13</b>	<b>Multiplicadores de Lagrange para dois vínculos</b>	<b>383</b>
13.1	Problema para dois vínculos . . . . .	383
13.1.1	Teorema dos multiplicadores de Lagrange, para dois vínculos . . . . .	383
13.1.2	Aplicações . . . . .	387
<b>A</b>	<b>Outras técnicas de integração</b>	<b>393</b>
A.1	Outras técnicas . . . . .	393
A.1.1	Integrais indefinidas envolvendo expressões dos tipos: $a^2 - x^2$ , $a^2 + x^2$ ou $x^2 - a^2$ , para $a \neq 0$ fixado. . . . .	393
A.1.2	Integrais indefinidas do tipo: $\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$ . . . . .	406
A.1.3	Integrais indefinidas do tipo: $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$ . . . . .	411
A.1.4	Integrais indefinidas envolvendo potências de funções trigonométricas . . . . .	413
A.1.4.1	Integrais indefinidas envolvendo potências da função seno e cosseno . . . . .	413
A.1.4.2	Integrais indefinidas envolvendo potências da função tangente e cotangente . . . . .	417
A.1.4.3	Integrais indefinidas envolvendo potências da função secante e cossecante . . . . .	421

A.1.5	Integrais indefinidas do tipo: $\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx$ , com $p^2 - 4q < 0$ e $k \in \{2, 3, \dots\}$ . . . . .	425
A.1.6	Integrais indefinidas do tipo: $\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k} dx$ , com $p^2 - 4q < 0$ , $k \in \{2, 3, \dots\}$ . . . . .	430
A.2	Integrais de funções racionais . . . . .	432
A.2.1	Caso que $\text{grau}(p) < \text{grau}(q)$ . . . . .	435
<b>B</b>	<b>Outras aplicações de integral definida</b> . . . . .	<b>453</b>
B.1	Comprimento de curvas . . . . .	453
B.2	Área de superfícies . . . . .	458
<b>C</b>	<b>Diferenciais</b> . . . . .	<b>467</b>
C.1	Definições e aplicações de diferenciais de uma função . . . . .	467
<b>D</b>	<b>Funções hiperbólicas</b> . . . . .	<b>475</b>
D.1	Definições e propriedades . . . . .	475
<b>E</b>	<b>Integrais impróprias de 2.a espécie</b> . . . . .	<b>483</b>
E.1	Integrais impróprias de 2.a espécie . . . . .	483
<b>F</b>	<b>O espaço <math>\mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	<b>503</b>
F.1	Os espaços euclidianos . . . . .	504
F.2	Produto interno . . . . .	506
F.3	Norma . . . . .	508
F.4	Conjuntos abertos, fechados e compactos . . . . .	514
<b>G</b>	<b>Funções vetoriais e curvas parametrizadas</b> . . . . .	<b>525</b>
G.1	Introdução . . . . .	525
G.2	Funções vetoriais . . . . .	525
G.3	Curvas parametrizadas . . . . .	539
<b>H</b>	<b>Diferenciabilidade de funções de várias variáveis</b> . . . . .	<b>563</b>
H.1	Motivação . . . . .	563
H.2	Definição de diferenciabilidade . . . . .	565
H.3	CrITÉrio de diferenciabilidade . . . . .	571
<b>I</b>	<b>Polinômio de Taylor</b> . . . . .	<b>587</b>
I.1	Fórmula e polinômio de Taylor do Cálculo I . . . . .	587
I.2	Fórmula e polinômio de Taylor para funções de duas variáveis . . . . .	589
<b>J</b>	<b>Transformações</b> . . . . .	<b>601</b>
J.1	Definições e propriedades . . . . .	601
J.2	Exemplos importantes . . . . .	612
<b>K</b>	<b>Máximos e mínimos locais utilizando autovalores</b> . . . . .	<b>635</b>
K.1	Caso geral: autovalores da matriz hessiana . . . . .	635
K.2	Sinais dos autovalores de uma matriz simétrica . . . . .	660



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.a AULA

Estas notas tem com o objetivo ajudar os alunos a fixarem melhor o conteúdo desenvolvido na disciplina de Cálculo II.

Ao longo do curso serão introduzidos vários conceitos importantes que serão úteis em outras disciplinas do curso de graduação (por exemplo: Física I, Física II entre outras).

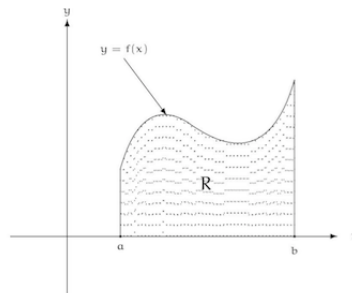




## Capítulo 2

# Integrais definidas de funções a valores reais, de uma variável real

Neste capítulo começaremos a tratar do segundo problema que aparece no início destas notas, a saber, o problema de encontrar área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , de uma região limitada, que chamaremos de  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , que é delimitada pelas representações geométricas do gráfico de uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo).



### 2.1 Somatórios

**Observação 2.1.1** Quando precisarmos escrever uma soma de muitas parcelas de um modo condensado usaremos o símbolo  $\sum$ .

**Exemplo 2.1.1**

1. 
$$\sum_{i=1}^4 i = 1 + 2 + 3 + 4.$$

2. Dados  $n \in \mathbb{N}$  e uma função  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ , teremos

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + \dots + F(n).$$

3. Dados  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_1, x_2, \dots, x_n, \Delta x \in \mathbb{R}$  então

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_n) \Delta x.$$

### 2.1.1 Propriedades do somatório

Temos as seguintes propriedades do somatório:

**Proposição 2.1.1** *Seja  $n \in \mathbb{N}$  fixado.*

1. *Se  $c \in \mathbb{R}$ , então*

$$\sum_{i=1}^n c = n c. \quad (2.1)$$

2. *Se  $c \in \mathbb{R}$  e  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função, então*

$$\sum_{i=1}^n [c F(i)] = c \sum_{i=1}^n F(i). \quad (2.2)$$

3. *Se  $F, G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções, então*

$$\sum_{i=1}^n [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^n F(i) + \sum_{i=1}^n G(i). \quad (2.3)$$

4. *Se  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função, então*

$$\sum_{i=1}^n [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0). \quad (2.4)$$

#### Demonstração:

As demonstrações serão deixadas com o exercício para o leitor.

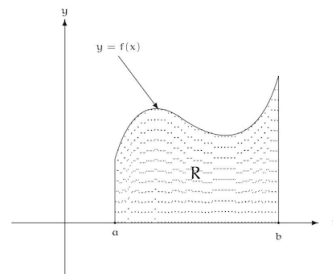
□

## 2.2 Área de uma região plana associada ao gráfico de uma função

Consideremos  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e não negativa definida em  $[a, b]$ , isto é,

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (2.5)$$

Nosso objetivo é encontrar (se existir) a área, que iniciaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo).

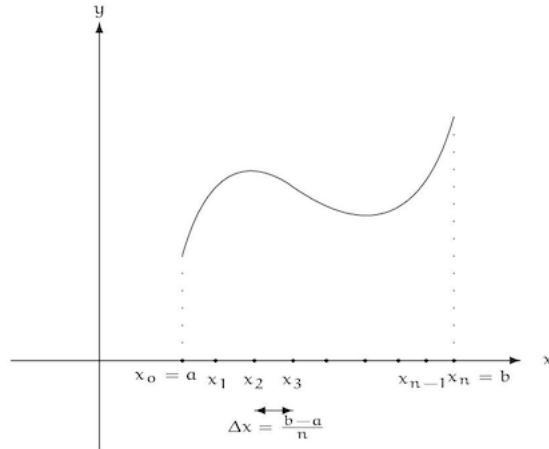


Para isto, dividiremos o intervalo  $[a, b]$  em  $\underline{n}$  partes iguais, obtendo desta forma os pontos

$$x_i, \quad \text{para } i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

de tal modo que (veja a figura abaixo):

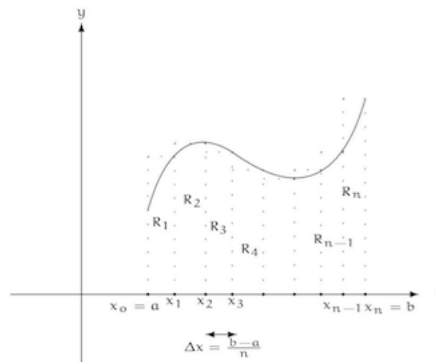
$$\begin{aligned}
 x_0 &\doteq a, \\
 x_i &\doteq x_0 + i\Delta x \\
 &= a + i\Delta x, \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\
 \text{onde } \Delta x &\doteq \frac{b-a}{n}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$



Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos a soma:

$$\begin{aligned}
 S_n &\doteq \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
 &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{A}_i$  denota a área do retângulo, denotado por  $\underline{R}_i$ , que tem o como base o intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  e altura dada por  $f(x_i)$  (veja a figura abaixo).



Observemos que, em geral, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos que o número real  $\underline{S}_n$  não será igual área  $\underline{A}$  da região plana  $\underline{R}$ .

Porém, aumentando-se o valor de  $\underline{n}$ , isto é, o número de divisões do intervalo  $[a, b]$ , teremos que o valor do número real  $\underline{S}_n$  ficará cada vez mais próximo do valor da área  $\underline{A}$ , isto é:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \end{aligned} \quad (2.8)$$

se o limite acima existir (isto é, for um número real).

Aplicamos este processo ao:

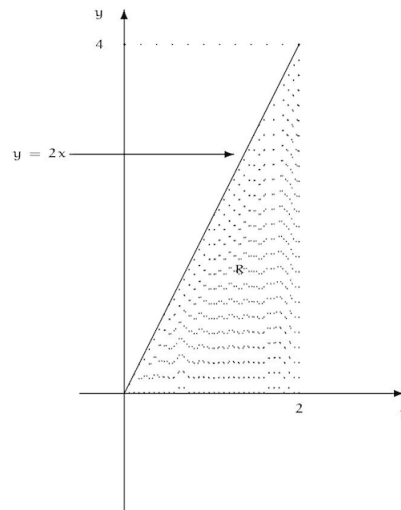
**Exemplo 2.2.1** Consideremos a função  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq 2x, \quad \text{para } x \in [0, 2]. \quad (2.9)$$

Calcular a área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = 0$ ,  $x = 2$  e do eixo  $Ox$ .

### Resolução:

A figura abaixo descreve a região plana  $\underline{R}$ , para os quais queremos encontrar a área.



#### 1.o modo:

Observemos que a região é um triângulo retângulo que tem como base o intervalo  $[0, 2]$  e altura

$$f(2) = 4.$$

Assim sua área será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \\ &= \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ u.a.}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde u.a. denota unidades de área.

#### 2.o modo:

Podemos reobter o resultado acima utilizando-se o processo desenvolvido anteriormente (isto é, via (2.8)), ou seja, dividindo-se o intervalo  $[0, 2]$ , em  $n$  intervalos iguais teremos, (neste caso temos  $a \doteq 0$  e  $b \doteq 2$ ) para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &\doteq f(x_i) \Delta x \\ &\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \doteq \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \\ x_i \doteq a + i \Delta x = i \frac{2}{n} \end{array} \right\} \underbrace{f\left(i \frac{2}{n}\right)}_{\stackrel{(2.9)}{=} 2i \frac{2}{n}} \frac{2}{n} \\ &= \left(2i \frac{2}{n}\right) \frac{2}{n} \\ &= \frac{8}{n^2} i. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Logo

$$\begin{aligned} S_n &\stackrel{(2.8)}{\doteq} \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i \\ &\stackrel{(2.11)}{=} \sum_{i=1}^n \left(\frac{8}{n^2} i\right) \\ &= \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^n i. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sabemos que soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A, de razão igual a  $1$ , é dada por

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.13}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo

$$\begin{aligned} S_n &\stackrel{(2.12) \text{ e } (2.13)}{=} \frac{8}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 4 + \frac{4}{n}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Substituindo-se (2.14) em 2.12, obteremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &\stackrel{(2.14)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{4}{n}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{4}{x}\right) \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 4 \text{ u.a.}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

como obtido em (2.10).

□

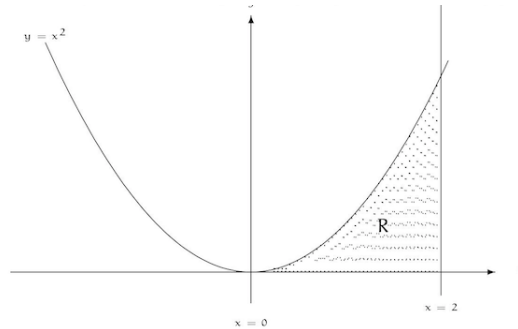
No caso a seguir, não há como resolvê-lo se não for pelo processo desenvolvido anteriormente (isto é, utilizando (2.8)).

**Exemplo 2.2.2** Consideremos a função  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq x^2, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Encontrar a área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $x = 0$ ,  $x = 2$  e do eixo  $Ox$ .

A figura abaixo ilustra nos fornece uma representação geométrica da região  $\underline{R}$  descrita acima.



### Resolução:

Faremos o processo desenvolvido anteriormente passo a passo (isto é, utilizando (2.8)).

No 1.º passo, considerando o retângulo que tem como base o intervalo

$$[0, 2]$$

e altura o intervalo vertical

$$[0, f(2)] \stackrel{(2.16)}{=} [0, 4],$$

que será indicado por  $\underline{R}_1$  (veja a figura abaixo).

Então a área da região  $\underline{R}_1$ , que indicaremos por  $\underline{A}_1$ , será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \text{base} \times \text{altura} \\ &= 2 \cdot 4 = 8, \end{aligned}$$

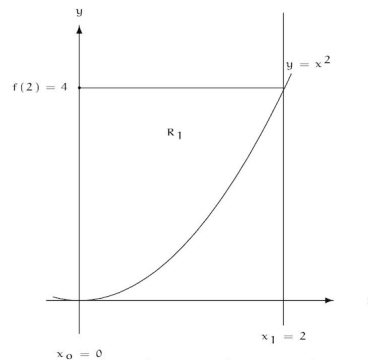
$$\text{isto é, } \mathcal{A}_1 = 8. \quad (2.17)$$

Neste caso não dividimos o intervalo  $[0, 2]$  (ou seja,  $n \doteq 1$ , ou ainda,  $x_0 \doteq 0$  e  $x_1 \doteq 2$ ).

Logo o valor

$$\mathcal{A}_1 = 8$$

seria uma primeira aproximação para o valor da área  $\underline{A}$ , da região  $\underline{R}$ .



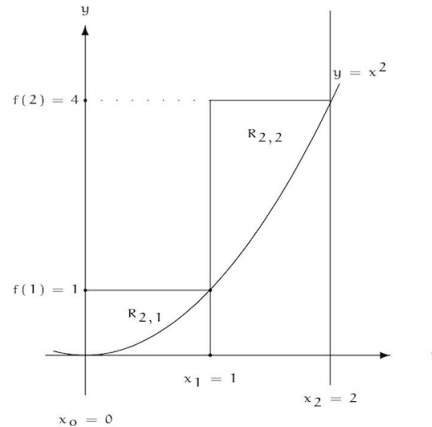
Para o 2.o passo, consideraremos os retângulos que têm como bases os intervalos

$$[0, 1] \text{ e } [1, 2]$$

e alturas os intervalos verticais

$$[0, f(1)] \stackrel{(2.16)}{=} [0, 1] \quad \text{e} \quad [0, f(2)] \stackrel{(2.16)}{=} [0, 4],$$

respectivamente, que serão indicados por  $R_{2,1}$  e  $R_{2,2}$ , respectivamente (veja a figura abaixo).



As áreas dos retângulos  $R_{2,1}$  e  $R_{2,2}$ , que indicaremos por  $\mathcal{A}_{2,1}$  e  $\mathcal{A}_{2,2}$ , respectivamente, serão dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2,1} &= \text{base} \times \text{altura de } R_{2,1} \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2,2} &= \text{base} \times \text{altura de } R_{2,2} \\ &= 1 \cdot 4 \\ &= 4. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Logo a soma das áreas dos retângulos  $R_{2,1}$  e  $R_{2,2}$ , que indicaremos por  $\mathcal{A}_2$ , será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}_{2,1} + \mathcal{A}_{2,2} \\ &\stackrel{(2.18), (2.19)}{=} 1 + 4 \\ &= 5, \\ \text{isto é, } \mathcal{A}_2 &= 5. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Neste caso dividimos o intervalo  $[0, 2]$  em duas partes iguais, isto é,

$$x_0 \doteq 0, \quad x_1 \doteq 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 2.$$

Logo o valor

$$\mathcal{A}_2 = 5$$

seria uma segunda aproximação para o valor da área  $\mathcal{A}$  da região  $R$ .

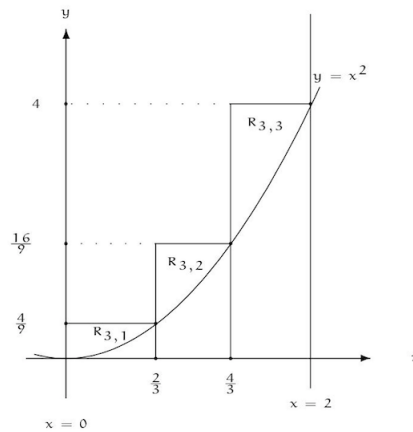
Para o 3.o passo, consideraremos os retângulos que têm como bases o intervalos

$$\left[0, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{4}{3}, 2\right]$$

e alturas os intervalos verticais

$$\left[0, f\left(\frac{2}{3}\right)\right] \stackrel{(2.16)}{=} \left[0, \frac{4}{9}\right], \quad \left[0, f\left(\frac{4}{3}\right)\right] \stackrel{(2.16)}{=} \left[0, \frac{16}{9}\right] \quad \text{e} \quad [0, f(2)] \stackrel{(2.16)}{=} [0, 4],$$

respectivamente, que serão indicados por  $R_{3,1}$ ,  $R_{3,2}$  e  $R_{3,3}$ , respectivamente (veja a figura abaixo).



As áreas dos retângulos  $R_{3,1}$ ,  $R_{3,2}$  e  $R_{3,3}$ , que indicaremos por  $\mathcal{A}_{3,1}$ ,  $\mathcal{A}_{3,2}$  e  $\mathcal{A}_{3,3}$ , respectivamente, serão dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3,1} &= \text{base} \times \text{altura de } R_{3,1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \\ &= \frac{8}{27}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3,2} &= \text{base} \times \text{altura de } R_{3,2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} \\ &= \frac{32}{27} \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3,3} &= \text{base} \times \text{altura de } R_{3,3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 4 \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Logo a soma das áreas dos retângulos  $R_{3,1}$ ,  $R_{3,2}$  e  $R_{3,3}$ , que indicaremos por  $\mathcal{A}_3$ , será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= \mathcal{A}_{3,1} + \mathcal{A}_{3,2} + \mathcal{A}_{3,3} \\ &\stackrel{(2.21),(2.22),(2.23)}{=} \frac{8}{27} + \frac{32}{27} + \frac{8}{3}, \\ \text{isto é, } \mathcal{A}_3 &= \frac{112}{27}. \end{aligned} \tag{2.24}$$



Neste caso dividimos o intervalo  $[0, 2]$  em três partes iguais, isto é,

$$x_0 \doteq 0, \quad x_1 \doteq \frac{2}{3}, \quad x_2 \doteq \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad x_3 \doteq 2.$$

Logo o valor

$$\mathcal{A}_3 = \frac{112}{27}$$

seria uma terceira aproximação para o valor da área  $\mathcal{A}$  da região  $R$ .

Podemos prosseguir dividindo o intervalo  $[0, 2]$  em 4, 5, etc. partes iguais ou, mais geralmente, dividindo-se o intervalo  $[0, 2]$  em  $n$  partes iguais, obtendo os pontos

$$\begin{aligned} x_0 \doteq 0, \quad x_1 \doteq \Delta x, \quad \dots, \quad x_j \doteq j \cdot \Delta x, \quad \dots, \quad x_n \doteq 2, \\ \text{onde} \quad \Delta x \doteq \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

e fazendo uma construção semelhante a que fizemos acima, por meio de retângulos, que indicaremos por  $R_{n,j}$ .

Observemos que, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o retângulo  $R_{n,j}$  terá como base o intervalo

$$[x_{j-1}, x_j]$$

e altura o intervalo vertical

$$[x_j, f(x_j)].$$

Com isto obteremos uma nova aproximação para a área  $\mathcal{A}$ , da região  $R$ , utilizando a soma das áreas dos retângulos  $R_{n,j}$  obtidos a partir da divisão que consideramos acima.

Em geral, se dividirmos o intervalos  $[0, 2]$  em  $n$  partes iguais, todos os sub-intervalos obtidos dessa divisão, isto os, intervalos  $[x_{j-1}, x_j]$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , terão mesmo comprimento, a saber,

$$\Delta x \doteq \frac{2}{n}$$

e estes sub-intervalos serão da seguinte forma:

$$[x_{j-1}, x_j] = \left[ \frac{2}{n}(j-1), \frac{2}{n}j \right], \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

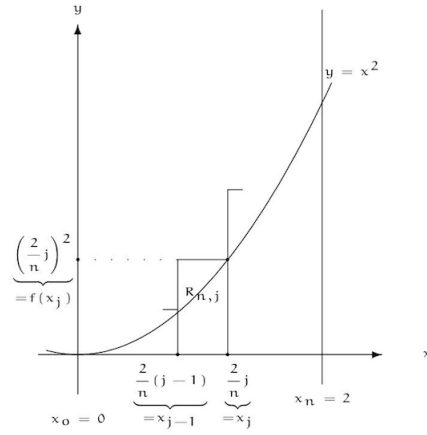
Para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , as alturas dos retângulos  $R_{n,j}$  serão o intervalos verticais da forma

$$\begin{aligned} [x_j, f(x_j)] &\stackrel{(2.16)}{=} \left[ x_j, \left( \frac{2}{n}j \right)^2 \right] \\ &= \left[ x_j, \frac{4}{n^2}j^2 \right]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Geometricamente, para  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o retângulo  $R_{n,j}$  será dado pela figura abaixo.

Assim, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a área do retângulo  $R_{n,j}$ , que indicaremos por  $\mathcal{A}_{n,j}$ , será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,j} &= \text{base} \times \text{altura de } R_{n,j} \\ &= \frac{2}{n} \left( \frac{2}{n}j \right)^2 \\ &= \frac{8}{n^3}j^2. \end{aligned} \tag{2.26}$$



Logo a soma das áreas dos retângulos  $R_{n,j}$ , para  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , que indicaremos por  $S_n$ , será dada por:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^n \frac{8}{n^3} j^2 \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Utilizando-se indução finita, podemos mostrar, que

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2.28)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo

$$\begin{aligned} S_n &\stackrel{(2.27)}{=} \stackrel{(2.28)}{=} \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Logo o valor

$$S_n = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

seria a  $n$ -ésima aproximação para o valor da área  $\mathcal{A}$  da região  $R$ .

Mas

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &\stackrel{(2.29)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{8}{3} + \frac{4}{x} + \frac{4}{3x^2} \right] \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{8}{3}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

ou seja, a área da região R será

$$\mathcal{A} = \frac{8}{3} \text{ u.a..}$$

□

**Observação 2.2.1** O processo acima nos fornece um modo de calcular a área de regiões do tipo descrito acima, porém o processo é complicado e trabalhoso.

O que faremos a seguir é tentar colocá-lo de uma forma mais simples de obtê-la, que é o que faremos nas próximas seções.

## 2.a AULA

## 2.3 Soma de Riemann

Começaremos pela:

**Definição 2.3.1** Um conjunto formado por um número finito de pontos do intervalo  $[a, b]$ , que indicaremos por:

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad (2.31)$$

cujos elementos satisfazem:

$$x_0 \doteq a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \doteq b, \quad (2.32)$$

será denominada partição (ou divisão) do intervalo  $[a, b]$ .

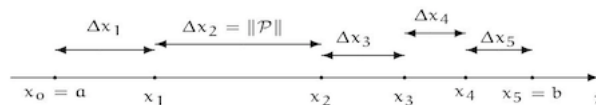
Neste caso, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , definimos

$$\Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1} \quad (2.33)$$

e com isto diremos que norma da partição  $\mathcal{P}$ , indicada por  $\|\mathcal{P}\|$ , será dada por:

$$\|\mathcal{P}\| \doteq \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{\Delta x_i\}. \quad (2.34)$$

**Observação 2.3.1** Observemos que a norma da partição  $\mathcal{P}$  é comprimento do maior subintervalo determinado pelos elementos da partição  $\mathcal{P}$  (veja a figura abaixo).



Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada em  $[a, b]$  e

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (2.35)$$

uma partição do intervalo  $[a, b]$ .

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , escolhamos no subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , um ponto, que denotaremos por  $\xi_i$ , isto, é,

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.36)$$

Com isto podemos considerar a seguinte soma (finita)

$$f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (2.37)$$

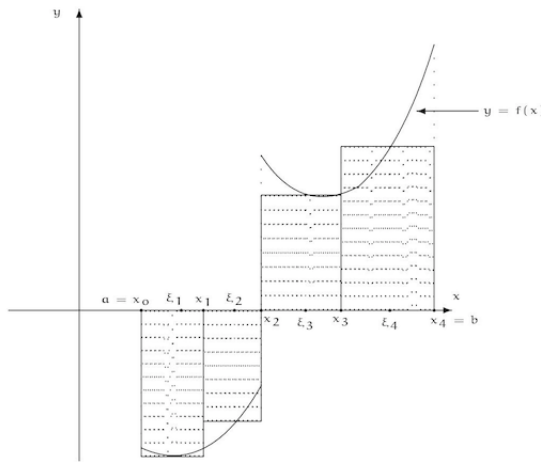
Com isto temos a:

**Definição 2.3.2** A soma (2.37) acima será denominada soma de Riemann da função  $f$ , associada a partição  $\mathcal{P}$  e aos pontos  $\xi_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Temos a:

### Observação 2.3.2

1. Geometricamente poderemos ter a seguinte situação:



2. Vale observar que a função  $f$  pode ser negativa (como na figura acima).

Assim a soma de Riemann da função  $f$  associada partição  $\mathcal{P}$  e aos pontos  $\xi_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  **não** nos fornecerá, neste caso, uma aproximação da área da região plana limitada, delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , pois a área de alguns dos retângulos poderá **não** ser, necessariamente, dada pelo número real

$$f(\xi_i) \Delta x_i,$$

já que  $f(\xi_i)$  pode ser menor que zero.

Notemos que, na situação da figura acima, isto acontece quando  $i = 1$  ou  $i = 2$ , pois  $f(\xi_i) < 0$ , para  $i \in \{1, 2\}$ .

3. Se a função  $f$  é não negativa, a soma de Riemann acima, poderá ser uma aproximação para a área da região plana limitada, delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , se a função  $f$  for "bem comportada", como veremos mais adiante.

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

**Definição 2.3.3** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada.*

*Diremos que a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , se podemos encontrar  $L \in \mathbb{R}$  de modo que, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$ , de modo que, para toda partição*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\} \quad (2.38)$$

*do intervalo  $[a, b]$ , satisfazendo*

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \quad (2.39)$$

*e para toda escolha de pontos*

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

*deveremos ter:*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon. \quad (2.40)$$

*Neste caso diremos que o número real  $L$  é a integral definida da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , que será denotada por  $\int_a^b f(x) dx$ , isto é,*

$$\int_a^b f(x) dx \doteq L. \quad (2.41)$$

### Observação 2.3.3

1. A Definição 2.3.3 acima nos diz que a função  $f$  é integrável no intervalo  $[a, b]$  se, e somente se, podemos deixar a soma de Riemann da função  $f$ , a associada à partição  $\mathcal{P}$  e aos pontos  $\xi_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tão próxima do número real  $L$  quanto se queira, desde que, a norma da partição  $\mathcal{P}$  seja suficientemente pequena.
2. Se a função  $f$  é integrável no intervalo  $[a, b]$  então, da Definição 2.3.3, teremos:

$$L = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (2.42)$$

$$\text{ou ainda: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (2.43)$$

*para qualquer escolha*

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

*onde*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

*é uma partição do intervalo  $[a, b]$ .*

3. Na notação da integral definida introduzida na Definição 2.3.3 acima, isto é,  $\int_a^b f(x) dx$ , a função  $f$  será dita integrando, o número real  $a$ , será dito limite (ou extremo) inferior de integração, o número real  $b$ , será dito limite (ou extremo) superior de integração e o símbolo  $\int$  será denominado sinal de integração.

4. Vale observar que usaremos o mesmo símbolo para a integral indefinida e para a integral definida, a saber,

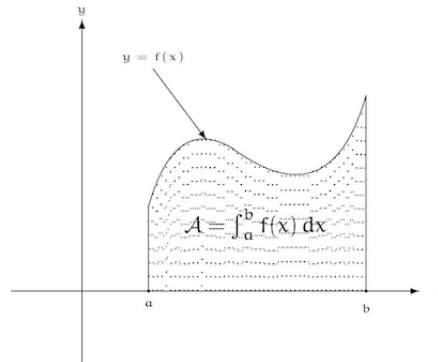
$$\int.$$

Será que existe alguma relação entre estes dois conceitos tão diferentes?

5. Notemos que se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é não-negativa e integrável em  $[a, b]$  então a integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ , nos fornecerá o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, indicada por  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , ds retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , ou seja,

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \text{ u.a..} \quad (2.44)$$

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica da região  $R$  descrita acima.



6. A integral definida introduzida na Definição 2.3.3 (veja (2.41)) é conhecida como integral de Riemann, da função  $f$  em  $[a, b]$

Temos também a seguinte definição:

**Definição 2.3.4** Se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em  $[a, b]$ , então

$$\int_b^a f(x) dx \doteq - \int_a^b f(x) dx, \quad (2.45)$$

$$\int_a^a f(x) dx \doteq 0. \quad (2.46)$$

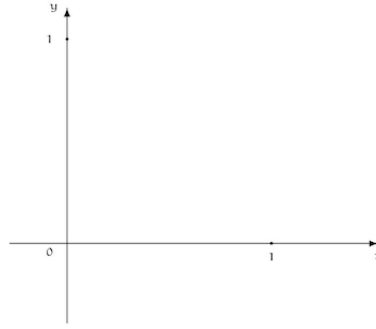
Com isto temos o:

**Exemplo 2.3.1** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função, dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{para } x = 0 \\ 0, & \text{para } x \in (0, 1] \end{cases}. \quad (2.47)$$

Mostre que a função  $f$  é integrável em  $[0, 1]$  e que

$$\int_0^1 f(x) dx = 0. \quad (2.48)$$

**Resolução:**

A representação geométrica do gráfico da função  $f$  é dada pela figura abaixo:

Seja

$$L \doteq 0. \quad (2.49)$$

Observemos que se

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 \doteq 0, x_1, \dots, x_n \doteq 1\}$$

é uma partição do intervalo  $[0, 1]$  e se

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

então deveremos ter

$$\xi_i \neq 0, \quad \text{para cada } i \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

Assim a soma de Riemann da função  $f$ , associada à partição  $\mathcal{P}$  e aos pontos  $\xi_i$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , será dada por:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \stackrel{\xi_i \neq 0 \text{ para } i \in \{2, 3, \dots, n\}, \text{ logo: } f(\xi_i) \stackrel{(2.47)}{=} 0, \text{ para } i \in \{2, 3, \dots, n\}}{=} f(\xi_1) \Delta x_1. \quad (2.50)$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , consideremos

$$\delta \doteq \varepsilon. \quad (2.51)$$

Se uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 \doteq 0, x_1, \dots, x_n \doteq 1\}$$

do intervalo  $[0, 1]$  é tal que

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \quad (2.52)$$

$$\text{e } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.53)$$

teremos:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - L \right| &\stackrel{(2.49)}{=} \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - 0 \right| \\
 &\stackrel{(2.50)}{=} |f(\xi_1) \Delta x_1| \\
 &= |f(\xi_1)| \Delta x_1 \\
 &\stackrel{(2.47)}{\leq} 1 \Delta x_1 \\
 &\leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\Delta x_i\} \\
 &\stackrel{(2.34)}{=} \|\mathcal{P}\| \\
 &\stackrel{(2.52)}{<} \delta \\
 &\stackrel{(2.51)}{=} \varepsilon,
 \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 2.3.3, que a função  $f$  é integrável em  $[0, 1]$  e além disso

$$\int_0^1 f(x) dx = L = 0,$$

completando a resolução. □

A seguir daremos uma condição **suficiente** para que uma função seja integrável no intervalo  $[a, b]$ , a saber:

**Teorema 2.3.1** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b]$ .*

*Então a função  $f$  será integrável no intervalo  $[a, b]$ , ou seja, existe a integral definida*

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**Demonstração:**

A demonstração deste resultado será omitida. □

Temos a:

**Observação 2.3.4**

1. *Os interessados em poderão encontrá-la na página 125 (veja o Teorema 6.8) do livro *Princípios de Análise Matemática de W. Rudin*.*
2. *O Teorema 2.3.1 acima nos dá uma condição **suficiente** para que uma função seja integrável no intervalo  $[a, b]$ .*  
*Porém, o Exemplo 2.3.1 acima, mostra que esta condição **não é necessária**, já que a função do referido Exemplo não é contínua em  $[0, 1]$ , mas é integrável em  $[0, 1]$ .*

Podemos agora introduzir a:



**Definição 2.3.5** *Uma partição*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\} \quad (2.54)$$

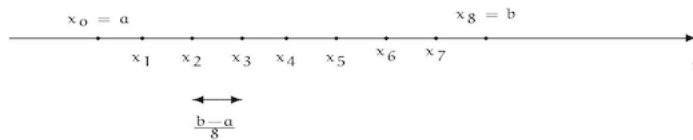
do intervalo  $[a, b]$  será dita partição regular do intervalo  $[a, b]$  se

$$x_i \doteq a + i \frac{b-a}{n}, \quad \text{para } i \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (2.55)$$

Temos a:

**Observação 2.3.5**

1. Na figura abaixo, a partição regular do intervalo  $[a, b]$ , possui 9 pontos ( $n = 8$ ).



2. Se

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

é uma partição regular do intervalo  $[a, b]$ , então todos os subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tem o mesmo comprimento.

De fato, pois

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \Delta x \\ &= \frac{b-a}{n}, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Neste caso, a norma da partição será  $\frac{b-a}{n}$ , ou seja,

$$\|\mathcal{P}\| = \frac{b-a}{n}. \quad (2.57)$$

3. Observemos que se a função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em  $[a, b]$ , então podemos considerar uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

qualquer do intervalo  $[a, b]$  e pontos quaisquer

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

nos correspondentes subintervalos determinados pela partição  $\mathcal{P}$ , para calcularmos o limite dado no item 2. da Observação 2.3.3, que nos fornecerá o valor da integral definida.

Em particular, podemos considerarmos uma partição regular, que indicaremos por

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\},$$

do intervalo  $[a, b]$  e

$$\xi_i \doteq a + i \frac{b-a}{n}, \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.58)$$

e com isto obteremos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &\stackrel{(2.58) \text{ e } (2.56)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Apliquemos isto ao:

**Exercício 2.3.1** Seja  $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) \doteq x^2, \quad \text{para } x \in [1, 3]. \quad (2.60)$$

Mostre que a função  $f$  é integrável em  $[1, 3]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_1^3 x^2 dx.$$

### Resolução:

Como vimos na disciplina de Cálculo 1, a função  $f$ , dada por (2.60), é contínua em  $[1, 3]$ .

Logo, do Teorema 2.3.1, segue que ela será uma função integrável em  $[1, 3]$ .

Do item 2. da Observação 2.3.3 (ou seja, podemos utilizar uma partição regular do intervalo  $[1, 3]$  e escolher em cada subintervalo determinado pelos pontos da partição onde calcularmos o valor da função  $f$ ) segue que:

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 dx &\stackrel{(2.60)}{=} \int_a^b f(x) dx \\ &\stackrel{(2.59)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\underbrace{a + i \frac{b-a}{n}}_{\doteq \xi_i}\right) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\doteq \Delta x_i = \Delta x} \\ &\stackrel{a \doteq 1, b \doteq 3 \text{ e } (2.60)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + i \frac{2}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{n^2 + 4in + 4i^2}{n^2} \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{n^3} \left[ \sum_{i=1}^n n^2 + 4n \sum_{i=1}^n i + 4 \sum_{i=1}^n i^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Como vimos anteriormente (veja os Exemplos 2.2.1 e 2.2.2, ou , (2.13) e (2.28))

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2.62)$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 x^2 dx &\stackrel{(2.61)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{n^3} \left[ n^2 \sum_{i=1}^n 1 + 4n \sum_{i=1}^n i + 4 \sum_{i=1}^n i^2 \right] \right\} \\
 &\stackrel{(2.62)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{n^3} \left[ n^2 n + 4n \frac{n(n+1)}{2} + 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \right\} \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{26n^3 + 24n^2 + 4n}{3n^3} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{26x^3 + 24x^2 + 4x}{3x^3} \right] \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{26}{3}, \\
 \text{ou seja, } \int_1^3 x^2 dx &= \frac{26}{3}, \tag{2.63}
 \end{aligned}$$

completando a resolução. □

Temos a:

**Observação 2.3.6** *Notemos que a função  $f$  do Exemplo 2.3.1 acima, é não negativa em  $[1, 3]$ , ou seja,*

$$\begin{aligned}
 f(x) &\stackrel{(2.60)}{=} x^2 \\
 &\geq 0, \quad \text{para } x \in [1, 3],
 \end{aligned}$$

e integrável em  $[1, 3]$  (pois é uma função contínua em  $[1, 3]$ ).

Logo, do item 5. da Observação 2.3.3, segue que a área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, indicada por  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = 1$ ,  $x = 3$  e do eixo  $Ox$ , será dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &\stackrel{(2.44)}{=} \int_a^b f(x) dx \\
 &\stackrel{(2.60)}{=} \int_1^3 x^2 dx \\
 &\stackrel{(2.63)}{=} \frac{26}{3} \text{ u.a..} \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

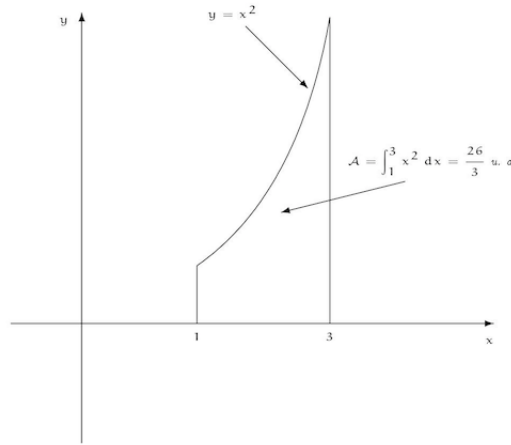
A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica do gráfico da região  $\mathcal{R}$  descrita acima.

## 2.4 Propriedades da integral definida

A seguir exibiremos algumas propriedades gerais da integral definida que serão úteis para o cálculo das mesmas, a saber:

**Proposição 2.4.1** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[a, b]$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

*Então:*



1. A função  $(\alpha \cdot f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  será integrável em  $[a, b]$ .

Além disso, teremos

$$\int_a^b (\alpha \cdot f)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx. \quad (2.65)$$

2. A função  $(f + g) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  será integrável em  $[a, b]$ .

Além disso, teremos

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (2.66)$$

3. Vale o análogo para a função  $(f - g)$ , isto é, a função  $(f - g) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  será integrável em  $[a, b]$ .

Além disso, teremos

$$\int_a^b (f - g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \quad (2.67)$$

4. Se  $c \in [a, b]$ , então as restrições da função  $f$  aos intervalos  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , serão funções integráveis em  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , respectivamente.

Além disso, teremos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (2.68)$$

5. Se  $c, d, e \in [a, b]$ , então as restrições da função  $f$  aos intervalos com extremos em  $c, d$  e  $e$ , serão funções integráveis nos respectivos intervalos.

Além disso, teremos

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^e f(x) dx + \int_e^d f(x) dx. \quad (2.69)$$

6. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada por:

$$f(x) \doteq C, \quad \text{para } x \in [a, b] \quad (2.70)$$

então a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

Além disso, teremos

$$\int_a^b f(x) dx = C(b - a). \quad (2.71)$$

7. Suponhamos que

$$f(x) \leq g(x), \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (2.72)$$

Então teremos

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx. \quad (2.73)$$

8. Suponhamos que existem  $m, M \in \mathbb{R}$ , tais que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (2.74)$$

Então, teremos

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a). \quad (2.75)$$

9. A função  $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$|f|(x) \doteq |f(x)|, \quad \text{para } x \in [a, b], \quad (2.76)$$

é integrável em  $[a, b]$ .

Além disso, teremos

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx. \quad (2.77)$$

### Demonstração:

As demonstrações destas propriedades seguem da aplicação, de modo conveniente, da Definição (2.3.3) de função integrável em um intervalo fechado e limitado, e suas elaborações serão deixadas como exercício para o leitor.

Notemos que, em resumo, uma integral definida é um tipo de limite (veja (2.43)) e assim as propriedades acima podem ser obtidas em termos das propriedades dos correspondentes limites.  $\square$

**Observação 2.4.1** Podemos dar interpretações geométricas para algumas das propriedades acima utilizando o item 5. da Observação 2.3.3.

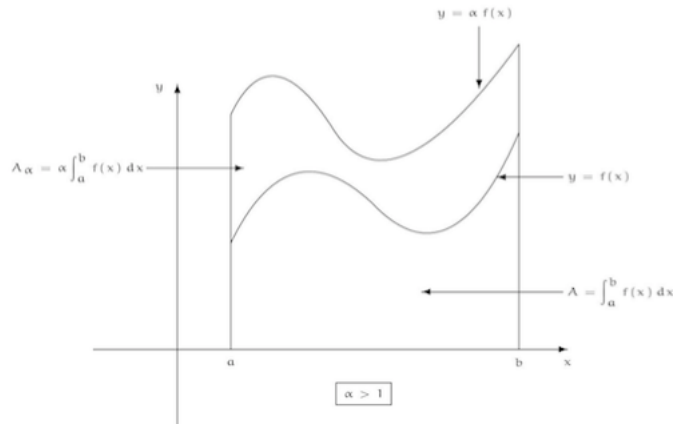
Para isto, vamos supor que as funções  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , são não negativas em  $[a, b]$ , isto é,

$$0 \leq f(x), g(x), \quad \text{para } x \in [a, b] \quad (2.78)$$

e  $\alpha \geq 0$ .

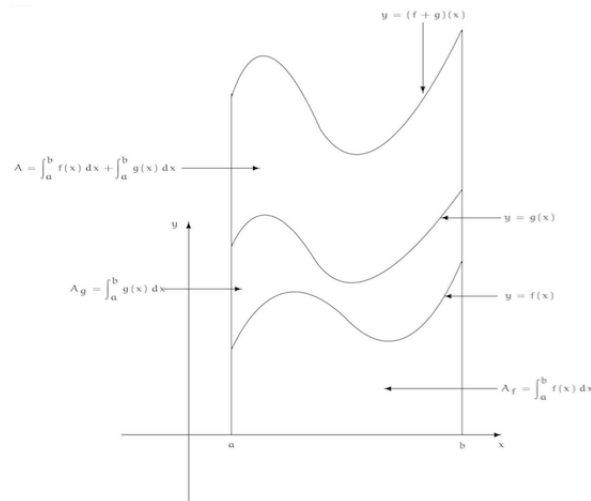
1. A propriedade 1. da Proposição 2.4.1, nos diz, geometricamente, que área, que indicaremos por  $A_\alpha$ , da região limitada, de chamaremos de  $R_\alpha$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\alpha \cdot f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  pode ser obtida multiplicando-se por  $\alpha$  a área, que indicaremos por  $A$ , da região limitada, que chamaremos de  $R$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ .

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica dos gráficos das regiões  $R$  e  $R_\alpha$ , descritas acima.



2. A propriedade 2. da Proposição 2.4.1, nos diz, geometricamente, que área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f + g$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  pode ser obtida somando-se a área, que indicaremos por  $\underline{A}_f$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}_f$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  com a área, que indicaremos por  $\underline{A}_g$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}_g$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $g$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ .

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica dos gráficos das regiões  $\underline{R}$ ,  $\underline{R}_f$  e  $\underline{R}_g$  descrita acima.



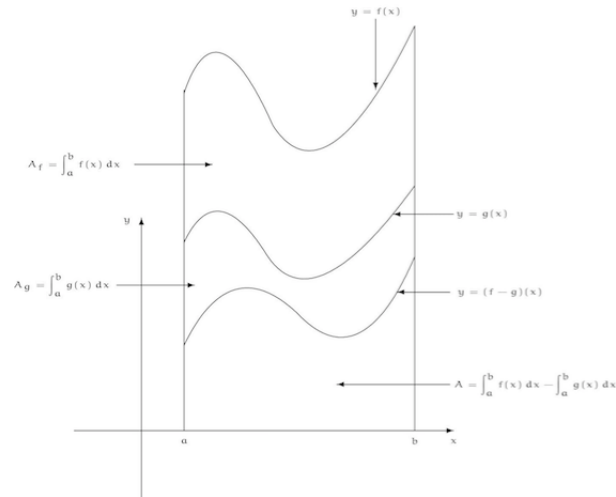
3. Se

$$g(x) \leq f(x), \quad \text{para } x \in [a, b],$$

a segunda parte da propriedade 2. da Proposição 2.4.1, nos diz, geometricamente, que área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f - g$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  pode ser obtida da diferença da área, que indicaremos por  $\underline{A}_f$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}_f$ , contida plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  pela

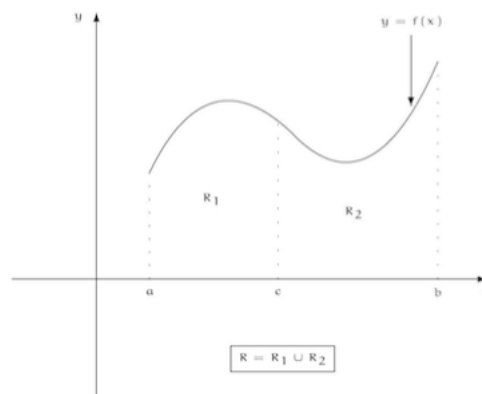
área, que indicaremos por  $\underline{A}_g$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}_g$ , contida plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $g$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ .

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica dos gráficos das regiões  $R$ ,  $R_f$  e  $R_g$ , descritas acima.



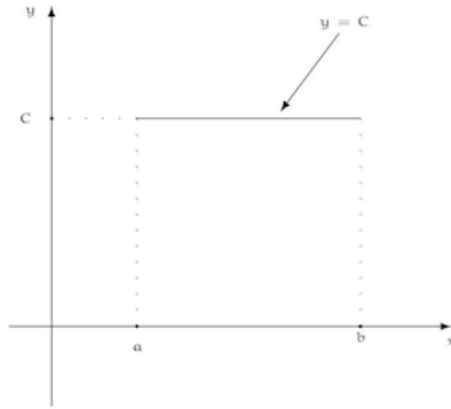
4. A propriedade 4. da Proposição 2.4.1, nos diz, geometricamente, que área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  é a soma da área, que indicaremos por  $\underline{A}_1$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}_1$ , contida plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = c$  e do eixo  $Ox$  com a área, que indicaremos por  $\underline{A}_2$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}_2$ , contida plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = c$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica dos gráficos das regiões  $R$ ,  $R_1$  e  $R_2$ , descritas acima.



5. A propriedade 5. da Proposição 2.4.1,, geometricamente, pode ser vista de modo semelhante a que fizemos no item acima para a propriedade 4. da Proposição 2.4.1.

6. A propriedade 6. da Proposição 2.4.1, nos diz, geometricamente, que área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  é a área de um retângulo, que tem base de comprimento  $b - a$  e altura com comprimento  $\underline{C}$ . A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica do gráfico da região  $\underline{R}$  descrita acima.

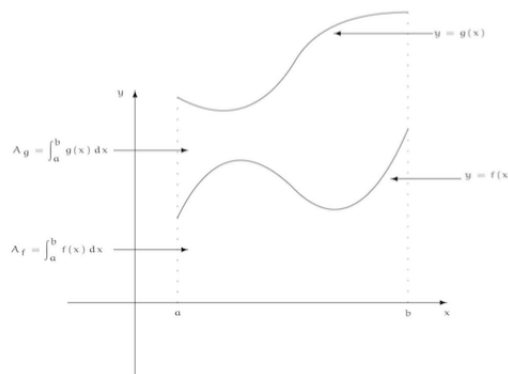


7. A propriedade 7. da Proposição 2.4.1, nos diz que se

$$f(x) \leq g(x), \quad \text{para cada } x \in [a, b],$$

então a área, que indicaremos por  $\underline{A}_f$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}_f$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  é menor ou igual área, que indicaremos por  $\underline{A}_g$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}_g$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{g}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ .

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica do gráfico das regiões  $\underline{R}_f$  e  $\underline{R}_g$  descritas acima.



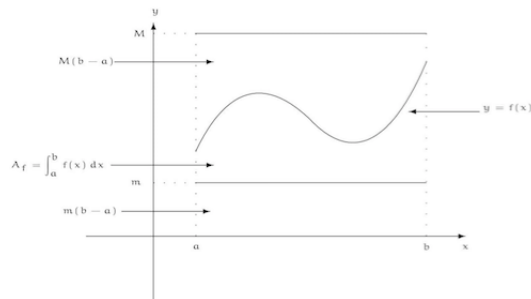
8. Se  $m \geq 0$ , a propriedade 8. da Proposição 2.4.1, nos diz que se

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{par } x \in [a, b],$$



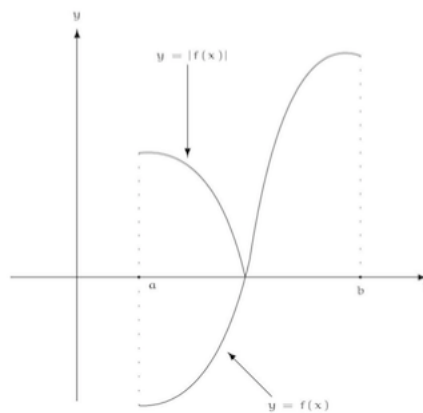
então a área, que indicaremos por  $A_f$ , da região limitada, que chamaremos de  $R_f$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  é maior ou igual que a área do retângulo que tem como base o intervalo  $[a, b]$  e altura com comprimento  $m$  e menor ou igual área do retângulo que tem como base o intervalo  $[a, b]$  e altura com comprimento  $M$ .

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica do gráfico das regiões  $[a, b] \times [0, m]$  (se  $m \geq 0$ ),  $R_f$  e  $[a, b] \times [0, M]$ , descritas acima.



9. Se  $f$  pode assumir valores negativos, a propriedade 9. da Proposição 2.4.1, nos diz que o módulo da integral definida da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$  é menor ou igual área da região limitada, contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $|f|$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , que indicaremos por  $R_{|f|}$ .

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica do gráfico da região  $R_{|f|}$ , descrita acima.



### 3.a AULA

Temos o seguinte resultado que será muito importante para conseguirmos calcular o valor de integrais definidas de funções integráveis em um intervalo fechado e limitado:

**Teorema 2.4.1 (do valor médio para integral definida)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b]$ .*

Então podemos encontrar  $x_0 \in [a, b]$ , tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b - a). \quad (2.79)$$

**Demonstração:**

Como, por hipótese, a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[a, b]$ , de um resultado da disciplina de Cálculo 1, segue que existem  $s_0, t_0 \in [a, b]$  tal que

$$f(s_0) = m \doteq \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{e} \quad M \doteq \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(t_0), \quad (2.80)$$

$$\text{ou seja,} \quad m \leq f(x) \leq M, \quad \text{para} \quad x \in [a, b]. \quad (2.81)$$

Logo, do item 8. da Proposição 2.4.1 acima, segue que

$$\underbrace{m}_{\stackrel{(2.80)}{=} f(s_0)} (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{M}_{\stackrel{(2.80)}{=} f(t_0)} (b - a). \quad (2.82)$$

Dividindo-se as desigualdades (2.82) acima por  $(b - a) > 0$ , obteremos

$$f(s_0) \stackrel{(2.80)}{=} m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq M \stackrel{(2.80)}{=} f(t_0). \quad (2.83)$$

Logo, do Teorema do valor intermediário (visto na disciplina de Cálculo 1), segue que existe

$$x_0 \in [s_0, t_0] \subseteq [a, b],$$

de modo que

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a},$$

ou seja,  $\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b - a),$

como queríamos demonstrar. □

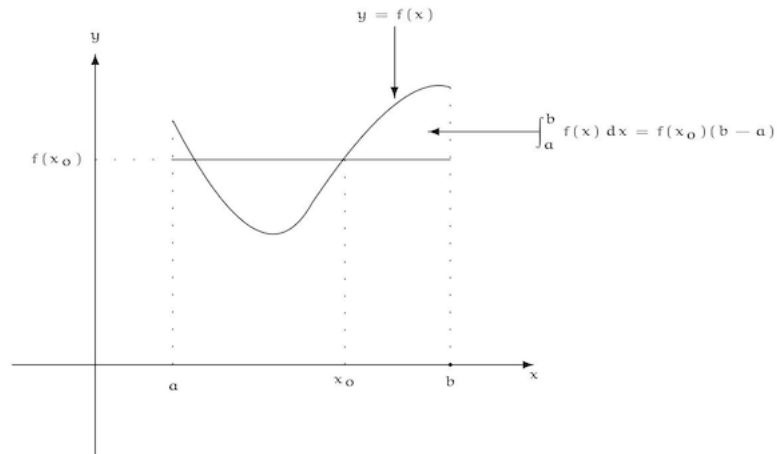
**Observação 2.4.2** Se a função  $f$  for não negativa em  $[a, b]$ , ou seja,

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para} \quad x \in [a, b],$$

do item 5. da Observação 2.3.3, o Teorema 2.4.1, acima nos diz que existe um  $x_0 \in [a, b]$  de modo que, a área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , será igual a área do retângulo que tem como base o intervalo  $[a, b]$  e altura de comprimento  $f(x_0)$  (veja a figura abaixo).

Temos agora a:

**Definição 2.4.1** O valor  $f(x_0)$ , dado pelo Teorema do valor médio para integrais definidas (ou seja, o Teorema 2.4.1) será denominado valor médio da função  $f$ , no intervalo  $[a, b]$ .



### Observação 2.4.3

1. Pela Definição 2.4.1 acima, o valor médio de uma função  $f$  integrável em  $[a, b]$  é dado por

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}. \quad (2.84)$$

2. O valor médio de uma função  $f$  integrável em um intervalo  $[a, b]$ , estende o conceito de média aritmética de um conjunto finito de números reais.

Para ver isto observemos que se

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in [a, b],$$

então a média aritmética dos números reais

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$$

será dada por

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)}{n}.$$

Por outro lado, se

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

é uma partição regular do intervalo  $[a, b]$  e

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

então

$$\begin{aligned} \Delta x &\doteq \frac{b-a}{n}, \\ \text{ou seja, } n &= \frac{b-a}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)}{n} &\stackrel{(2.85)}{=} \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)}{\frac{b-a}{\Delta x}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x}{b-a}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Tomando-se o limite, quando  $n \rightarrow \infty$  do lado direito da identidade (2.86), obteremos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x}{b-a} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x}{b-a} \\ &= \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}, \end{aligned}$$

que, pela Definição 2.4.1 acima, é o valor médio da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

Podemos aplicar as ideias acima ao:

**Exercício 2.4.1** Encontre o valor médio da função do Exemplo (2.3.1), no intervalo  $[1, 3]$ .

**Resolução:**

Do Exemplo 2.3.1 temos que (veja (2.63))

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$$

Logo, pela Definição 2.4.1, o valor médio da função  $f$  no intervalo  $[1, 3]$  será:

$$\begin{aligned} \frac{\int_1^3 x^2 dx}{3-1} &\stackrel{(2.63)}{=} \frac{26}{6} \\ &= \frac{13}{3}, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

## 2.5 O teorema fundamental do Cálculo

Nosso objetivo nesta seção é exibir um resultado que será de muita importância no cálculo de integrais definidas.

Tal resultado será consequência do:

**Teorema 2.5.1** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b]$ .*

*Consideremos a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:*

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t) dt, \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (2.87)$$

*Então a função  $F$  será diferenciável em  $[a, b]$  e, além disso, teremos*

$$F'(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [a, b], \quad (2.88)$$

$$\text{ou seja, } \frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t) dt \right] = f(x), \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (2.89)$$

### Demonstração:

Como, por hipótese, a função  $f$  é contínua em  $[a, b]$ .

Logo, para cada  $x \in [a, b]$ , ela também será contínua em  $[a, x]$ , logo pelo Teorema 2.3.1, a função  $f$  será integrável em  $[a, x]$ .

Portanto a função  $F$ , dada por (2.87), está bem definida em  $[a, b]$ .

Mostraremos que a função  $F$  é diferenciável em  $x_0 \in (a, b)$  e que

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Os casos em que

$$x_0 = a \quad \text{ou} \quad x_0 = b,$$

são análogos e serão deixados como exercício para o leitor.

Mostraremos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

existe e é igual a  $f(x_0)$ .

Observemos que

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &\stackrel{(2.87)}{=} \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &\stackrel{(2.45)}{=} \int_a^{x_0+h} f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt \\ &\stackrel{\text{item 7. da Proposição 2.4.1}}{=} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Logo, pelo Teorema do valor médio para integrais definidas (isto é, do Teorema 2.4.1), aplicado à função  $f$ , no intervalo  $[x_0, x_0 + h]$ , segue que podemos encontrar  $\bar{x} \in [x_0, x_0 + h]$ , de modo que

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &\stackrel{(2.90)}{=} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \\ &\stackrel{(2.79)}{=} f(\bar{x}) [(x_0 + h) - x_0] \\ &= f(\bar{x}) h, \\ \text{ou seja, } \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= f(\bar{x}). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Do fato que a função  $f$  será contínua em  $x_0$  teremos:

$$\begin{array}{ll} \text{se} & h \rightarrow 0, \\ \text{como} & \bar{x} \in [x_0, x_0 + h], \\ \text{teremos} & \bar{x} \rightarrow x_0, \end{array}$$

assim, da continuidade da função  $f$ , segue que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(\bar{x}) = f(x_0)$ . (2.92)

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &\stackrel{(2.91)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\bar{x}) \\ &\stackrel{(2.92)}{=} f(x_0), \end{aligned} \quad (2.93)$$

mostrando que a função  $F$  é diferenciável à direita do ponto  $x_0 \in (a, b)$  e, além disso, que

$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \\ &\stackrel{(2.93)}{=} f(x_0). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Deixaremos, como exercício para o leitor, mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

existe e também é igual a  $f(x_0)$ , ou seja, a função  $F$  é diferenciável à esquerda do ponto  $x_0 \in (a, b)$  e, além disso, que

$$\begin{aligned} F'_-(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \\ &= f(x_0). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Portanto, de (2.94) e (2.95) segue que a função  $F$  é diferenciável em  $x_0 \in (a, b)$  e, além disso, teremos

$$F'(x_0) = f(x_0),$$

como queríamos demonstrar. □

**Observação 2.5.1** A função  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (2.87), é dita primitiva da função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja, vale (2.88).

Funções  $F$  que tem a propriedade acima (ou seja, (2.88)) forma estudadas do Cálculo 1 e serão novamente estudadas, com mais detalhes, no capítulo 3.

Como consequência do resultado acima temos o:

**Teorema 2.5.2 (fundamental do Cálculo)** *Sejam  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável em  $[a, b]$ , tal que*

$$G'(x) = f(x), \quad \text{para } x \in [a, b], \quad (2.96)$$

ou seja, uma primitiva da função  $f$  em  $[a, b]$ .

Então teremos

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a). \quad (2.97)$$

**Demonstração:**

Consideremos a função  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t) dt, \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (2.98)$$

Do Teorema 2.5.1 acima, segue que a função  $F$  está bem definida.

Como

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(2.88)}{=} f(x), \quad \text{para } x \in [a, b], \\ \text{e, de (2.96), temos} \quad G'(x) &= f(x), \quad \text{para } x \in [a, b], \\ \text{segue que} \quad G'(x) &= F'(x), \quad \text{para } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Logo, de um resultado da disciplina de Cálculo 1, podemos encontrar  $C \in \mathbb{R}$ , tal que

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (2.99)$$

Em particular, para cada  $x \in [a, b]$ , teremos

$$\begin{aligned} G(x) &\stackrel{(2.99)}{=} F(x) + C \\ &\stackrel{(2.98)}{=} \int_a^x f(t) dt + C. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Logo

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &\stackrel{(2.100)}{=} \left[ \int_a^b f(t) dt + C \right] - \left[ \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{\stackrel{(2.46)}{=} 0} + C \right] \\ &= \int_a^b f(t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{mostrando que} \quad \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a),$$

como queríamos demonstrar. □

Temos a:

**Observação 2.5.2**

1. Denotaremos a diferença

$$G(b) - G(a)$$

por

$$\begin{aligned} &G(x) \Big|_{x=a}^{x=b}, \\ \text{ou ainda,} \quad &G(x) \Big|_a^b, \\ \text{isto é,} \quad &G(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \doteq G(b) - G(a). \end{aligned} \quad (2.101)$$

2. O Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2) coloca o problema de calcular uma integral definida de uma função contínua em intervalo  $[a, b]$ , essencialmente, em termos de encontrar uma primitiva, da função definida pelo integrando da integral definida no intervalo  $[a, b]$ .

Com isto podemos refazer algumas integrais definidas que calculamos pela Definição 2.3.3, de modo bem mais simples, como mostram os exemplos a seguir.

Para ilustrar temos :

**Exemplo 2.5.1** Calcular a integral definida (caso exista)

$$\int_1^3 x^2 dx. \quad (2.102)$$

**Resolução:**

Seja  $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x) \doteq x^2, \quad \text{para } x \in [1, 3]. \quad (2.103)$$

Como visto na disciplina de Cálculo 1, temos que a função  $f$ , dada por (2.103), é contínua em  $[1, 3]$  (pois é a restrição de uma função polinomial ao intervalo  $[1, 3]$ ).

Logo, pelo Teorema 2.3.1, a função  $f$  será integrável em  $[1, 3]$ .

Como visto na disciplina de Cálculo 1, temos que uma primitiva da função  $f$  em  $[1, 3]$ , é a função  $F : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \text{para } x \in [1, 3]. \quad (2.104)$$

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), teremos:

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 dx &\stackrel{(2.103)}{=} \int_1^3 f(x) dx \\ &\stackrel{(2.97)}{=} F(3) - F(1) \\ &\stackrel{(2.104)}{=} \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\ &= \frac{26}{3}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

completando a resolução. □

Agora temos a:

**Observação 2.5.3**

1. Baseado no Exemplo 2.5.1 acima, temos um modo mais simples de calcular o valor da integral definida (2.102), do que a que utilizamos no Exemplo 2.3.1.
2. Como a função  $f$ , do Exemplo 2.5.1 acima, é não negativa em  $[1, 3]$ , ou seja,

$$f(x) \stackrel{(2.103)}{\geq} 0, \quad \text{para } x \in [1, 3]$$

e integrável em  $[1, 3]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da área, que denotaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ ,



delimitada pelas representações geométricas gráfico da função  $f$ , das retas  $x = 1$ ,  $x = 3$  e do eixo  $Ox$  será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\stackrel{(2.44)}{=} \int_a^b f(x) \, dx \\ &\stackrel{(2.103)}{=} \int_1^3 x^2 \, dx \\ &\stackrel{(2.105)}{=} \frac{26}{3} \text{ u.a.}, \end{aligned}$$

isto é, será igual ao valor da integral definida (2.102).

Um outro exemplo interessante é:

**Exemplo 2.5.2** Mostre que a função  $f: [-4, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) \doteq |x + 2|, \quad \text{para } x \in [-4, 3], \quad (2.106)$$

é integrável em  $[-4, 3]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_{-4}^3 |x + 2| \, dx. \quad (2.107)$$

### Resolução:

Como visto na disciplina de Cálculo 1, temos que a função  $f$  é contínua em  $[-4, 3]$ .

Logo, do Teorema 2.3.1, segue que a função  $f$ , dada por (2.106), será integrável em  $[-4, 3]$ .

Observemos que será complicado encontrarmos uma primitiva da função  $f$ , dada por (2.106), no intervalo  $[-4, 3]$ .

Deixaremos para o leitor tentar encontrar uma tal função.

Para facilitar o cálculo da integral definida (2.107) acima, observamos que

$$|x + 2| = x + 2, \quad \text{para } x \in [-2, 3], \quad (2.108)$$

$$|x + 2| = -(x + 2), \quad \text{para } x \in [-4, -2]. \quad (2.109)$$

Assim, do item 4. da Proposição 2.4.1, segue que:

$$\begin{aligned} \int_{-4}^3 |x + 2| \, dx &\stackrel{(2.68)}{=} \int_{-4}^{-2} \underbrace{|x + 2|}_{\text{como } x \in [-4, -2], \text{ de (2.109)}_{-(x+2)}} \, dx + \int_{-2}^3 \underbrace{|x + 2|}_{\text{como } x \in [-2, 3], \text{ de (2.108)}_{x+2}} \, dx \\ &= \int_{-4}^{-2} -(x + 2) \, dx + \int_{-2}^3 (x + 2) \, dx \\ &= - \left[ \int_{-4}^{-2} x \, dx + 2 \int_{-4}^{-2} 1 \, dx \right] + \int_{-2}^3 x \, dx + 2 \int_{-2}^3 1 \, dx \end{aligned} \quad (2.110)$$

Notemos que as funções  $F_1, F_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$F_1(x) \doteq \frac{x^2}{2}, \quad (2.111)$$

$$F_2(x) \doteq x, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (2.112)$$

são primitivas em  $\mathbb{R}$ , das funções  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f_1(x) \doteq x \quad \text{e} \quad f_2(x) \doteq 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), aplicado a cada uma das parcelas de (2.110), teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{-2} x \, dx &\stackrel{(2.97)}{=} \left[ F_1(x) \right]_{x=-4}^{x=-2} \\ &\stackrel{(2.111)}{=} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=-4}^{x=-2} \\ &= \frac{(-2)^2 - (-4)^2}{2} \\ &= -6, \end{aligned} \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{-2} 1 \, dx &\stackrel{(2.97)}{=} \left[ F_2(x) \right]_{x=-4}^{x=-2} \\ &\stackrel{(2.112)}{=} \left[ x \right]_{x=-4}^{x=-2} \\ &= (-2) - (-4) \\ &= 2, \end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 x \, dx &\stackrel{(2.97)}{=} F_1(x) \Big|_{x=-2}^{x=3} \\ &\stackrel{(2.111)}{=} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=-2}^{x=3} \\ &= \frac{3^2 - (-2)^2}{2} \\ &= \frac{5}{2}, \end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 1 \, dx &\stackrel{(2.97)}{=} \left[ F_2(x) \right]_{x=-2}^{x=3} \\ &\stackrel{(2.112)}{=} \left[ x \right]_{x=-2}^{x=3} \\ &= 3 - (-2) \\ &= 5. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Logo, de substituindo (2.113), (2.114), (2.115) e (2.116) em (2.110), obteremos:

$$\begin{aligned} \int_{-4}^3 |x+2| \, dx &= -[-6 + 2 \cdot 2] + \frac{5}{2} + 2 \cdot 5 \\ &= \frac{29}{2}, \end{aligned} \tag{2.117}$$

completando a resolução.

□

Temos a

**Observação 2.5.4** Como a função  $f$ , dada por (2.106), do Exemplo 2.5.2 acima, é não negativa em  $[-4, 3]$ , ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{(2.106)}{=} |x + 2| \\ &\geq 0, \quad \text{para } x \in [-4, 3], \end{aligned} \quad (2.118)$$

e integrável em  $[-4, 3]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da área, que denotaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = -4$ ,  $x = 3$  e do eixo  $Ox$  será de

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\stackrel{(2.44)}{=} \int_a^b f(x) \, dx \\ &\stackrel{(2.106)}{=} \int_{-4}^3 |x + 2| \, dx \\ &\stackrel{(2.117)}{=} \frac{29}{2} \text{ u.a.}, \end{aligned}$$

isto é, o valor da integral definida (2.107).

Podemos aplicar o Teorema 2.5.1 ao:

**Exemplo 2.5.3** Consideremos a função  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt, \quad \text{para } x \in [0, \infty). \quad (2.119)$$

Mostre que a função  $F$  é diferenciável em  $[0, \infty)$  e calcule sua derivada  $F'(x)$ , para cada  $x \in [0, \infty)$ .

### Resolução:

Notemos que a função  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(t) \doteq \frac{1}{1+t^2}, \quad \text{para } t \in [0, \infty), \quad (2.120)$$

é contínua em  $[0, \infty)$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, do Teorema 2.5.1, segue que a função  $F$ , dada por (2.119), é diferenciável em  $[0, x]$ , para cada  $x \in [0, \infty)$ .

Além disso, para cada  $x \in [0, \infty)$ , teremos:

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(2.119)}{=} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt \right] \\ &\stackrel{(2.120)}{=} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x f(t) \, dt \right] \\ &\stackrel{(2.89)}{=} \underset{a \doteq 0}{\text{com}} f(x) \\ &\stackrel{(2.120)}{=} \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

Um outro caso semelhante é dado pelo:

**Exemplo 2.5.4** Consideremos a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , função dada por

$$F(x) \doteq \int_x^{x^3} \text{sen}(t^2) dt, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (2.121)$$

Mostre que a função  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e calcule sua derivada  $F'(x)$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) \doteq \text{sen}(t^2), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (2.122)$$

Como a função  $f$ , dada por (2.122), é contínua em  $\mathbb{R}$  segue, do Teorema 2.3.1, segue que a função  $f$  é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado contido em  $\mathbb{R}$ , em particular, em  $[0, x]$ , se  $x \geq 0$ , ou em  $[x, 0]$ , se  $x \leq 0$ .

Logo a função  $F$ , dada por (2.121) está bem definida.

Além disso, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , do item 4. da Proposição 2.4.1, temos que:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{(2.121)}{=} \int_x^{x^3} \text{sen}(t^2) dt \\ &\stackrel{(2.68)}{=} \int_x^0 \text{sen}(t^2) dt + \int_0^{x^3} \text{sen}(t^2) dt \\ &\stackrel{(2.45)}{=} - \int_0^x \text{sen}(t^2) dt + \int_0^{x^3} \text{sen}(t^2) dt. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Observemos que, do Teorema 2.5.1, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \text{sen}(t^2) dt \right] &\stackrel{(2.122)}{=} \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt \\ &\stackrel{(2.89)}{=} f(x) \\ &\stackrel{(2.122)}{=} \text{sen}(x^2), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Notemos que a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x) \doteq x^3, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (2.125)$$

é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$g'(x) = 3x^2, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (2.126)$$

Notemos que, do Teorema 2.5.1, temos que a função  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h(y) \doteq \int_0^y \text{sen}(t^2) dt, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}, \quad (2.127)$$

é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, teremos

$$\begin{aligned} h'(y) &\stackrel{(2.127)}{=} \frac{d}{dy} \left[ \int_0^y \text{sen}(t^2) dt \right] \\ &\stackrel{(2.89)}{=} \text{sen}(y^2), \quad \text{para } y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Logo, da regra da cadeia (como visto na disciplina de Cálculo 1), segue que a função  $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F_1(x) \doteq h[g(x)] \tag{2.129}$$

$$\stackrel{(2.125) \text{ e } (2.127)}{=} \int_0^{x^3} \text{sen}(t^2) dt, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

também será diferenciável em  $\mathbb{R}$ .

Assim, da regra da cadeia (como visto na disciplina de Cálculo 1), teremos:

$$F_1'(x) \stackrel{(2.129)}{=} \frac{d}{dx}\{h[g(x)]\}$$

$$\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} h'[g(x)] g'(x)$$

$$\stackrel{(2.128) \text{ e } (2.126)}{=} \text{sen}\{[g(x)]^2\} 3x^2$$

$$\stackrel{(2.125)}{=} \text{sen}(x^6) 3x^2, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \tag{2.130}$$

Portanto, de (2.124) e (2.130), segue que a função  $F$  será diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, para  $x \in \mathbb{R}$ , teremos

$$F'(x) \stackrel{(2.123)}{=} \frac{d}{dx} \left[ - \int_0^x \text{sen}(t^2) dt \right] + \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{x^3} \text{sen}(t^2) dt \right]$$

$$\stackrel{(2.124) \text{ e } (2.130)}{=} -\text{sen}(x^2) + 3x^2 \text{sen}(x^6), \tag{2.131}$$

completando a resolução. □

A seguir deixaremos para o leitor os:

**Exercício 2.5.1** Mostre que a função  $f : \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \text{para } x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \tag{2.132}$$

é integrável em  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x) dx. \tag{2.133}$$

### Resolução:

Como visto na disciplina de Cálculo 1, temos que a função  $f$  é contínua em  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ .

Logo, do Teorema 2.3.1, segue que a função  $f$  é integrável em  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ .

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função  $f$  e depois aplicar o Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2).

Notemos que a função  $F : \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \text{sen}(x), \quad \text{para } x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \tag{2.134}$$

é uma primitiva da função  $f$  em  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , pois

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(2.134)}{=} [\text{sen}]'(x) \\ &= \cos(x) \\ &\stackrel{(2.132)}{=} f(x), \quad \text{para } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Assim, do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), temos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x) \, dx &\stackrel{(2.132)}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \, dx \\ &\stackrel{(2.97)}{=} \left[ F(x) \right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}} \\ &\stackrel{(2.134)}{=} \left[ \text{sen}(x) \right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}} \\ &= \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1 - 1 \\ &= -2, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

### 4.a AULA

## 2.6 Integração por partes para integral definida

Temos o:

### Teorema 2.6.1 (da integração por partes, para integral definida)

*Suponhamos que  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são continuamente diferenciáveis em  $[a, b]$  (isto é, as funções  $f'$  e  $g'$  são funções contínuas em  $[a, b]$ ).*

*Então teremos:*

$$\int_a^b f(x) g'(x) \, dx = [f(x) g(x)] \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x) f'(x) \, dx. \quad (2.135)$$

#### Demonstração:

Notemos que do fato que as funções  $f$  e  $g$  são continuamente diferenciáveis em  $[a, b]$ , temos que as funções

$$fg, \quad fg' \quad \text{e} \quad gf'$$

são contínuas em  $[a, b]$ .

Logo, do Teorema 2.3.1, segue que as funções acima são integráveis em  $[a, b]$ , ou seja, existem as integrais definidas

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx, \quad \int_a^b f(x) g'(x) \, dx \quad \text{e} \quad \int_a^b f'(x) g(x) \, dx.$$

Sabemos que, da derivada do produto das funções  $f$  e  $g$ , teremos

$$f(x) g'(x) dx = [fg]'(x) - g(x) f'(x), \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (2.136)$$

Logo, do item 3. da Proposição 2.4.1 e do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), segue que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g'(x) dx &\stackrel{(2.136)}{=} \int_a^b \{[fg]'(x) - g(x) f'(x)\} dx \\ &\stackrel{(2.67)}{=} \int_a^b [fg]'(x) dx - \int_a^b g(x) f'(x) dx \\ &\stackrel{(2.97), \text{ com } G(x) \doteq f(x)g(x), \text{ para } x \in [a, b]}{=} [f(x)g(x)] \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x) f'(x) dx, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (2.135) e completando a demonstração. □

Temos a:

**Observação 2.6.1** *Se consideramos*

$$u \doteq f(x), \quad v \doteq g(x), \quad \text{para } x \in [a, b],$$

*então teremos*

$$du = f'(x) dx \quad e \quad dv = g'(x) dx$$

*e a fórmula (2.135) acima, poderá ser escrita da seguinte forma abreviada:*

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v du. \quad (2.137)$$

Podemos aplicar o resultado acima ao:

**Exemplo 2.6.1** *Mostre que a função  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$f(x) \doteq x \operatorname{sen}(x), \quad \text{para } x \in [0, \pi], \quad (2.138)$$

*é integrável em  $[0, \pi]$  e encontre o valor da integral definida*

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen}(x) dx. \quad (2.139)$$

**Resolução:**

Como visto na disciplina de Cálculo 1, a função  $f$  é contínua em  $[0, \pi]$ .

Logo, do Teorema 2.3.1, segue que a função  $f$  é integrável em  $[0, \pi]$ .

Para calcular o valor da integral definida utilizaremos o Teorema da integração por partes para a integral definida (ou seja, o Teorema 2.6.1).

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(x) \, dx & \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x, \text{ teremos } du = dx \\ \text{se } dv \doteq \operatorname{sen}(x) \, dx, \text{ podemos considerar: } v = -\cos(x) \end{array} \right\} \\
 & = \int_0^{\pi} u \, dv \\
 & \stackrel{(2.137)}{=} uv \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} v \, du \\
 & = \{x [-\cos(x)]\} \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} [-\cos(x)] \, dx \\
 & = \left[ \underbrace{-\pi \cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{0 \cos(0)}_{=0} \right] - \int_0^{\pi} [-\cos(x)] \, dx \\
 & = \pi + \int_0^{\pi} \cos(x) \, dx. \tag{2.140}
 \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \cos(x) \, dx & \text{ como } [\operatorname{sen}(x)]' = \cos(x), \text{ para } x \in [0, \pi], \text{ do Teorema fundamental do Cálculo, teremos: } \left[ \operatorname{sen}(x) \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
 & = \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0} - \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} = 0. \tag{2.141}
 \end{aligned}$$

Logo, substituindo (2.141) em (2.140), obteremos

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(x) \, dx = \pi, \tag{2.142}$$

completando a resolução. □

Temos a:

**Observação 2.6.2** Como a função  $f$ , dada por (2.138), do Exemplo 2.6.1 acima (dada por (2.138)), é não negativa em  $[0, \pi]$ , ou seja,

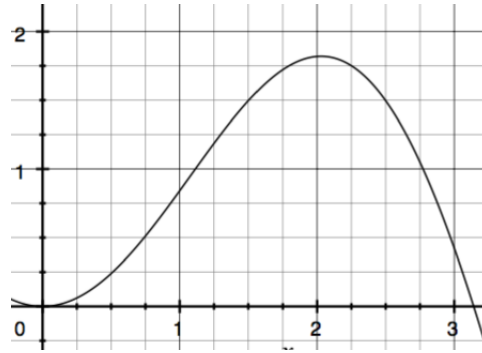
$$\begin{aligned}
 f(x) & \stackrel{(2.138)}{=} x \operatorname{sen}(x) \\
 & \geq 0, \quad \text{para } x \in [0, \pi]
 \end{aligned}$$

e é integrável em  $[0, \pi]$  (pois é contínua em  $[0, \pi]$ ), do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da integral definida (2.141) será igual ao valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x=0$ ,  $x=\pi$  e do eixo  $Ox$ , ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} & \stackrel{(2.44)}{=} \int_a^b f(x) \, dx \\
 & \stackrel{(2.138)}{=} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(x) \, dx \\
 & \stackrel{(2.142)}{=} \pi \text{ u.a..}
 \end{aligned}$$

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica para o gráfico da região  $\mathcal{R}$  descrita acima.





## 2.7 Integração por substituição para integrais definidas

Temos também o:

**Teorema 2.7.1** (da integração por substituição, para integral definida) *Sejam  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $[a, b]$  e  $f : g([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $g([a, b])$  e tal que a função  $F : g([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva de  $f$  em  $g([a, b])$ , isto é,*

$$F'(y) = f(y), \quad \text{para } y \in g([a, b]). \quad (2.143)$$

Então teremos

$$\begin{aligned} \int_a^b f[g(x)] g'(x) dx &= F[g(b)] - F[g(a)] \\ &= F[g(x)] \Big|_{x=a}^{x=b}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

### Demonstração:

Como visto na disciplina de Cálculo 1, da regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} [F \circ g]'(x) &= F'(g(x)) g'(x) \\ &\stackrel{(2.143)}{=} f(g(x)) g'(x), \quad \text{para } x \in [a, b], \end{aligned}$$

ou seja, a função  $F \circ g$  é uma primitiva da função  $f \circ g'$  em  $[a, b]$ .

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), segue que

$$\int_a^b f[g(x)] g'(x) dx = F[g(b)] - F[g(a)],$$

como queríamos demonstrar. □

Temos a:

**Observação 2.7.1** *Notemos que, do Teorema (2.5.1), segue que a função  $G : g([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$G(x) \doteq \int_{g(a)}^x f(t) dt, \quad \text{para cada } x \in g([a, b]), \quad (2.145)$$

*é uma primitiva da função  $f$  em  $g([a, b])$ .*

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), temos que (2.144) é equivalente à

$$\begin{aligned} \int_a^b f[g(x)] g'(x) dx &= G[g(b)] - \underbrace{G[g(a)]}_{(2.145)_0} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy, \end{aligned} \quad (2.146)$$

ou seja, o Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema 2.7.1), nos diz como **mudar de variáveis** em uma integral definida, mais precisamente:

Se

$$g : [a, b] \rightarrow g([a, b])$$

é uma função bijetora e continuamente diferenciável em  $[a, b]$ , teremos :

$$\text{considerando-se: } y \doteq g(x), \quad \text{para } x \in [a, b], \quad (2.147)$$

$$\text{segue que: } dy = g'(x) dx. \quad (2.148)$$

$$\text{Logo, em (2.147), se } x = a,$$

$$\text{teremos: } y_a = g(a).$$

$$\text{E, em (2.147), se } x = b,$$

$$\text{teremos: } y_b = g(b),$$

$$\text{e assim, (2.146), implicará em: } \int_a^b \underbrace{f[g(x)]}_{(2.147)_y} \underbrace{g'(x) dx}_{(2.148)_{dy}} = \int_{y_a}^{y_b} f(y) dy. \quad (2.149)$$

Aplicamos estas ideias ao:

**Exemplo 2.7.1** Mostre que a função  $h : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h(x) \doteq \text{sen}(x) \cos(x), \quad \text{para } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (2.150)$$

é integrável em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) \cos(x) dx. \quad (2.151)$$

### Resolução:

Como visto na disciplina de Cálculo 1, a função  $h$ , dada por (2.150), é contínua em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Logo, do Teorema 2.3.1, segue que a função  $h$  é integrável em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Para calcular a integral definida utilizaremos o Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema (2.7.1)).

Para tanto consideremos as funções

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

dadas por

$$f(y) \doteq y, \quad \text{para } y \in \mathbb{R} \quad (2.152)$$

e

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ &\doteq \text{sen}(x), \quad \text{para } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$\text{teremos: } g'(x) = \cos(x), \quad \text{para } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (2.154)$$

Notemos que a função  $g$  é bijetora e continuamente diferenciável em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Desta forma

$$\begin{aligned} \text{segue que: } \quad dy &= g'(x) dx \\ &\stackrel{(2.154)}{=} \cos(x) dx. \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\text{Logo, em (2.153), se } x = a \doteq -\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{teremos: } \quad y_a &= g(a) \\ &\stackrel{(2.153)}{=} \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1. \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\text{E, em (2.153), se } x = b \doteq \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{teremos: } \quad y_b &= g(b), \\ &\stackrel{(2.153)}{=} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Logo das considerações acima e o Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema 2.7.1) (mais especificamente a Observação 2.7.1), segue que:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) \cos(x) dx &\stackrel{(2.152), (2.153), (2.154)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{f[g(x)]}_{\stackrel{(2.153)}{=} y} \underbrace{g'(x) dx}_{\stackrel{(2.155)}{=} dy} \\ &\stackrel{(2.146)}{=} \int_{g(-\frac{\pi}{2})}^{g(\frac{\pi}{2})} f(y) dy \\ &\stackrel{(2.152), (2.153)}{=} \int_{\text{sen}(-\frac{\pi}{2})}^{\text{sen}(\frac{\pi}{2})} y dy \\ &\stackrel{(2.156), (2.157)}{=} \int_{-1}^1 y dy \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo}}{=} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=-1}^{y=1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

completando a resolução.

□

Temos a:

**Observação 2.7.2** *Notemos que a integral definida (2.151), do Exemplo 2.7.1 acima, não nos fornece a área da região delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $h$ , das retas  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  e do eixo  $Ox$ , pois esta função não é não negativa (ou seja, maior ou igual a zero).*

Deixaremos a cargo do leitor a leitura da resolução do:

**Exercício 2.7.1** *Mostre que a função  $h: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$h(x) \doteq \text{sen}(8x), \quad \text{para } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (2.158)$$

*é integrável em  $[0, \frac{\pi}{2}]$  e encontre o valor da integral definida*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(8x) \, dx. \quad (2.159)$$

### Resolução:

Como visto na disciplina de Cálculo 1, a função  $h$ , dada por (2.158), é contínua em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Logo, pelo Teorema 2.3.1, será integrável em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função  $f$  e depois aplicarmos o Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2).

Para tanto consideremos as funções

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 4\pi]$$

dadas por

$$f(y) \doteq \text{sen}(y), \quad \text{para } y \in \mathbb{R} \quad (2.160)$$

e

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ &\doteq 8x, \quad \text{para } x \in [0, 4\pi], \end{aligned} \quad (2.161)$$

$$\text{teremos: } g'(x) = 8, \quad \text{para } x \in [0, 4\pi]. \quad (2.162)$$

Notemos que a função  $g$  é bijetora e continuamente diferenciável em  $[0, 4\pi]$ .

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor. Desta forma

$$\begin{aligned} \text{segue que: } \quad dy &= g'(x) dx \\ &\stackrel{(2.162)}{=} 8 dx. \end{aligned} \tag{2.163}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, em (2.161), se } \quad x &= a \doteq 0, \\ \text{teremos: } \quad y_a &= g(a) \\ &= g(0) \\ &\stackrel{(2.161)}{=} 0. \end{aligned} \tag{2.164}$$

$$\begin{aligned} \text{E, em (2.161), se } \quad x &= b \doteq 4\pi, \\ \text{teremos: } \quad y_b &= g(b), \\ &= g\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\stackrel{(2.161)}{=} 4\pi. \end{aligned} \tag{2.165}$$

Logo das considerações acima e o Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema 2.7.1, mais especificamente a Observação 2.7.1), segue que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(8x) dx &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(8x) 8 dx \\ &\stackrel{(2.160), (2.161), (2.162)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{f[g(x)]}_{(2.161)_y} \underbrace{g'(x) dx}_{(2.163)_y} \\ &\stackrel{(2.146)}{=} \frac{1}{8} \int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{2})} f(y) dy \\ &\stackrel{(2.160), (2.164), (2.165)}{=} \int_0^{4\pi} \text{sen}(y) dy \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo}}{=} -\cos(y) \Big|_{y=0}^{y=4\pi} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

Temos a:

**Observação 2.7.3** *Notemos que a integral definida (2.159), do Exercício 2.7.1 acima, não nos fornece a área da região delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $h$ , das retas  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  e do eixo  $Ox$ , pois esta função não é não negativa (ou seja, maior ou igual a zero).*

Para finalizar este capítulo temos as

**Proposição 2.7.1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $2L$ -periódica, ou seja*

$$f(x + 2L) = f(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \tag{2.166}$$

e integrável em  $[-L, L]$ .

Então

$$\int_0^{2L} f(x) dx = \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (2.167)$$

Em geral, temos que para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixado, teremos

$$\int_{x_0-L}^{x_0+L} f(x) dx = \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (2.168)$$

### Demonstração:

Notemos que, do item 4. da Proposição 2.4.1, temos

$$\int_{-L}^L f(x) dx \stackrel{(2.68)}{=} \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^{2L} f(x) dx + \int_{2L}^L f(x) dx. \quad (2.169)$$

Aplicaremos o Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema 2.7.1, mais especificamente a Observação 2.7.1).

Mais precisamente, notemos que

$$\begin{aligned} \text{se } y &= g(x) \\ &\doteq x - 2L \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} \text{que é bijetora e continuamente diferenciável em } \mathbb{R}, \text{ teremos: } & dy = g'(x) dx \\ & \stackrel{(2.170)}{=} dx, \end{aligned} \quad (2.171)$$

$$\begin{aligned} \text{e se } x &= 2L, \\ \text{de (2.170), teremos: } & y = 0 \end{aligned} \quad (2.172)$$

$$\begin{aligned} \text{e se } x &= L, \\ \text{de (2.170), teremos: } & y = -L. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Logo, do Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema 2.7.1, mais especificamente a Observação 2.7.1), segue que

$$\begin{aligned} \int_{2L}^L f(x) dx & \stackrel{(2.170),(2.171),(2.172),(2.173)}{=} \int_0^{-L} f(y + 2L) dy \\ & \stackrel{(2.166)}{=} \int_0^{-L} f(y) dy \\ & \stackrel{(2.45)}{=} - \int_{-L}^0 f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Portanto, substituindo (2.174) em (2.169), segue que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^{2L} f(x) dx - \int_{-L}^0 f(x) dx \\ &= \int_0^{2L} f(x) dx, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

A demonstração da identidade (2.168) será deixada como exercício para o leitor. □

Temos também a:

**Proposição 2.7.2** *Seja  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par, isto é,*

$$f(-x) = f(x), \quad \text{para } x \in [-a, a] \quad (2.175)$$

*e integrável em  $[-a, a]$ .*

*Então*

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (2.176)$$

**Demonstração:**

De fato, notemos que, do item 4. da Proposição 2.4.1, temos

$$\int_{-a}^a f(x) dx \stackrel{(2.68)}{=} \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad (2.177)$$

Aplicaremos o Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema 2.7.1, mais especificamente Observação 2.7.1)

Mais precisamente, notemos que

$$\begin{aligned} \text{se } y &= g(x) \\ &\doteq -x \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$\begin{aligned} \text{que é bijetora e continuamente diferenciável em } \mathbb{R}, \text{ teremos: } dy &= g'(x) dx \\ &\stackrel{(2.178)}{=} -dx, \end{aligned} \quad (2.179)$$

$$\begin{aligned} \text{e se } x &= -a, \\ \text{de (2.178), teremos: } y &= a \end{aligned} \quad (2.180)$$

$$\begin{aligned} \text{e se } x &= 0, \\ \text{de (2.178), teremos: } y &= 0. \end{aligned} \quad (2.181)$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &\stackrel{(2.178), (2.179), (2.180), (2.181)}{=} - \int_a^0 f(y) dy \\ &\stackrel{(2.45)}{=} \int_0^a f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Portanto substituindo-se (2.182) em (2.177) obteremos

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Temos também a:

**Proposição 2.7.3** *Seja  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ímpar, isto é,*

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{para } x \in [-a, a] \quad (2.183)$$

*e integrável em  $[-a, a]$ .*

*Então*

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (2.184)$$

**Demonstração:**

De fato, notemos que, do item 4. da Proposição 2.4.1, temos que

$$\int_{-a}^a f(x) dx \stackrel{(2.68)}{=} \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad (2.185)$$

Aplicaremos o Teorema da substituição para a integral definida (ou seja, o Teorema 2.7.1, mais especificamente Observação 2.7.1)

Mais precisamente, notemos que

$$\begin{aligned} \text{se } y &= g(x) \\ &\doteq -x \end{aligned} \quad (2.186)$$

que é bijetora e continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}$ , teremos:

$$\begin{aligned} dy &= g'(x) dx \\ &\stackrel{(2.178)}{=} -dx, \end{aligned} \quad (2.187)$$

$$\text{e se } x = -a,$$

$$\text{de (2.178), teremos: } y = a \quad (2.188)$$

$$\text{e se } x = 0,$$

$$\text{de (2.178), teremos: } y = 0. \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &\stackrel{(2.186),(2.187),(2.188),(2.189)}{=} \int_a^0 f(-y) (-dy) \\ &\stackrel{(2.183)}{=} - \int_0^a f(y) dy, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(y) dy. \quad (2.190)$$

Portanto substituindo-se (2.190) em (2.185), obteremos:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= - \int_0^a f(y) dy + \int_0^a f(x) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Temos a:

**Observação 2.7.4** Como visto na disciplina de Cálculo 1,

1. se as funções  $f, g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções pares, então as funções

$$f \cdot g, \quad f + g, \quad f - g \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}$$

(onde esta última estiver definida) também serão funções pares.

2. Por outro lado, se as funções  $f, g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  forem ímpares, então as funções

$$f \cdot g \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}$$



(onde esta última estiver definida) serão funções pares e as funções

$$f + g \quad \text{e} \quad f - g$$

serão funções ímpares.

3. Notemos também que se a função  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função par e a função  $g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função ímpar, então as funções

$$f \cdot g \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}$$

(onde esta última estiver definida) serão funções ímpares.

As demonstrações dos fatos acima serão deixadas como exercício para o leitor.



## Capítulo 3

# Integrais indefinidas de funções reais de uma variável real

### 5.a AULA

## 3.1 Primitiva de uma função real de uma variável real

Temos a:

**Observação 3.1.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}$  não vazio e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.*

*Nosso objetivo neste capítulo será encontrar, se existir, uma função  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  que seja diferenciável em  $\underline{A}$ , tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \text{para } x \in A. \quad (3.1)$$

Começaremos introduzindo a:

**Definição 3.1.1** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e suponhamos que exista uma função  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ , que seja diferenciável em  $\underline{A}$ , tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \text{para } x \in A. \quad (3.2)$$

*Neste caso a função  $F$  será denominada primitiva (ou anti-derivada) da função  $f$  no conjunto  $\underline{A}$ .*

Consideremos os:

**Exemplo 3.1.1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por*

$$f(x) \doteq 3x^2 - 4x + 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

*Mostre que a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$F(x) \doteq x^3 - 2x^2 + x, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

*é uma primitiva da função  $f$  em  $\mathbb{R}$ .*

**Resolução:**

Notemos que, a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  (pois é uma função polinomial) e

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(3.4)}{=} \frac{d}{dx} [x^3 - 2x^2 + x] \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \\ &\stackrel{(3.3)}{=} f(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 3.1.1, que a função  $\underline{F}$  é uma primitiva da função  $\underline{f}$  em  $\mathbb{R}$ . □

Temos também o:

**Exemplo 3.1.2** Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Mostre que a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \text{sen}(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

é uma primitiva da função  $\underline{f}$  em  $\mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Notemos que a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, para  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(3.6)}{=} \frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] \\ &= \cos(x) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} f(x), \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 3.1.1, que a função  $\underline{F}$  é uma primitiva da função  $\underline{f}$  em  $\mathbb{R}$ . □

De modo semelhante, temos o:

**Exercício 3.1.1** Consideremos a função  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{para } x \in (-1, 1). \quad (3.7)$$

Mostre que a função  $F: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \arccos(x), \quad \text{para } x \in (-1, 1) \quad (3.8)$$

é uma primitiva da função  $\underline{f}$  em  $(-1, 1)$ .

**Resolução:**

Notemos que a função  $F: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $(-1, 1)$  e, além disso, para  $x \in (-1, 1)$ , temos

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(3.8)}{=} \frac{d}{dx}[\arccos(x)] \\ &\stackrel{\text{visto em Cálculo I}}{=} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\stackrel{(3.7)}{=} f(x), \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 3.1.1, que a função  $\underline{F}$  é uma primitiva da função  $\underline{f}$  em  $(-1, 1)$ . □

## 3.2 Propriedades da primitiva

Temos as seguintes propriedades gerais para as primitivas de funções:

**Proposição 3.2.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}$  não vazio e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.*

1. *Se a função  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função  $f$  no conjunto  $A$  e  $C \in \mathbb{R}$ , então a função  $G : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$G(x) \doteq F(x) + C, \quad \text{para } x \in A, \quad (3.9)$$

*será um primitiva da função  $f$  no conjunto  $A$ .*

2. *Se o conjunto  $A$  é um **intervalo de  $\mathbb{R}$**  e as funções  $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}$  são primitivas da função  $f$  no conjunto  $A$ , então podemos encontrar  $C \in \mathbb{R}$ , de modo que*

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{para } x \in A. \quad (3.10)$$

**Demonstração:**

**Do item 1.:**

Como a função  $F$  é uma primitiva da função  $f$  no conjunto  $A$ , pela Definição 3.1.1, temos que a função  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no conjunto  $A$  e, além disso, temos

$$F'(x) = f(x), \quad \text{para } x \in A. \quad (3.11)$$

Logo a função  $G : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$G(x) \doteq F(x) + C, \quad \text{para } x \in A, \quad (3.12)$$

será diferenciável no conjunto  $A$  e, além disso, para  $x \in A$ , temos

$$\begin{aligned} G'(x) &\stackrel{(3.12)}{=} \frac{d}{dx}[F(x) + C] \\ &= F'(x) + \underbrace{\frac{d}{dx}[C]}_{=0} \\ &\stackrel{(3.11)}{=} f(x), \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 3.1.1, que a função  $G$  também é uma primitiva da função  $f$  no conjunto  $A$ .

**Do item 2. :**

Como as funções  $F, G$  são primitivas da função  $f$  no conjunto  $A$ , então, pela Definição 3.1.1, temos que as funções  $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis no conjunto  $A$  e, além disso, para  $x \in A$ , teremos

$$F'(x) = f(x) = G'(x), \quad \text{para } x \in A. \quad (3.13)$$

Logo a função  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h(x) \doteq G(x) - F(x), \quad \text{para } x \in A, \quad (3.14)$$

será uma função diferenciável no conjunto  $A$  e, além disso, para  $x \in A$ , teremos:

$$\begin{aligned} h'(x) &\stackrel{(3.14)}{=} \frac{d}{dx}[G(x) - F(x)] \\ &= G'(x) - F'(x) \\ &\stackrel{(3.13)}{=} f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como o conjunto  $A$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$  segue, de um resultado de Cálculo I, que podemos encontrar  $C \in \mathbb{R}$ , de modo que

$$\begin{aligned} h(x) &= C, \quad \text{para } x \in A, \\ \text{ou seja, de (3.14), teremos: } G(x) &= F(x) + C, \quad \text{para } x \in A, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Temos a:

### Observação 3.2.1

1. No item 2. da Proposição 3.2.1 acima, se o conjunto  $A$  **não** for um intervalo, a conclusão poderá ser falsa, como mostra o seguinte exemplo:

Sejam  $f, F, G : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por:

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \begin{cases} 1, & \text{para } x \in (0, \infty) \\ -1, & \text{para } x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \\ F(x) &\doteq \begin{cases} x + 2, & \text{para } x \in (0, \infty) \\ -x, & \text{para } x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \\ \text{e } G(x) &\doteq \begin{cases} x, & \text{para } x \in (0, \infty) \\ -x + 3, & \text{para } x \in (-\infty, 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Com isto, temos que as funções  $f, F, G$  são diferenciáveis em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e, para  $x \neq 0$ , temos que

$$F'(x) = G'(x) = f(x).$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Notemos que **não** existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$F(x) = G(x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

2. Notemos que se a função  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função  $f$  no conjunto  $A$  então, para cada  $x \in A$ , temos que

$$\begin{aligned} dF(x) &= F'(x) dx \\ &\stackrel{(3.2)}{=} f(x) dx, \end{aligned} \tag{3.15}$$

ou seja, a diferencial da função  $F$  será dada por:

$$dF(x) = f(x) dx, \quad \text{para cada } x \in A. \tag{3.16}$$

### 3.3 Integrais indefinidas

Iniciaremos com a

**Observação 3.3.1** Como conclusão dos itens 1. e 2. da Proposição 3.2.1 acima temos que, se o conjunto  $A$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$  e a função  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função  $f$  no conjunto  $A$ , então qualquer outra primitiva, que indicaremos por  $G: A \rightarrow \mathbb{R}$ , da função  $f$  deverá ser da forma

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{para } x \in A, \quad (3.17)$$

para algum  $C \in \mathbb{R}$ .

Com isto podemos introduzir a:

**Definição 3.3.1** Dada uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  a coleção formada por todas as funções primitivas da função  $f$  no conjunto  $A$ , será denominada integral indefinida da função  $f$  no conjunto  $A$  e indicada por

$$\int f(x) dx, \quad \text{ou seja, } \int f(x) dx \doteq \{F: A \rightarrow \mathbb{R}; F \text{ é uma primitiva da função } f \text{ no conjunto } A\}. \quad (3.18)$$

**Observação 3.3.2** Notemos que se o conjunto  $A$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ , se a função  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função  $f$  no conjunto  $A$  então, da Observação 3.3.1, segue que

$$\int f(x) dx = \{G: A \rightarrow \mathbb{R}; \text{ onde } G(x) = F(x) + C, \text{ para } x \in A \text{ e } C \in \mathbb{R}\}. \quad (3.19)$$

No caso acima, por abuso de notação, escreveremos:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{para } x \in A, \quad (3.20)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

Com isto temos o:

**Exemplo 3.3.1** Calcule a integral indefinida  $\int f(x) dx$ , onde a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(x) \doteq 3x^2 - 4x + 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

**Resolução:**

Observemos que, do Exemplo 3.1.1, temos que a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq x^3 - 2x^2 + x, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

é uma primitiva da função  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

Como

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

é um intervalo, da Observação 3.3.2, segue

$$\int f(x) dx = \{G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{ onde } G(x) = F(x) + C, \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } C \in \mathbb{R}\},$$

$$\stackrel{(3.22)}{=} \{G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{ onde } G(x) = x^3 - 2x^2 + x + C, \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } C \in \mathbb{R}\},$$

ou, de modo simplificado:

$$\int (3x^2 - 4x + 1) dx \stackrel{(3.20)}{=} F(x) + C$$

$$\stackrel{(3.22)}{=} x^3 - 2x^2 + x + C, \quad \text{cada } x \in \mathbb{R},$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução. □

Temos o:

**Exemplo 3.3.2** Calcule a integral indefinida  $\int f(x) dx$ , onde a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(x) \doteq \cos(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

### Resolução:

Notemos que, do Exemplo 3.1.2, sabemos que a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \text{sen}(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (3.24)$$

é uma primitiva da função  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

Como

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty),$$

ou seja, é um intervalo, da Observação (3.3.2), segue

$$\int f(x) dx = \{G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{ onde } G(x) = F(x) + C, \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } C \in \mathbb{R}\},$$

$$= \{G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{ onde } G(x) = \text{sen}(x) + C, \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } C \in \mathbb{R}\},$$

ou, de modo simplificado:

$$\int \cos(x) dx \stackrel{(3.20)}{=} F(x) + C$$

$$\stackrel{(3.24)}{=} \text{sen}(x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução. □

## 3.4 Propriedades da integral indefinida

Temos o seguinte resultado básico para integrais indefinidas:

**Proposição 3.4.1** *Sejam  $A$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas,  $a, r \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .*



Então:

$$1. \int (\alpha f)(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \quad \text{para } x \in A; \quad (3.25)$$

$$2. \int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \text{para } x \in A; \quad (3.26)$$

$$3. \int (f - g)(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx, \quad \text{para } x \in A; \quad (3.27)$$

$$4. \int 1 dx = x + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \text{ onde } C \in \mathbb{R} \text{ é arbitrária}; \quad (3.28)$$

$$5. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ onde } C \in \mathbb{R} \text{ é arbitrária}; \quad (3.29)$$

Além disso, se  $x \in (0, \infty)$ , temos que

$$6. \int x^r dx = \begin{cases} \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, & \text{se } r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ \ln(x), & \text{se } r = -1 \end{cases}, \quad (3.30)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

### Demonstração:

De (3.25):

Se a função  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  no conjunto  $\underline{A}$ , então, pela Definição 3.1.1, temos função  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no conjunto  $\underline{A}$  e, além disso, teremos

$$F'(x) = f(x), \quad \text{para } x \in A. \quad (3.31)$$

Lodo, a função  $(\alpha F) : A \rightarrow \mathbb{R}$  será diferenciável no conjunto  $\underline{A}$  e, além disso, para cada  $x \in A$ , temos que

$$\begin{aligned} [\alpha F]'(x) &= \alpha F'(x) \\ &\stackrel{(3.31)}{=} \alpha f(x), \end{aligned} \quad (3.32)$$

mostrando, pela Definição 3.1.1, segue que a função  $(\alpha F)$  será uma primitiva da função  $(\alpha f)$  no conjunto  $\underline{A}$ .

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \alpha \int f(x) dx &\stackrel{(3.20)}{=} \alpha [F(x) + C] \\ &= \alpha F(x) + \alpha C \\ &\stackrel{\text{definamos: } D \doteq \alpha C}{=} (\alpha F)(x) + D \\ &\stackrel{(3.20) \text{ e } (3.32)}{=} \int (\alpha f)(x) dx, \quad \text{para } x \in A, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (3.25).

De (3.26):

Como as funções  $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}$  são primitivas das funções  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  no conjunto  $\underline{A}$ , respectivamente, então, pela Definição 3.1.1, temos que as funções  $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}$  serão diferenciável no conjunto  $A$  e, além disso, temos que

$$F'(x) = f(x), \quad (3.33)$$

$$\text{e } G'(x) = g(x), \quad \text{para } x \in A. \quad (3.34)$$

Logo, a função  $(F + G) : A \rightarrow \mathbb{R}$  será diferenciável no conjunto  $\underline{A}$  e, além disso, para cada  $x \in A$ , teremos:

$$\begin{aligned} [F + G]'(x) &= F'(x) + G'(x) \\ &\stackrel{(3.33) \text{ e } (3.34)}{=} f(x) + g(x) \\ &= (f + g)(x). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Com isto teremos

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx &\stackrel{(3.20), (3.33) \text{ e } (3.34)}{=} [F(x) + C] + [G(x) + D] \\ &\stackrel{\text{definamos: } E \doteq C+D}{=} [F(x) + G(x)] + E \\ &= (F + G)(x) + E \\ &\stackrel{(3.20) \text{ e } (3.35)}{=} \int (f + g)(x) \, dx, \quad \text{para } x \in A, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (3.26).

**De (3.27):**

Como as funções  $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}$  são primitivas das funções  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  no conjunto  $\underline{A}$ , respectivamente, então, pela Definição 3.1.1, as funções  $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}$  serão diferenciável no conjunto  $A$  e, além disso, temos que

$$F'(x) = f(x), \tag{3.36}$$

$$\text{e } G'(x) = g(x), \quad \text{para } x \in A. \tag{3.37}$$

Logo, a função  $(F - G) : A \rightarrow \mathbb{R}$  será diferenciável no conjunto  $\underline{A}$  e, além disso, para  $x \in A$ , teremos

$$\begin{aligned} [F - G]'(x) &= F'(x) - G'(x) \\ &\stackrel{(3.36) \text{ e } (3.37)}{=} f(x) - g(x) \\ &= (f - g)(x). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx &\stackrel{(3.20), (3.36) \text{ e } (3.37)}{=} [F(x) + C] - [G(x) + D] \\ &\stackrel{\text{definamos: } E \doteq C-D}{=} [F(x) - G(x)] + E \\ &= (F - G)(x) + E \\ &\stackrel{(3.20) \text{ e } (3.38)}{=} \int (f - g)(x) \, dx, \quad \text{para } x \in A, \end{aligned}$$

mostrando a validade de (3.27).

**De (3.28):**

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) \doteq 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Então a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq x, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \tag{3.40}$$

é uma primitiva da função  $f$  em  $\mathbb{R}$ , pois a função  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(3.40)}{=} \frac{d}{dx}(x) \\ &= 1 \\ &\stackrel{(3.39)}{=} f(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Assim, da Definição 3.1.1, temos que a função  $F$  é uma primitiva da função  $f$  em  $\mathbb{R}$ .  
Portanto

$$\begin{aligned} \int 1 \, dx &\stackrel{(3.20)}{=} F(x) + C \\ &\stackrel{(3.40)}{=} x + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, mostrando a validade de (3.28).

**De (3.29):**

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) \doteq x^n, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \tag{3.42}$$

Então a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \tag{3.43}$$

será uma primitiva da função  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

De fato, pois a função  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(3.43)}{=} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right] \\ &= x^n \\ &\stackrel{(3.42)}{=} f(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 3.1.1, que a função  $F$  é uma primitiva da função  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \int x^n \, dx &\stackrel{(3.20)}{=} F(x) + C \\ &\stackrel{(3.43)}{=} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, mostrando a validade de (3.29).

**De (3.30):**

Para

$$r \doteq -1,$$

consideremos a função  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq x^{-1} \\ &= \frac{1}{x}, \quad \text{para } x \in (0, \infty). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Então a função  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \ln(x), \quad \text{para } x \in (0, \infty), \quad (3.45)$$

será uma primitiva da função  $f$  em  $(0, \infty)$ .

De fato, pois a função  $F$  é diferenciável em  $(0, \infty)$  e, além disso, temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(3.45)}{=} \frac{d}{dx}[\ln(x)] \\ &= \frac{1}{x} \\ &\stackrel{(3.44)}{=} f(x), \quad \text{para } x \in (0, \infty), \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 3.1.1, que a função  $F$  é uma primitiva da função  $f$  em  $(0, \infty)$ .

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{(3.20)}{=} F(x) + C \\ &\stackrel{(3.45)}{=} \ln(x) + C, \quad \text{para } x \in (0, \infty), \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, mostrando a validade de (3.29) quando  $r = -1$ .

Por outro lado, para

$$r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

consideremos  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq x^r \\ &\text{visto na disciplina de Cálculo 1} \stackrel{1}{=} e^{r \ln(x)}, \quad \text{para } x \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Então a função  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \frac{1}{r+1} x^{r+1}, \quad \text{para } x \in (0, \infty), \quad (3.47)$$

é uma primitiva da função  $f$  em  $(0, \infty)$ .

De fato, pois a função  $F$  é diferenciável em  $(0, \infty)$  e, além disso, temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &\stackrel{(3.47)}{=} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{r+1} x^{r+1} \right] \\ &= x^r, \quad \text{para } x \in (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.48)$$

mostrando, pela Definição 3.1.1, que a função  $F$  é uma primitiva da função  $f$  em  $(0, \infty)$ .

Portanto

$$\begin{aligned} \int x^r dx &\stackrel{(3.20)}{=} F(x) + C \\ &\stackrel{(3.47)}{=} \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad \text{para } x \in (0, \infty), \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, mostrando a validade de (3.29), e completando a demonstração do resultado.  $\square$

### Observação 3.4.1

1. Com os itens da Proposição 3.4.1 podemos obter a integral indefinida de qualquer função polinomial.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. Para o caso

$$r = -1,$$

a identidade (3.30) pode ser estendida a seguinte situação (visto na disciplina de Cálculo I):

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.49)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

Isto segue do fato que a função  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \ln(|x|), \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.50)$$

é uma composta de funções diferenciáveis e assim, pela regra da cadeia será uma função diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Além disso, para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , temos

$$\frac{d}{dx} [\ln(|x|)] = \frac{1}{x}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Podemos aplicar as ideias acima ao:

**Exercício 3.4.1** Calcular as seguintes integrais indefinidas

$$1. \int (4x^2 - 3x + 2) dx, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad (3.51)$$

$$2. \int \left[ \sec^2(x) + \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{1+x^2} \right] dx, \quad \text{para } x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.52)$$

**Resolução:**

**Do item 1.:**

Dos itens (3.25), (3.26), (3.28) e (3.29) da Proposição 3.4.1 acima, segue que:

$$\begin{aligned} \int (4x^2 - 3x + 2) dx &\stackrel{(3.26)}{=} \int (4x^2) dx + \int (-3x) dx + \int 2 dx \\ &\stackrel{(3.25)}{=} 4 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int 1 dx \\ &\stackrel{(3.28) \text{ e } (3.29)}{=} 4 \frac{1}{3} x^3 - 3 \frac{1}{2} x^2 + 2x + C \\ &= \frac{4}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

**Do item 2.:**

Do item (3.25) da Proposição 3.4.1 acima, segue que:

$$\int \left[ \sec^2(x) + \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{1+x^2} \right] dx \stackrel{(3.26)}{=} \int \sec^2(x) dx + \int \operatorname{sen}(x) dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\stackrel{\substack{\frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)] = \sec^2(x), \frac{d}{dx}[-\cos(x)] = \operatorname{sen}(x), \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}(x)] = \frac{1}{1+x^2}}}{=}}{\operatorname{tg}(x) - \cos(x) + \operatorname{arctg}(x) + C},$$

para  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária. □

**Observação 3.4.2** Notemos que, no Exemplo 3.4.1, estamos considerando as funções

$$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Temos também o seguinte exercício resolvido:

**Exercício 3.4.2** Consideremos uma partícula movendo-se sobre uma reta, onde sua aceleração em cada instante é uma função  $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$a(t) \doteq (2t - 1) \text{ m/s}^2, \quad \text{para } t \in [0, \infty). \quad (3.53)$$

Sabendo-se que no instante  $t = 1$  s, sua velocidade é

$$v(1) = 3 \text{ m/s}, \quad (3.54)$$

e sua posição neste instante é

$$x(1) = 4 \text{ m}, \quad (3.55)$$

encontrar a expressão da velocidade e da posição da partícula em cada instante  $t$ .

### Resolução:

Sabemos que se a função

$$x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

nos dá o espaço em função do tempo, como uma função duas vezes diferenciável em  $[0, \infty)$ , então teremos

$$v(t) = x'(t), \quad \text{para } t \in (0, \infty) \quad (3.56)$$

$$e \quad a(t) = v'(t), \quad \text{para } t \in (0, \infty). \quad (3.57)$$

Sabemos que

$$v'(t) = a(t) \stackrel{(3.53)}{=} 2t - 1, \quad (3.58)$$

que implicará e,

$$v(t) = \int a(t) dt \stackrel{(3.53)}{=} \int (2t - 1) dt$$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} t^2 - t + C, \quad \text{para } t \in [0, \infty),$$

ou seja,  $v(t) = t^2 - t + C, \quad \text{para } t \in [0, \infty). \quad (3.59)$

Mas

$$\begin{aligned}
 & 3 \stackrel{(3.54)}{=} v(1) \\
 & \stackrel{(3.59)}{=} \text{com } t=1 \quad 1 - 1 + C, \\
 \text{ou seja,} \quad & C = 3, \\
 \text{logo,} \quad & v(t) = t^2 - t + 3, \quad \text{para } t \in [0, \infty). \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 x'(t) & \stackrel{(3.56)}{=} v(t) \\
 & \stackrel{(3.60)}{=} t^2 - t + 3, \quad \text{para } t \in [0, \infty)
 \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int v(t) dt \\
 & \stackrel{(3.60)}{=} \int (t^2 - t + 3) dt \\
 & \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 3t + C, \quad \text{para } t \in [0, \infty), \\
 \text{ou seja,} \quad & x(t) = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 3t + C, \quad \text{para } t \in [0, \infty). \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 & 4 \stackrel{(3.55)}{=} x(1) \\
 & \stackrel{(3.61)}{=} \text{com } t=1 \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 + C, \\
 \text{isto é,} \quad & C \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{7}{6}, \\
 \text{ou seja,} \quad & x(t) = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 3t + \frac{7}{6}, \quad \text{para } t \in [0, \infty),
 \end{aligned}$$

finalizando a resolução.

□

## 3.5 Técnicas para calcular algumas integrais indefinidas

### 3.5.1 Substituição direta para a integral indefinida

Começaremos pelo

**Teorema 3.5.1 (substituição direta para a integral indefinida)** *Sejam  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  intervalos de  $\mathbb{R}$  e suponhamos que a função  $g: A \rightarrow B$  é diferenciável em  $\underline{A}$  e a função  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  admite a função  $F: B \rightarrow \mathbb{R}$  como uma primitiva definida em  $\underline{B}$ .*

*Então a função  $H: A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$H(x) \doteq F[g(x)], \quad \text{para } x \in A, \tag{3.62}$$

*é uma primitiva da função  $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$h(x) \doteq f[g(x)] g'(x), \quad \text{para } x \in A. \tag{3.63}$$

Em particular,

$$\int f[g(x)] g'(x) dx = F[g(x)] + C, \quad \text{para } x \in A, \quad (3.64)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

### Demonstração:

Como a função  $F : B \rightarrow \mathbb{R}$  é primitiva da função  $f$  em  $B$ , pela Definição 3.1.1, segue que a função  $f$  será diferenciável em  $B$  e, além disso, teremos

$$F'(y) = f(y), \quad \text{para } y \in B. \quad (3.65)$$

Como a função  $g$  é diferenciável em  $A$ , da regra da cadeia (visto na disciplina de Cálculo I), segue que a função

$$H \doteq F \circ g$$

será diferenciável em  $A$  e, além disso, teremos:

$$\begin{aligned} H'(x) &\stackrel{(3.62)}{=} \frac{d}{dx}[F \circ g](x) \\ &\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} F'[g(x)] g'(x) \\ &\stackrel{(3.65)}{=} f[g(x)] g'(x), \quad \text{para } x \in A, \end{aligned} \quad (3.66)$$

ou seja, pela Definição 3.1.1, a função

$$H = F \circ g$$

será uma primitiva da função

$$h = (f \circ g) g',$$

ou ainda,

$$\int f[g(x)] g'(x) dx = F[g(x)] + C, \quad \text{para } x \in A,$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a demonstração do resultado. □

Com isto temos a:

### **Observação 3.5.1**

1. Para o entendimento dos próximos itens será importante olharmos o Apêndice C.
2. Em um certo sentido, o Teorema 3.5.1 acima, nos diz como fazer uma "mudanças de variáveis" na integral indefinida, a saber:

$$\int f(u) du \quad \text{se } u \doteq g(x), \text{ teremos (veja (C.18)) } du = g'(x) dx \quad \int f[g(x)] g'(x) dx \quad (3.67)$$

e ao final do cálculo da integral indefinida do lado esquerdo de (3.67), voltamos a variável original  $u$ , ou seja, fazemos

$$x = g^{-1}(u). \quad (3.68)$$

Neste caso, a substituição

$$u \doteq g(x), \quad \text{para } x \in A, \quad (3.69)$$

deverá ser uma mudança de variáveis continuamente diferenciável em  $A$ , em particular, deverá ser **bijetora!**, ou seja, a função  $g : A \rightarrow g(A)$  deverá ser injetora e continuamente diferenciável em  $A$ , com função inversa continuamente diferenciável em  $B \doteq g(A)$ .

Isto será de grande importância na próxima seção.



3. A conclusão do Teorema 3.5.1 acima, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\int f[g(x)] g'(x) dx \stackrel{\text{se } u \doteq g(x), \text{ teremos (veja (C.18))}}{=} \int f(u) du$$

$$\stackrel{\text{se } F'(u) = f(u)}{=} F(u) + C$$

$$\stackrel{u = g(x)}{=} F[g(x)] + C, \quad \text{para } x \in A, \quad (3.70)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo 3.5.1** Calcular a integral indefinida

$$\int \frac{1}{(ax + b)^2} dx, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{a} \right\}, \quad (3.71)$$

onde  $a \neq 0$  e  $b \in \mathbb{R}$  estão fixos.

**Resolução:**

Consideremos a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g(x) \doteq ax + b, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad (3.72)$$

e a função  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(y) \doteq \frac{1}{y^2}, \quad \text{para } y \in (0, \infty). \quad (3.73)$$

Notemos que a função  $g$  será diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, temos

$$g'(x) = a, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad (3.74)$$

e a função  $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(y) \doteq \frac{-1}{y}, \quad \text{para } y \in (0, \infty), \quad (3.75)$$

será uma primitiva da função  $f$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, pelo Teorema 3.5.1, segue que

$$\int \frac{1}{(ax + b)^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(ax + b)^2} a dx$$

$$\stackrel{(3.73) \text{ e } (3.74)}{=} \frac{1}{a} \int f[g(x)] g'(x) dx$$

$$\stackrel{(3.64)}{=} \frac{1}{a} \{F[g(x)] + D\}$$

$$\stackrel{(3.75)}{=} \frac{1}{a} \left[ \frac{-1}{ax + b} + D \right]$$

$$\stackrel{\text{considere } C \doteq \frac{D}{a}}{=} \frac{1}{a} \frac{-1}{ax + b} + C, \quad \text{para } x \in \left( -\frac{b}{a}, \infty \right),$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{(ax + b)^2} dx = \frac{-1}{a(ax + b)} + C, \quad \text{para } x \in \left( -\frac{b}{a}, \infty \right), \quad (3.76)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

De modo semelhante, podemos considerar a função  $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(y) \doteq \frac{1}{y^2}, \quad \text{para } y \in (-\infty, 0) \quad (3.77)$$

e a função  $F: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(y) \doteq \frac{-1}{y}, \quad \text{para } y \in (-\infty, 0), \quad (3.78)$$

que será uma primitiva da função  $f$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Deste modo podemos aplicar o Teorema 3.5.1 (o mesmo raciocínio acima), para obter

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = \frac{-1}{a(ax+b)} + D, \quad \text{para } x \in \left(-\infty, \frac{-b}{a}\right), \quad (3.79)$$

onde  $D \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

Deixaremos os detalhes dos cálculos acima como exercício para o leitor.

Assim, de (3.76) e (3.79), temos que

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = \frac{-1}{a(ax+b)} + D, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-b}{a}\right\}, \quad (3.80)$$

onde  $D \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução. □

No caso a seguir agiremos mais diretamente, mais precisamente:

**Exemplo 3.5.2** *Calcular a integral indefinida*

$$\int \text{sen}^2(x) \cos(x) dx, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (3.81)$$

**Resolução:**

Neste caso, pelo Teorema 3.5.1, temos, para  $x \in \mathbb{R}$ , segue que:

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2(x) \cos(x) dx & \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \text{sen}(x), \\ \text{teremos (veja (C.18))}: du = \frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] dx = \cos(x) dx \end{array} \right\} \\ & = \int \underbrace{\text{sen}^2(x)}_{=u^2} \underbrace{\cos(x) dx}_{=du} \\ & = \int u^2 du \\ & \stackrel{(3.29) \text{ com } n=2}{=} \frac{1}{3} u^3 + C \\ & \text{como } u = \text{sen}(x) \stackrel{=}{=} \frac{1}{3} \text{sen}^3(x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ \text{ou seja, } \int \text{sen}^2(x) \cos(x) dx & = \frac{1}{3} \text{sen}^3(x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (3.82) \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução □

O próximo caso é um pouco mais delicado:

**Exemplo 3.5.3** Calcular a integral indefinida

$$\int x^2 \sqrt{1+x} \, dx, \quad \text{para } x \in (-1, \infty). \quad (3.83)$$

**Resolução:**

Neste caso, pelo Teorema 3.5.1, para  $x \in (-1, \infty)$ , teremos:

$$\int x^2 \sqrt{1+x} \, dx \left\{ \begin{array}{l} \text{se: } u \doteq \sqrt{x+1}, \\ \text{teremos: } x = u^2 - 1 \\ \text{ou ainda: } u^2 = x + 1, \\ \text{assim: } \frac{d}{du} [u^2] \, du = \frac{d}{dx} [x + 1] \, dx, \\ \text{ou seja (veja (C.18)): } 2u \, du = dx \end{array} \right\} \int \underbrace{x^2}_{=u^2-1} \underbrace{\sqrt{1+x}}_{=u} \underbrace{dx}_{=2u \, du}$$

$$= \int (u^2 - 1)^2 u \, 2u \, du$$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} \int (2u^6 - 4u^4 + 2u^2) \, du$$

$$\stackrel{(3.25), (3.26) \text{ e } (3.29)}{=} \frac{2}{7} u^7 - \frac{4}{5} u^5 + \frac{2}{3} u^3 + C$$

$$\text{como } u = \sqrt{x+1} \quad \frac{2}{7} (\sqrt{x+1})^7 - \frac{4}{5} (\sqrt{x+1})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 + C, \quad \text{para } x \in (-1, \infty),$$

$$\text{ou seja, } \int x^2 \sqrt{1+x} \, dx = \frac{2}{7} (x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C, \quad (3.84)$$

para  $x \in (-1, \infty)$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução. □

Temos também o:

**Exercício 3.5.1** Calcular a integral indefinida

$$\int \text{sen}^2(x) \, dx, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (3.85)$$

**Resolução:**

Lembremos que

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (3.86)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, pelo Teorema 3.5.1, temos:

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^2(x) \, dx &= \int \left( \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) \, dx \\
 &= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx \\
 &= \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx \\
 &\stackrel{(3.25)}{=} \stackrel{(3.26)}{=} \frac{1}{2} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq 2x, \\ \text{teremos (veja (C.18))}: \frac{d}{du}[u] \, du = \frac{d}{dx}[2x] \, dx, \\ \text{ou seja, } 1 \, du = 2 \, dx, \\ \text{ou ainda: } \frac{1}{2} \, du = dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \underbrace{\cos(\underbrace{2x}_{=u})}_{\frac{dx}{\frac{1}{2} du}} \\
 &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \cos(u) \frac{1}{2} \, du \\
 &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \underbrace{\int \cos(u) \, du}_{=\operatorname{sen}(u)+C} \\
 &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u) + C \\
 &\stackrel{\text{como } u=2x}{=} \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \\
 \text{ou seja, } \int \operatorname{sen}^2(x) \, dx &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C, \tag{3.87}
 \end{aligned}$$

para  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária, completando a resolução. □

### 3.5.2 Integração por partes para integral indefinida

O próximo resultado será de muita utilidade no cálculo de muitas integrais indefinidas.

**Teorema 3.5.2 (da integração por partes para integral indefinida)** *Sejam  $A$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis em  $A$ .*

*Então*

$$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) \, dx, \quad \text{para cada } x \in A. \tag{3.88}$$

#### Demonstração:

Notemos que, do fato que as funções  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $A$ , segue que a função  $f \cdot g$  será diferenciável em  $A$ .

Além disso

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)'(x) &= f'(x) g(x) + f(x) g'(x), \quad \text{para } x \in A, \\
 \text{ou ainda, } f(x) g'(x) &= (f \cdot g)'(x) - f'(x) g(x), \quad \text{para } x \in A, \tag{3.89}
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \int f(x) g'(x) dx &\stackrel{(3.89)}{=} \int [(f \cdot g)'(x) - f'(x) g(x)] dx \\
 &\stackrel{(3.26)}{=} \int (f \cdot g)'(x) dx - \int f'(x) g(x) dx \\
 &\stackrel{(3.20)}{=} (f \cdot g)(x) - \int f'(x) g(x) dx \\
 &= f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx, \quad \text{para } x \in A,
 \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Temos a

**Observação 3.5.2** *Notemos que, aplicando o Teorema da substituição para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.1 a ambos os lados das integrais indefinidas (3.88) acima, obteremos:*

$$\begin{aligned}
 \int f(x) g'(x) dx &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq f(x) \text{ e } v \doteq g(x) \\ \text{teremos (veja (C.18))}: dv = g'(x) dx \end{array} \right\} \int \underbrace{f(x)}_{=u} \underbrace{g'(x) dx}_{=dv} \\
 &= \int u dv, \tag{3.90}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int g(x) f'(x) dx &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq f(x) \text{ e } v \doteq g(x) \\ \text{teremos (veja (C.18))}: du = f'(x) dx \end{array} \right\} \int \underbrace{g(x)}_{=u} \underbrace{f'(x) dx}_{=dv} \\
 &= \int v du. \tag{3.91}
 \end{aligned}$$

Podemos escrever a expressão (3.88), de modo abreviado, como:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{3.92}$$

Apliquemos o resultado acima aos:

**Exemplo 3.5.4** *Calcular a integral indefinida*

$$\int \text{sen}^2(x) dx, \tag{3.93}$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**

No Exercício 3.5.1 calculamos esta integral indefinida utilizando o Teorema da substituição para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.1).

A seguir calcularemos a mesma integral indefinida (3.93), utilizando o Teorema da integração por partes para integrais definidas (ou seja, o Teorema 3.5.2).

Para isto observemos que (veja a Observação 3.5.2):

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^2(x) \, dx &= \int \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\doteq u} \underbrace{\operatorname{sen}(x) \, dx}_{\doteq dv} \\
 &= \int u \, dv \\
 &\stackrel{(3.92)}{=} u v - \int v \, du \\
 &\left. \begin{array}{l} \text{como } u = \operatorname{sen}(x), \text{ teremos (veja (C.18)): } du = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)] \, dx = \cos(x) \, dx, \\ \text{como } dv \doteq \operatorname{sen}(x) \, dx, \text{ teremos: } v = \int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos } v = -\cos(x) \end{array} \right\} \\
 &= \\
 &= \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{=u} \underbrace{[-\cos(x)]}_{=v} - \int \underbrace{[-\cos(x)]}_{=v} \underbrace{\cos(x) \, dx}_{=du} \\
 &= -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) \, dx \\
 &= -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int [1 - \operatorname{sen}^2(x)] \, dx \\
 &= -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int 1 \, dx - \int \operatorname{sen}^2(x) \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x) \, dx, \\
 \text{isto é, } &\int \operatorname{sen}^2(x) \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x) \, dx, \\
 \text{ou seja, } &2 \int \operatorname{sen}^2(x) \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + x + D, \\
 \text{ou ainda, } &\int \operatorname{sen}^2(x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C \tag{3.94}
 \end{aligned}$$

para  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

Um outro caso em que podemos aplicar o Teorema da substituição e da integração por partes para integrais indefinidas (ou seja, os Teoremas 3.5.1, 3.5.2) é :

**Exemplo 3.5.5** *Calcular a integral indefinida*

$$\int \operatorname{arcsen}(x) \, dx, \tag{3.95}$$

para  $x \in (-1, 1)$ .

**Resolução:**

Neste exemplo aplicaremos o Teorema da substituição e da integração por partes para integrais indefinidas (ou seja, os Teoremas 3.5.1, 3.5.2).

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \int \arcsen(x) \, dx &= \int \underbrace{\arcsen(x)}_{\doteq u} \underbrace{dx}_{\doteq dv} \\
 &= \int u \, dv \\
 &\stackrel{(3.92)}{=} u v - \int v \, du \\
 &\left\{ \begin{array}{l} u \doteq \arcsen(x), \text{ teremos (veja (C.18))}: du = \frac{d}{dx} [\arcsen(x)] \, dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ dv \doteq dx, \text{ teremos: } v = \int 1 \, dx = x + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos } v = x \end{array} \right\} \\
 &= \underbrace{\arcsen(x)}_{=u} \underbrace{x}_{=v} - \int \underbrace{x}_{=v} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx}_{=du} \\
 &= x \arcsen(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x \, dx \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } w \doteq 1-x^2, \\ \text{teremos (veja (C.18))}: dw = -2x \, dx, \\ \text{ou ainda: } -\frac{1}{2} dw = x \, dx \end{array} \right\} \\
 &= x \arcsen(x) - \int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{=w}}} \underbrace{x \, dx}_{-\frac{1}{2} dw} \\
 &= x \arcsen(x) - \int \frac{1}{\sqrt{w}} \left(-\frac{1}{2}\right) dw \\
 &= x \arcsen(x) + \frac{1}{2} \int w^{-\frac{1}{2}} dw \\
 &\stackrel{(3.30)}{=} \text{com } r=-\frac{1}{2} \quad x \arcsen(x) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} \right] + C \\
 &\text{como } w=1-x^2 \quad x \arcsen(x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C, \\
 \text{ou seja, } \int \arcsen(x) \, dx &= x \arcsen(x) + \sqrt{1-x^2} + C, \tag{3.96}
 \end{aligned}$$

para  $x \in (-1, 1)$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.  $\square$

No próximo caso aplicaremos o Teorema da integração por partes para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.2).

**Exercício 3.5.2** *Calcular a integral indefinida*

$$\int x \, \text{sen}(x) \, dx, \tag{3.97}$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \int x \operatorname{sen}(x) \, dx &= \int \underbrace{x}_{=u} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(x) \, dx}_{=dv} \\
 &= \int u \, dv \\
 &\stackrel{(3.92)}{=} uv - \int v \, du \\
 &\left. \begin{aligned}
 &\text{se } u \doteq x, \text{ teremos (veja (C.18))}: du = \frac{d}{dx}[x] \, dx = 1 \, dx \\
 &\text{se } dv \doteq \operatorname{sen}(x) \, dx, \text{ teremos: } v = \int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + C, \\
 &\text{se } C = 0, \text{ teremos: } v = -\cos(x)
 \end{aligned} \right\} \\
 &= \underbrace{x}_{=u} \underbrace{[-\cos(x)]}_{=v} - \int \underbrace{[-\cos(x)]}_{=v} \underbrace{dx}_{=du} \\
 &= -x \cos(x) + \underbrace{\int \cos(x) \, dx}_{=\operatorname{sen}(x)+C} \\
 &= -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \\
 \text{isto é, } \int x \operatorname{sen}(x) \, dx &= -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \tag{3.98}
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.

□

Utilizando o Teorema de integração por partes duas vezes (ou seja, o Teorema 3.5.2), podemos resolver o:

**Exercício 3.5.3** *Calcular a integral indefinida*

$$\int x^2 \cos(x) \, dx, \tag{3.99}$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**



Observemos que

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x) \, dx &= \int \underbrace{x^2}_{\doteq u} \underbrace{\cos(x) \, dx}_{\doteq dv} = \int u \, dv \\ &\stackrel{(3.92)}{=} u v - \int v \, du \\ &\left. \begin{array}{l} \text{se: } u \doteq x^2, \text{ teremos (veja (C.18)): } du = \frac{d}{dx}[x^2] \, dx = 2x \, dx \\ \text{e se: } dv \doteq \cos(x) \, dx, \text{ teremos: } v = \int \cos(x) \, dx = \text{sen}(x) + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos: } v = \text{sen}(x) \end{array} \right\} \\ &= \underbrace{x^2}_{=u} \underbrace{\text{sen}(x)}_{=v} - \int \underbrace{\text{sen}(x)}_{=v} \underbrace{2x \, dx}_{=du} \\ &= x^2 \text{sen}(x) - 2 \int x \text{sen}(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{Exercício 3.5.2, ou seja, (3.98)}}{=} x^2 \text{sen}(x) - 2[-x \cos(x) + \text{sen}(x)] + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, isto é,

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = x^2 \text{sen}(x) + 2x \cos(x) - 2 \text{sen}(x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (3.100)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.

□ Neste próximo caso aplicaremos duas vezes o Teorema da integração por partes (ou seja, o Teorema 3.5.2), para calcularmos a integral indefinida em questão.

**Exercício 3.5.4** *Calcular a integral indefinida*

$$\int x^2 \text{sen}(x) \, dx, \quad (3.101)$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx &= \int \underbrace{x^2}_{\doteq u} \underbrace{\operatorname{sen}(x) \, dx}_{\doteq dv} \\
 &= \int u \, dv \\
 &\stackrel{(3.92)}{=} u v - \int v \, du \\
 &\left. \begin{array}{l} \text{se: } u \doteq x^2, \text{ teremos (veja (C.18)): } du = \frac{d}{dx} [x^2] \, dx = 2x \, dx \\ \text{e se: } dv \doteq \operatorname{sen}(x) \, dx, \text{ teremos } v = \int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos } v = -\cos(x) \end{array} \right\} \\
 &= \underbrace{x^2}_{=u} \underbrace{[-\cos(x)]}_{=dv} - \int \underbrace{[-\cos(x)]}_{=v} \underbrace{2x \, dx}_{=du} \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2 \int \underbrace{x}_{\doteq u} \underbrace{\cos(x) \, dx}_{\doteq dv} \\
 &\stackrel{(3.92)}{=} -x^2 \cos(x) + 2 \left[ u v - \int v \, du \right] \\
 &\left. \begin{array}{l} \text{se: } u \doteq x, \text{ teremos } du = \frac{d}{dx} [x] \, dx = 1 \, dx \\ \text{e se: } dv \doteq \cos(x) \, dx, \text{ teremos (veja (C.18)): } v = \int \cos(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos: } v = \operatorname{sen}(x) \end{array} \right\} \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2 \left[ \underbrace{x}_{=u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{=v} - \int \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{=v} \underbrace{1 \, dx}_{=du} \right] \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) - 2[-\cos(x)] + C \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, isto é,

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx = (2 - x^2) \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (3.102)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.

□ Temos a:

**Observação 3.5.3** *Os Exercícios 3.5.2, 3.5.3 e 3.5.4 tratados acima, podem ser estendidos a situações mais gerais, ou seja, calcular as integrais indefinidas*

$$\int x^n \operatorname{sen}(x) \, dx \quad \text{ou} \quad \int x^n \cos(x) \, dx, \quad (3.103)$$

para  $x \in \mathbb{R}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  fixado.

Para tanto, basta aplicarmos  $n$ -vezes o Teorema de integração por partes para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.2), para encontrarmos as integrais indefinidas envolvidas.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Outra situação em que o Teorema de integração por partes para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.2) é útil é dado pelo:

**Exemplo 3.5.6** Calcule a integral indefinida

$$\int e^x \cos(x) dx, \quad (3.104)$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Observemos que

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{\cos(x) dx}_{=dv}}_{\doteq I} &= \int u dv \\ &\stackrel{(3.92)}{=} uv - \int v du \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se: } u \doteq e^x, \text{ teremos (veja (C.18)): } du = \frac{d}{dx}[e^x] dx = e^x dx \\ \text{e se: } dv \doteq \cos(x) dx, \text{ teremos } v = \int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos: } v \stackrel{C=0}{=} \text{sen}(x) \end{array} \right\} \\ &= \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{\text{sen}(x)}_{=v} - \int \underbrace{e^x}_{=v} \underbrace{\text{sen}(x) dx}_{=du} \\ &= e^x \text{sen}(x) - \int \underbrace{e^x}_{\doteq u} \underbrace{\text{sen}(x) dx}_{\doteq dv} \\ &\stackrel{(3.92)}{=} e^x \text{sen}(x) - \left[ UV - \int V dU \right] \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se: } U \doteq e^x, \text{ teremos (veja (C.18)): } du = \frac{d}{dx}[e^x] dx = e^x dx \\ \text{e se: } dv \doteq \text{sen}(x) dx, \text{ teremos: } v = \int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos: } v = -\cos(x) \end{array} \right\} \\ &= e^x \text{sen}(x) - \left[ \underbrace{e^x}_{=U} \underbrace{[-\cos(x)]}_{=V} - \int \underbrace{e^x}_{=V} \underbrace{(-\cos(x) dx)}_{=dU} \right] \\ &= e^x [\text{sen}(x) + \cos(x)] - \underbrace{\int e^x \cos(x) dx}_{=I}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \cos(x) dx &= e^x [\text{sen}(x) + \cos(x)] + C, \\ \text{ou seja, } \int e^x \cos(x) dx &= e^x \frac{\text{sen}(x) + \cos(x)}{2} + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.

□

Temos a?

**Observação 3.5.4** *De modo semelhante podemos calcular*

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$$

em  $\mathbb{R}$ .

A obtenção desta integral indefinida será deixada como exercício para o leitor.

Para finalizar temos os seguintes:

**Exercício 3.5.5** *Calcular a integral indefinida*

$$\int x \operatorname{arctg}(x) dx, \quad \text{para } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.106)$$

**Resolução:**

Aplicaremos o Teorema da integração por partes para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.2).

Para isto observemos que:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{\doteq u} \underbrace{x dx}_{\doteq dv} &= \int u dv \\ &\stackrel{(3.92)}{=} uv - \int v du \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \operatorname{arctg}(x), \text{ teremos (veja (C.18)): } du = \frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}(x)] dx = \frac{1}{1+x^2} dx \\ \text{e se: } dv \doteq x dx, \text{ teremos } v = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos: } v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \\ &= \underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{=u} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{=v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{=v} \underbrace{\frac{1}{1+x^2} dx}_{=du} \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \int \left( \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \left[ \int 1 dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} x + \operatorname{arctg}(x) + C, \quad \text{para } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, isto é,

$$\int x \operatorname{arctg}(x) dx = -\frac{1}{2} x + \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg}(x) + C, \quad \text{para } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.107)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

Temos também o:

**Exercício 3.5.6** *Calcular a integral indefinida*

$$\int \ln(x) \, dx, \quad (3.108)$$

para  $x \in (0, \infty)$ .

**Resolução:**

Aplicaremos o Teorema da integração por partes para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.2).

Para isto observemos que:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln(x)}_{=u} \underbrace{dx}_{=dv} &= \int u \, dv \\ &\stackrel{(3.92)}{=} u \, v - \int v \, du \\ &\left. \begin{array}{l} \text{se: } u \doteq \ln(x), \text{ teremos (veja (C.18)): } du = \frac{d}{dx}[\ln(x)] \, dx = \frac{1}{x} \, dx \\ \text{e se: } dv \doteq 1 \, dx, \text{ teremos } v = \int 1 \, dx = x + C, \\ \text{se } C = 0, \text{ teremos: } v = x \end{array} \right\} \\ &= \underbrace{\ln(x)}_{=u} \underbrace{x}_{=v} - \int \underbrace{x}_{=v} \underbrace{\frac{1}{x} \, dx}_{=du} \\ &= x \ln(x) - \int 1 \, dx \\ &= x \ln(x) - x + C, \quad \text{para } x \in (0, \infty), \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, isto é,

$$\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x + C, \quad \text{para } x \in (0, \infty), \quad (3.109)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □



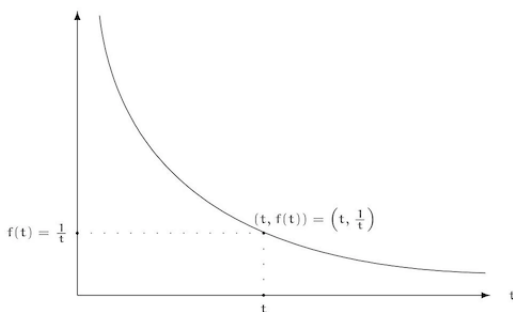
## Capítulo 4

# Aplicações de integrais definidas de funções reais, de uma variável real

### 4.1 A função logaritmo natural

Consideremos a representação geométrica do gráfico da função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (veja a figura abaixo)

$$f(t) \doteq \frac{1}{t}, \quad \text{para } t \in (0, \infty). \quad (4.1)$$



Como a função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (4.1) é contínua em  $(0, \infty)$  logo, do Teorema 2.3.1, será integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em  $(0, \infty)$ , assim podemos introduzir a:

**Definição 4.1.1** Para cada  $x \in (0, \infty)$ , definimos o logaritmo natural de  $x$ , indicado por, como sendo

$$\ln(x) \doteq \int_1^x \frac{1}{t} dt. \quad (4.2)$$

Assim temos definida a função logaritmo (natural) indicada por  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\ln(x) \doteq \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \text{para } x \in (0, \infty). \quad (4.3)$$

**Observação 4.1.1** Observemos que, para

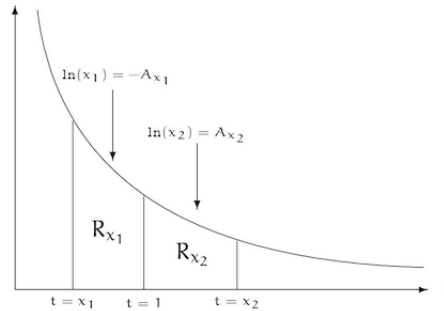
$$x \in (1, \infty),$$

temos que o número real  $\ln(x)$ , dado por (4.2), como a função  $f$  é não negativa e integrável em  $[1, x]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, nos fornece o valor da área da região limitada,

que indicaremos por  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $t = 1$  e  $t = x$ .

De fato, pois função  $\underline{f}$  é não negativa em  $(0, \infty)$  e contínua em qualquer intervalo fechado e limitado contido em  $(0, \infty)$ , logo integrável em cada um desses intervalos.

Por outro lado, para  $x \in (0, 1)$ , então o número real  $\ln(x)$ , dado por (4.2), nos será igual a menos o valor da área da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $t = 1$  e  $t = x$  (veja a figura abaixo).



A seguir exibiremos algumas propriedades da função logaritmo e para isto precisaremos do

**Lema 4.1.1** *Sejam  $a, b > 0$ .*

*Então*

$$\int_a^b \frac{1}{t} dt = \int_1^b \frac{1}{t} dt. \quad (4.4)$$

**Demonstração:**

Utilizaremos o Teorema da substituição na integral definida (ou seja, o Teorema 2.7.1 - na verdade a Observação 2.7.1) para demonstrar a identidade acima.

Para isto consideremos a função  $g : [1, b] \rightarrow [a, a b]$ , dada por

$$g(u) \doteq a u, \quad \text{para } u \in [1, b], \quad (4.5)$$

que é bijetora e diferenciável em  $[1, b]$ , logo será uma mudança de variáveis.

Assim temos:

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t} dt \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \frac{t}{a}, \text{ é bijetora e } dt = a du, \\ \text{se } t = a, \text{ segue que } u = 1, \\ \text{se } t = ab, \text{ segue que } u = b \end{array} \right\} = \int_1^b \frac{1}{a u} a du = \int_1^b \frac{1}{u} du,$$

completando a demonstração do resultado. □

Com isto temos a:

**Proposição 4.1.1**



1.

$$\ln(1) = 0; \quad (4.6)$$

2. para  $x, y \in (0, \infty)$ , temos que

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y); \quad (4.7)$$

3. para  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in (0, \infty)$ , temos que

$$\ln(x^n) = n \ln(x); \quad (4.8)$$

4. para  $x, y \in (0, \infty)$ , temos que

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y); \quad (4.9)$$

5. a função  $y = \ln(x)$  é diferenciável em  $(0, \infty)$  e além disso, temos

$$\frac{d}{dx} [\ln(x)] = \frac{1}{x}, \quad \text{para } x \in (0, \infty); \quad (4.10)$$

6. a função  $y = \ln(x)$  é estritamente crescente em  $(0, \infty)$ ;7. a função  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é bijetora.**Demonstração:****De 1.:**

Temos que

$$\begin{aligned} \ln(1) &\stackrel{(4.2)}{=} \int_1^1 \frac{1}{t} dt \\ &\stackrel{(2.46)}{=} 0, \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 1. .

**De 2.:**Para  $x, y \in (0, \infty)$ , do item 4. da Proposição 2.4.1, temos que

$$\begin{aligned} \ln(xy) &\stackrel{(4.2)}{=} \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt \\ &\stackrel{(2.68)}{=} \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt \\ &\stackrel{(4.4)}{=} \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \ln(x) + \ln(y), \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 2. .

**De 3.:**

Como

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n\text{-fatores}},$$

utilizando-se o item 2. obteremos o item 3. (na verdade precisamos utilizar indução).

**De 4.:**

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y} y\right)$$

$$\stackrel{\text{item 2., ou ainda, (4.7)}}{=} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y),$$

ou seja,

$$\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right),$$

completando a demonstração do item 4. .

**De 5.:**

Do Teorema 2.5.1, segue que a função  $y = \ln(x)$  é diferenciável em  $(0, \infty)$ , pois a função

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

é contínua em  $(0, \infty)$ .

Além disso

$$\frac{d}{dx} [\ln(x)] \stackrel{(4.2)}{=} \frac{d}{dx} \left[ \int_1^x \frac{1}{t} dt \right]$$

$$\stackrel{(2.89)}{=} \frac{1}{x}, \quad \text{para } x \in (0, \infty),$$

completando a demonstração do item 5. .

**De 6.:**

Como

$$\frac{d}{dx} [\ln(x)] \stackrel{(4.10)}{=} \frac{1}{x} > 0, \quad \text{para } x \in (0, \infty),$$

como visto na disciplina de Cálculo 1, segue que a função  $y = \ln(x)$  é estritamente crescente em  $(0, \infty)$ , completando a demonstração do item 6. .

**De 7.:**

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que conjunto imagem da função  $y = \ln(x)$  é igual a  $\mathbb{R}$ .

Para mostrar isto precisaremos do estudo de integrais impróprias de 1.a e 2.a espécies, que serão tratadas no Capítulo ??.

Assim, deste fato e do item 6., segue que a função  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  será bijetora, completando a demonstração do item 7. e do resultado. □

Com isto temos todas as outras funções, com suas respectivas propriedades, definidas no a partir da função logaritmo natural (a função exponencial, as funções potenciações, as funções hiperbólicas e as funções hiperbólicas inversas).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das mesmas.

Com isto temos o:

**Exercício 4.1.1** Mostre que a função  $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) \doteq \operatorname{tg}(x), \quad \text{para } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \tag{4.11}$$

é integrável em  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x) \, dx. \quad (4.12)$$

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$  é contínua em  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  logo, do Teorema 2.3.1, será uma função integrável em  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

Para calcularmos a integral definida (4.12) acima precisamos encontrar uma primitiva da função  $f$  em  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , ou a integral indefinida da função  $f$  no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , e depois aplicar o Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2).

Observemos que, para  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , do Teorema da substituição para a integral indefinida (ou seja, o Teorema 3.5.1) temos:

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &\stackrel{(4.11)}{=} \int \operatorname{tg}(x) \, dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \, dx \\ &\left\langle \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \cos(x) \\ \text{teremos: } du = \underset{=}{\operatorname{sen}(x)} \, dx \end{array} \right\rangle \int \frac{1}{u} \, du \\ &\stackrel{(4.10)}{=} \ln(u) + C \\ &\text{como } \underset{=}{u} = \cos(x) \quad \ln[\cos(x)] + C. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x) \, dx &\stackrel{\text{de (4.13) e do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2)}}{=} \ln[\cos(x)] \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln[\cos(0)] - \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

completando a resolução. □

Também temos o:

**Exercício 4.1.2** Mostre que a função  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \ln^2(x), \quad \text{para } x \in [1, 2], \quad (4.14)$$

é integrável em  $[1, 2]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_1^2 \ln^2(x) \, dx. \quad (4.15)$$

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$ , dada por (4.14), é contínua em  $[1, 2]$ , logo do Teorema 2.3.1, será integrável em  $[1, 2]$ .

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função  $f$  em  $[1, 2]$ , ou da integral indefinida da função  $f$  no intervalo  $[1, 2]$ , e depois aplicar o Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2).

Observemos que, para  $x \in [1, 2]$ , utilizando integração por partes para a integral indefinida (ou seja, o Teorema 3.5.2), obteremos:

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int \ln^2(x) dx \\
 &= \int \underbrace{\ln(x)}_{\doteq u} \underbrace{\ln(x) dx}_{\doteq dv} \\
 &= \int u dv \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \ln(x), \text{ teremos: } du = \frac{1}{x} dx \\ \text{se } dv \doteq \ln(x) dx, \text{ teremos: } v \stackrel{\text{Exemplo 3.5.6}}{=} x \ln(x) - x + C \end{array} \right\} uv - \int v du \\
 &= \ln(x) [x \ln(x) - x] - \int [x \ln(x) - x] \frac{1}{x} dx \\
 &= x [\ln^2(x) - \ln(x)] - \int \ln(x) dx + \int dx \\
 &\stackrel{\text{Exemplo 3.5.6}}{=} x \ln^2(x) - x \ln(x) - [x \ln(x) - x] + x + C \\
 &= x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x + C, \quad \text{para } x \in (0, \infty). \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \ln^2(x) dx &\stackrel{\text{de (4.16) e do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2)}}{=} \left[ x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x \right] \Big|_{x=1}^{x=2} \\
 &= [2 \ln^2(2) - 2 \cdot 2 \ln(2) + 2 \cdot 2] - [1 \ln^2(1) - 2 \cdot 1 \ln(1) + 2 \cdot 1] \\
 &= 2 \ln^2(2) - 4 \ln(2) + 2,
 \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \int_1^2 \ln^2(x) dx = 2 \ln^2(2) - 4 \ln(2) + 2, \tag{4.17}$$

completando a resolução. □

**Observação 4.1.2** Como a função  $f$ , dada por (4.14), do Exemplo 4.1.2 acima, é não negativa em  $[1, 2]$ , isto é,

$$f(x) \stackrel{(4.14)}{\geq} 0, \quad \text{para } x \in [1, 2]$$

e integrável em  $[1, 2]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da integral definida acima será o valor da área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das

retas  $x = 1$ ,  $x = 2$  e do eixo  $Ox$ , ou ainda, a área da região  $R$  será igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\stackrel{(2.45)}{=} \int_a^b f(x) \, dx \\ &\stackrel{(4.14)}{=} \int_1^2 \ln^2(x) \, dx \\ &\stackrel{(4.17)}{=} 2 \ln^2(2) - 4 \ln(2) + 2 \text{ u.a..} \end{aligned}$$

Temos também o:

**Exercício 4.1.3** Mostre que a função  $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq e^x \operatorname{sen}(x), \quad \text{para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (4.18)$$

é integrável em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(x) \, dx. \quad (4.19)$$

### Resolução:

Observemos que a função  $f$  é contínua em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  logo, do Teorema 2.3.1, será integrável em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função  $f$  no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , ou ainda, a integral indefinida da função  $f$  no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  e depois aplicar o Teorema fundamental do Cálculo (ou seja, o Teorema 2.5.2).

Observemos que, para  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , utilizando integração por partes para a integral indefinida (ou seja, o Teorema 3.5.2), obteremos:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int \underbrace{e^x}_{\doteq u} \underbrace{\operatorname{sen}(x) \, dx}_{\doteq dv}}_{\boxed{\text{I}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq e^x, \text{ teremos: } du = e^x \, dx \\ \text{se } dv \doteq \operatorname{sen}(x) \, dx, \text{ teremos: } v = -\cos(x) + C \\ \text{se } C = 0 \text{ segue que } v = \cos(x) \end{array} \right\} u v - \int v \, du \\ &= e^x [-\cos(x)] - \int e^x [-\cos(x)] \, dx \\ &= e^x \cos(x) + \int \underbrace{e^x}_{\doteq w} \underbrace{\cos(x) \, dx}_{\doteq dt} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } w \doteq e^x, \text{ teremos: } dw = e^x \, dx \\ \text{se } dt \doteq \cos(x) \, dx, \text{ teremos: } t = \operatorname{sen}(x) + C \\ \text{se } C = 0, \text{ segue que } t = \operatorname{sen}(x) \end{array} \right\} \\ &= -e^x \cos(x) + [w t - \int t \, dw] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^x \cos(x) + \left[ e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x) \, dx \right] \\
&= e^x [\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen}(x) \, dx}_{\text{I}},
\end{aligned}$$

ou seja,  $2 \int e^x \operatorname{sen}(x) \, dx = e^x [\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] + C,$

ou ainda,  $\int e^x \operatorname{sen}(x) \, dx = e^x \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2} + C,$  para  $x \in \mathbb{R}.$  (4.20)

Logo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(x) \, dx &\stackrel{\text{de (4.20) e do Teorema fundamental do Cálculo (ou seja, o Teorema 2.5.2)}}{=} \left[ e^x \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2} \right] \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \\
&= e^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - e^0 \frac{\operatorname{sen}(0) - \cos(0)}{2} \\
&= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2},
\end{aligned}$$

ou seja,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(x) \, dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2},$  (4.21)

completando a resolução. □

**Observação 4.1.3** Como a função  $f$ , dada por (4.18), do Exemplo 4.1.3 acima, é não negativa em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , ou seja,

$$f(x) \stackrel{(4.18)}{\geq} 0, \quad \text{para } x \in$$

e integrável em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da integral definida acima será o valor da área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x=0$ ,  $x=\frac{\pi}{2}$  e do eixo  $Ox$ , ou ainda, a área da região  $\underline{R}$  será dada por:

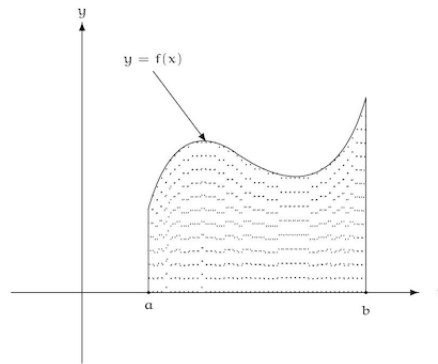
$$\begin{aligned}
\underline{A} &\stackrel{(2.44)}{=} \int_a^b f(x) \, dx \\
&\stackrel{(4.18)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(x) \, dx \\
&\stackrel{(4.21)}{=} \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2} \text{ u.a..}
\end{aligned}$$

## 4.2 Área de regiões delimitadas por gráficos de funções reais de uma variável real

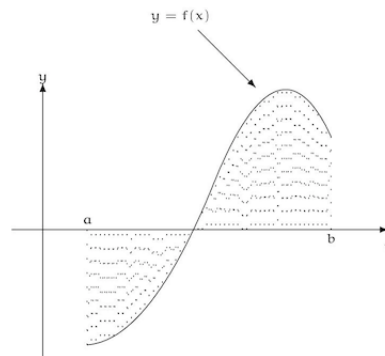
**Observação 4.2.1**

1. Como vimos anteriormente no do item 5. da Observação 2.3.3, se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e não negativa em  $[a, b]$  então o valor da área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo) será dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx \text{ u.a.} \quad (4.22)$$



2. Se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em  $[a, b]$  (pode assumir valores negativos), então o valor da área, que indicaremos  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (vide figura abaixo) pode ser obtida, geometricamente, refletindo-se a parte da representação geométrica do gráfico da função  $f$  que fica abaixo do eixo  $Ox$  (isto é, a parte da representação geométrica do gráfico da função  $f$  onde a função é negativa) em torno do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo).

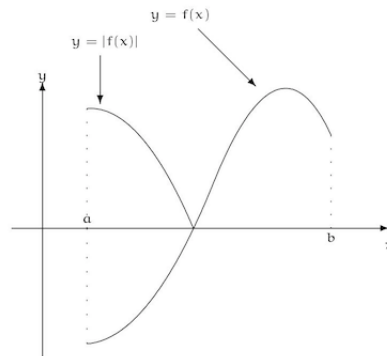


Observemos que se considerarmos o valor da área, que indicaremos por  $\underline{A}'$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}'$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $|f|$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo), então teremos que

$$A = A'$$

e assim

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| \, dx \text{ u.a..} \quad (4.23)$$

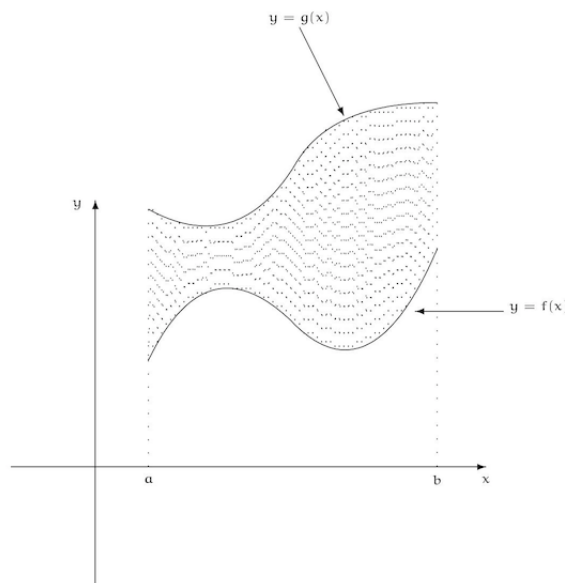


3. Suponhamos que  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são integráveis em  $[a, b]$  e que

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (4.24)$$

Então o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , do gráfico da função  $\underline{g}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo) será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \\ &= \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

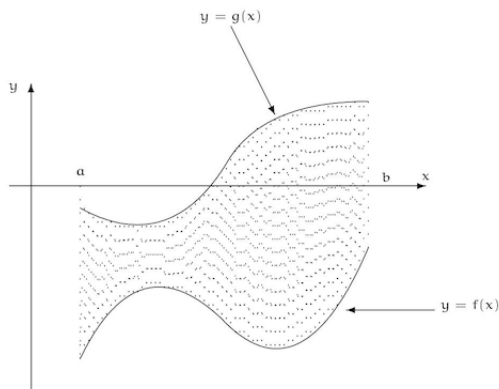




4. Na situação acima podemos considerar somente o caso em que

$$f(x) \leq g(x), \quad \text{para } x \in [a, b], \quad (4.26)$$

isto é, não importa se as funções assumem valores negativos (veja a figura abaixo).



Para mostrar isto, consideremos  $K \in \mathbb{R}$  tal que

$$K \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{para } x \in [a, b], \quad (4.27)$$

que existe pois a função  $f$  é uma função limitada.

Com isto teremos que

$$0 \leq f(x) - K \leq g(x) - K, \quad \text{para } x \in [a, b], \quad (4.28)$$

e podemos aplicar o argumento do item 2. acima para as funções  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$F(x) \doteq f(x) - K, \quad G(x) \doteq g(x) - K, \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (4.29)$$

Observemos que o valor da área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região dada inicialmente é igual a área região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}'$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , do gráfico da função  $\underline{g}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (pois o que fizemos foi transladar as representações geométricas dos gráficos das funções  $\underline{f}$  e  $\underline{g}$  de uma mesma constante  $\underline{K}$  - veja a figura abaixo).

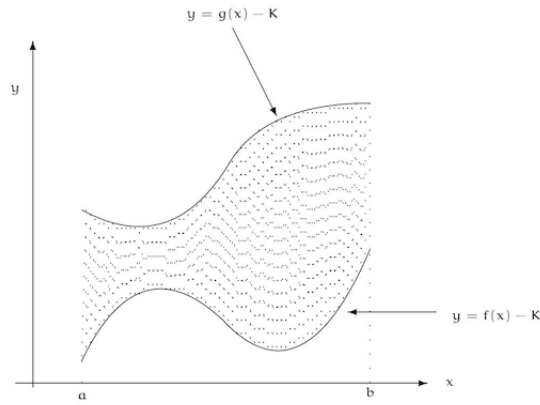
Logo a área da região inicial, isto é,  $\underline{A}$ , será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_a^b [G(x) - F(x)] \, dx \\ &\stackrel{(4.29)}{=} \int_a^b [g(x) - K] - [f(x) - K] \, dx \\ &= \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx, \end{aligned}$$

ou seja, independentemente das funções  $\underline{f}$  e  $\underline{g}$  assumirem valores negativos.

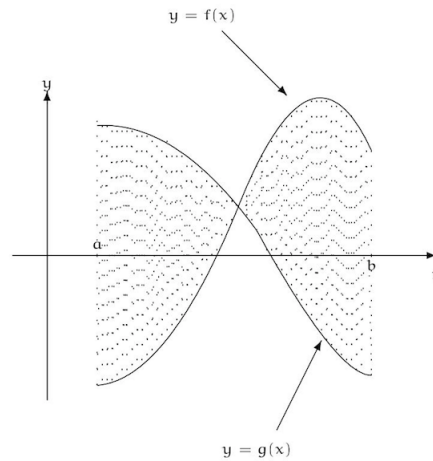
Logo, se (4.26) ocorrer, teremos que o valor da área, isto é,  $\underline{A}$ , da região  $\underline{R}$  dada inicialmente será

$$\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx \text{ u.a.} \quad (4.30)$$



5. Em geral, se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são integráveis em  $[a, b]$ , então o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , do gráfico da função  $g$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo) será dada por

$$\mathcal{A} = \int_a^b |g(x) - f(x)| \, dx \text{ u.a..} \quad (4.31)$$



A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Aplicamos isto ao

**Exemplo 4.2.1** Sejam  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas por

$$f(x) \doteq x + 6, \quad (4.32)$$

$$g(x) \doteq x^3, \quad (4.33)$$

$$h(x) \doteq -\frac{x}{2}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

Encontrar o valor da área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que indicaremos por  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $\underline{f}$ ,  $\underline{g}$  e  $\underline{h}$ .

### Resolução:

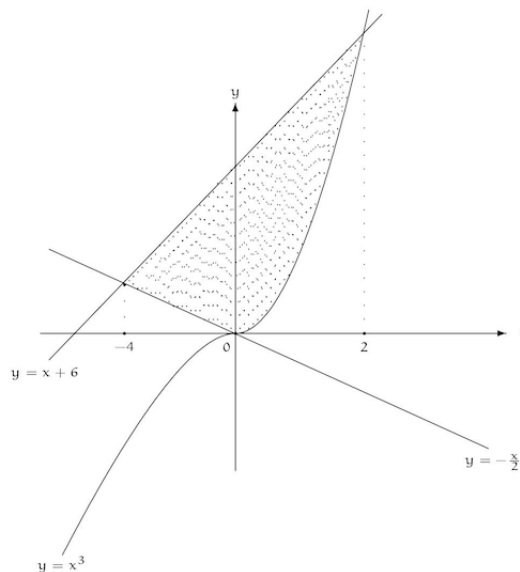
Observemos que

$$\begin{aligned} & f(x) = h(x) \\ \text{se, e somente se} \quad & x + 6 = -\frac{x}{2}, \\ & \text{ou seja,} \quad x = -4, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \\ \text{se, e somente se} \quad & x + 6 = x^3, \\ & \text{ou seja,} \quad x = 2, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} & g(x) = h(x) \\ \text{se, e somente se} \quad & -\frac{x}{2} = x^3, \\ & \text{ou seja,} \quad x = 0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Logo, geometricamente teremos a seguinte configuração:



Como as funções  $\underline{f}$ ,  $\underline{g}$  e  $\underline{h}$  são contínuas nos respectivos intervalos, do item 3. da Observação 4.2.1,

segue que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_{-4}^0 [f(x) - h(x)] dx + \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx \\
 &\stackrel{(4.32), (4.33), (4.34)}{=} \int_{-4}^0 \left[ x + 6 - \left(-\frac{x}{2}\right) \right] dx + \int_0^2 [x + 6 - x^3] dx \\
 &= \int_{-4}^0 \left( \frac{3}{2}x + 6 \right) dx + \int_0^2 (x + 6 - x^3) dx \\
 &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo}}{=} \left[ \frac{3}{4}x^2 + 6x \right] \Big|_{x=-4}^{x=0} + \left[ \frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{4}x^4 \right] \Big|_{x=0}^{x=2} \\
 &\stackrel{\text{Exercício 22 u.a.}}{=} 22 \text{ u.a.},
 \end{aligned}$$

completando a resolução. □

**Observação 4.2.2** *Em algumas situações podemos, se for conveniente, encontrar o valor da área de uma região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , como uma integral definida envolvendo funções que dependam da variável  $y$ , como mostra o exemplo abaixo.*

Para ilustrar isto temos o:

**Exercício 4.2.1** *Encontre o valor da área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada  $R$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das equações*

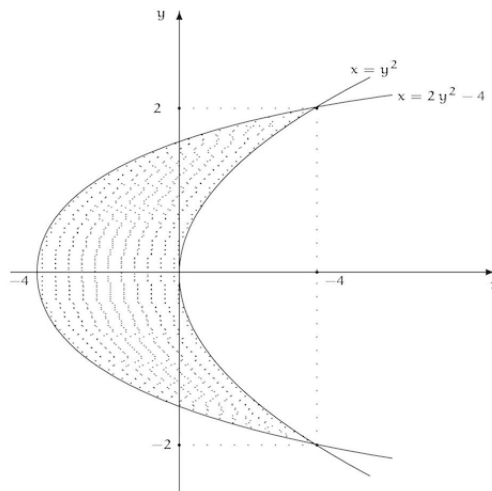
$$2y^2 - x - 4 = 0 \quad (4.38)$$

$$e \quad x - y^2 = 0, \quad (4.39)$$

*contidas no plano  $xOy$ .*

### Resolução:

A representação geométrica da região  $\underline{R}$ , cujo valor da área denotaremos por  $\underline{A}$ , queremos encontrar, é dada pela figura abaixo.



Observemos que

$$\begin{aligned} & 2y^2 - 4 = x = y^2, \\ \text{se, e somente se } & y^2 = 4, \\ & \text{ou seja, } y = \pm 2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Logo, se considerarmos as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(y) \doteq 2y^2 - 4, \tag{4.41}$$

$$g(y) \doteq y^2, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}, \tag{4.42}$$

como as funções  $\underline{f}$  e  $\underline{g}$  são contínuas em  $\mathbb{R}$  teremos, pelo item 5. da Observação 4.2.1, que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-2}^2 |f(y) - g(y)| \, dy \\ &\stackrel{(4.41) \text{ e } (4.42)}{=} \int_{-2}^2 |(2y^2 - 4) - y^2| \, dy \\ &= \int_{-2}^2 |y^2 - 4| \, dy \\ &\stackrel{y^2 - 4 \leq 0, \text{ para } y \in [-2, 2]}{=} \int_{-2}^2 (-y^2 + 4) \, dy \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo}}{=} \left[ -\frac{y^3}{3} + 4y \right]_{y=-2}^{y=2} \\ &= \left[ -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right] - \left[ -\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right] \\ &\stackrel{\text{Exercício 32}}{=} \frac{32}{3} \text{ u.a.}, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

Para finalizar temos os:

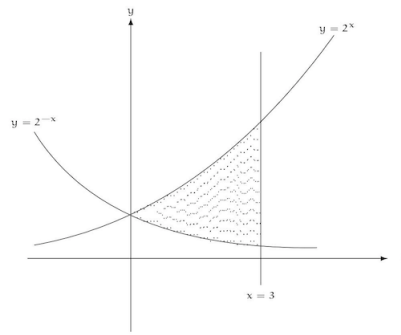
**Exercício 4.2.2** *Encontre o valor da área, que indicaremos por  $\underline{\mathcal{A}}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $\underline{f}$ ,  $\underline{g}$  e da reta  $x = 3$ , onde as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , são dadas por*

$$f(x) \doteq 2^x, \tag{4.43}$$

$$g(x) \doteq 2^{-x}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \tag{4.44}$$

**Resolução:**

A representação geométrica região  $\underline{R}$ , cujo valor de área  $\underline{\mathcal{A}}$ , queremos encontrar é dada pela figura abaixo.



A região que queremos encontrar o valor da área, isto é, o valor  $\mathcal{A}$ , é da região limitada  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $f_1 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_1 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f_1(x) \doteq 2^x, \quad (4.45)$$

$$g_1(x) \doteq 2^{-x}, \quad \text{para } x \in [0, 3]. \quad (4.46)$$

e pela reta  $x = 3$ .

Como as funções  $\underline{f}_1$  e  $\underline{g}_1$  são contínuas e não negativas em  $[0, 3]$ , do item 3. da Observação 4.2.1, o valor da área, isto é,  $\underline{\mathcal{A}}$ , pode ser obtida como diferença entre os valores das áreas, que indicaremos por  $\underline{\mathcal{A}}_1$  e  $\underline{\mathcal{A}}_2$ , onde  $\underline{\mathcal{A}}_1$  é o valor da área da região limitada, que chamaremos de  $\underline{\mathcal{R}}_1$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}_1$ , da reta  $x = 3$ , do eixo  $Ox$  e  $\underline{\mathcal{A}}_2$  é o valor da área da região limitada, que chamaremos de  $\underline{\mathcal{R}}_2$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{g}_1$ , da reta  $x = 3$ , do eixo  $Ox$ , respectivamente, isto é,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2. \quad (4.47)$$

Notemos que (pelo Teorema fundamental do Cálculo):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \int_0^3 2^x dx \\ &= \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C \left[ \frac{2^x}{\ln(2)} \right] \Big|_{x=0}^{x=3} \\ &= \frac{7}{\ln(2)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \int_0^3 2^{-x} dx \\ &= \int 2^{-x} dx = -\frac{2^{-x}}{\ln(2)} + C \left[ -\frac{2^{-x}}{\ln(2)} \right] \Big|_{x=0}^{x=3} \\ &= -\frac{7}{8 \ln(2)}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\stackrel{(4.47)}{=} \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 \\ &\stackrel{(4.48),(4.49)}{=} \frac{7}{\ln(2)} - \left[ -\frac{7}{8\ln(2)} \right] \\ &= \frac{63}{8\ln(2)} \text{ u.a.,} \end{aligned}$$

completando a resolução.

□

**Observação 4.2.3** Poderíamos calcular a área da região do Exemplo 4.2.2 acima, diretamente, da seguinte forma (utilizando o item 5. da Observação 4.2.1):

$$\mathcal{A} = \int_0^3 |f_1(x) - g_1(x)| dx,$$

onde as funções  $f_1, g_1 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  são dadas por (4.45) e (4.46), respectivamente.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Temos também o:

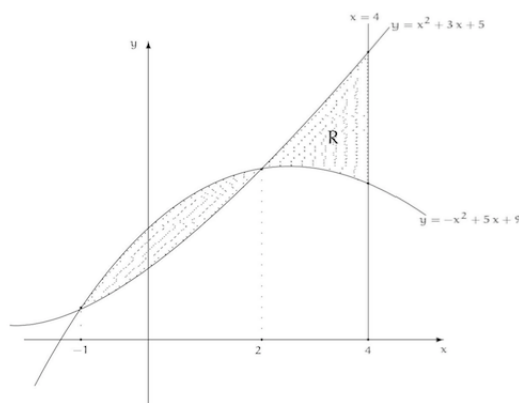
**Exercício 4.2.3** Encontre o valor da área, que indicaremos por  $\underline{\mathcal{A}}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $\underline{f}$ ,  $\underline{g}$  e da reta  $x = 4$ , onde as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são dadas por

$$f(x) \doteq x^2 + 3x + 5, \quad (4.50)$$

$$g(x) \doteq -x^2 + 5x + 9, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (4.51)$$

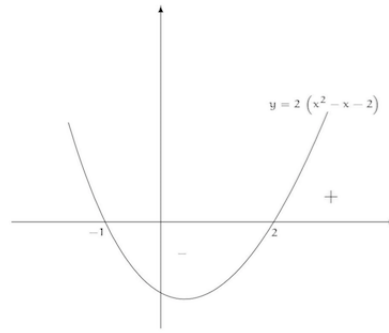
**Resolução:**

A representação geométrica região  $\underline{R}$ , cujo valor da área, isto é,  $\underline{\mathcal{A}}$ , queremos encontrar, é dada pela figura abaixo.



Observemos que

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \\ & \text{se, e somente se } x^2 + 3x + 5 = y = -x^2 + 5x + 9 \\ & \text{ou, equivalentemente } 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ & \text{ou seja, } x = -1 \text{ ou } x = 2. \end{aligned} \quad (4.52)$$



A figura abaixo ilustra a identidade acima.

Como as funções  $f$  e  $g$  são contínuas em  $\mathbb{R}$ , do item 5. da Observação 4.2.1, teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^4 |f(x) - g(x)| \, dx \\ &\stackrel{(4.50), (4.51)}{=} \int_{-1}^4 \left| (x^2 + 3x + 5) - (-x^2 + 5x + 9) \right| \, dx \\ &= \int_{-1}^4 |2x^2 - 2x - 4| \, dx \\ &\stackrel{2x^2 - 2x - 4 \geq 0, \text{ para } x \in (2, \infty) \text{ e } 2x^2 - 2x - 4 < 0, \text{ para } x \in (-1, 2)}{=} \int_{-1}^2 -(2x^2 - 2x - 4) \, dx + \int_2^4 (2x^2 - 2x - 4) \, dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo (ou seja, o Teorema 2.5.2)}}{=} - \left[ \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x \right] \Big|_{x=-1}^{x=2} + \left[ \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right] \Big|_{x=2}^{x=4} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Exercício 79}}{=} \frac{79}{3} \text{ u.a.},$$

completando a resolução. □

Para finalizar temos o:

**Exercício 4.2.4** *Encontre o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos equações*

$$y^2 = x + 4, \tag{4.53}$$

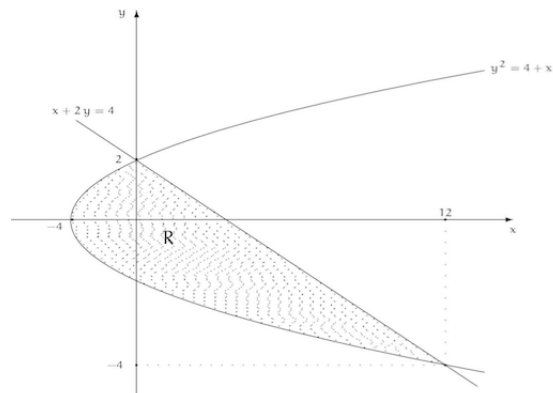
$$x + 2y = 4, \tag{4.54}$$

*contidas no plano  $xOy$ .*

**Resolução:**

A representação geométrica região  $\mathcal{R}$ , cujo valor da área, isto é,  $\mathcal{A}$ , queremos encontrar, é dada pela figura abaixo.

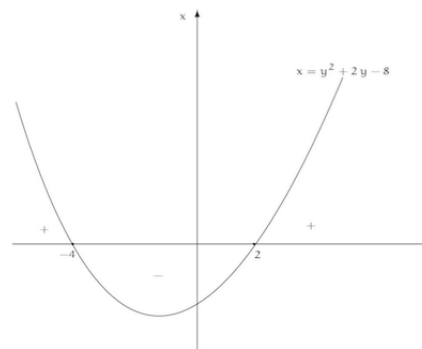




Observemos que

$$\begin{aligned}
 & \text{se, e somente se, } y^2 - 4 \stackrel{(4.53)}{=} x \stackrel{(4.54)}{=} 4 - 2y, \\
 & \text{ou seja, } y^2 + 2y - 8 = 0 \\
 & \text{ou seja, } y = -4 \text{ ou } y = 2.
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Geometricamente, teremos a seguinte configuração para a situação acima.



Logo, definindo-se as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(y) \doteq y^2 - 4, \tag{4.56}$$

$$g(y) \doteq 4 - 2y, \text{ para } y \in \mathbb{R}, \tag{4.57}$$

como as funções  $\underline{f}$  e  $\underline{g}$  são contínuas em  $\mathbb{R}$ , , do item 5. da Observação 4.2.1, teremos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_{-4}^2 |f(y) - g(y)| \, dx \\
 &\stackrel{(4.56), (4.57)}{=} \int_{-4}^2 |(y^2 - 4) - (4 - 2y)| \, dx \\
 &= \int_{-4}^2 |y^2 + 2y - 8| \, dx \\
 &\stackrel{y^2 + 2y - 8 < 0, \text{ para } x \in (-4, 2)}{=} \int_{-4}^2 -(y^2 + 2y - 8) \, dy \\
 &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo}}{=} \left[ -\frac{1}{3}y^3 + y^2 - 8y \right] \Big|_{y=-4}^{y=2} \\
 &\stackrel{\text{Exercício 36 u.a.}}{=} \text{36 u.a.},
 \end{aligned}$$

completando a resolução. □

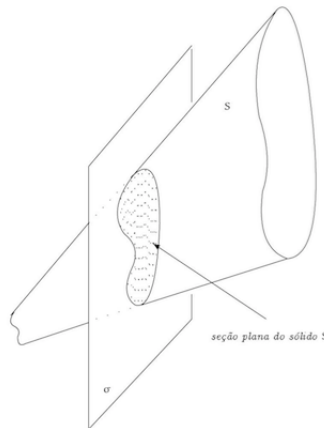
### 4.3 Volume de sólidos pelo método das fatias

Seja  $\underline{S}$  um sólido limitado contido em  $\mathbb{R}^3$ .

Nosso objetivo é encontrar um modo de calcular o volume, que indicaremos por  $\underline{V}$ , do sólido  $\underline{S}$ .

Para isto introduziremos a:

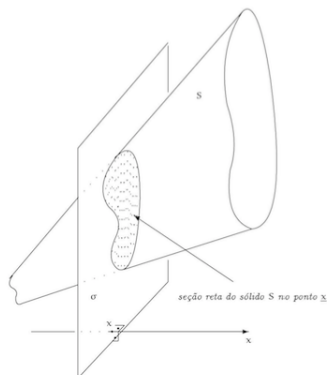
**Definição 4.3.1** Uma seção plana do sólido  $\underline{S}$  é uma região plana obtida da intersecção do sólido  $\underline{S}$  com um plano de  $\mathbb{R}^3$ , que indicaremos por  $\underline{\sigma}$  (veja a figura abaixo).



Temos também a

**Definição 4.3.2** Dado um sólido  $\underline{S}$  e uma reta  $\underline{r}$ , que identificaremos com eixo  $Ox$ , interceptando-se o sólido  $\underline{S}$  com um plano perpendicular à reta  $\underline{r}$  (ou seja, ao eixo  $Ox$ ) no ponto  $\underline{x}$ , obteremos uma seção plana do sólido  $\underline{S}$  que chamaremos de seção reta do sólido  $\underline{S}$  no ponto  $\underline{x}$  (veja a figura abaixo).

Com isto temos o:



**Teorema 4.3.1** (para o cálculo do volume de sólidos pelo método das fatias) *Suponhamos que o valor das áreas das seções retas do sólido  $\underline{S}$  seja dada por uma função  $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que é contínua em  $[a, b]$ .*

*Então o valor do volume, que indicaremos por  $\mathcal{V}$ , do sólido  $S$  será dado por:*

$$\mathcal{V} = \int_a^b A(x) dx \text{ u.v.}, \quad (4.58)$$

onde u.v. denota unidade de volume.

**Demonstração:**

Consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

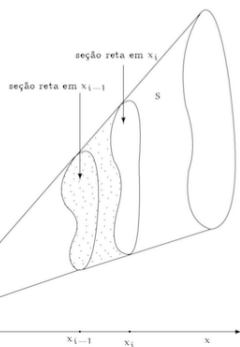
uma partição do intervalo  $[a, b]$  e

$$\Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1}, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Com a partição  $\mathcal{P}$ , podemos decompor o sólido  $\underline{S}$  em  $n$  sólidos menores, que indicaremos por

$$S_i, \quad \text{para } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

onde, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o sólido  $\underline{S}_i$ , denotará a porção do sólido  $\underline{S}$  compreendida entre as seções retas do sólido  $\underline{S}$  nos pontos  $x_{i-1}$  e  $x_i$  (veja a figura abaixo).



Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , denotemos por  $\mathcal{V}_i$ , o valor do volume da fatia  $\underline{S}_i$  do sólido  $\underline{S}$ .

Observemos que, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se  $\underline{\mathcal{A}}_{i-1}$  e  $\underline{\mathcal{A}}_i$  denotarem, respectivamente, o menor e o maior valor das áreas das seções retas do sólido  $\underline{S}$  entre os pontos  $\underline{x}_{i-1}$  e  $\underline{x}_i$ , então teremos

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{A}}_{i-1} (\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}) &\leq \mathcal{V}_i \leq \underline{\mathcal{A}}_i (\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}), \\ \text{ou ainda, } \underline{\mathcal{A}}_{i-1} &\leq \frac{\mathcal{V}_i}{\underline{x}_i - \underline{x}_{i-1}} \leq \underline{\mathcal{A}}_i. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Isto ocorre pois, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o tronco de cilindro com base na seção reta correspondente ao valor da área  $\underline{\mathcal{A}}_{i-1}$  que tem altura  $[\underline{x}_{i-1}, \underline{x}_i]$ , estará contida no sólido  $\underline{S}_i$  e, por outro lado, o tronco de cilindro com base na seção reta correspondente de valor da área  $\underline{\mathcal{A}}_i$  que tem altura  $[\underline{x}_{i-1}, \underline{x}_i]$ , conterá o sólido  $\underline{S}_i$ .

Notemos que

$$\underline{\mathcal{A}}_{i-1} = \mathcal{A}(\underline{x}_j) \quad \text{e} \quad \underline{\mathcal{A}}_i = \mathcal{A}(\underline{x}_k) \quad (4.60)$$

para cada  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Como a função  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$  é uma função contínua em  $[a, b]$  segue, do Teorema do valor intermediário para funções contínuas (como visto na disciplina de Cálculo 1), que existe  $\xi_i \in [\underline{x}_j, \underline{x}_k]$  (ou  $[\underline{x}_k, \underline{x}_j]$ ), de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\xi_i) &= \frac{\mathcal{V}_i}{\Delta \underline{x}_i}, \\ \text{ou seja, } \mathcal{V}_i &= \mathcal{A}(\xi_i) \Delta \underline{x}_i. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Mas, por construção, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \\ &\stackrel{(4.61)}{=} \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(\xi_i) \Delta \underline{x}_i. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Logo, passando o limite, quando  $n$  tende à  $\infty$  em (4.62) e utilizando o fato que a função  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$  é integrável em  $[a, b]$  (pois ela é contínua em  $[a, b]$ ) segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(\xi_i) \Delta \underline{x}_i \\ &\stackrel{\text{Definição 2.3.3, ou ainda, (2.43)}}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) dx, \end{aligned}$$

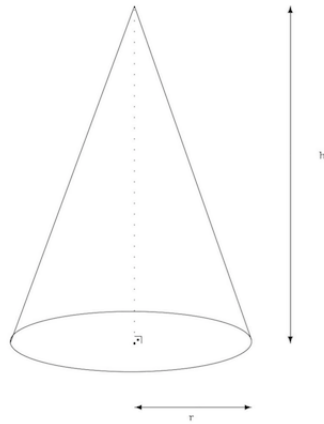
como queríamos mostrar. □

Com isto podemos resolver o:

**Exemplo 4.3.1** *Encontre o valor do volume de um cone circular reto, cujo raio do círculo da base é igual a  $r > 0$  e cuja altura vale  $h > 0$ .*

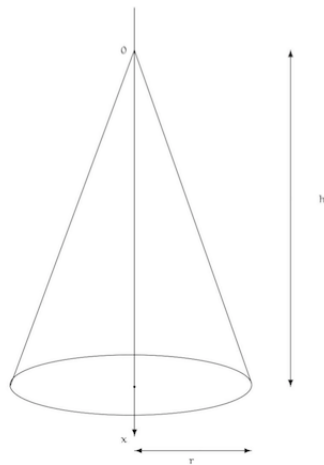
**Resolução:**

Geometricamente temos



Aplicaremos o Teorema do método das fatias (isto é, o Teorema 4.3.1) para encontrar o volume do cone circular reto acima.

Para isto consideremos a reta  $r$ , isto é, o eixo  $Ox$ , como sendo o eixo do cilindro com origem no seu vértice e orientado para baixo (veja a figura abaixo).



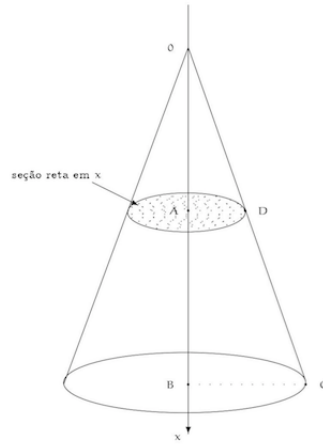
Observemos que para cada

$$x \in [0, h],$$

a seção reta do cilindro em  $x$  será um círculo, cujo centro está no eixo  $Ox$ , distando  $x$  unidades do vértice e cujo raio denotaremos por  $r'$  (veja a figura abaixo).

Logo, da figura abaixo, teremos que

$$\overline{OB} = h, \quad \overline{OA} = x, \quad \overline{BC} = r \quad \text{e} \quad \overline{AD} = r'. \quad (4.63)$$



Observemos que os triângulos  $\triangle OBC$  e  $\triangle OAD$  são semelhantes (caso AAA), assim

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}, \\ \text{que pela figura (4.63), implicará que: } \frac{r'}{r} &= \frac{x}{h}, \\ \text{ou ainda, } r' &= \frac{r}{h} x. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Logo, para cada  $x \in [0, h]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do cilindro em  $x$ , será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \pi (r')^2 \\ &\stackrel{(4.64)}{=} \pi \left( \frac{r}{h} x \right)^2 \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} x^2, \end{aligned} \quad (4.65)$$

ou seja, o valor da área da seção reta do cone reto dado será uma função contínua de  $x$ , para  $x \in [0, h]$ .

Logo, do Teorema do método das fatias (isto é, o Teorema 4.3.1), segue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) dx \\ &\stackrel{(4.65)}{=} \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo (ou seja, o Teorema 2.5.2)}}{=} \pi \frac{r^2}{h^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=h} \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ u.v..} \end{aligned} \quad (4.66)$$

completando a resolução.

□

**Observação 4.3.1** A fórmula (4.66) acima para o cálculo do volume de um cone circular reto, cujo raio da círculo da base é igual a  $r > 0$  e cuja altura vale  $h > 0$ , é conhecida dos cursos básicos de Geometria.

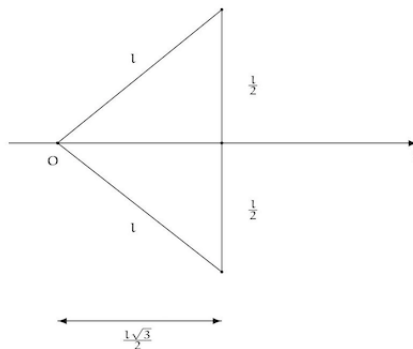
Podemos também aplicar o método das fatias para os seguintes exercícios resolvidos:

**Exercício 4.3.1** A partir de um triângulo equilátero de lados de comprimento  $l$ , com um dos vértices na origem e sua altura sobre o eixo  $Ox$ , construa um sólido  $S$ , cuja seção reta do sólido  $S$ , em  $\underline{x}$ , é um quadrado.

Calcule o valor do volume do sólido  $S$ .

**Resolução:**

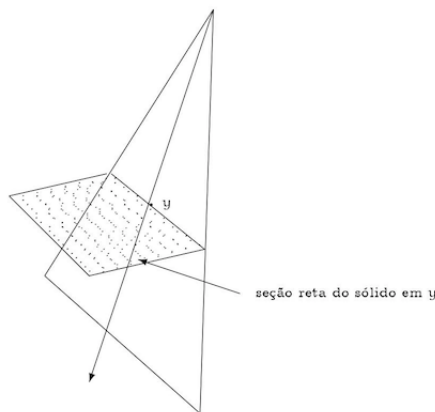
Geometricamente teremos a seguinte situação:



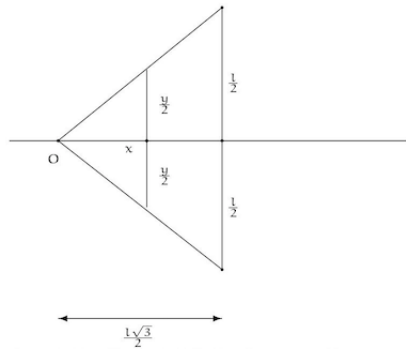
Observemos que, para cada  $x \in \left[0, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do sólido  $S$ , em  $\underline{x}$ , será dada por:

$$\mathcal{A}(x) = y^2, \quad (4.67)$$

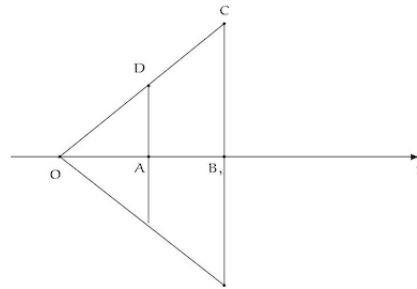
onde  $\underline{y}$  é o comprimento lado do quadrado da seção reta do sólido  $S$ , em  $\underline{x}$  (vejam as figuras abaixo).



Deste modo teremos:



Observemos que os triângulos  $\triangle OAD$  e  $\triangle OBC$  são semelhantes (caso AAA- veja a figura abaixo) assim, do Teorema de Thales, teremos:



$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}. \quad (4.68)$$

Mas

$$\overline{OB} = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{OA} = x, \quad \overline{BC} = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \frac{y}{2}. \quad (4.69)$$

Logo, de (4.68) e (4.69), segue que

$$\frac{x}{\frac{y}{2}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}}$$

ou seja, 
$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x. \quad (4.70)$$

Logo, para cada  $x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right]$ , o valor da área, isto é,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ ,



será dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x) &\stackrel{(4.67)}{=} y^2 \\
 &\stackrel{(4.69)}{=} \left[ \frac{2\sqrt{3}}{3} x \right]^2 \\
 &= \frac{4}{3} x^2, \quad \text{para } x \in \left[ 0, \frac{\sqrt{3}}{2} l \right], \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

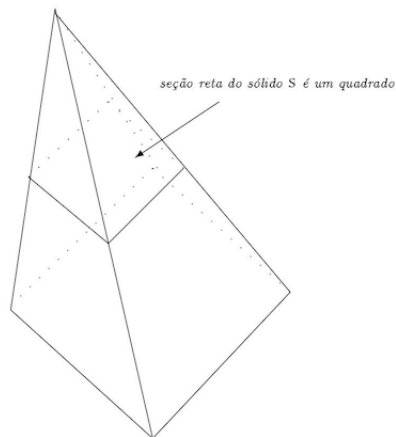
ou seja, o valor da área da seção reta do sólido dado, será uma função contínua de  $x$ , para  $x \in \left[ 0, \frac{\sqrt{3}}{2} l \right]$ .

Logo, do Teorema do método das fatias (isto é, o Teorema 4.3.1), segue que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) dx \\
 &\stackrel{(4.71)}{=} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} l} \frac{4}{3} x^2 dx \\
 &= \frac{4}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right] \Big|_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{3}}{2} l} \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{\sqrt{3}}{6} l^3 \text{ u.v.},
 \end{aligned}$$

completando a resolução. □

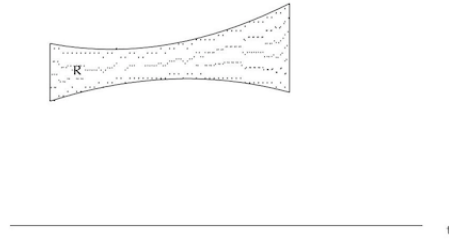
**Observação 4.3.2** *O sólido  $S$  em questão no Exemplo 4.3.1, é uma pirâmide de base quadrada, cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo.*



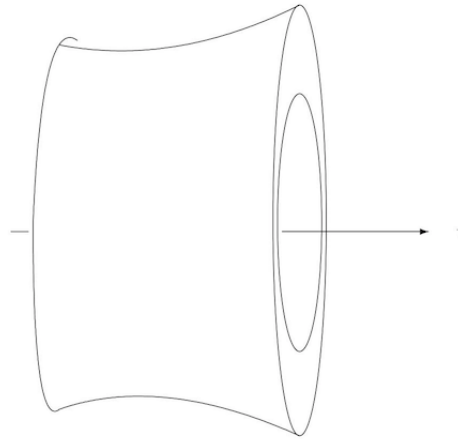
## 4.4 Volume de sólidos de revolução

Começaremos pela

**Definição 4.4.1** Seja  $\underline{\sigma}$  um plano em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\underline{t}$  uma reta contida no plano  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{R}$  uma região plana que está contida num dos semi-planos, do plano  $\underline{\sigma}$ , determinados pela reta  $\underline{t}$  (veja a figura abaixo).



O sólido  $\underline{S}$  obtido da rotação da região  $\underline{R}$  (contida no plano  $\underline{\sigma}$ ) em torno da reta  $\underline{t}$  será denominado **sólido de revolução** e a reta  $\underline{t}$  será dita **eixo de revolução** (a figura abaixo ilustra a situação descrita acima).



Nosso objetivo é encontrar o volume de um sólido de revolução  $\underline{S}$ , como o definido acima.

**Observação 4.4.1** Começaremos por uma situação mais simples, a saber:

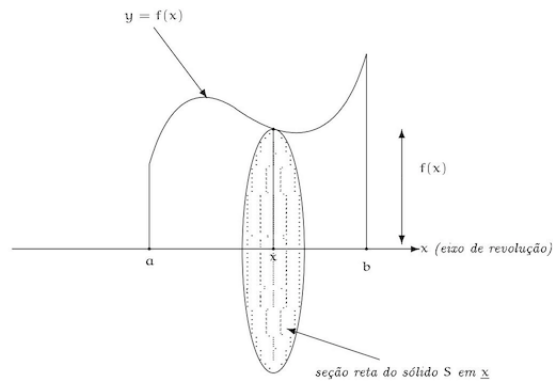
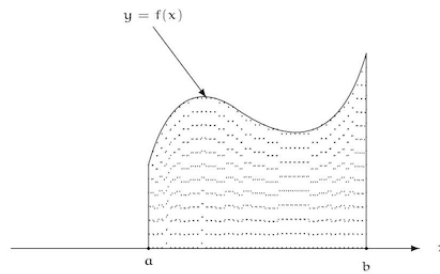
Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e não negativa em  $[a, b]$ , ou seja,

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in [a, b],$$

e denotemos por  $\underline{R}$ , a região limitada do plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo).

Neste caso observamos que, para cada  $x \in [a, b]$ , as seções retas do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , relativamente ao eixo de revolução  $Ox$ , será um círculo, cujo centro é o ponto  $(x, 0)$  e cujo o raio será  $f(x)$  (veja a figura abaixo).

Logo, para cada  $x \in [a, b]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da mesma, será



dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \pi r^2 \\ r &\stackrel{f(x)}{=} f(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x) = \pi [f(x)]^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Como a função  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , segue que a função  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , dada por (4.72), também será contínua em  $[a, b]$ .

Seja  $\mathcal{V}$  o valor do volume do sólido  $S$ .

Logo, do Teorema do método das fatias (isto é, do Teorema 4.3.1), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) \, dx \\ &\stackrel{(4.72)}{=} \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \text{ u.v..} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Aplicamos isto ao:

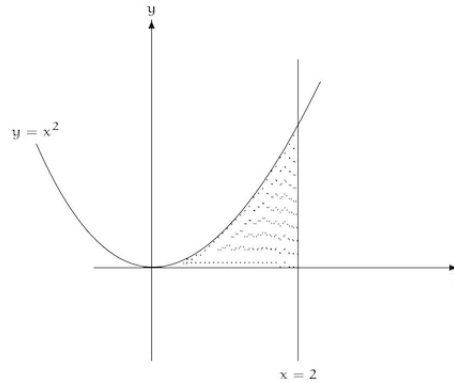
**Exemplo 4.4.1** Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) \doteq x^2, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (4.74)$$

Calcule o valor do volume  $\mathcal{V}$ , do sólido de revolução  $S$ , obtido da rotação da região limitada  $R$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , da reta  $x = 2$  e do eixo  $Ox$ .

**Resolução:**

A representação geométrica da região  $\underline{R}$ , que será rotacionada em torno do eixo  $Ox$ , é dada pela figura abaixo.



Observemos que, para cada  $x \in [0, 2]$ , o valor da área, isto é,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será o valor da área de um círculo de raio

$$r = f(x)$$

$$\stackrel{(4.74)}{=} x^2.$$

Notemos que a função  $f$  é não negativa.

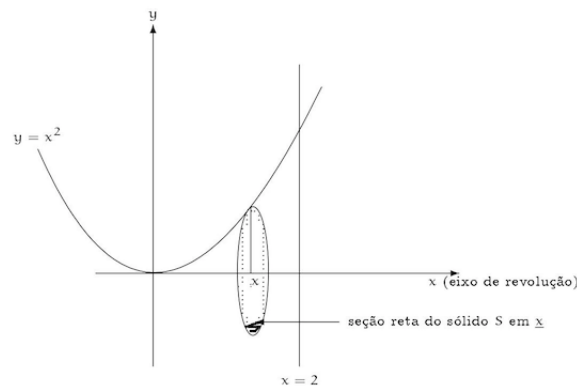
Assim, para cada  $x \in [0, 2]$ , teremos que

$$\mathcal{A}(x) = \pi r^2$$

$$\stackrel{r=f(x)}{=} \pi [f(x)]^2$$

$$\stackrel{(4.74)}{=} \pi [x^2]^2$$

$$= \pi x^4. \tag{4.75}$$



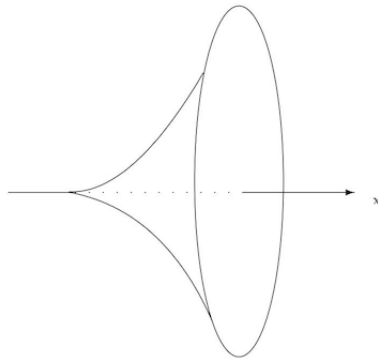
Observemos que a função  $\mathcal{A} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (4.75), é uma função contínua em  $[0, 2]$ .

Logo, pelo Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), segue que

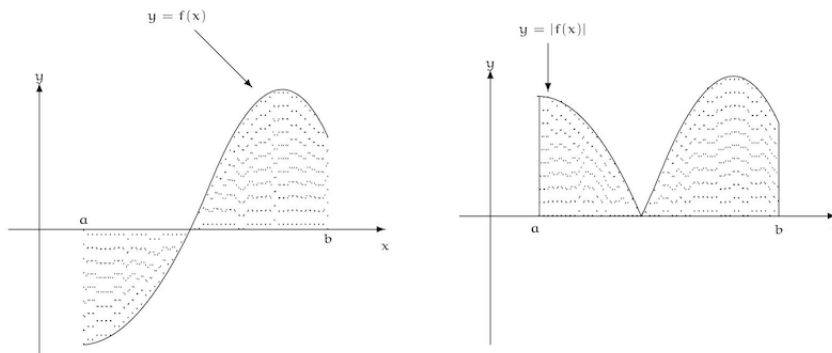
$$\begin{aligned} V &\stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) \, dx \\ &\stackrel{(4.75)}{=} \int_0^2 \pi x^4 \, dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{32}{5} \pi \text{ u.v.}, \end{aligned}$$

completando a resolução.

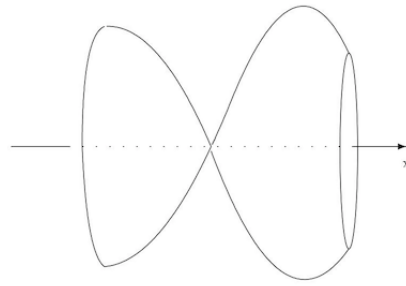
Um esboço da representação geométrica do sólido é dado pela figura abaixo. □



**Observação 4.4.2** Se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[a, b]$  podendo, eventualmente, assumir valores negativos, basta observar que o sólido de revolução obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , em torno do eixo  $Ox$ , é o mesmo que o sólido de revolução obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}'$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $|\underline{f}|$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , em torno do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo).



O sólido em questão tem como representação geométrica a figura abaixo.



Com isto, observamos que, para cada  $x \in [a, b]$ , o valor da área, que indicaremos por  $A = A(x)$ , da seção reta do sólido  $S$ , em  $x$ , será a área de um círculo de centro sobre o eixo  $Ox$  e cujo raio é igual a  $|f(x)|$ .

Assim, para cada  $x \in [a, b]$ , teremos

$$A(x) = \pi r^2$$

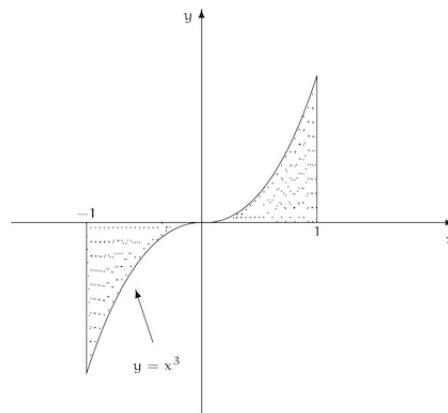
$$\stackrel{r=|f(x)|}{=} \pi [f(x)]^2, \tag{4.76}$$

que é uma função contínua em  $[a, b]$ .

Logo, o valor do volume, que indicaremos por  $V$ , do sólido de revolução  $S$ , obtido da rotação da região acima em torno do eixo  $Ox$  será dado, pelo Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), por:

$$V \stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$\stackrel{(4.76)}{=} \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \text{ u.v..} \tag{4.77}$$



**Conclusão:** Da Observação 4.4.1 e das considerações acima, podemos utilizar a mesma expressão para calcular o valor do volume de um sólido de revolução dos tipos que foram considerados acima, independente da função  $f$  assumir ou não valores negativos, ou seja, para um sólido de revolução obtido da rotação da região limitada  $R$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , em torno do eixo  $Ox$ .

Podemos aplicar as ideias acima ao:

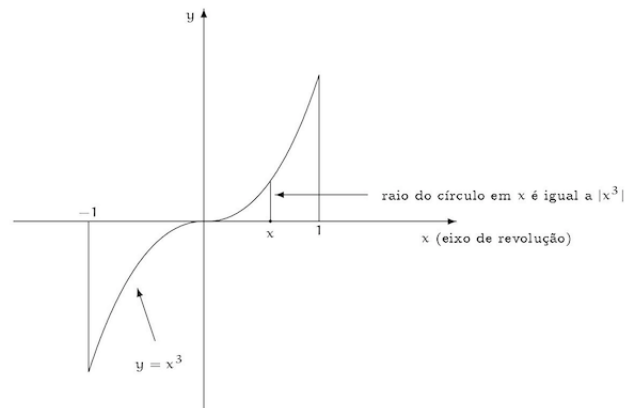
**Exercício 4.4.1** Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq x^3, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (4.78)$$

Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\underline{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $x = 1$  e  $x = -1$ , em torno do eixo  $Ox$ .

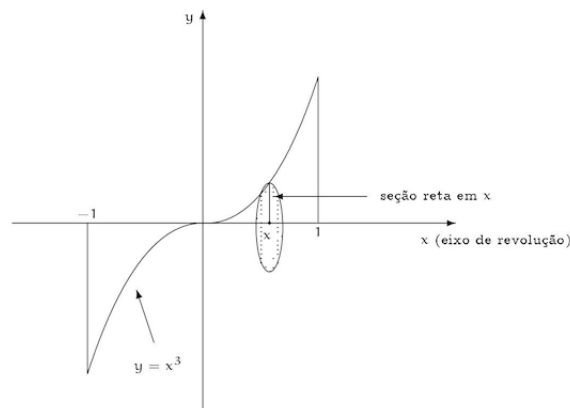
**Resolução:**

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica da região  $\underline{R}$ .



Observemos que, para cada  $x \in [-1, 1]$ , a seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , (veja a figura abaixo) é um círculo de centro sobre o eixo  $Ox$ , cujo raio é

$$r = |f(x)| \\ \stackrel{(4.78)}{=} |x^3|.$$



Logo, para cada  $x \in [-1, 1]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do sólido em  $\underline{x}$  será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \pi r^2 \\ &\stackrel{r=|x^3|}{=} \pi \left( |x^3| \right)^2. \end{aligned} \quad (4.79)$$

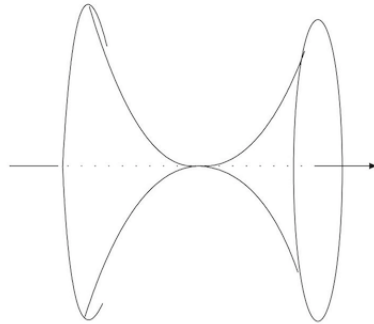
Observemos que a função  $\mathcal{A} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (4.79), é uma função contínua em  $[-1, 1]$ .

Logo, do Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) \, dx \\ &\stackrel{(4.79)}{=} \int_{-1}^1 \pi \left( |x^3| \right)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 x^6 \, dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{7} x^7 \right] \Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &\stackrel{\text{Exercício 2}}{=} \frac{2}{7} \pi \text{ u.v.}, \end{aligned}$$

completando a resolução.

A representação geométrica do sólido  $\underline{S}$  é dada pela figura abaixo.



□

**Observação 4.4.3** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $[a, b]$  tais que*

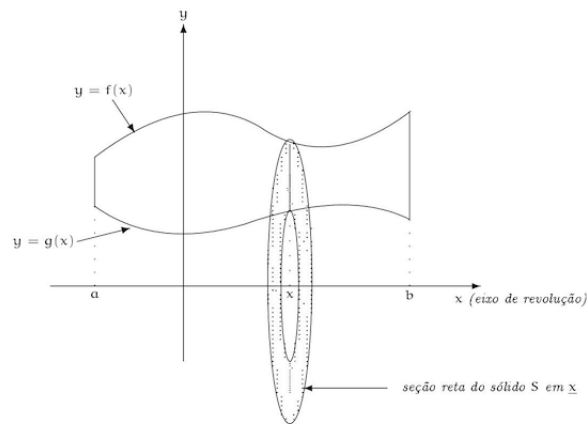
$$0 \leq g(x) \leq f(x), \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (4.80)$$

*Se considerarmos o sólido  $\underline{S}$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $\underline{f}$ ,  $\underline{g}$ , das retas  $x = a$ ,  $x = b$  e do eixo  $Ox$ , em torno do eixo  $Ox$ , temos que, para cada  $x \in [a, b]$ , a seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será um anel circular, com centro sobre o eixo  $Ox$ , cujo raio maior é igual a  $f(x)$  e o raio menor igual a  $g(x)$  (veja a figura abaixo).*

*Assim, para cada  $x \in [a, b]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será dada por:*

$$\mathcal{A}(x) = \pi \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\}, \quad (4.81)$$





que é uma função contínua em  $[a, b]$ .

e Logo, do Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), segue que o valor do volume, que indicaremos por  $\mathcal{V}$ , do sólido  $S$ , será dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) \, dx \\
 &\stackrel{(4.81)}{=} \int_a^b \pi \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} \, dx \\
 &= \pi \int_a^b \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} \, dx \text{ u.v..}
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Aplicamos as ideias acima ao:

**Exercício 4.4.2** Sejam  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  as funções dada por

$$f(x) \doteq x^2 + 2 \quad \text{e} \quad g(x) \doteq x + 8, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \tag{4.83}$$

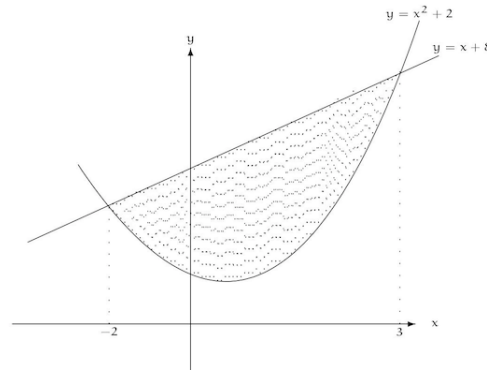
Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\mathcal{V}$ , do sólido de revolução  $S$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas gráficos das funções  $f$  e  $g$ , quando rotacionada em torno do eixo  $Ox$ .

**Resolução:**

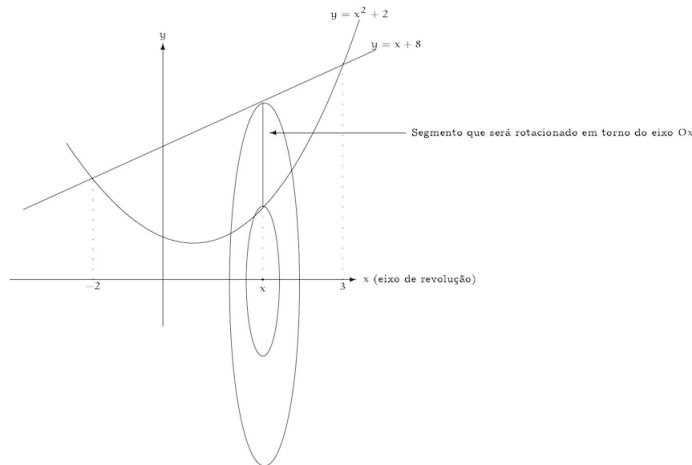
Observemos que, de (4.82), teremos:

$$\begin{aligned}
 &f(x) = g(x), \\
 \text{se, e somente se,} & \quad x^2 + 2 = x + 8, \\
 \text{ou seja,} & \quad x = 3 \quad \text{e} \quad x = -2.
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Logo, a representação geométrica da região  $\underline{R}$  é dada pela figura abaixo.



Observemos que, para cada  $x \in [-2, 3]$ , a seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será um anel circular, cujo centro está sobre o eixo  $Ox$ , cujo raio do círculo maior é igual a  $f(x)$  e o raio do círculo menor será igual a  $g(x)$  (veja a figura abaixo).



Logo, para cada  $x \in [-2, 3]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será dada por:

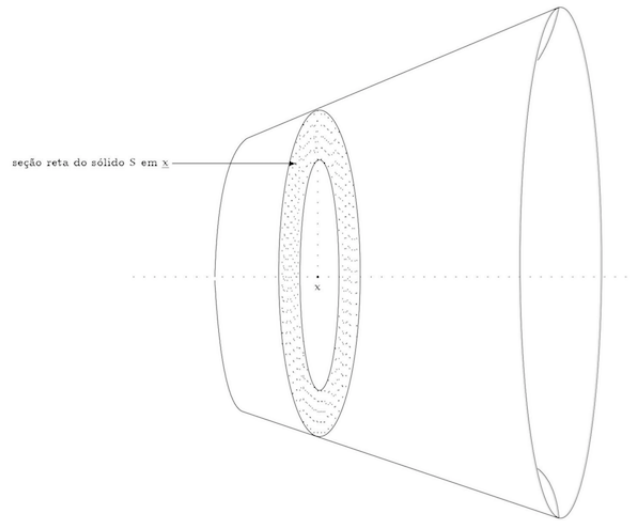
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \pi [f(x)]^2 - \pi [g(x)]^2 \\ &\stackrel{(4.83)}{=} \pi (x + 8)^2 - \pi (x^2 + 2)^2, \end{aligned} \quad (4.85)$$

que é uma função contínua em  $[-2, 3]$ .

Logo, do Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) \, dx \\ &\stackrel{(4.85)}{=} \int_{-2}^3 \left[ \pi (x + 8)^2 - \pi (x^2 + 2)^2 \right] \, dx \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 250 \pi \text{ u.v.}, \end{aligned}$$

completando a resolução.



A representação geométrica do sólido  $\underline{S}$  é dada pela figura abaixo.

□

Uma situação mais geral é dada pelo:

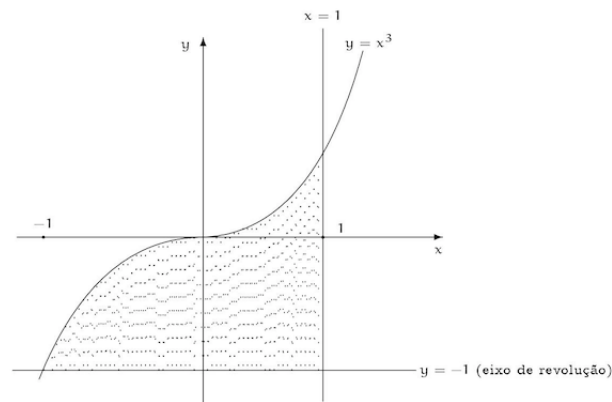
**Exemplo 4.4.2** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) \doteq x^3, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (4.86)$$

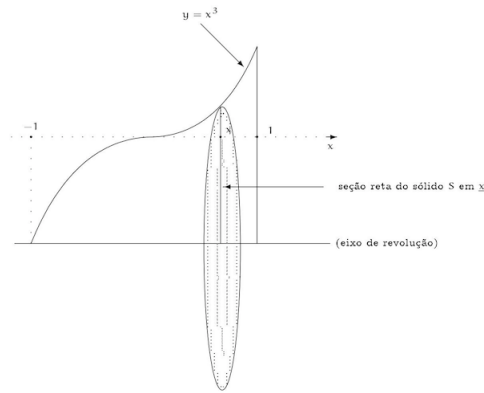
Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\underline{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , das retas  $x = 1$  e  $y = -1$ , em torno da reta  $y = -1$ .

**Resolução:**

A representação geométrica da região  $\underline{R}$  é dada pela figura abaixo.



Observemos que, para cada  $x \in [-1, 1]$ , a seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será um círculo (cujo centro está sobre a reta  $y = -1$ ), cujo raio será dado por  $|1 + x^3|$  (veja a figura abaixo).



Logo, para cada  $x \in [-1, 1]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \pi r^2 \\ &\stackrel{r=|1+x^3|}{=} \pi \left( |1+x^3| \right)^2 \\ &= \pi \left( 1+x^3 \right)^2, \end{aligned} \tag{4.87}$$

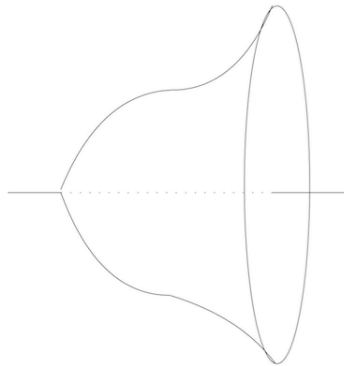
que é uma função contínua em  $[-1, 1]$ .

Logo, do Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) \, dx \\ &\stackrel{(4.87)}{=} \int_{-1}^1 \pi \left( 1+x^3 \right)^2 \, dx \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{16}{7} \pi \text{ u.v.}, \end{aligned}$$

completando a resolução.

A representação geométrica do sólido  $\underline{S}$  é dada pela figura abaixo.



□

A seguir temos os seguintes exercícios resolvidos:

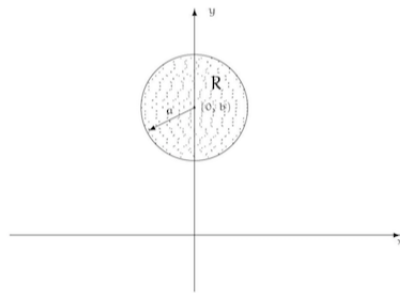
**Exercício 4.4.3** *Sejam  $0 < a < b$  fixados. Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\mathcal{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , em torno do eixo  $Ox$ , onde*

$$\underline{R} \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y - b)^2 \leq a^2\}. \quad (4.88)$$

A superfície deste sólido é denominada de **toro**.

**Resolução:**

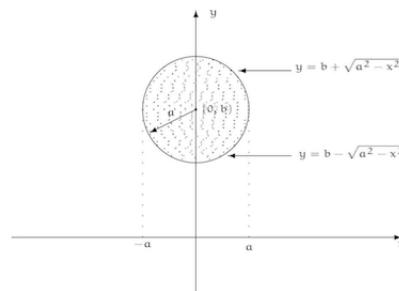
A região  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , é o círculo, de centro no ponto  $(0, b)$  e de raio igual a  $a$ , cuja representação geométrica é dada figura abaixo.



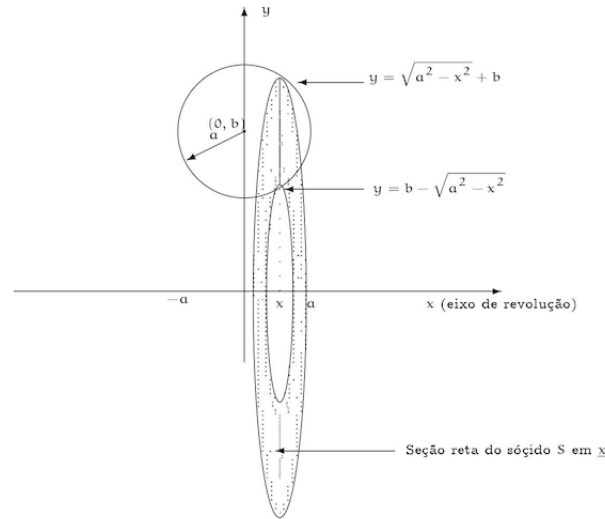
Observemos que a região  $\underline{R}$  é a região limitada, contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $\underline{f}$  e  $\underline{g}$ , onde  $f, g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  são as funções dadas por

$$f(x) \doteq b + \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{e} \quad g(x) \doteq b - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{para} \quad x \in [-a, a], \quad (4.89)$$

cujas representações geométricas são dadas pela figura abaixo.



Observemos que, para cada  $x \in [-a, a]$ , a seção reta do sólido  $\underline{S}$  em  $\underline{x}$  será um anel circular, cujo centro localiza-se no ponto  $(x, 0)$ , cujo raio maior será  $f(x)$  e o raio menor será  $g(x)$  (veja a figura abaixo).



Logo, para cada  $x \in [-a, a]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \pi [f(x)]^2 - \pi [g(x)]^2 \\ &\stackrel{(4.89)}{=} \pi \left[ b + \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 - \pi \left[ b - \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2, \end{aligned} \quad (4.90)$$

que é uma função contínua em  $[-a, a]$ .

Logo, pelo Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), temos que:

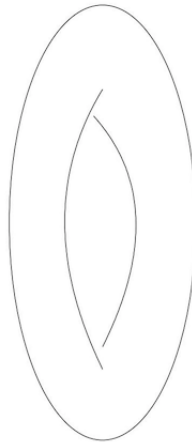
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_{-a}^a \mathcal{A}(x) \, dx \\ &\stackrel{(4.90)}{=} \int_{-a}^a \left\{ \pi \left[ b + \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 - \pi \left[ b - \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 \right\} \, dx \\ &= \pi \int_{-a}^a \left\{ \left[ b^2 + 2\sqrt{a^2 - x^2}b + (a^2 - x^2) \right] - \left[ b^2 - 2\sqrt{a^2 - x^2}b + (a^2 - x^2) \right] \right\} \, dx \\ &= \pi \int_{-a}^a \left\{ a^2 - x^2 + 2\sqrt{a^2 - x^2}b + b^2 - b^2 + 2\sqrt{a^2 - x^2}b - a^2 + x^2 \right\} \, dx \\ &= \pi \int_{-a}^a 4\sqrt{a^2 - x^2}b \, dx \\ &= 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\ &\stackrel{\text{Exercício A.1.6}}{=} 4\pi b \left[ \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} \right] \Big|_{x=-a}^{x=a} \\ &= 4\pi b \left\{ \left[ \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{a}{a}\right) + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - a^2} \right] - \left[ \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{-a}{a}\right) + \frac{-a}{2}\sqrt{a^2 - (-a)^2} \right] \right\} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 4\pi b \frac{a^2}{2} \pi. \end{aligned}$$

Logo o valor do volume do sólido  $\underline{S}$  será

$$\mathcal{V} = 2\pi^2 a^2 b \text{ u.v.},$$

completando a resolução.

A representação geométrica do sólido  $\underline{S}$  é dada pela figura abaixo.



□

Um outro exercício resolvido é:

**Exercício 4.4.4** *Sejam  $r, h > 0$  fixados.*

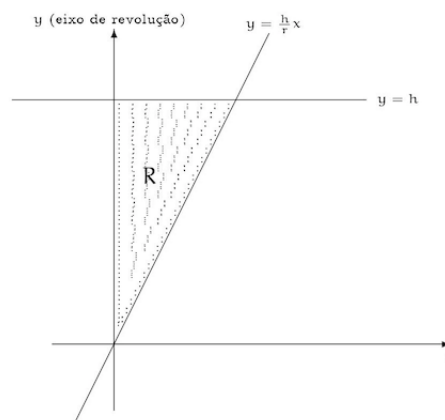
*Calcular o valor volume, que indicaremos por  $V$ , do sólido de revolução  $S$  obtido da rotação da região limitada  $R$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas retas*

$$y = \frac{h}{r}x \quad e \quad y = h \quad (4.91)$$

*e pelo eixo  $Oy$ , em torno do eixo  $Oy$ .*

**Resolução:**

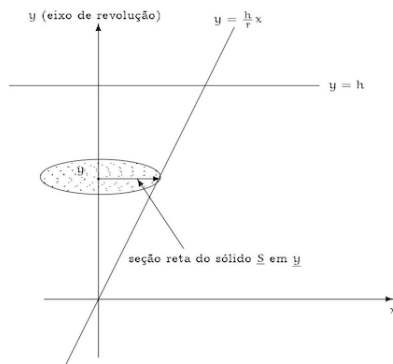
A representação geométrica da região  $R$  é dada pela figura abaixo.



Consideremos  $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(y) \doteq \frac{r}{h}y, \quad \text{para } h \in [0, h]. \quad (4.92)$$

Observemos que, para cada  $y \in [0, h]$ , a seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{y}$ , será um círculo, de centro no ponto  $(0, y)$  e raio igual a  $f(y)$  (veja a figura abaixo).



Assim, para cada  $y \in [0, h]$ , o valor da área, que indicaremos por  $A = A(y)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $y$ , será dada por:

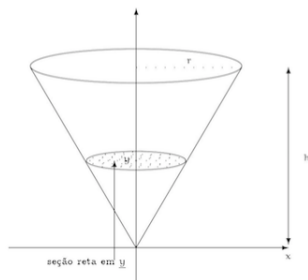
$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(y) &= \pi r^2 \\
 &\stackrel{r=f(y)}{=} \pi [f(y)]^2 \\
 &\stackrel{(4.92)}{=} \pi \left(\frac{r}{h} y\right)^2 \\
 &= \pi \frac{r^2}{h^2} y^2, \tag{4.93}
 \end{aligned}$$

Observemos que a função  $\mathcal{A} : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (4.93), será uma função contínua em  $[0, h]$ . Logo, pelo Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), teremos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_0^h \mathcal{A}(y) \, dy \\
 &\stackrel{(4.93)}{=} \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} y^2 \, dy \\
 &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h y^2 \, dy \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ u.v.},
 \end{aligned}$$

completando a resolução.

A representação geométrica do sólido  $\underline{S}$  é dada pela figura abaixo.



□



Temos também o:

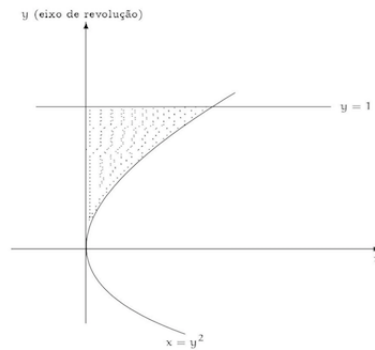
**Exercício 4.4.5** *Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\underline{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$  obtido da rotação, em torno do eixo  $Oy$ , da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas da curva*

$$y^2 = x,$$

da reta  $y = 1$  e do eixo  $Oy$ .

**Resolução:**

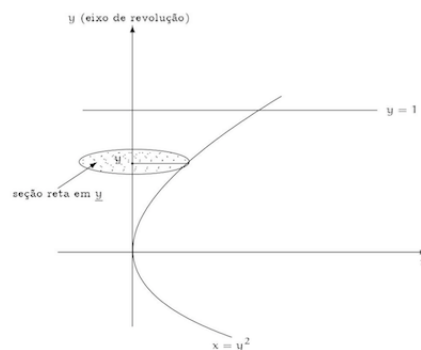
A região  $R$  que será rotacionada em torno do eixo  $Oy$ , tem representação geométrica dada pela figura abaixo.



Consideremos  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(y) \doteq y^2, \quad \text{para } y \in [0, 1]. \quad (4.94)$$

Observemos que, para cada  $y \in [0, 1]$ , a seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{y}$ , será um círculo, de centro no ponto  $(0, y)$  e raio igual a  $f(y)$  (veja a figura abaixo).



Assim, para cada  $y \in [0, 1]$ , o valor da área, que indicaremos por  $A = A(y)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $\underline{y}$ , será dada por:

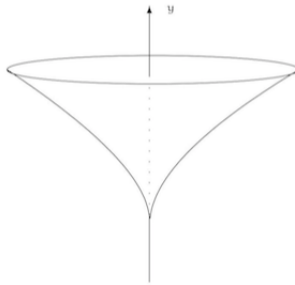
$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(y) &= \pi r^2 \\
 &\stackrel{r=f(y)}{=} \pi [f(y)]^2 \\
 &\stackrel{(4.94)}{=} \pi (y^2)^2 \\
 &= \pi y^4, \tag{4.95}
 \end{aligned}$$

Observemos que a função  $\mathcal{A} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (4.95), será uma função contínua em  $[0, 1]$ . Logo, pelo Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), teremos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_0^h \mathcal{A}(y) \, dy \\
 &\stackrel{(4.95)}{=} \int_0^1 \pi y^4 \, dy \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{5} \pi \text{ u.v.},
 \end{aligned}$$

completando a resolução.

A representação geométrica do sólido  $\underline{S}$  é dada pela figura abaixo.



□

Para finalizar temos o:

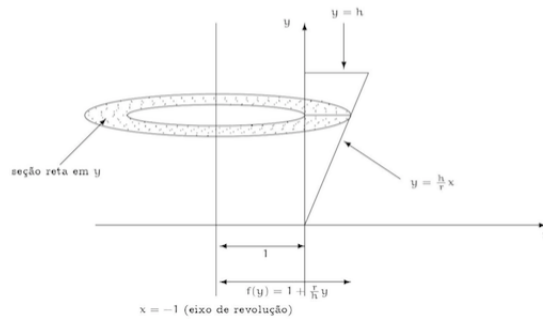
**Exercício 4.4.6** *Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\underline{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido da rotação, em torno da reta  $x = -1$ , da região limitada, contida no plano  $xOy$ , delimitada representações geométricas pelas retas*

$$y = \frac{h}{r} x, \quad y = h \tag{4.96}$$

e do eixo  $Oy$ .

**Resolução:**

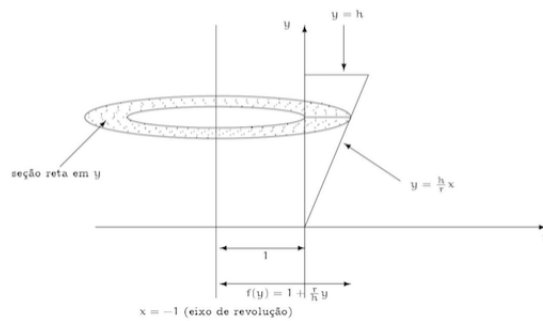
A representação geométrica da região  $\underline{R}$ , que será rotacionada em torno da reta  $x = -1$ , é dada pela figura abaixo.



Consideremos  $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(y) \doteq 1 + \frac{r}{h}y, \quad \text{para } y \in [0, h]. \quad (4.97)$$

Observemos que, para cada  $y \in [0, h]$ , a seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $y$ , será um anel circular, de centro no ponto  $(0, y)$ , raio maior igual a  $f(y)$  e raio menor igual a 1 (veja a figura abaixo).



Assim, para cada  $y \in [0, h]$ , o valor da área, que indicaremos  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(y)$ , da seção reta do sólido  $\underline{S}$ , em  $y$ , (é um anel circular) será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(y) &\doteq \pi \cdot f^2(y) - \pi \cdot 1^2 \\ &\stackrel{(4.97)}{=} \pi \left[ \left( 1 + \frac{r}{h}y \right)^2 - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Observemos que a função  $\mathcal{A} : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (4.98), será uma função contínua em  $[0, h]$ .

Logo, pelo Teorema do método das fatias (isto é, Teorema 4.3.1), teremos

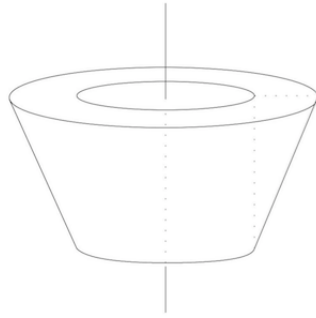
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\stackrel{(4.58)}{=} \int_0^h \mathcal{A}(y) \, dy \\ &\stackrel{(4.98)}{=} \int_0^h \pi \left[ \left( 1 + \frac{r}{h}y \right)^2 - 1 \right] \, dy \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \pi \left( rh + \frac{r^2 h}{3} \right) \text{ u.v.,} \end{aligned}$$

completando a resolução.

A representação geométrica do sólido  $\underline{S}$  é dada pela figura abaixo.

□

Nas três próximas seções exibiremos aplicações de integrais definidas para calcular o valor:



- do volume de sólidos de revolução, utilizando o **método dos cilindros**;
- do comprimento de curvas que são gráficos de funções a valores reais, de uma variável real;
- da área de superfícies revolução.

### 4.5 Método dos cilindros (ou cascas cilíndricas) para sólidos de revolução

Para sólidos de revolução podemos encontrar seu volume por meio de um outro processo, denominado método dos cilindros (ou cascas cilíndricas).

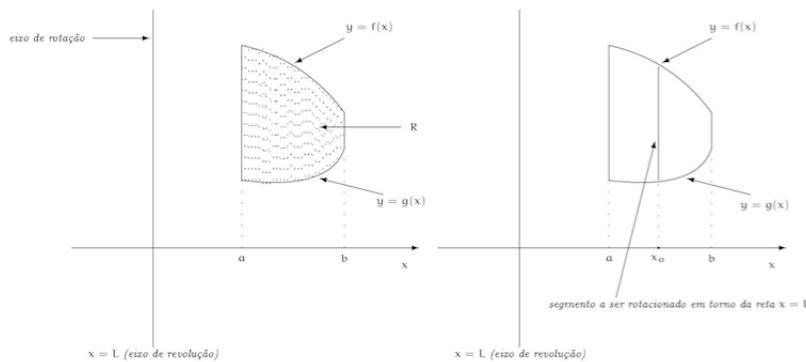
Para isto temos a:

**Definição 4.5.1** *Sejam  $L \leq a$  e  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que*

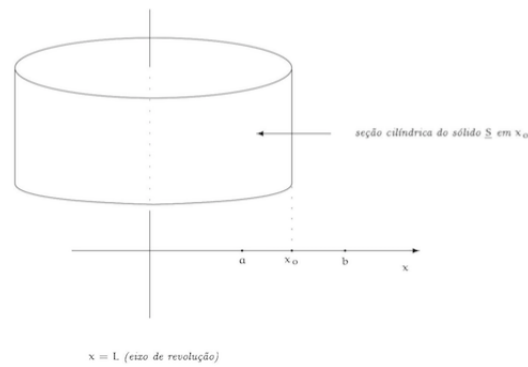
$$g(x) \leq f(x), \quad \text{para } x \in [a, b]. \tag{4.99}$$

*Consideremos o sólido de revolução  $\underline{S}$  obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $\underline{f}$  e  $\underline{g}$ , pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$ , em torno da reta  $x = L$ , isto é, a reta  $x = L$  será o eixo de revolução do sólido  $\underline{S}$ .*

*Para cada  $x_0 \in [a, b]$ ,  $\mathcal{A}(x_0)$  denotará o valor da área do cilindro obtido da rotação do segmento, que é a intersecção da reta  $x = x_0$  com a região  $\underline{R}$ , em torno da reta  $x = L$  (veja a figura abaixo).*



*O cilindro acima obtido será denominado seção cilíndrica (ou cilindro) do sólido  $S$  em  $x_0$  (veja a figura abaixo).*



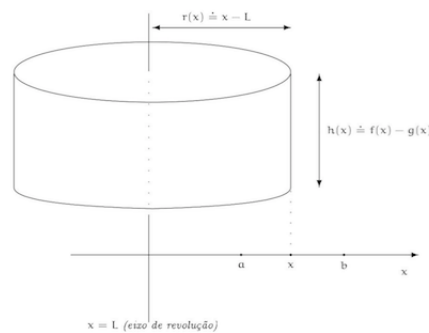
**Observação 4.5.1** Observemos que, na situação acima, temos que, para cada  $x \in [a, b]$ , o valor da área, isto é,  $A = A(x)$ , da seção cilíndrica do sólido  $S$ , em  $x$ , será dada por:

$$A(x) = 2\pi r(x) h(x), \quad (4.100)$$

onde

$$r = r(x) \quad e \quad h = h(x)$$

são, respectivamente, os valores do raio e a altura da seção cilíndrica do sólido  $S$ , em  $x$  (veja a figura abaixo).



Com isto, para cada  $x \in [a, b]$ , teremos que

$$r(x) = x - L, \quad (4.101)$$

$$h(x) = f(x) - g(x). \quad (4.102)$$

$$\text{Substituindo (4.101) e (4.102) em (4.100):} \quad A(x) = 2\pi(x - L)[f(x) - g(x)]. \quad (4.103)$$

Na situação acima temos o:

**Teorema 4.5.1** (do método das cascas cilíndricas (ou cilindros) para o cálculo do volume de uma sólido de revolução) *Sejam  $a, b, L$  tais que*

$$L \leq a < b.$$

*Suponhamos que as funções  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas em  $[a, b]$  e satisfazem*

$$g(x) \leq f(x), \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (4.104)$$

Então o valor do volume, que indicaremos por  $\mathcal{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido na Observação (4.5.1), será dado por

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x) \, dx, \tag{4.105}$$

ou seja, 
$$\mathcal{V} = 2\pi \int_a^b (x - L) [f(x) - g(x)] \, dx \text{ u.v.}, \tag{4.106}$$

onde u.v. denotará a unidade de volume.

**Demonstração:**

Para mostrarmos a identidade (4.105) acima, consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \tag{4.107}$$

uma partição do intervalo  $[a, b]$  e, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , consideremos um ponto

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{4.108}$$

Consideremos a região plana, formada pela reunião dos  $n$  retângulos, que denotaremos por  $\mathcal{R}_i$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , (veja a figura abaixo) cujas bases são os intervalos

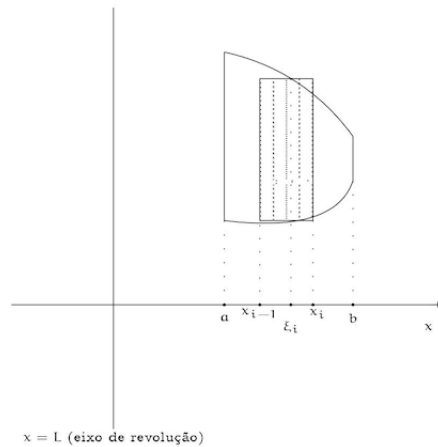
$$[x_{i-1}, x_i]$$

e cuja alturas são os intervalos

$$[(\xi_i, g(\xi_i)), (\xi_i, f(\xi_i))],$$

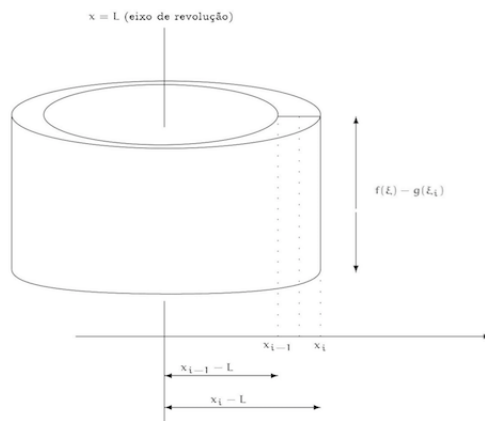
cujo valor do comprimento é igual a

$$f(\xi_i) - g(\xi_i).$$



Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , rotacionando-se o retângulo  $\mathcal{R}_i$ , em torno da reta  $x = L$ , obtemos um sólido de revolução, cuja reunião, para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , será formada pelo que chamaremos de **cascas cilíndricas** e indicaremos por  $\underline{S}_i$ , que nos fornecerá uma aproximação para o valor do volume do sólido  $\underline{S}$  (veja a figura abaixo).

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o volume, que indicaremos por  $\mathcal{V}_i$ , da casca cilíndrica  $\underline{S}_i$ , será dado por (veja a figura abaixo)



$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_i &= \pi [\text{raio externo}]^2 [\text{valor da altura}] - \pi [\text{raio interno}]^2 [\text{valor da altura}] \\
 &= \pi (x_i - L)^2 [f(\xi_i) - g(\xi_i)] - \pi (x_{i-1} - L)^2 [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \\
 &= \pi \left[ (x_i^2 - 2x_i + L^2) - (x_{i-1}^2 - 2x_{i-1}L + L^2) \right] [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \\
 &= \pi [x_i^2 - 2x_i - x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}L] [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \\
 &= \pi [x_i + x_{i+1} - 2L] [f(\xi_i) - g(\xi_i)] (x_i - x_{i-1}). \tag{4.109}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i \\
 &\stackrel{(4.109)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi [x_i + x_{i+1} - 2L] [f(\xi_i) - g(\xi_i)] (x_i - x_{i-1}) \\
 &\stackrel{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi [x_i + x_{i+1} - 2L] [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i \\
 &\stackrel{\text{definição da integral de Riemann (veja (2.43))}}{=} \pi \int_a^b (2x - 2L) [f(x) - g(x)] dx \\
 &= 2\pi \int_a^b (x - L) [f(x) - g(x)] dx \text{ u.v. ,}
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

#### Observação 4.5.2

1. O Teorema 4.5.1 acima, é conhecido como **Teorema do método das cascas cilíndricas** e, como veremos, será útil para o cálculo do valor do volume de certos sólidos de revolução.

Aplica-se **SOMENTE** para sólidos de revolução.

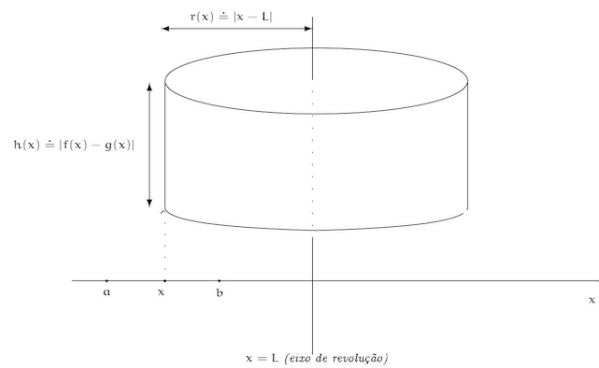
2. Se o eixo de revolução é a reta

$$\begin{aligned} x &= L, \\ \text{onde } L &\leq a \\ \text{ou } b &\leq L \end{aligned}$$

e a função  $f - g$  muda de sinal em  $[a, b]$ , então o valor volume, que indicaremos por  $\mathcal{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $f$ ,  $g$ , das retas  $x = a$  e  $x = b$ , em torno da reta  $x = L$ , será dado por

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_a^b |x - L| |f(x) - g(x)| dx \text{ u.v.} \tag{4.110}$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato (veja a figura abaixo).



3. Notemos que, no item 2. acima (veja a figura acima), para cada  $x \in [a, b]$ , o valores do raio e da altura da seção cilíndrica do sólido  $\underline{S}$ , em  $x$ , serão dados, respectivamente, por:

$$r(x) = |x - L| \quad \text{e} \quad h(x) = |f(x) - g(x)|. \tag{4.111}$$

4. Sejam  $a, b, L \in \mathbb{R}$  tais que

$$L \leq a \quad \text{ou} \quad b \leq L.$$

Se a rotação da região  $\underline{R}$ , for em torno de uma reta paralela ao eixo  $Ox$ , mais precisamente, a reta

$$y = L$$

(ou seja, o eixo de revolução for a reta  $y = L$ ), então podemos aplicar o Teorema do método das cascas cilíndricas (ou seja, o Teorema 4.5.1), para obter o volume do sólido de revolução  $\underline{S}$  (dado como no item 2. acima), a saber,

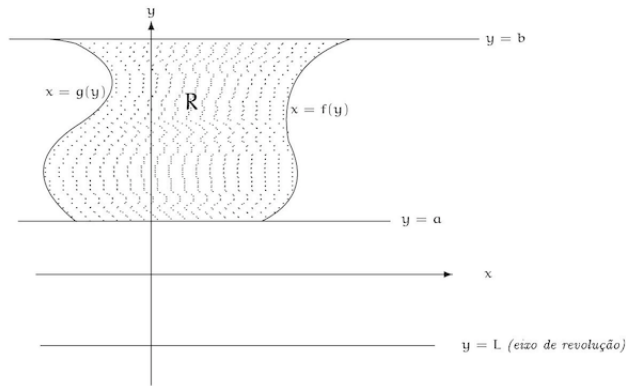
$$\mathcal{V} = 2\pi \int_a^b |y - L| |f(y) - g(y)| dy \text{ u.v.}, \tag{4.112}$$

onde a região plana  $\underline{R}$  é a região limitada, contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções

$$x = f(y), \quad x = g(y), \quad \text{para cada } x \in [a, b]$$

e pelas retas  $y = a$ ,  $y = b$  (veja a figura abaixo).





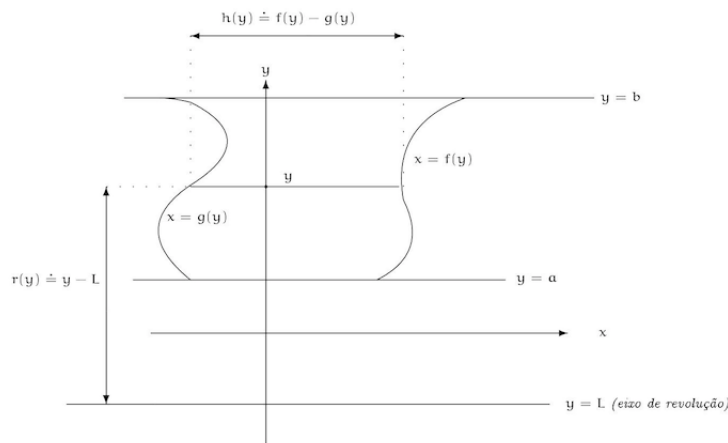
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

5. Observemos que, no caso do item 4. acima, para cada  $y \in [a, b]$ , a seção cilíndrica do sólido de revolução  $\underline{S}$ , em  $y$ , pode ser obtida, rotacionando-se um segmento apropriado em torno da reta  $y = L$  (veja figura abaixo).

No caso em que

$$L \leq a \quad \text{e} \quad g(y) \leq f(y), \quad \text{para} \quad y \in [a, b],$$

temos a seguinte situação geométrica:



Com isto temos que, para  $y \in [a, b]$ , o valor da área, que indicaremos por  $A = A(y)$ , da seção cilíndrica do sólido de revolução  $\underline{S}$ , em  $y$  será dada por

$$A(y) = 2\pi(y - L)[f(y) - g(y)], \quad (4.113)$$

que nos fornece o integrando da integral definida acima, para o caso considerado, ou seja, o volume do sólido de revolução  $\underline{S}$ , será dada por (4.112).

6. A verificação da validade da expressão (4.112) para valor do volume  $\underline{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , no caso geral, será deixada como exercício para o leitor.

7. Notemos que, no caso do item 6. acima, (veja a figura acima), para cada  $y \in [a, b]$ , os valores raio e da altura da seção cilíndrica do sólido de revolução  $\underline{S}$ , em  $y$ , serão dados, respectivamente, por:

$$r(y) = |y - L| \quad e \quad h(y) = |f(y) - g(y)|. \quad (4.114)$$

Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo 4.5.1** *Sejam  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas por*

$$f(x) \doteq 1 - x^2, \quad g(x) \doteq x^2 - 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (4.115)$$

*Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\underline{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções  $f$  e  $g$ , em torno da reta  $x = 2$ .*

**Resolução:**

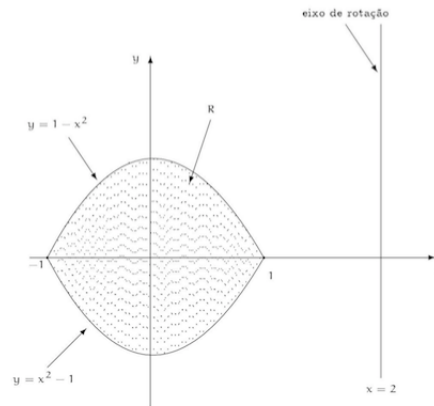
As funções  $f$  e  $g$  são contínuas em  $[a, b]$ .

Logo podemos aplicar o Teorema do método das cascas cilíndricas (ou seja, o Teorema 4.5.1) para calcular o valor volume  $\underline{V}$  do sólido de revolução  $\underline{S}$ .

Observemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \\ \text{se, e somente se,} \quad 1 - x^2 &= x^2 - 1, \\ \text{ou seja,} \quad x &= 1 \quad e \quad x = -1. \end{aligned} \quad (4.116)$$

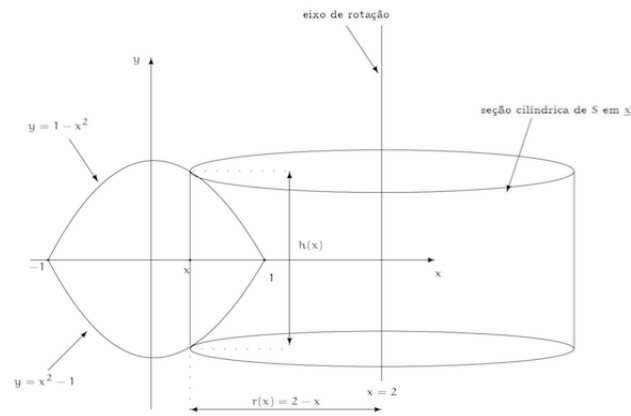
A representação geométrica da região  $\underline{R}$  é dada pela figura abaixo:



Notemos que, para cada  $x \in [-1, 1]$ , temos que o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção cilíndrica do sólido de revolução  $\underline{S}$ , em  $x$  (é a rotação de um segmento em torno da reta  $x = 2$  - veja a figura abaixo), será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= 2\pi r(x) h(x) \\ &= 2\pi(2-x) \left[ (1-x^2) - (x^2-1) \right], \quad \text{para } x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (4.117)$$

que é uma função contínua em  $[-1, 1]$ .



Logo, pelo Teorema do método das cascas cilíndricas (isto é, o Teorema 4.5.1), segue que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &\stackrel{(4.105)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 2\pi r(x) h(x) \, dx \\
 &\stackrel{(4.117)}{=} 2\pi \int_{-1}^1 (2-x) \left[ (1-x^2) - (x^2-1) \right] \, dx \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{32}{3} \pi \text{ u.v.},
 \end{aligned}$$

completando a resolução. □

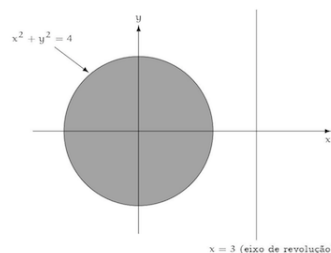
Podemos também aplicar as ideias acima ao:

**Exercício 4.5.1** *Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\mathcal{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , em torno da reta  $x = 3$ , onde  $\underline{R}$  é o círculo de centro no ponto  $(0, 0)$  e cujo raio tem valor igual a 2, isto é,*

$$\underline{R} \doteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; , x^2 + y^2 \leq 4 \right\}. \quad (4.118)$$

### Resolução:

A representação geométrica da região  $\underline{R}$  é dada pela figura abaixo:

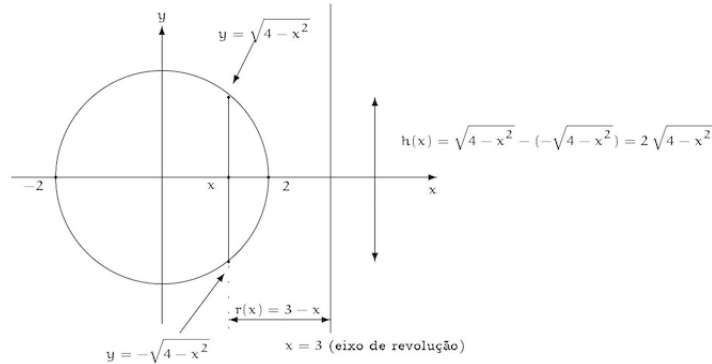


O sólido de revolução  $\underline{S}$  é um toro, cujo volume foi encontrado anteriormente utilizando-se o Teorema do método das fatias.

No Exercício 4.4.3, tratamos de um caso semelhante.

Aplicaremos o Teorema do método das cascas cilíndricas (isto é, o Teorema 4.5.1) para encontrar o volume  $\mathcal{V}$  do toro acima.

Para isto observemos a figura abaixo:



Deste modo, para cada  $x \in [-2, 2]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ , da seção cilíndrica do sólido de revolução  $\underline{S}$ , em  $\underline{x}$ , será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= 2\pi [\text{raio da seção cilíndrica do sólido } \underline{S}, \text{ em } \underline{x}] \cdot [\text{altura da seção cilíndrica do sólido } \underline{S}, \text{ em } \underline{x}] \\ &= 2\pi (3 - x) \left( \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{4 - x^2} \right) \\ &= 4\pi (3 - x) \sqrt{4 - x^2}, \end{aligned} \quad (4.119)$$

ou seja, uma função contínua em  $[-2, 2]$ .

Portanto, do Teorema do método das cascas cilíndricas (isto é, Teorema 4.5.1), segue que

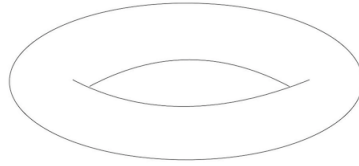
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\stackrel{(4.105)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(x) dx \\ &\stackrel{(4.119)}{=} 4\pi \int_{-2}^2 (3 - x) \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= 4\pi \left[ \int_{-2}^2 3\sqrt{4 - x^2} dx - \int_{-2}^2 x\sqrt{4 - x^2} dx \right] \\ &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} 4\pi \left\{ 3 \left[ \frac{2^2}{2} \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{2^2 - x^2} \right] \Big|_{x=-2}^{x=2} + \left[ -\frac{1}{3} \sqrt{(4 - x^2)^3} \right] \Big|_{x=-2}^{x=2} \right\} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 24\pi^2 \text{ u.v..} \end{aligned}$$

Portanto

$$V = 24\pi^2 \text{ u.v.,}$$

completando a resolução.

Abaixo temos uma figura que nos fornece uma representação geométrica do sólido  $S$  em questão.  $\square$



Para finalizar temos o:

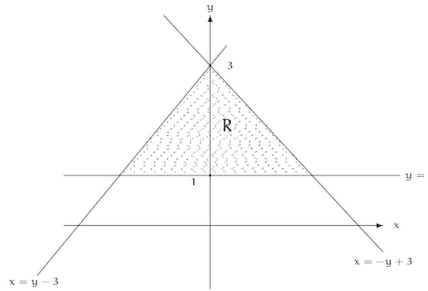
**Exercício 4.5.2** *Encontre o valor do volume, que indicaremos por  $\underline{V}$ , do sólido de revolução  $\underline{S}$ , obtido da rotação da região limitada  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas das retas*

$$x = y - 3, \quad x = -y + 3, \quad y = 1, \tag{4.120}$$

em torno da reta  $y = 1$ .

**Resolução:**

A representação geométrica da região  $R$  é dada pela figura abaixo.

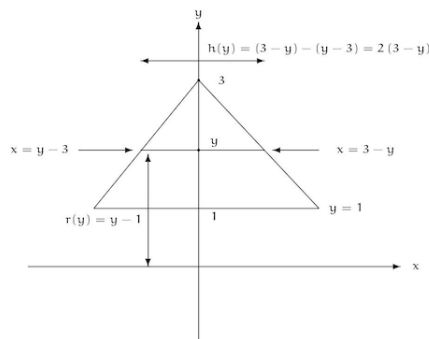


Observemos que

$$y - 3 = x = -y + 3, \tag{4.121}$$

se, e somente, se,  $y = 3$ .

Logo, para cada  $y \in [1, 3]$ , o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(y)$ , da seção cilíndrica do sólido de revolução  $\underline{S}$ , em  $\underline{y}$ , será dada por (veja a figura abaixo)



$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(y) &= 2\pi [\text{raio da seção cilíndrica do sólido } \underline{S}, \text{ em } \underline{y}] \cdot [\text{altura da seção cilíndrica do sólido } \underline{S}, \text{ em } \underline{y}] \\
 &= 2\pi (y - 1) [(3 - y) - (y - 3)] \\
 &= 2\pi (y - 1) (6 - 2y),
 \end{aligned}
 \tag{4.122}$$

ou seja, uma função contínua em  $[1, 3]$ .

Portanto, do Teorema do método das cascas cilíndricas (isto é, o Teorema 4.5.1), segue que

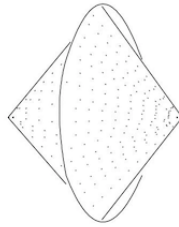
$$\begin{aligned}
 V &\stackrel{(4.105)}{=} \int_a^b \mathcal{A}(y) \, dy \\
 &\stackrel{(4.122)}{=} 2\pi \int_1^3 (y - 1) (6 - 2y) \, dy \\
 &\stackrel{\text{Exercício 232}}{=} \frac{232}{3} \pi \text{ u.v..}
 \end{aligned}$$

Portanto

$$V = \frac{232}{3} \pi \text{ u.v.},$$

completando a resolução.

Abaixo temos uma figura que representa o sólido em questão.



□

## Capítulo 5

# Integrais impróprias de 1.a espécie, de funções reais, de uma variável real

Trataremos neste capítulo de integrais de funções cujo domínio é um conjunto não limitado de  $\mathbb{R}$ .

### 5.1 Conceitos básicos

Começaremos pela questão associada ao domínio da função não ser um intervalo limitado da reta  $\mathbb{R}$ .

Para isto temos a

**Definição 5.1.1** *Seja  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, b]$  para cada  $b \in [a, \infty)$ .*

*Definiremos a integral imprópria, de 1.a espécie, da função  $f$  em  $[a, \infty)$ , denotada por  $\int_a^\infty f(x) dx$ , como sendo*

$$\int_a^\infty f(x) dx \doteq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.1)$$

*Diremos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  é convergente se o limite (5.1) acima existir e for finito (ou seja, um número real).*

*Caso contrário, diremos que integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  é divergente.*

De modo análogo temos a:

**Definição 5.1.2** *Seja  $g : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, b]$  para cada  $a \in (-\infty, b]$ .*

*Definiremos a integral imprópria da função  $g$ , de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , denotada por  $\int_{-\infty}^b g(x) dx$ , como sendo*

$$\int_{-\infty}^b g(x) dx \doteq \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b g(x) dx. \quad (5.2)$$

*Diremos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.2))  $\int_{-\infty}^b g(x) dx$  é convergente se o limite (5.2) acima existir e for finito (ou seja, um número real).*

*Caso contrário, diremos que integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.2))  $\int_{-\infty}^b g(x) dx$  é divergente.*

Com isto temos o:

**Exemplo 5.1.1** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx. \quad (5.3)$$

*Caso ela seja convergente, encontrar o valor da mesma.*

**Resolução:**

Observemos que, neste caso, a função  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f(x) \doteq e^{-x}, \quad \text{para } x \in [0, \infty). \quad (5.4)$$

Como a função  $f$  é contínua em  $[0, \infty)$ , do Teorema 2.3.1, segue que ela será integrável em  $[0, b]$ , para cada  $b \in [0, \infty)$  fixado.

Além disso, temos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.3), será:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} dx &\stackrel{(5.1)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo em } [0, b]}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=b} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-b} - (-1) \right] \\ \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^b} \stackrel{\text{Exercício}}{=} 0 \\ &= 1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Logo, de (5.5) e da Definição 5.1.1, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  será convergente e seu valor é igual a 1, completando a resolução.  $\square$

**Observação 5.1.1** *Notemos que a função  $f$  do Exemplo 5.1.1 acima, é não negativa, ou seja,*

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in [0, \infty).$$

*Logo segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.3) acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por  $\mathcal{A}$ , da região  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , da reta  $x = 0$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo), ou seja,*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ &\stackrel{(5.5)}{=} 1 \text{ u.a..} \end{aligned}$$

*A figura abaixo ilustra a região  $\mathcal{R}$ .*

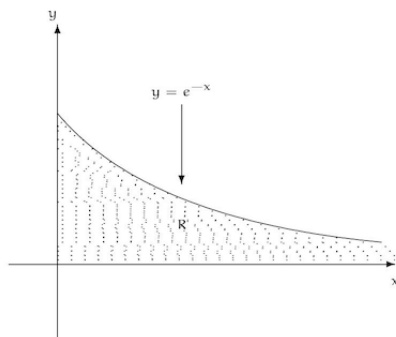
Apliquemos as mesmas ideias ao:

**Exemplo 5.1.2** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx. \quad (5.6)$$

*Caso ela seja convergente, encontrar o valor da mesma.*



**Resolução:**

Observemos que neste caso a função  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^2}, \quad \text{para } x \in [1, \infty). \quad (5.7)$$

Como a função  $f$  é contínua em  $[1, \infty)$ , do Teorema 2.3.1, segue que ela será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado.

Além disso, temos a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.5), será:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx &\stackrel{(5.1)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo em } [0, b]}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{b} - (-1) \right] \\ &\stackrel{(5.8)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Logo, de (5.8) e da Definição 5.1.1, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  será convergente e seu valor é igual a 1, completando a resolução.  $\square$

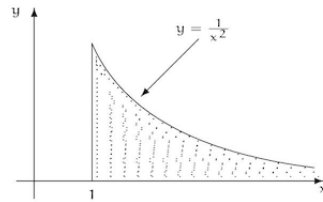
**Observação 5.1.2** Notemos que a função  $f$  do Exemplo 5.1.2 acima, é não negativa, ou seja,

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in [0, \infty).$$

Logo, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.5) acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por  $\mathcal{A}$ , da região  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , da reta  $x = 1$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx \\ &\stackrel{(5.8)}{=} 1 \text{ u.a..} \end{aligned}$$

A figura abaixo ilustra a região  $\mathcal{R}$ .



Temos também o:

**Exemplo 5.1.3** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx. \quad (5.9)$$

*Caso ela seja convergente, encontrar o valor da mesma.*

**Resolução:**

Observemos que, neste caso, a função  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad \text{para } x \in [1, \infty). \quad (5.10)$$

Como a função  $f$  é contínua em  $[1, \infty)$ , do Teorema 2.3.1, segue que ela será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado.

Além disso temos integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.9), será:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &\stackrel{(5.1)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo em } [1, b]}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \ln(x) \right]_{x=1}^{x=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \ln(b) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \right] \\ &\stackrel{\lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty}{=} \infty. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Logo, de (5.11) e da Definição 5.1.1, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  será divergente, completando a resolução.  $\square$

**Observação 5.1.3** *Notemos que a função  $f$  do Exemplo 5.1.3 acima, é não negativa, ou seja,*

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in [1, \infty).$$

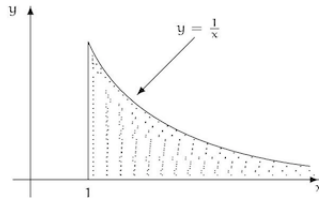
*Logo, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.9) acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por  $\underline{A}$ , da região  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas*

representações geométricas do gráfico da função  $f$ , da reta  $x = 1$  e do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo), ou seja,

$$\mathcal{A} = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad (5.11)$$

$\underline{\underline{=}} \infty.$

A figura abaixo ilustra a região  $\mathcal{R}$ .



Os Exemplos 5.1.2 e 5.1.3 acima, podem ser obtidos como consequência do seguinte resultado geral:

**Proposição 5.1.1** *Seja  $p \in \mathbb{R}$ .*

*A integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \text{é convergente}$$

*se, e somente se,*  $p > 1.$  (5.12)

*Além disso, se  $p > 1$ , teremos*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}. \quad (5.13)$$

**Demonstração:**

O caso

$$p = 1$$

foi tratado no Exemplo 5.1.3 acima, ou seja, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.12), com  $p = 1$ , será divergente.

Logo podemos supor que

$$p \neq 1.$$

Observemos que, neste caso, a função  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^p}, \quad \text{para } x \in [1, \infty). \quad (5.14)$$

Como a função  $f$  é contínua em  $[1, \infty)$ , do Teorema 2.3.1, segue que ela será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado.

Além disso, temos que integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) em (5.12), será:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &\stackrel{(5.1)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx \\ &\stackrel{p \neq 1 \text{ e o Teorema fundamental do Cálculo em } [1, b]}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \Big|_{x=1}^{x=b} \right] \\ &= \frac{1}{(1-p)} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right] \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{p-1}} &= \begin{cases} 0, & \text{se } p \in (1, \infty), \\ \infty, & \text{se } p \in [0, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ \infty, & \text{se } p < 1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Logo, de (5.15) e da Definição 5.1.1, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$  será convergente se, e somente se,  $p > 1$  (em particular, será divergente se  $p \leq 1$ ), completando a demonstração. □

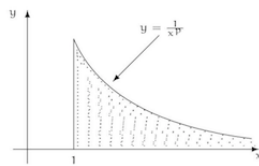
**Observação 5.1.4** *Notemos que a função  $f$  da Proposição 5.1.1 acima, é não negativa, ou seja,*

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in [1, \infty).$$

*Logo segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.15) acima nos fornecerá a área, cujo valor denotaremos por  $\mathcal{A}$ , da região  $\mathbb{R}$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , da reta  $x = 1$  e do eixo  $Ox$ , ou seja,*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \\ &\stackrel{(5.15)}{=} \begin{cases} \frac{1}{p-1} \text{ u.a.}, & \text{se } p \in (1, \infty), \\ \infty, & \text{se } p \in (0, 1] \end{cases}. \end{aligned}$$

A figura abaixo ilustra a região  $\mathbb{R}$ .



Um outro caso importante é dado pelo:

**Exercício 5.1.1** *Sejam  $s > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$  fixados.*

*Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_a^\infty e^{-st} dt. \tag{5.16}$$

*Caso ela seja convergente, encontrar o valor da mesma.*

**Resolução:**

Observemos que neste caso, para cada  $s > 0$  fixo, temos a função  $f_s : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f_s(t) \doteq e^{-st}, \quad \text{para } t \in [a, \infty). \quad (5.17)$$

Como a função  $f_s$  é contínua em  $[a, \infty)$ , do Teorema 2.3.1, segue que ela será integrável em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, \infty)$  fixado.

Além disso temos integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.16) será:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty e^{-st} dt &\stackrel{(5.1)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-st} dt \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo em } [a, b]}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_{t=a}^{t=b} \right] \\ &= \frac{1}{(-s)} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-sb} - e^{-sa}] \\ \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{sb}} \stackrel{\text{Exercício}}{=} 0, \text{ se } s > 0 \quad \frac{e^{-as}}{s}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Logo, de (5.18) e da Definição 5.1.1, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty e^{-st} dx$  será convergente e seu valor será  $\frac{e^{-as}}{s}$ , para cada  $s > 0$  fixado, ou seja,

$$\int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}, \quad (5.19)$$

para cada  $s > 0$  fixado, completando a resolução. □

**Observação 5.1.5**

1. Podemos ver que, para

$$s \leq 0,$$

a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_a^\infty e^{-st} dt$$

será divergente (veja o limite em (5.18)).

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. Se a função  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada em  $[0, \infty)$ , ou seja, se podemos encontrar  $M \geq 0$ , de modo que

$$|g(x)| \leq M, \quad \text{para } x \in [0, \infty).$$

Então, para cada  $s \in [0, \infty)$ , a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$F(s) \doteq \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt, \quad (5.20)$$

cuja convergência pode ser estudada como no Exercício 5.1.1 acima, será convergente e desempenhará um papel muito importante no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

No Exercício 5.1.1, temos o caso

$$g(t) \doteq 1, \quad \text{para } t \in [0, \infty) \quad \text{e} \quad a \doteq 0.$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

A função  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada pela integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.20) acima é denominada transformada de Laplace da função  $g$ .

Com as Definições 5.1.1 e 5.1.2, podemos introduzir a:

**Definição 5.1.3** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, b]$ , para cada  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a \leq b$ .

Definiremos a integral imprópria da função  $f$ , de 1.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , denotada por  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , como sendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \doteq \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad (5.21)$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  está fixo.

Diremos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.21))  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  é convergente, se as integrais impróprias

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^{\infty} f(x) dx$$

forem convergentes.

Caso contrário, diremos que integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.21))  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  é divergente.

### Observação 5.1.6

1. Se a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.21))  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  é convergente então, para  $c \in \mathbb{R}$ , de (5.21) e das Definições 5.1.1 e 5.1.2, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx. \quad (5.22)$$

2. Observemos que se, para algum  $c \in \mathbb{R}$ , as integrais impróprias de 1.a espécie (dos tipos (5.1) e (5.2), respectivamente)

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^{\infty} f(x) dx$$

forem convergentes então, para todo  $d \in \mathbb{R}$  as integrais impróprias de 1.a espécie

$$\int_{-\infty}^d f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_d^{\infty} f(x) dx$$

também serão convergentes.

De fato, pois, das Definições 5.1.1 e 5.1.2, temos que a função  $f$  é integrável em  $[c, d]$ , segue que a integral definida  $\int_c^d f(x) dx$  existirá, para qualquer  $d \in \mathbb{R}$ , fixado.

Logo, pelo item 5. da Proposição 2.4.1, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^d f(x) dx &\stackrel{(5.2)}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^d f(x) dx \\ &\stackrel{(2.69)}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_c^d f(x) dx \\ &\stackrel{(5.2)}{=} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

De modo semelhante, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \int_d^{\infty} f(x) dx &= \int_d^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \\ &\stackrel{(2.45)}{=} - \int_c^d f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx. \end{aligned} \quad (5.24)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, de (5.23), (5.24) e (5.22), segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^d f(x) dx + \int_{-\infty}^d f(x) dx. \quad (5.25)$$

Podemos aplicar as ideias acima ao:

**Exemplo 5.1.4** Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx. \quad (5.26)$$

Caso ela seja convergente, encontrar o valor da mesma.

**Resolução:**

Observemos que neste caso a função  $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (5.27)$$

Como a função  $f$  é contínua em  $(-\infty, \infty)$ , do Teorema 2.3.1, segue que ela será integrável em  $[a, b]$ , para cada  $a, b \in \mathbb{R}$  fixados, com  $a \leq b$ .

Além disso, para  $c \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \stackrel{(5.21)}{=} \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2} dx + \int_c^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx. \quad (5.28)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_c^\infty \frac{1}{1+x^2} dx &\stackrel{(5.1)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b \frac{1}{1+x^2} dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo em } [c, b]}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \operatorname{arctg}(x) \right]_{x=c}^{x=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(c)] \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(c), \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2} dx &\stackrel{(5.2)}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c \frac{1}{1+x^2} dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo em } [a, c]}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \operatorname{arctg}(x) \right]_{x=a}^{x=c} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg}(c) - \operatorname{arctg}(a)] \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \operatorname{arctg}(c) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{arctg}(c) + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Logo, de (5.29) e (5.30), temos que as integrais impróprias de 1.a espécie (dos tipos (5.1) e (5.2), respectivamente)

$$\int_c^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2} dx$$

serão convergentes e assim, da Definição 5.1.3, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.21))

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$$

será convergente.

Além disso, de (5.29), (5.30) e (5.21), segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx &\stackrel{(5.21)}{=} \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2} dx + \int_c^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \\ &\stackrel{(5.29) \text{ e } (5.30)}{=} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(c) \right] + \left[ \operatorname{arctg}(c) + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi, \\ \text{isto é, } \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx &= \pi, \end{aligned} \tag{5.31}$$

completando a resolução. □

**Observação 5.1.7** Em particular, como consequência do Exemplo 5.1.4, temos que a área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da região  $\underline{R}$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $\underline{f}$ , dada por (5.27), e do eixo  $Ox$ , será dada pela integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.21)) (5.31) acima, pois a função  $\underline{f}$ , é não negativa em  $\mathbb{R}$ , ou seja (veja a figura abaixo)

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

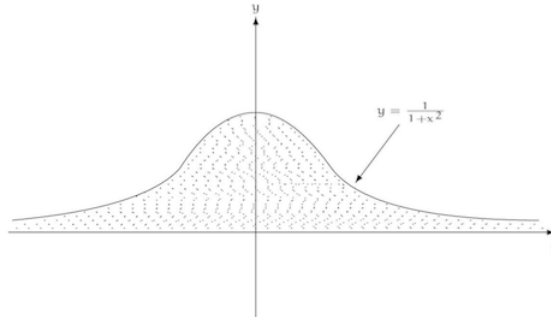


Portanto

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\stackrel{(5.31)}{=} \pi \text{ u.a.}$$

A figura abaixo ilustra a região  $\mathcal{R}$ .



## 5.2 Propriedades da integral imprópria de 1.a espécie

Temos as seguinte propriedades para integrais impróprias de 1.a espécie:

**Proposição 5.2.1** *Sejam  $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, \infty)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

1. *Se a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  é convergente então, para cada*

$$c \geq a,$$

*temos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_c^\infty f(x) dx$  será convergente.*

*Além disso,*

$$\int_a^\infty f(x) dx = \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{\text{integral definida}} + \underbrace{\int_c^\infty f(x) dx}_{\text{integral imprópria de 1.a espécie do tipo (5.1)}}. \quad (5.32)$$

2. *Se a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  é convergente, então a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty (\lambda f)(x) dx$  também será convergente.*

*Além disso,*

$$\int_a^\infty (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^\infty f(x) dx. \quad (5.33)$$

3. *Se a integrais impróprias de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  e  $\int_a^\infty g(x) dx$  são convergentes, então as integrais impróprias de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty (f+g)(x) dx$ ,  $\int_a^\infty (f-g)(x) dx$ , também serão convergentes.*

Além disso,

$$\int_a^\infty (f + g)(x) \, dx = \int_a^\infty f(x) \, dx + \int_a^\infty g(x) \, dx \quad (5.34)$$

$$\int_a^\infty (f - g)(x) \, dx = \int_a^\infty f(x) \, dx - \int_a^\infty g(x) \, dx. \quad (5.35)$$

4. Se  $\lambda \neq 0$ , a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  é convergente e a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty g(x) \, dx$  for divergente, então as integrais impróprias de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_a^\infty (f + g)(x) \, dx, \quad \int_a^\infty (f - g)(x) \, dx \quad \text{e} \quad \int_a^\infty (\lambda g)(x) \, dx$$

serão divergentes.

### Demonstração:

As demonstrações seguem das propriedades básicas de limites no infinito e limites infinitos, e serão deixadas como exercício para o leitor. □

**Observação 5.2.1** Vale um resultado análogo à Proposição 5.2.1, para integrais impróprias de 1.a espécie em

$$(-\infty, b] \quad \text{e em} \quad (-\infty, \infty),$$

ou seja, dos tipos (5.2) e (5.21).

Deixaremos a cargo do leitor os enunciados e as respectivas demonstrações.

Temos também o:

**Teorema 5.2.1 (da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie do tipo (5.1))**  
Sejam  $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, \infty)$ , satisfazendo

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{para} \quad x \in [a, \infty). \quad (5.36)$$

Então:

1. Se a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty g(x) \, dx$  for convergente, então segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  será convergente.

Além disso, teremos

$$\int_a^\infty f(x) \, dx \leq \int_a^\infty g(x) \, dx. \quad (5.37)$$

2. Se a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  for divergente, então segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty g(x) \, dx$  também será divergente.

**Demonstração:****De 1.:**

Como a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty g(x) dx$  é convergente, da Definição 5.1.1, segue existe e, é finito, o limite

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx.$$

Mas do item 7. da Proposição 2.4.1, temos que:

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \stackrel{(2.73)}{\leq} \int_a^b g(x) dx, \quad (5.38)$$

para cada  $b \in [a, \infty)$  fixado.

Logo, de (5.38) e do Teorema da comparação para limites no infinito (como visto na disciplina de Cálculo 1), segue que

$$0 \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx < \infty, \quad (5.39)$$

como visto na disciplina de Cálculo 1

mostrando, pela Definição 5.1.1, que o limite  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$  existe, e é finito, ou seja, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  será convergente.

Além disso, de (5.39), teremos

$$\int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx,$$

completando a demonstração do item 1. .

**De 2.:**

Suponhamos, por absurdo, que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty g(x) dx$  será convergente.

Logo, do item 1., deveríamos ter que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  é convergente, o que contraria a hipótese de do item 2. .

Portanto a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty g(x) dx$  deverá ser divergente, completando a demonstração do resultado. □

**Observação 5.2.2**

1. Vale um resultado análogo ao Teorema 5.2.1, para integrais impróprias de 1.a espécie em

$$(-\infty, b] \quad \text{e em} \quad (-\infty, \infty),$$

ou sej, dos tipo (5.2) e (5.21)

Deixaremos como exercício para o leitor os enunciados e respectivas as demonstrações dos mesmos.

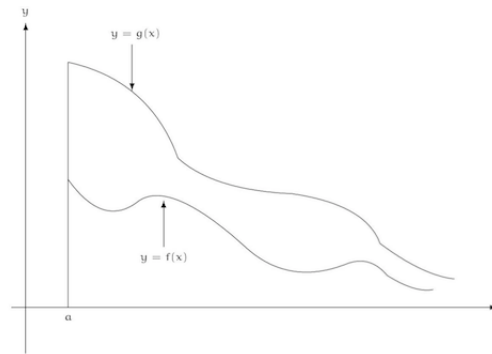
2. Como as funções do Teorema 5.2.1 são não negativas, segue que as integrais impróprias de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_a^\infty f(x) dx, \quad \int_a^\infty g(x) dx$$

representam, geometricamente, as áreas das regiões delimitadas pelos gráficos das funções  $f$ ,  $g$  e pelo eixo  $Ox$ , respectivamente.

Logo, sob este ponto de vista, o item 1. do Teorema 5.2.1 acima, nos diz, geometricamente, que se a área de uma região plana (não limitada) é finita, então a área de qualquer região plana contida na 1.a também será finita (veja a figura abaixo).

Por outro lado, o item 2. do Teorema 5.2.1, nos diz, geometricamente, que se a área de uma região plana é infinita, então a área de qualquer região plana que contenha a 1.a também será infinita (veja a figura abaixo).



Como uma aplicação do resultado acima temos o:

**Exemplo 5.2.1** Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx. \quad (5.40)$$

**Resolução:**

Observemos que se a função  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}, \quad \text{para cada } x \in [1, \infty), \quad (5.41)$$

então temos que a função  $f$  será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado (pois ela é uma função contínua em  $[1, \infty)$ ).

Se a função  $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$g(x) \doteq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{para cada } x \in [1, \infty), \quad (5.42)$$

então, pela Proposição 5.1.1 (com  $p \doteq \frac{3}{2} > 1$ ), temos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_1^\infty g(x) dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx \quad \text{será convergente.} \quad (5.43)$$

Mas, para cada  $x \in [1, \infty)$ , temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) &\stackrel{(5.41)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \\ &\leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \\ &\stackrel{(5.42)}{=} g(x). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Logo, de (5.44), (5.43) e do item 1. do Teorema da comparação para integrais impróprias (ou seja, o item 1. do Teorema 5.2.1), segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

será convergente, completando a resolução. □

**Observação 5.2.3** Sabemos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.40) é convergente mas não conhecemos o valor da mesma.

Podemos aplicar as ideias acima ao:

**Exercício 5.2.1** Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad (5.45)$$

**Resolução:**

Consideremos as funções  $f, g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$g(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f(x) \doteq 1+x, \quad \text{para } x \in [1, \infty). \quad (5.46)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \geq 1 + x^2 \geq 0, \\ \text{ou seja, } 1+x &\geq \sqrt{1+x^2}, \quad \text{para } x \in [1, \infty). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Logo

$$\begin{aligned} g(x) &\stackrel{(5.46)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\stackrel{(5.47)}{\geq} \frac{1}{1+x} \\ &\stackrel{(5.46)}{=} f(x), \quad \text{para } x \in [1, \infty). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Notemos que

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x} dx$$

Exercício  
 $\infty,$

isto é, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x} \quad \text{é divergente.} \quad (5.49)$$

Logo, de (5.48), (5.49) e do item 2. do Teorema da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie (ou seja, o item 2. do Teorema 5.2.1), segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$  também será divergente, completando a resolução.  $\square$

Temos também o:

**Exercício 5.2.2** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (5.50)$$

**Resolução:**

Consideremos as funções  $f, g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$f(x) \doteq e^{-x^2}, \quad g(x) \doteq e^{-x}, \quad \text{para } x \in [1, \infty). \quad (5.51)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) \stackrel{(5.52)}{=} e^{-x^2} \\ &\stackrel{e^x \leq e^{x^2}}{\leq} e^{-x} \\ &\stackrel{(5.52)}{=} g(x), \quad \text{para } x \in [1, \infty). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Mas

$$\int_1^{\infty} g(x) dx = \int_1^{\infty} e^{-x} dx \stackrel{\text{Exemplo 5.1.1}}{=} 1,$$

isto é, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx \quad \text{é convergente.} \quad (5.53)$$

Logo, de (5.52), (5.53) e do item 1. do Teorema da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie (ou seja, o item 1. do Teorema 5.2.1), segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$  também será convergente, completando a resolução.  $\square$

**Observação 5.2.4** *Sabemos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.50) é convergente mas não conhecemos o valor da mesma.*

O resultado a seguir pode ser muito útil no estudo da convergência de integrais impróprias de 1.a espécie, a saber:

**Teorema 5.2.2** *Seja  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, \infty)$ , não negativa em  $[a, \infty)$  e suponhamos que existe  $p \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A, \quad (5.54)$$

onde

$$A \in [0, \infty]. \quad (5.55)$$

Na situação acima,

1. se

$$p \in (1, \infty) \quad e \quad A \in [0, \infty), \quad (5.56)$$

temos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  será convergente.

2. Se

$$p \in (-\infty, 1] \quad e \quad A \in (0, \infty], \quad (5.57)$$

temos que a integral imprópria 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  será divergente.

**Demonstração:**

**Do item 1.:**

Como (veja (5.54) e (5.56))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A \in [0, \infty), \quad (5.58)$$

dado  $\varepsilon \doteq 1 > 0$ , podemos encontrar  $K > 0$  (podemos supor  $K \geq a$ ) tal que:

$$\begin{array}{ll} \text{se} & x \geq K, \\ \text{teremos} & |x^p f(x) - A| < \varepsilon = 1, \\ \text{ou seja, se} & x \geq K, \\ \text{teremos} & -1 + A < x^p f(x) < 1 + A, \\ \text{ou ainda, se} & x \geq K, \\ \text{teremos} & \frac{-1 + A}{x^p} < f(x) < \frac{1 + A}{x^p}, \\ \text{em particular, se} & x \geq K, \\ \text{teremos} & 0 \leq f(x) < \frac{1 + A}{x^p}. \end{array} \quad (5.59)$$

Como (veja (5.56))

$$p \in (1, \infty)$$

segue, pela Proposição 5.1.1, que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_K^\infty \frac{1}{x^p} dx$  será convergente.

Assim, do item 3. da Proposição 5.2.1, temos que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_K^\infty \frac{1 + A}{x^p} dx \quad \text{será convergente.} \quad (5.60)$$

Logo, de (5.59), (5.60) e do item 1. do Teorema da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie (ou seja, o item 1. do Teorema 5.2.1), segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_K^\infty f(x) dx$  será convergente.

Como a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, \infty)$ , segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  será convergente, completando a demonstração do item 1. .

**Do item 2.:**

Consideremos, primeiramente, o caso que  $A \in (0, \infty)$ .

Como (veja (5.54) e (5.57))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A \neq 0,$$

dado

$$\varepsilon \doteq \frac{A}{2} > 0, \quad (5.61)$$

podemos encontrar  $K > 0$  (podemos supor  $K \geq a$ ) tal que

$$\begin{aligned} \text{se } x &\geq K, \\ \text{teremos } |x^p f(x) - A| &< \varepsilon \stackrel{(5.61)}{=} \frac{A}{2}, \\ \text{ou seja, se } x &\geq K, \\ \text{teremos } -\frac{A}{2} + A &< x^p f(x) < \frac{A}{2} + A, \\ \text{ou ainda, se } x &\geq K, \\ \text{teremos } \frac{A}{2x^p} &< f(x) < \frac{3A}{2x^p}, \\ \text{em particular, se } x &\geq K, \\ \text{teremos } 0 \leq \frac{A}{2x^p} &< f(x). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Como (veja (5.57))

$$p \in (-\infty, 1]$$

segue, da Proposição 5.1.1, que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_K^\infty \frac{1}{x^p} dx$  será divergente.

Como  $A \neq 0$ , do item 4. da Proposição 5.2.1, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_K^\infty \frac{A}{2x^p} dx \quad \text{será divergente.} \quad (5.63)$$

Logo, de (5.62), (5.63) e do item 2. do Teorema da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie (ou seja, o item 2. do Teorema 5.2.1), segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_K^\infty f(x) dx$  será divergente.

Como a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, \infty)$ , segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  será divergente.

Agora consideraremos o caso

$$A = \infty.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A = \infty, \quad (5.64)$$



dado  $R > 0$ , podemos encontrar  $K > 0$  (podemos supor  $K \geq a$ ) tal que:

$$\begin{aligned} &\text{se } x \geq K, \\ &\text{teremos } x^p f(x) > R, \\ &\text{ou seja, se } x \geq K, \\ &\text{teremos } 0 \leq \frac{R}{x^p} < f(x). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Como (veja (5.57))

$$p \in (-\infty, 1]$$

segue, pela Proposição 5.1.1, que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_K^\infty \frac{1}{x^p} dx$  será divergente.

Como  $R \neq 0$ , do item 4. da Proposição 5.2.1, a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_K^\infty \frac{R}{x^p} dx \quad \text{será divergente.} \quad (5.66)$$

Logo, de (5.65), (5.66) e do item 2. do Teorema da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie (ou seja, o item 2. do Teorema 5.2.1), segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) imprópria  $\int_K^\infty f(x) dx$  será divergente.

Como a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, \infty)$ , segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) dx$  será divergente, completando a demonstração do resultado.  $\square$

### Observação 5.2.5

1. Vale um resultado análogo ao Teorema 5.2.2 acima, integrais impróprias de 1.a espécie em

$$(-\infty, b],$$

ou seja, do tipo (5.2).

Deixaremos como exercício para o leitor o enunciado e a respectiva demonstração do mesmo.

2. O Teorema 5.2.2 acima, nos diz como a função  $f$  deve se comportar "perto" de  $+\infty$  (de  $-\infty$ , respectivamente) para possuir uma integral imprópria de 1.a espécie do tipo (5.1) (do tipo (5.2), respectivamente) convergente (ou divergente).

Ag rosso modo, se

$$f(x) \sim \frac{1}{x^p}, \quad \text{para } x \sim \infty \quad -\infty, \text{ respectivamente),}$$

com

$$p \in (1, \infty),$$

então integral imprópria de 1.a espécie do tipo (5.1) (do tipo (5.2), respectivamente), será convergente.

3. se no item 1. do Teorema 5.2.2, tivermos

$$A = \infty,$$

ou no item 2.

$$A = 0,$$

nada podemos afirmar.

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar contra-exemplos para cada um dos casos acima.

Aplicamos as ideias acima ao:

**Exemplo 5.2.2** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5} dx. \quad (5.67)$$

**Resolução:**

Observemos que se a função  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  for dada por

$$f(x) \doteq \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5}, \quad \text{para } x \in [1, \infty), \quad (5.68)$$

então a função  $f$  será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado (pois função  $f$  é uma função contínua em  $[1, \infty)$ ), não negativa em  $[1, \infty)$  e, além disso,, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x^2 \frac{x^2 + 2x + 1}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4x^4 + 25x^3 + 2x + 5} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{4} \doteq A. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Como

$$p \doteq 2 > 1 \quad \text{e} \quad A = \frac{1}{4} \in [0, \infty) \quad (5.70)$$

do item 1. do Teorema 5.2.2, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.67) será convergente, completando a resolução. □

Aplicamos as ideias acima aos:

**Exercício 5.2.3** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx. \quad (5.71)$$

**Resolução:**

Observemos que se a função  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  for dada por

$$f(x) \doteq \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, \quad \text{para } x \in [1, \infty), \quad (5.72)$$

então a função  $f$  será integrável em  $[1, b]$  para cada  $b \in [1, \infty)$  (pois a função  $f$  é uma função contínua em  $[1, \infty)$ ), não negativa em  $[1, \infty)$ .

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) &\stackrel{(5.72)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x^{\frac{3}{2}} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^{\frac{1}{2}}} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 0 \doteq A. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Como

$$p \doteq \frac{3}{2} > 1 \quad \text{e} \quad A = 0 \in [0, \infty)$$

segue, do item 1. do Teorema 5.2.2, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.71) será convergente, completando a resolução.  $\square$

Temos também o:

**Exercício 5.2.4** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx. \tag{5.74}$$

**Resolução:**

Observemos que se a função  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  for dada por

$$f(x) \doteq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}, \quad \text{para } x \in [1, \infty), \tag{5.75}$$

então a função  $f$  será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado (pois a função  $f$  é uma função contínua em  $[1, \infty)$ ), não negativa em  $[1, \infty)$ .

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) &\stackrel{(5.75)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} \right] \\ &\stackrel{x^2 = \sqrt{x^4}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^4 + x^2 + 1}} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 1 \doteq A. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Como

$$p \doteq 1 \in [1, \infty) \quad \text{e} \quad A = 1 \in (0, \infty)$$

do item 2. do Teorema 5.2.2, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.74) será divergente, completando a resolução.  $\square$

Podemos também aplicar ao:

**Exercício 5.2.5** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}} dx. \tag{5.77}$$

**Resolução:**

Observemos que se a função  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  for dada por

$$f(x) \doteq \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}}, \quad \text{para } x \in [1, \infty), \quad (5.78)$$

então a função  $f$  será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado (pois a função  $f$  é uma função contínua em  $[1, \infty)$ ), não negativa em  $[1, \infty)$ .

Além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) &\stackrel{(5.78)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}} \right] \\ &\stackrel{\text{se } x > 1 \text{ teremos } x^3 - x = \sqrt{(x^3 - x)^2}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(x^3 - x)^2}{x^6 + 16}} \\ \stackrel{\text{Exercício 1}}{=} 1 &\doteq A. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Como

$$p \doteq 1 \quad \text{e} \quad A = 1 \in (0, \infty)$$

do item 2. do Teorema 5.2.2, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.77) será divergente, completando a resolução.  $\square$

Temos também o:

**Exercício 5.2.6** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx. \quad (5.80)$$

**Resolução:**

Observemos que se a função  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  for dada por

$$f(x) \doteq \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}, \quad \text{para } x \in [1, \infty), \quad (5.81)$$

então a função  $f$  será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado (pois a função  $f$  é uma função contínua em  $[1, \infty)$ ), não negativa em  $[1, \infty)$ .

Além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) &\stackrel{(5.81)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} \right] \\ &\stackrel{\text{como } x > 0, \text{ teremos } x = \sqrt{x^2}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \\ \stackrel{\text{[Exercício]}}{=} 1 &\doteq A. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Como

$$p = 1 \quad \text{e} \quad A = 1 \in (0, \infty)$$

do item 2. do Teorema 5.2.2, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.80) será divergente, completando a resolução.  $\square$

Temos também o:

**Exercício 5.2.7** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4} dx. \quad (5.83)$$

**Resolução:**

Observemos que se a função  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  for dada por

$$f(x) \doteq \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}, \quad \text{para } x \in [1, \infty), \quad (5.84)$$

então teremos que a função  $f$  será integrável em  $[1, b]$ , para cada  $b \in [1, \infty)$  fixado (pois a função  $f$  é uma função contínua em  $[1, \infty)$ ), não negativa em  $[1, \infty)$ .

Além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 f(x) &\stackrel{(5.84)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \\ &\text{como } x \geq 1 > 0, \text{ teremos } x = \sqrt{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \\ &\stackrel{\text{Exercício 1}}{=} 1 \doteq A. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Como

$$p \doteq 3 \quad \text{e} \quad A = 1 \in (0, \infty)$$

do item 1. do Teorema 5.2.2, segue que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (5.83) será convergente, completando a resolução. □

Para finalizar temos o :

**Teorema 5.2.3** *Seja  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, \infty)$ .*

*Se a integral imprópria  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  for convergente, então a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  também será convergente.*

*Além disso, teremos:*

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)| dx. \quad (5.86)$$

**Demonstração:**

Observemos que, para cada  $x \in [a, \infty)$ , temos que

$$\begin{aligned} -|f(x)| &\leq f(x) \leq |f(x)|, \\ \text{ou seja,} \quad 0 &\leq f(x) + |f(x)| \\ &\leq |f(x)| + |f(x)| \\ &= 2|f(x)|. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Do fato que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^{\infty} 2|f(x)| dx$  é convergente, de (5.87) e do item 1. do Teorema da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie (ou seja, o item 1. do Teorema 5.2.1), segue que a integral imprópria 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^{\infty} [f(x) + |f(x)|] dx$  será convergente.

Mas

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) \, dx &= \int_a^\infty [f(x) + |f(x)|] - |f(x)| \, dx \\ &= \underbrace{\int_a^\infty [f(x) + |f(x)|] \, dx}_{\text{convergente}} - \underbrace{\int_a^\infty |f(x)| \, dx}_{\text{convergente}}, \end{aligned}$$

mostrando que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  também será convergente e vale (5.86), completando a demonstração. □

### Observação 5.2.6

1. Vale um resultado análogo ao Teorema 5.2.3 acima, para integrais impróprias de 1.a espécie em

$$(-\infty, b] \quad \text{e em} \quad (-\infty, \infty),$$

ou seja, dos tipos (5.2) e (5.21).

Deixaremos como exercício para o leitor os enunciados e as demonstrações dos mesmos.

2. Em geral, não vale a recíproca do Teorema 5.2.3 acima, ou seja, pode ocorrer da integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  ser convergente mas a integral imprópria

1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$  ser divergente.

Por exemplo, pode-se mostrar que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_1^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x} \, dx$$

é convergente, mas integral imprópria 1.a espécie (do tipo (5.1))

$$\int_1^\infty \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right| \, dx$$

é divergente.

A demonstração deste fatos não simples e será deixada como exercício para o leitor.

## Capítulo 6

# Funções a valores reais, de várias variáveis reais

### 6.1 Definições básicas e exemplos

Vamos estabelecer a notação para facilitar os estudos do que se segue.

Seja  $n$  um número natural, isto é,

$$n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Como pode ser visto no Capítulo F (veja (F.1)),  $\mathbb{R}^n$  denota o conjunto das  $n$ -uplas ordenadas

$$\vec{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde cada entrada da  $n$ -upla acima é um número real.

Este conjunto representa as variáveis das quais a quantidade a ser estudada depende.

Introduziremos a:

**Definição 6.1.1** *Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , não vazio, uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma relação que a cada*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A,$$

*associa um, e somente um, número real, que será indicado por*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

*Diremos que o conjunto  $A$  é o domínio da função  $f$ , indicado por  $D(f)$ .*

*A imagem da função  $f$ , que será indicada por  $\text{Im}(f)$ , é o subconjunto de  $\mathbb{R}$ , definido por*

$$\text{Im}(f) \doteq \{f(x_1, x_2, \dots, x_n); (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)\} \subseteq \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

*O gráfico da função  $f$ , que será indicado por  $G(f)$ , é o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , definido por*

$$G(f) \doteq \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)); (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}. \quad (6.2)$$

#### Observação 6.1.1

1. *Frequentemente, não faremos qualquer menção ao domínio da função que estaremos analisando.*

*Neste caso, o domínio da função envolvida será o maior subconjunto, para o qual a relação que define a função dada, faça sentido.*

2. Notemos que o gráfico de uma função de  $n$  (isto é, (6.2)) variáveis é um subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Desta forma a sua representação geométrica somente será possível para  $n = 1$  (visto na disciplina de Cálculo I) ou  $n = 2$ , que será tratado a seguir.

3. Nos casos  $n = 2$  e/ou  $n = 3$ , denotaremos os elementos de  $\mathbb{R}^n$  por:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

respectivamente.

Para ilustrar temos o:

**Exemplo 6.1.1** Consideremos a função  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x+y}{x-y}, \quad \text{para cada } (x, y) \in D(f), \quad (6.3)$$

$$\text{onde } D(f) \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}. \quad (6.4)$$

Determinar a imagem e uma representação geométrica para o domínio e para o gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

Para determinar o conjunto imagem da função  $f$ , basta notar que sobre a reta

$$x - y = 1, \quad (6.5)$$

a função  $f$  assume todos os valores reais.

Portanto

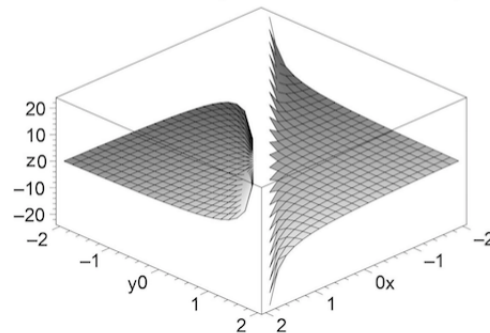
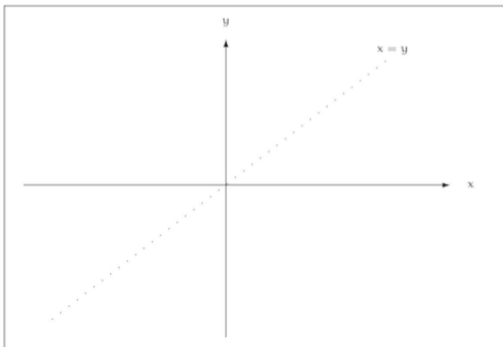
$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

De fato poi, sobre a reta (6.5) acima teremos

$$f(x, y) = x + y,$$

que cobre todo o conjunto  $\mathbb{R}$ , quando  $(x, y)$  varia sobre a reta (6.5) acima.

Abaixo temos as representações geométricas do domínio (isto é, do conjunto (6.4)) e do gráfico da função  $f$ .



□



**Observação 6.1.2** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.3), no software MapleV basta digitar:

`plot3d( (x+y)/(x-y),x=-3..3,y=-3..3,axes=BOXED,grid=[40,40]);` <Enter>

Outro caso interessante é dado pelo:

**Exemplo 6.1.2** Consideremos a função  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

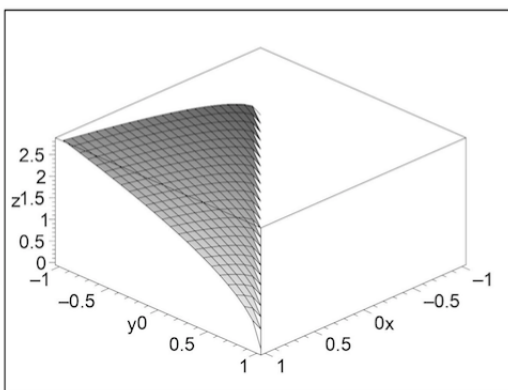
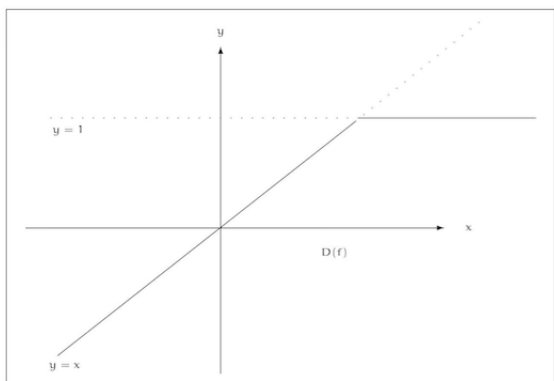
$$f(x, y) \doteq \sqrt{x-y} + \sqrt{1-y}, \quad \text{para cada } (x, y) \in D(f), \quad (6.6)$$

$$\text{onde } D(f) \doteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x \text{ e } y \leq 1 \right\}. \quad (6.7)$$

Encontre a representação geométricas do domínio e do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

Abaixo temos as representações geométricas do domínio e do gráfico da função  $f$ .



□

**Observação 6.1.3** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (F.10), no software MapleV basta digitar:

`plot3d(sqrt(x-y)+sqrt(1-y),x=-10..10,y=-10..1,axes=BOXED,grid=[50,50]);` <Enter>

Temos também o:

**Exemplo 6.1.3** Consideremos a função  $f : D(f) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada, implicitamente por

$$z = f(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in D(f), \quad (6.8)$$

que satisfazem a seguinte identidade:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{com } z \in [0, \infty). \quad (6.9)$$

Representar, geometricamente o domínio do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

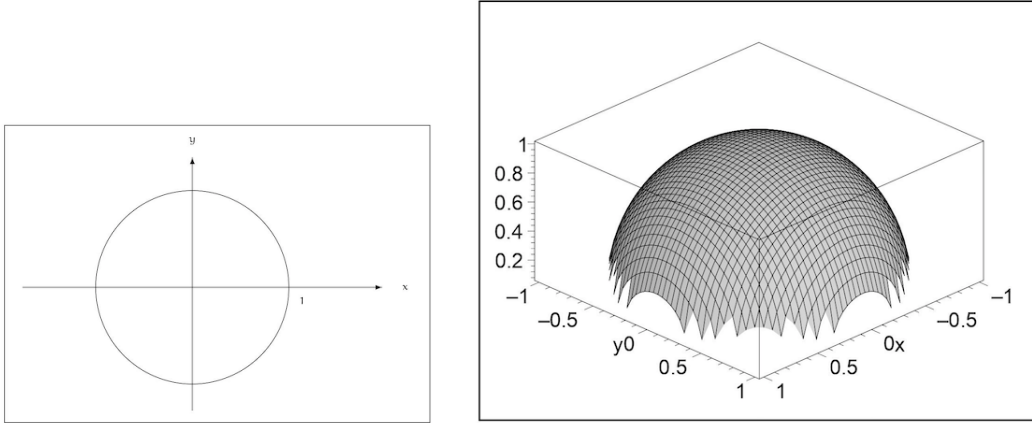
Notemos que, como  $z \in [0, \infty)$ , de (6.9), seque que

$$z = f(x, y) \doteq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \text{para cada } (x, y) \in D(f), \tag{6.10}$$

$$\text{onde } D(f) \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}, \tag{6.11}$$

ou seja, os pontos que estão no interior e na fronteira da circunferência unitária (ou seja, o círculo unitário) de centro na origem  $O \doteq (0, 0)$ , contida no plano  $xOy$ .

Abaixo temos as representações geométricas do domínio e do gráfico da função  $f$ .



□

**Observação 6.1.4**

1. A superfície obtida acima é a calota superior da esfera de centro na origem  $O \doteq (0, 0, 0)$  e raio igual a  $1$ , contida em  $\mathbb{R}^3$ .
2. Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.10) acima, no software MapleV basta digitar:

```
plot3d(sqrt(1-x^2-y^2),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,grid=[50,50]); <Enter>
```

Outro caso importante é dado pelo:

**Exemplo 6.1.4** Consideremos a função  $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \sqrt{y - x^2}, \quad \text{para cada } (x, y) \in D(f), \tag{6.12}$$

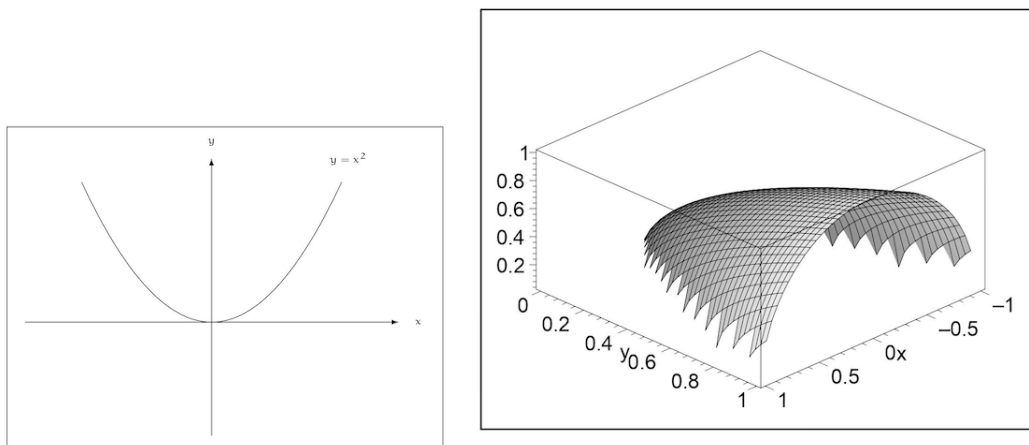
$$\text{onde } D(f) \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y\}. \tag{6.13}$$

Representar, geometricamente o domínio do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

As representações geométricas do domínio e do gráfico da função  $f$  são dadas pelas figuras abaixo.

□

**Observação 6.1.5**

1. A superfície obtida acima é a parte contida no semi-espaço  $z \geq 0$ , do parabolóide de revolução

$$y = x^2 + z^2.$$

2. Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.12), acima no software MapleV basta digitar:

`plot3d(sqrt(y-x^2),x=-1..1,y=0..1,axes=BOXED,grid=[50,50]);` (Enter)

Uma classe importante de exemplos de funções de várias variáveis é dada pelas definições abaixo.

**Definição 6.1.2** Diremos que a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função linear, se puder ser colocada na seguinte forma

$$f(x, y) \doteq ax + by, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.14)$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  são fixados.

**Observação 6.1.6** A representação geométrica do gráfico de uma função linear, dada por (6.14), será um plano, que chamaremos de  $\pi$ , em  $\mathbb{R}^3$ , que passa pela origem  $O \doteq (0, 0, 0)$ , ou seja, um plano que tem uma equação geral dada por:

$$\pi : ax + by - z = 0. \quad (6.15)$$

Como um caso particular da situação acima, temos o:

**Exemplo 6.1.5** A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq 2x - 3y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.16)$$

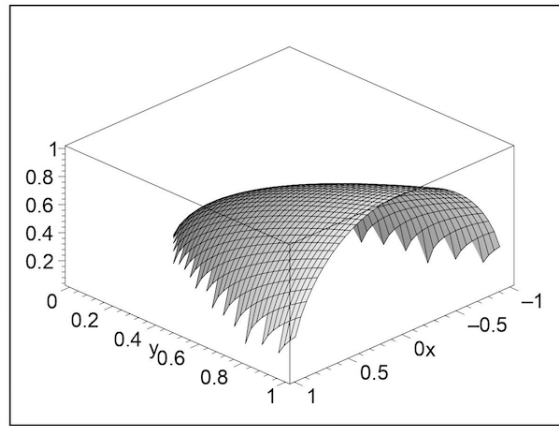
é uma função linear em  $\mathbb{R}^2$ .

Obtenha a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

A representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.16), acima, é dada pela figura abaixo:

□



**Observação 6.1.7** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.16), no software MapleV, basta digitar:

`plot3d(2*x-3*y,x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,grid=[30,30]);` (Enter)

Em geral, para o caso de  $n$ -variáveis, temos a:

**Definição 6.1.3** Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  será dita função linear, se puder ser colocada na forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad \text{para cada } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (6.17)$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  são fixados.

**Observação 6.1.8** A representação geométrica do gráfico de uma função linear, dada por (6.17), será um, assim denominado, hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , que contém a origem  $O \doteq (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Uma outra situação, é dada pela:

**Definição 6.1.4** Uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  será dita função linear-afim se puder ser colocada na seguinte forma

$$f(x, y) \doteq ax + by + c, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.18)$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  são fixados.

**Observação 6.1.9** A representação geométrica do gráfico de uma função linear-afim, dada por (6.18), será, em geral, um plano em  $\mathbb{R}^3$  (se  $c \neq 0$ , não conterá a origem  $O = (0, 0, 0)$ ), cuja equação geral será dada por:

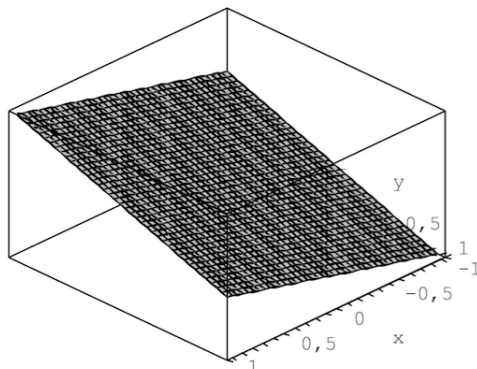
$$\pi : ax + by + c - z = 0. \quad (6.19)$$

Um caso particular para a esta situação, é dado pelo:

**Exemplo 6.1.6** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , é dada por

$$f(x, y) = x + 3y - 2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.20)$$

Notemos que a função  $f$  é uma função linear-afim em  $\mathbb{R}^2$ .  
Obtenha a representação geométrica do seu gráfico.

**Resolução:**

A representação geométrica do seu gráfico é dada pela figura abaixo:

□

**Observação 6.1.10** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.20), no software MapleV, basta digitar:

```
plot3d(x+3*y-2,x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,grid=[30,30]); <Enter>
```

Em geral temos a:

**Definição 6.1.5** Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  será dita função linear-afim, se puder ser colocada na forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0, \quad \text{para cada } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (6.21)$$

onde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  são fixados.

**Observação 6.1.11** A representação geométrica do gráfico de uma função linear-afim, dada por (6.21), acima, será um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , a saber, o hiperplano de equação geral será dada por:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0 - z = 0. \quad (6.22)$$

**Definição 6.1.6** Seja  $p \in \mathbb{Z}^+ \doteq \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  fixado.

Uma função polinomial de grau  $p$ , de duas variáveis, a valores reais, é uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que pode ser escrita na seguinte forma:

$$f(x, y) \doteq \sum_{m+n \leq p} a_{mn} x^m y^n, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.23)$$

os coeficientes  $a_{mn}$ , são números reais dados, onde

$$a_{mn} \neq 0, \quad \text{para algum } (m, n) \in \mathbb{Z}^+,$$

satisfazendo

$$m + n = p.$$

A seguir exibiremos alguns casos de funções do tipo acima, começando pelo:

**Exemplo 6.1.7** A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.24)$$

é uma função polinomial, de grau 2, de duas variáveis reais.

Obtenha a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

Neste caso, comparando (6.23) e (6.24), teremos:

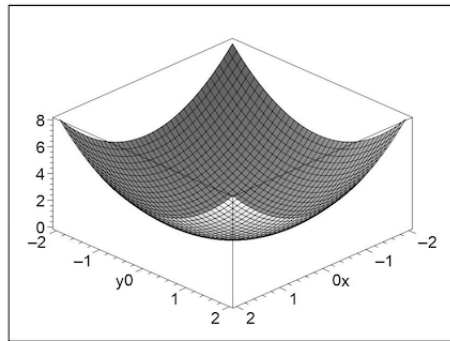
$$\begin{aligned} a_{20} = a_{02} &\doteq 1, \\ a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} &\doteq 0. \end{aligned}$$

Como foi visto na disciplina de Geometria Analítica, a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.24), é o parabolóide de revolução, obtido da rotação do gráfico da parábola

$$z = x^2,$$

contida no plano  $xOz$ , em torno do eixo  $Oz$ , cuja equação é dada por (veja a figura abaixo)

$$z = x^2 + y^2.$$



**Observação 6.1.12** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.24), no software MapleV, basta digitar:

`plot3d(x^2+y^2,x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,grid=[40,40]);` (Enter)

Outro caso importante é dado pelo:

**Exemplo 6.1.8** A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 - y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.25)$$

é uma função polinomial, de grau 2, de duas variáveis reais.

Obtenha a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

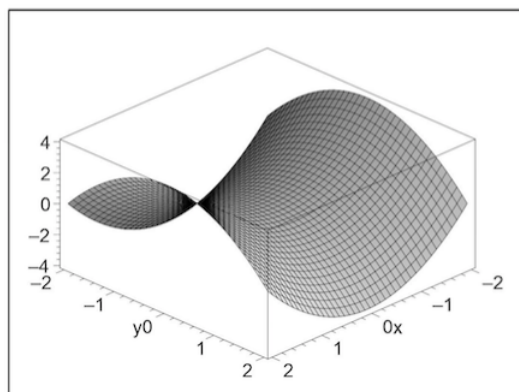
**Resolução:**

Neste caso, comparando com (6.23) com (6.25), teremos:

$$\begin{aligned} a_{20} &\doteq 1, \\ a_{02} &\doteq -1, \\ a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} &\doteq 0. \end{aligned}$$

Como foi visto na disciplina de Geometria Analítica, a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.25), é o parabolóide hiperbólico (ou sela), a saber:

$$z = x^2 - y^2.$$



**Observação 6.1.13** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.25), no software Maple V, basta digitar:

```
plot3d(x^2-y^2,x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,grid=[40,40]); <Enter>
```

Temos também o:

**Exemplo 6.1.9** A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.26)$$

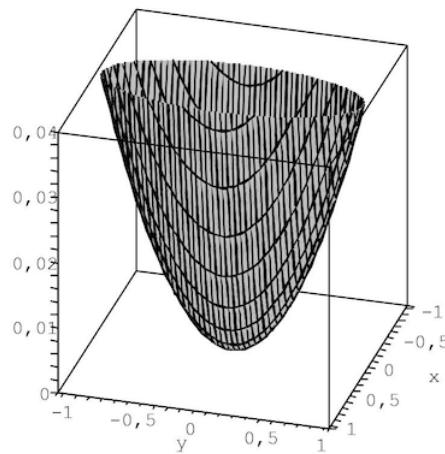
é uma função polinomial, de grau 2, de duas variáveis reais, onde  $a, b > 0$  estão fixos.

Obtenha a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

Neste caso, comparando (6.23) com (6.26), teremos:

$$\begin{aligned} a_{20} &\doteq \frac{1}{a^2}, \\ a_{02} &\doteq \frac{1}{b^2}, \\ a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} &\doteq 0. \end{aligned}$$



Como foi visto na disciplina de Geometria Analítica, a representação geométrica do seu gráfico é o parabolóide elíptico, a saber:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

**Observação 6.1.14** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.26), com  $a = 2$  e  $b = 25$ , no software Maple V, basta digitar:

```
plot3d((x^2)/4 + (y^2)/25, x=-1..1, y=-1..1, axes=BOXED, grid=[40,40], view=0..0.04);
⟨Enter⟩
```

Em geral, temos a:

**Definição 6.1.7** Seja  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Uma função polinomial de grau  $m$ , de  $n$ -variáveis, a valores reais, é uma função do tipo:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que pode ser escrita na seguinte forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq \sum_{0 \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq m} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \text{ para } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (6.27)$$

onde  $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathbb{R}$ , para cada  $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \underbrace{\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \dots \times \mathbb{Z}^+}_{n\text{-fatores}}$  e

$$a_{k_1 k_2 \dots k_n} \neq 0,$$

para algum  $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \underbrace{\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \dots \times \mathbb{Z}^+}_{n\text{-fatores}}$ , satisfazendo

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = m.$$

Para ilustrar temos o:

**Exemplo 6.1.10** A função  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 + z^2, \text{ para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma função polinomial, de grau 2, de três variáveis reais.



Com isto podemos introduzir uma outra classe de funções, que também será importante, a saber:

**Definição 6.1.8** Uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq \frac{p(x_1, x_2, \dots, x_n)}{q(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad \text{para cada } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{Dom}(f), \quad (6.28)$$

onde as funções  $p$  e  $q$  são funções polinomiais de  $n$ -variáveis e

$$\text{Dom}(f) \doteq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; q(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0\}, \quad (6.29)$$

será dita função racional, de  $n$ -variáveis reais, a valores reais.

Para ilustrar temos o:

**Exemplo 6.1.11** A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y); x^2 - y^2 = 0\},$$

é uma função racional, de duas variáveis reais.

Uma outra classe importante de funções é dada pela:

**Definição 6.1.9** Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , não vazio. Uma função  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  será dita limitada no conjunto  $A$ , se podemos encontrar  $M \geq 0$ , de modo que

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{para todo } x \in A. \quad (6.30)$$

Uma outra noção importante é dada pela:

**Definição 6.1.10** Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , não vazio e  $p \in \mathbb{R}^n$ . Uma função  $f: A \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$  será dita limitada no ponto  $p \in A$ , se podemos encontrar  $r > 0$ , de modo que a função  $f$ , quando restrita ao conjunto

$$[A \cap \mathcal{B}_r(p)] \setminus \{p\},$$

for uma função limitada no conjunto  $[A \cap \mathcal{B}_r(p)] \setminus \{p\}$ , ou seja, existe  $M > 0$ , de modo que

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{para todo } x \in [A \cap \mathcal{B}_r(p)] \setminus \{p\}, \quad (6.31)$$

onde

$$\mathcal{B}_r(p) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - p\| < r\}.$$

Para ilustrar temos o:

**Exemplo 6.1.12** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \sin(x^2 y) + \cos(xy^2), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.32)$$

Mostre que a função  $f$  é limitada em  $\mathbb{R}^2$ .

**Resolução:**

De fato, pois se considerarmos

$$M \doteq 2,$$

segue que

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\stackrel{(6.32)}{=} |\operatorname{sen}(x^2 y) + \cos(x y^2)| \\ &\leq \underbrace{|\operatorname{sen}(x^2 y)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos(x y^2)|}_{\leq 1} \\ &\leq 1 + 1 = 2 \\ &= M, \end{aligned}$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mostrando que a função  $f$  é limitada em  $\mathbb{R}^2$  e completando a resolução.  $\square$

Uma outra situação é dada pelo:

**Exemplo 6.1.13** Consideremos a função  $f: A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (6.33)$$

A função  $f$  **não** é uma função limitada em

$$A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

mas a função  $f$  é uma função limitada em qualquer ponto  $P_0 \in A$ , fixado.

**Resolução:**

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} &\text{quando } x \rightarrow 0, \\ \text{teremos: } & f(x, x^2) = \frac{1}{x^2 + x^4} \xrightarrow{\text{visto na disciplina de Cálculo I}} \infty, \end{aligned}$$

mostrando que a função  $f$  **não** pode ser uma função limitada em  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Por outro lado, se

$$P_0 = (x_0, y_0) \in A,$$

está fixo (logo  $P_0 \neq (0, 0)$ ), teremos

$$\begin{aligned} d &\doteq d(P_0, O) = d[(x_0, y_0), (0, 0)] \\ &= \|(x_0, y_0) - (0, 0)\| \\ &= \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2} \\ &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > 0, \end{aligned}$$

pois  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .

Considerando-se

$$r \doteq \frac{d}{2} > 0,$$

segue que para todo  $(x, y) \in \mathcal{B}_r(P_o)$ , teremos:

$$\begin{aligned} d[(x, y), (0, 0)] &\stackrel{d((x_o, y_o), (0, 0)) \leq d((x_o, y_o), (x, y)) + d((x, y), (0, 0))}{\geq} d[(x_o, y_o), (0, 0)] - d[(x_o, y_o), (x, y)] \\ &\stackrel{d((x_o, y_o), (x, y)) < r}{>} d - r \\ &= d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0, \end{aligned} \tag{6.34}$$

isto é, se  $(x, y) \in \mathcal{B}_r(P_o)$ , teremos que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left[ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \right]^2 \\ &= \|(x, y) - (0, 0)\|^2 \\ &= \{d[(x, y), (0, 0)]\}^2 \\ &\stackrel{(6.34)}{>} \left(\frac{d}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Logo, considerando-se,

$$M \doteq \left(\frac{2}{d}\right)^2 \geq 0,$$

notamos que, se  $(x, y) \in \mathcal{B}_r(P_o)$ , segue que

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\stackrel{(6.33)}{=} \frac{1}{x^2 + y^2} \\ &\stackrel{(6.35)}{<} \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \\ &= \left(\frac{2}{d}\right)^2 \\ &= M, \end{aligned}$$

ou seja, a função  $f$  será uma função limitada em  $\mathcal{B}_r(P_o)$ , ou ainda, a função  $f$  é uma função limitada em cada ponto  $P_o \in A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , completando a resolução. □

**Observação 6.1.15** *Lidaremos, mais adiante, com a primeira dificuldade já observada acima, a saber, representar geometricamente o gráfico de funções a valores reais, de duas variáveis.*

*Para facilitar, em algumas situações, este estudo podemos olhar certos subconjuntos relacionados com o gráfico da mesma, que serão exibidos na próxima seção.*

## 6.2 Funções de duas variáveis reais, a valores reais: curvas de nível

Nesta seção consideraremos algumas propriedades de funções, de duas variáveis reais, a valores reais.

Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  não vazio e  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, de duas variáveis reais, a valores reais.

O gráfico da função  $f$  é, como vimos, o subconjunto de  $\underline{\mathbb{R}^3}$  dado por

$$G(f) \doteq \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

A representação geométrica do gráfico de uma função de duas variáveis não é, em geral, tarefa fácil.

Um recurso útil é olharmos algumas curvas, sobre a representação geométrica gráfico, cuja representação geométrica podem ser mais simples de serem apresentadas geometricamente.

Uma classe importante de curvas, que estão relacionadas com gráfico de uma função de duas variáveis reais, a valores reais, é dada pela:

**Definição 6.2.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  não vazio e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  função, de duas variáveis reais, a valores reais e  $c \in \mathbb{R}$ .*

*O conjunto*

$$f^{-1}(\{c\}) \doteq \{(x, y) \in A ; f(x, y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (6.36)$$

*será denominado curva de nível do gráfico função  $f$ , correspondente ao nível  $z = c$ .*

### Observação 6.2.1

1. *O conjunto  $f^{-1}(\{c\})$ , definido acima, também é denominado por imagem inversa, pela função  $f$ , do conjunto  $\{c\}$ .*
2. *o conjunto  $f^{-1}(\{c\})$  é formado por todos os elementos do domínio da função  $f$ , cujas imagem são iguais a  $c$ .*
3. *Notemos que gráfico da função  $f$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ .*  
*Por outro lado, uma curva de nível, associada a função  $f$ , como acima, será um subconjunto do conjunto  $A$ , isto é, do domínio da função  $f$ , e portanto um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .*
4. *A função  $f$  assume um mesmo valor (isto é, é constante) sobre os pontos de uma curva de nível fixada.*
5. *Se  $c \notin \text{Im}(f)$  então a curva de nível  $c$ , associada à função  $f$ , será o conjunto vazio.*  
*De fato, pois como  $c \notin \text{Im}(f)$ , segue que não existe*

$$(x, y) \in D(f), \quad \text{tal que} \quad f(x, y) = c.$$

*Portanto o conjunto*

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{c\}) &\doteq \{(x, y) \in A ; f(x, y) = c\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

6. *Uma curva de nível  $c$ , associada a função  $f$ , como acima, pode ser obtida, geometricamente, como a intersecção do plano*

$$z = c,$$

*com superfície determinada pela representação geométrica do gráfico da função  $f$ , projetada no plano  $xOy$ .*

*Veremos isto, com mais detalhes, em alguns casos a seguir.*

**Exemplo 6.2.1** Seja  $k \in \mathbb{R}$  fixado e consideremos  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x, y) \doteq k, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.37)$$

isto é, a função  $f$  é a função constante.

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

Notemos que a representação geométrica do gráfico da função  $f$  é o plano (veja a figura abaixo à esquerda)

$$z = k.$$

Observemos que neste caso, as curvas de nível  $c = k$ , associadas à função  $f$ , serão todas as curvas que estão contidas no plano  $xOy$  pois, para qualquer curva, que indicaremos por  $\underline{C}$ , contida no plano  $xOy$  teremos

$$f(x, y) = k, \quad \text{para cada } (x, y) \in \underline{C}.$$

Por outro lado, se  $c \neq k$ , não teremos curvas de nível  $\underline{c}$ , ou seja, será o conjunto vazio, pois neste caso

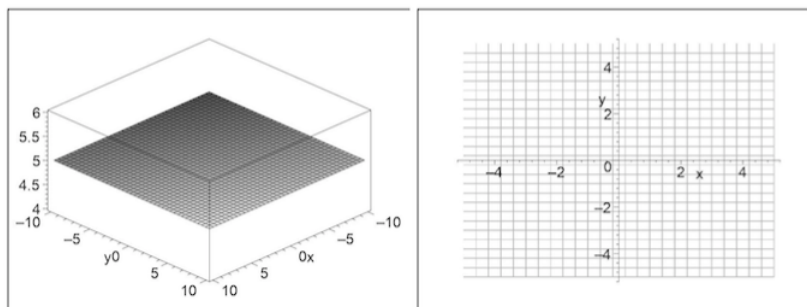
$$f(x, y) = k \neq c, \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo podemos concluir que:

$$f^{-1}(\{c\}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } c \neq k \\ \mathbb{R}^2, & \text{se } c = k \end{cases}. \quad (6.38)$$

□

**Observação 6.2.2** Se, no Exemplo 6.2.1 acima, tivermos  $k = 5$ , temos que a representação geométrica do gráfico de  $f$  e suas curvas de nível serão dadas pelas figuras abaixo.



Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$  do Exemplo 6.2.1 acima, no software MapleV, basta digitar:

```
plot3d(5, x=-1..1, y=-1..1, axes=BOXED, grid=[40,40]); <Enter>
```

e

```
with(plots): <Enter>
```

e depois

`contourplot(5,x=-10..10,y=-10..10);`    ⟨Enter⟩

Temos também o:

**Exemplo 6.2.2** *Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  fixados e consideremos  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por*

$$f(x, y) \doteq ax + by + c, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.39)$$

*Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .*

**Resolução:**

Notemos que a representação geométrica do gráfico da função

$$z = f(x, y)$$

é o plano de  $\mathbb{R}^3$ , que tem por equação geral

$$\pi : ax + by + (-1)z + c = 0.$$

A curva de nível  $z = k$  associada a função  $f$  será a curva, do plano  $xOy$ , que têm equação geral (no plano  $xOy$ ) dada por:

$$ax + by + (-1)k + c = 0,$$

isto é, será uma reta do plano  $xOy$  que têm equação geral na forma:

$$r : ax + by = k - c.$$

Logo as curvas de nível, a associadas a função  $f$ , serão retas que têm equação geral da forma

$$r : ax + by = k - c,$$

contidas no plano  $xOy$ , ou ainda, todas as retas paralelas à reta que tem equação geral dada por:

$$ax + by = 0,$$

contidas no plano  $xOy$ . □

**Observação 6.2.3**

1. *Se, no Exemplo 6.2.2, consideraremos*

$$a \doteq 2, \quad b \doteq -3 \quad e \quad c \doteq -1,$$

*temos que a representação geométrica do gráfico da função  $f$  e suas curvas de nível serão dadas pela figura abaixo.*

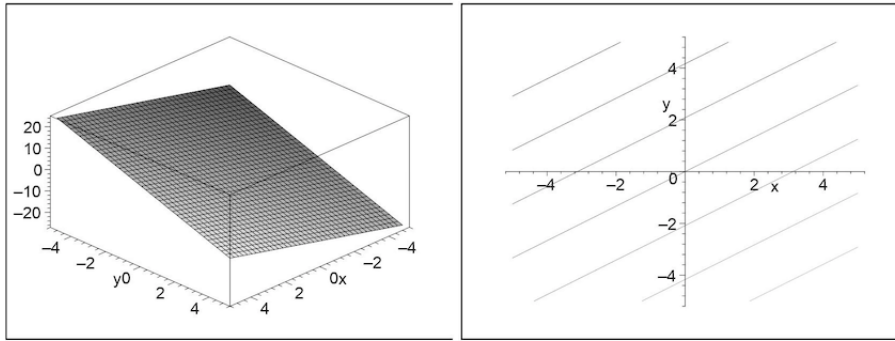
*Observemos que neste caso as curvas de nível serão as retas do plano  $xOy$  da forma*

$$2x - 3y - 1 = c,$$

*isto é, todas as retas paralelas à reta*

$$2x - 3y = 0,$$

*contidas no plano  $xOy$ .*



2. Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$  do Exemplo 6.2.2 acima, no software MapleV, basta digitar:

```
plot3d(2*x-3*y-1,x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,grid=[40,40]); <Enter>
```

e

```
with(plots): <Enter>
```

e depois

```
contourplot(2*x-3*y-1,x=-10..10,y=-10..10); <Enter>
```

Temos também o:

**Exemplo 6.2.3** Sejam  $a, b$  números reais, não nulos, fixados e consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.40)$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

Observemos que se

$$a \neq b,$$

a representação geométrica gráfico da função  $f$ , dada por (6.40), nos fornecerá um parabolóide elíptico e se

$$a = b$$

teremos um parabolóide de revolução (visto na disciplina de Geometria Analítica, mais especificamente, no estudo das Quádricas).

Assim as curvas de nível  $c$  associadas à função  $f$  serão:

- para  $a \neq b$  teremos, no plano  $xOy$ ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} \emptyset, & \text{se } c < 0 \\ (0, 0), & \text{se } c = 0 \\ \text{elipse}, & \text{se } c > 0 \end{cases},$$

contida no plano  $xOy$ .

- para  $a = b$  teremos, no plano  $xOy$ , teremos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = c$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} \emptyset, & \text{se } c < 0 \\ (0, 0), & \text{se } c = 0 \\ \text{circunferência de centro no ponto } O \doteq (0, 0) \text{ e} \\ \text{raio igual a } a\sqrt{c}, & \text{se } c > 0 \end{cases},$$

contida no plano  $xOy$ .

**Observação 6.2.4**

1. Se, no Exemplo 6.2.3, considerarmos

$$a \doteq 2 \quad e \quad b \doteq 3,$$

as curvas de nível  $c$  serão:

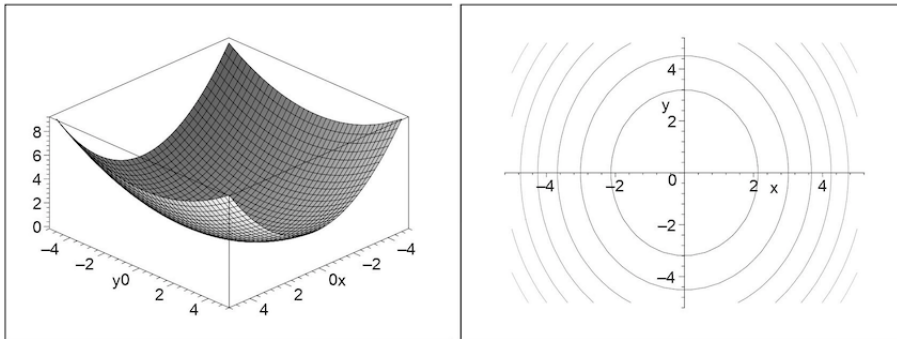
$$\begin{aligned} & \text{elipses, se } c > 0, \\ & \text{será o ponto } O \doteq (0, 0), \quad \text{se } c = 0, \\ & \text{o conjunto vazio, se } c < 0, \end{aligned}$$

no plano  $xOy$ .

Para ver isto, isto basta estudarmos a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = c,$$

no plano  $xOy$ , para cada  $c \in \mathbb{R}$ .



□

2. Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$  do Exemplo 6.2.3, com  $a \doteq 2$  e  $b \doteq 3$ , no software MapleV, basta digitar:

```
plot3d((x^2)/4+(y^2)/9,x=-3..3,y=-3..3,axes=BOXED,grid=[40,40]); <Enter>
```

e



`with(plots):`  $\langle \text{Enter} \rangle$

e depois

`contourplot((x^2)/4+(y^2)/9,x=-3..3,y=-3..3);`  $\langle \text{Enter} \rangle$

Temos também o:

**Exemplo 6.2.4** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (6.41)$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

Neste caso, para cada  $c \in \mathbb{R}$ , as curvas de nível  $c$ , associada a função  $f$ , serão (veja a figura abaixo, à direita):

- as curvas

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{c}, \quad \text{se } c > 0,$$

ou seja, circunferência de centro no ponto  $O \doteq (0, 0)$  e raio igual a  $\frac{1}{\sqrt{c}}$ ;

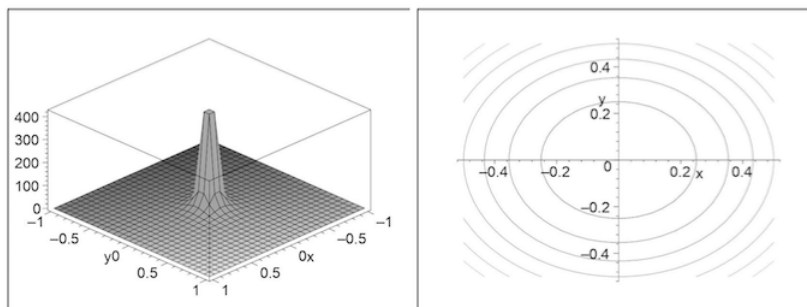
- o ponto

$$O \doteq (0, 0), \quad \text{se } c = 0;$$

- o conjunto vazio, se  $c < 0$ ,

todas contidas no plano  $xOy$ .

Uma representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.41) é dada na figura abaixo, à esquerda.



□

**Observação 6.2.5** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.41), no software MapleV, basta digitar:

`plot3d(1/{x^2+y^2},x=-3..3,y=-3..3,axes=BOXED,grid=[40,40],view=0..10 );`  $\langle \text{Enter} \rangle$

e

`with(plots):` (Enter)

e depois

`contourplot(1/{x^2+y^2},x=-3..3,y=-3..3);` (Enter)

Temos também o:

**Exemplo 6.2.5** Consideremos  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 - y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.42)$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

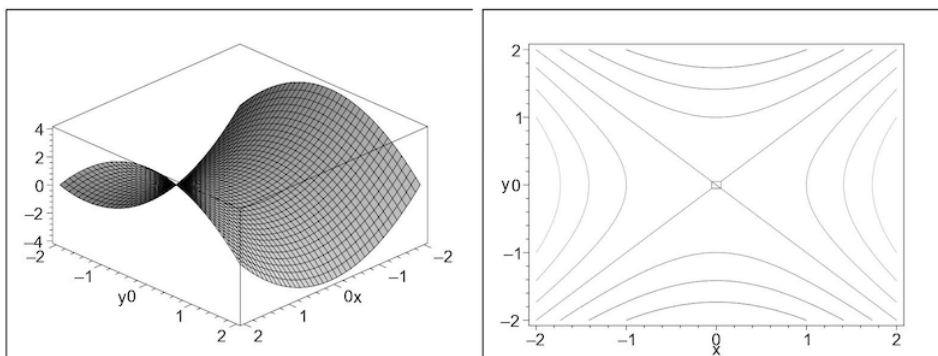
**Resolução:**

Para cada  $c \in \mathbb{R}$ , a curva de nível  $\underline{c}$ , associada à função  $\underline{f}$ , são as curvas dadas pela equação

$$x^2 - y^2 = c,$$

contidas no plano  $xOy$ , isto é, são hipérbolas no plano  $xOy$  (veja a figura abaixo à direita).

A representação geométrica do gráfico da função  $\underline{f}$  é o parabolóide hiperbólico (também conhecida, em Geometria Analítica, por sela - veja figura abaixo à esquerda).



□

**Observação 6.2.6** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $\underline{f}$ , dada por (6.42) acima, no software MapleV, basta digitar:

`plot3d(x^2-y^2,x=-3..3,y=-3..3,axes=BOXED,grid=[40,40]);` (Enter)

e

`with(plots):` (Enter)

e depois

`contourplot(x^2-y^2,x=-3..3,y=-3..3);` (Enter)

Para finalizar temos o seguinte:

**Exercício 6.2.1** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.43)$$

Encontre algumas curvas de nível e a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

**Resolução:**

Se  $c = 0$ , teremos

$$\frac{x}{x^2 + y^2 + 1} = 0$$

se, e somente, se  $x = 0$ .

Por outro lado, se  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , a curva de nível  $\underline{c}$ , associada à função  $f$ , será uma curva do plano  $xOy$  dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} = c, \\ \text{ou seja,} & \quad x^2 + y^2 + 1 = \frac{x}{c}, \\ \text{ou ainda,} & \quad x^2 - \frac{x}{c} + 1 + y^2 = 0, \\ \text{isto é,} & \quad \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 + \underbrace{1 - \frac{1}{4c^2}}_{\frac{4c^2 - 1}{4c^2}} = 0, \\ \text{ou seja,} & \quad \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1 - 4c^2}{4c^2}, \end{aligned}$$

ou seja:

- temos que

$$\begin{aligned} \text{se} & \quad 0 < c^2 < \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad c \neq 0, \\ \text{isto é,} & \quad -\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

a curva de nível  $\underline{c}$  associada à função  $f$ , será a circunferência centrada no ponto  $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$  e raio igual a  $\frac{\sqrt{1 - 4c^2}}{2|c|}$  (veja a figura abaixo, à direita);

- se

$$c = 0,$$

a curva de nível  $\underline{0}$ , associada a função  $f$ , será a reta

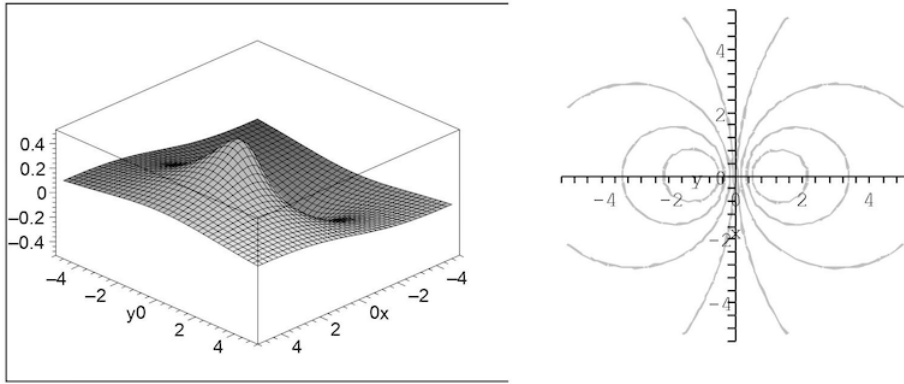
$$x = 0, \quad \text{isto é,} \quad \text{o eixo } Oy$$

(veja figura acima à direita);

- e finalmente:

$$\begin{aligned} \text{se} & \quad c^2 > \frac{1}{4}, \\ \text{isto é,} & \quad c < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad c > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

a curva de nível  $\underline{c}$ , associada a função  $f$ , será o conjunto será vazio,



todas contidas no plano  $xOy$ .

A figura acima à esquerda nos fornece uma representação geométrica do gráfico da função  $f$ . □

**Observação 6.2.7** Para obter a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , dada por (6.43), no software MapleV, basta digitar:

```
plot3d(x/(x^2 + y^2 + 1), x=-5..5, y=-5..5, axes=BOXED, grid=[40,40]); <Enter>
```

e

```
with(plots): <Enter>
```

e depois

```
contourplot(x/(x^2 + y^2 + 1), x=-5..5, y=-5..5); <Enter>
```

### 6.3 Funções de três variáveis reais, a valores reais: superfícies de nível

**Observação 6.3.1** Uma função  $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tem o seu gráfico contido em  $\mathbb{R}^4$  e este será dado por:

$$G(f) \doteq \{(x, y, z, f(x, y, z)) ; (x, y, z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Para termos uma idéia geométrica do comportamento da função podemos desenhar alguns tipos de superfícies que podem nos auxiliar a estudar a representação geométrica do gráfico da função  $f$ , já que **NÃO** poderemos obter uma representação geométrica do gráfico da função, pois este está contido em  $\mathbb{R}^4$ .

Uma classe importante desse tipo de superfícies são dadas pela

**Definição 6.3.1** Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  não vazio e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

Dado  $c \in \mathbb{R}$ , o conjunto

$$f^{-1}(\{c\}) \doteq \{(x, y, z) \in A ; f(x, y, z) = c\} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad (6.44)$$

será denominado superfície de nível  $c$  associada à função  $f$ .

Para finalizar, temos o:

**Exemplo 6.3.1** Seja  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 - z, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (6.45)$$

Encontre algumas superfícies de nível, associadas à função  $f$ .

**Resolução:**

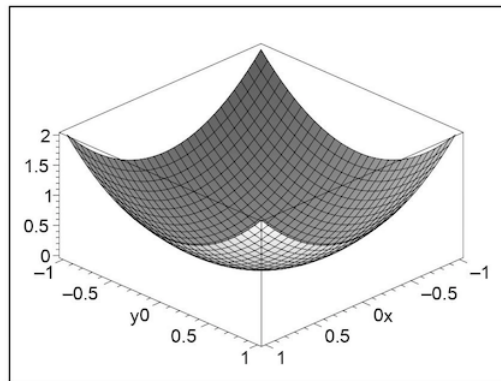
Notemos que, para cada  $c \in \mathbb{R}$ , a superfície de nível  $\underline{c}$ , associada à  $f$ , será dada pela equação

$$x^2 + y^2 - z = c$$

contida em  $xOyOz$ , ou seja, serão paraboloides de revolução (visto na disciplina de Geometria Analítica), obtidos da rotação da parábola

$$z = x^2,$$

contida no plano  $xOz$ , em torno do eixo  $Oz$  (veja a figura abaixo).



□

**Observação 6.3.2** Para obter a representação geométrica das superfícies de nível  $\underline{c}$ , para

$$c = 0, 10, 20 \text{ e } -10,$$

associada à função  $f$ , dada por (6.44) acima, no software MapleV, basta digitar:

*with(plots):*   ⟨Enter⟩

e depois

*implicitplot3d([x^2 + y^2 - z = 0, x^2 + y^2 - z = 10, x^2 + y^2 - z = 20, x^2 + y^2 - z = -10], x = -5..5, y = -5..5, z = -15..15, grid = [20, 20, 20], color = grey, axes = BOXED);*   ⟨Enter⟩



## Capítulo 7

# Limite e continuidade de funções a valores reais, de várias variáveis reais

Neste capítulo trataremos do limite de funções de  $n$ -variáveis reais, a valores reais.

Como veremos, a definição é semelhante ao caso de funções de uma variável real a valores reais, mas com conseqüências diferentes desta última.

### 7.1 Limite de funções a valores reais, de várias variáveis reais

**Definição 7.1.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto não vazio,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\vec{x}_0$  um ponto de acumulação do conjunto  $A$ , em  $\mathbb{R}^n$  (veja a Definição F.4.2 do Apêndice F).*

*Diremos que limite de  $f(\vec{x})$  quando  $\vec{x}$  tende para  $\vec{x}_0$  é  $L \in \mathbb{R}$ , denotando por*

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \doteq L \quad (7.1)$$

*se, e somente se, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar*

$$\delta = \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0,$$

*de modo que, se  $\vec{x} \in A$ ,*

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz,} & 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \\ \text{implicar que} & |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon. \end{array} \quad (7.2)$$

#### Observação 7.1.1

1. A norma  $\|\cdot\|$  acima à esquerda é a norma usual do  $\mathbb{R}^n$  e  $|\cdot|$  é o módulo na reta  $\mathbb{R}$  (ou seja, a norma usual em  $\mathbb{R}$ ).
2. Como no caso de funções, de uma variável real, a valores reais (tratadas na disciplina de Cálculo I), para estudarmos o limite de uma função, de várias variáveis reais, a valores reais em um ponto, a função **não precisa**, **necessariamente**, estar definida nesse ponto, ou seja, não interessa o que ocorre no ponto  $\vec{x}_0$ .
3. Da Definição 7.1.1, temos que

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$$

se, e somente se, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta = \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0$ , de modo que

$$f(\mathcal{B}_\delta(\vec{x}_0) \cap A \setminus \{\vec{x}_0\}) \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(L) \stackrel{\text{veja (F.29), no Apêndice F}}{=} (L - \varepsilon, L + \varepsilon). \quad (7.3)$$

Logo

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$$

se, e somente se, dada uma bola aberta

$$\mathcal{B}_\varepsilon(L) \subseteq \mathbb{R}$$

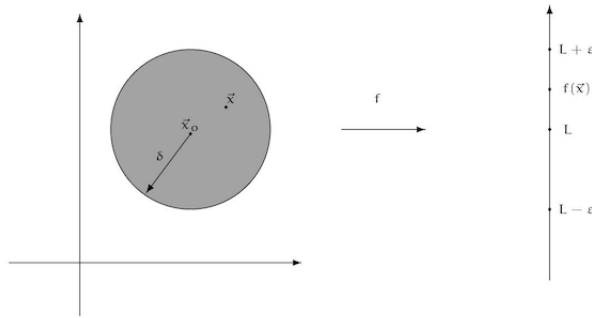
(ou seja, um intervalo aberto do tipo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  - veja (F.29), no Apêndice F), podemos encontrar uma bola aberta

$$\mathcal{B}_\delta(\vec{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

de centro em  $\vec{x}_0$ , de modo que

$$\begin{aligned} \text{se } \vec{x} \in (\mathcal{B}_\delta(\vec{x}_0) \cap A) \setminus \{\vec{x}_0\}, \\ \text{deveremos ter } f(\vec{x}) \in \mathcal{B}_\varepsilon(L), \end{aligned} \quad (7.4)$$

que, geometricamente, corresponde a figura abaixo:



4. No caso em que  $n = 2$ , isto é, para funções de duas variáveis reais, a valores reais, se considerarmos

$$\vec{x} = (x, y) \quad \text{e} \quad \vec{x}_0 = (x_0, y_0),$$

denotaremos o limite

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \\ \text{por } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L, \end{aligned} \quad (7.5)$$

ou ainda, pela Definição 7.1.1, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar

$$\delta = \delta((x_0, y_0), \varepsilon) > 0,$$

de modo que, se  $(x, y) \in A$

$$\begin{aligned} \text{satisfaz } 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta, \\ \text{deveremos ter } |f(x, y) - L| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma usual de  $\mathbb{R}^2$  (veja (F.8), no Apêndice F).



Aplicamos o conceito acima ao:

**Exemplo 7.1.1** *Em cada um dos itens abaixo, mostre que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \quad (7.7)$$

para  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado.

1. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x,y) \doteq k, \quad \text{para cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (7.8)$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante fixada.

2. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x,y) \doteq x, \quad \text{para cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.9)$$

**Resolução:**

**Do item 1. :**

Tomando-se

$$L \doteq k \stackrel{(7.8)}{=} f(x_0, y_0)$$

temos que, dado  $\varepsilon > 0$ , consideremos

$$\delta \doteq \varepsilon > 0. \quad (7.10)$$

Logo, se  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{satisfaz } 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta,$$

$$\begin{aligned} \text{teremos: } |f(x, y) - k| &\stackrel{(7.8)}{=} |k - k| \\ &= 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, da Definição 7.1.1, segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = k. \quad (7.11)$$

**Observação 7.1.2**

1. *Em particular, mostramos que:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} k = k,$$

para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado.

2. *Notemos que neste caso, como*

$$f(x_0, y_0) = k, \quad (7.12)$$

teremos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) &\stackrel{(7.11)}{=} k \\ &\stackrel{(7.12)}{=} f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado.

Portanto, no item 1. do Exemplo 7.1.1, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0), \quad (7.13)$$

para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado.

**Do item 2. :**

Tomando-se

$$L \doteq x_0 \stackrel{(7.9)}{=} f(x_0, y_0),$$

dado  $\varepsilon > 0$ , consideremos

$$\delta \doteq \varepsilon > 0. \quad (7.14)$$

Logo, se  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{satisfaz } 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta, \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \text{teremos: } |f(x, y) - x_0| &\stackrel{(7.9)}{=} |x - x_0| \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2} \\ &\stackrel{(x-x_0)^2 \leq (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\leq} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &\stackrel{(F.8)}{=} \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \\ &\stackrel{(7.15)}{<} \delta \\ &\stackrel{(7.14)}{=} \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, da Definição 7.1.1, segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = x_0, \quad (7.16)$$

para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado. □

### Observação 7.1.3

1. Em particular, acabamos de mostrar (veja (7.9) e (7.16)), que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0, \quad (7.17)$$

para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado.

2. Notemos que neste caso, como

$$f(x_0, y_0) = x_0, \quad (7.18)$$

teremos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) &\stackrel{(7.16)}{=} x_0 \\ &\stackrel{(7.9)}{=} f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado.

Portanto, no item 2. do Exemplo 7.1.1, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (7.19)$$

para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado.

De modo semelhante temos o:

**Exercício 7.1.1** Mostre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} y = y_0. \quad (7.20)$$

**Resolução:**

A resolução deste é semelhante ao item 2. do Exemplo 7.1.1 acima por isso, sua resolução será deixada como exercício para o leitor. □

Temos também o:

**Exemplo 7.1.2** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (7.21)$$

Verifique se existe o limite de  $f(x, y)$ , quando  $(x, y)$  tende para  $(0, 0)$ , isto é, se existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

**Resolução:**

Consideremos uma bola de centro em  $O \doteq (0, 0)$  e raio  $\delta > 0$  qualquer, isto é,

$$\mathcal{B}_\delta((0, 0)),$$

para  $\delta > 0$  e vamos analisar os valores da função  $f$  em pontos desta bola aberta, excetuando-se o ponto  $O \doteq (0, 0)$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{se } (x, 0) \in \mathcal{B}_\delta((0, 0)), \quad \text{para } x \neq 0, \\ \text{teremos: } f(x, 0) &\stackrel{(x,0) \neq (0,0) \text{ e (7.21)}}{=} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \text{e se } (0, y) \in \mathcal{B}_\delta((0, 0)), \quad \text{para } y \neq 0, \\ \text{teremos: } f(0, y) &\stackrel{(0,y) \neq (0,0) \text{ e (7.21)}}{=} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} \\ &= -1, \end{aligned} \quad (7.23)$$

ou seja, temos pontos na bola aberta

$$\mathcal{B}_\delta((0, 0))$$

que serão levados, pela função  $f$ , no valor  $1$  (a saber,  $(x, 0) \in \mathcal{B}_\delta((0, 0))$  - veja a figura abaixo) e pontos dessa mesma bola aberta, que são levados pela função  $f$  no valor  $-1$  (a saber,  $(0, y) \in \mathcal{B}_\delta((0, 0))$  - veja a figura abaixo).

Desta forma, se tomarmos

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

para qualquer  $\delta > 0$  que considerarmos, teremos que

$$f(\mathcal{B}_\delta((0,0)) \setminus \{(0,0)\})$$

não pode estar contida em um intervalo de comprimento

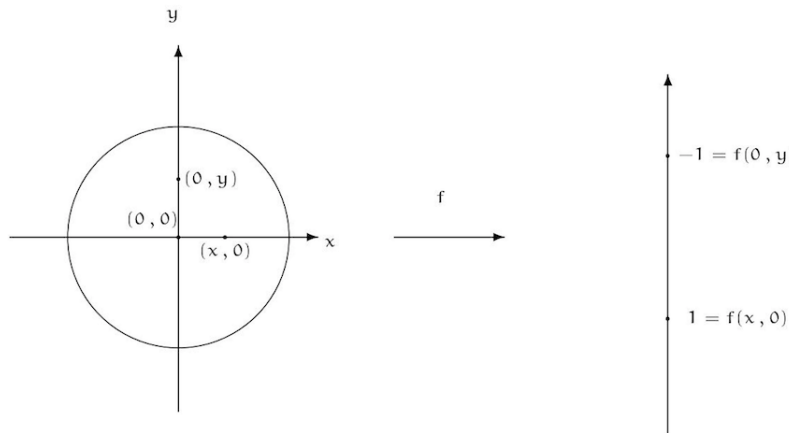
$$2\varepsilon < 1,$$

pois este intervalo deveria conter os pontos  $-1$  e  $1$  e assim seu comprimento deveria ser maior que  $2$ .

Desta forma, não poderá existir o limite da função  $f$ , quando  $(x,y)$  tende para  $(0,0)$ , isto é, não existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y),$$

finalizando a resolução.



□

Este exemplo motiva o seguinte resultado:

**Teorema 7.1.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto não vazio,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\vec{x}_0$  um ponto de acumulação do conjunto  $A$ , em  $\mathbb{R}^n$ .*

*Suponhamos que exista*

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L. \tag{7.24}$$

*Sejam  $I$ , intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  contendo  $t_0$ , e  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva parametrizada, de modo que*

$$\begin{aligned} &\gamma(t_0) = \vec{x}_0, \\ &\gamma(t) \neq \vec{x}_0 \\ \text{e} \quad &\gamma(t) \in A, \text{ para cada } t \in I \setminus \{t_0\}. \end{aligned} \tag{7.25}$$

*Então teremos:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f[\gamma(t)] = L. \tag{7.26}$$

**Demonstração:**

De fato, como existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L,$$

dado  $\varepsilon > 0$ , da Definição 7.1.1, segue que podemos encontrar

$$\delta_1 > 0,$$

de modo que, se  $\vec{x} \in A$ ,

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_1, \\ \text{deveremos ter} & |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon. \end{array} \quad (7.27)$$

Assim, como  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva parametrizada segue, em particular, que ela é uma função vetorial contínua em  $t_0$  (veja o item 1. da Definição G.3.1, do Apêndice G).

Logo, dado  $\delta_1 > 0$ , poderemos encontrar

$$\delta > 0,$$

de modo que, se  $t \in I$

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & |t - t_0| < \delta, \\ \text{deveremos ter} & \|\gamma(t) - \underbrace{\vec{x}_0}_{\stackrel{(7.25)}{=} \gamma(t_0)}} \| = \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \\ & < \delta_1. \end{array} \quad (7.28)$$

Assim, de (7.28), se  $t \in I$ ,

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & 0 < |t - t_0| < \delta, \\ \text{de (7.28), segue que:} & \|\gamma(t) - \vec{x}_0\| < \delta_1 \\ \text{e} & \gamma(t) \in A, \quad \text{para cada } t \in I \setminus \{t_0\}. \end{array} \quad (7.29)$$

Portanto, de (7.27), segue que

$$|f[\gamma(t)] - L| < \varepsilon,$$

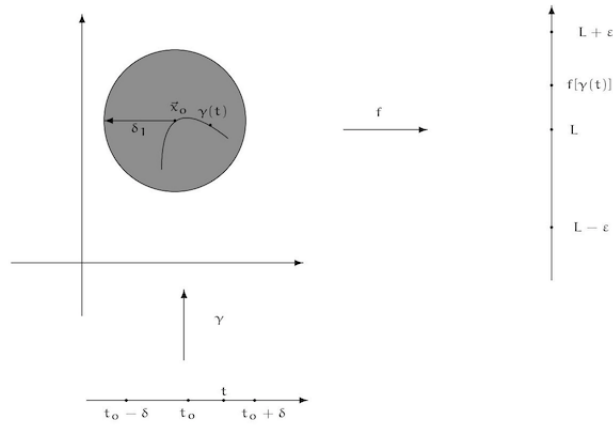
ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$ , de modo que, se  $t \in I$

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & 0 < |t - t_0| < \delta, \\ \text{deveremos ter} & |f[\gamma(t)] - L| < \varepsilon, \\ \text{ou seja (visto na disciplina de Cálculo 1):} & \lim_{t \rightarrow t_0} f[\gamma(t)] = L, \end{array}$$

como queríamos demonstrar. □

**Observação 7.1.4**

1. A grosso modo, o Teorema 7.1.1 acima nos diz que, para qualquer curva parametrizada que escolhamos para nos aproximar do ponto  $\vec{x}_0$  (cujo traço está contido no domínio da função  $f$ ), os valores da função  $f$ , nos pontos desta curva parametrizada, deverão ficar próximos do valor  $L$ , desde que exista o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e seja igual ao valor  $L$  (veja a figura abaixo).



2. Notemos que, como consequência do Teorema 7.1.1 acima temos que, se

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

são duas curvas parametrizadas, satisfazendo as condições do Teorema 7.1.1 e tais que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \gamma_2(t) = \vec{x}_0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f[\gamma_1(t)] = L_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f[\gamma_2(t)] = L_2,$$

$$\text{com } L_1 \neq L_2, \tag{7.30}$$

então, do Teorema 7.1.1, podemos concluir que NÃO existirá o limite

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}).$$

Esta pode ser uma forma de mostrar a NÃO existência de um limite, para funções a valores reais, de várias variáveis reais.

3. Podemos mostrar a não existência do limite no Exemplo 7.1.2 usando o Teorema 7.1.1, ou ainda o item 2. desta Observação.

Deixaremos a verificação deste fato com exercício para o leitor.

4. Na verdade, nas hipótese do Teorema 7.1.1, não utilizamos o fato que  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  fosse uma curva parametrizada, isto é, uma função vetorial contínua em  $t_0$ .

Na verdade, olhando a demonstração do Teorema 7.1.1 com cuidado vemos que, basta que a função vetorial  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaça as seguinte condições:

$$\begin{aligned} &\gamma(t) \in A, \quad \text{para cada } t \in I \\ \text{e } &\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \vec{x}_0. \end{aligned} \tag{7.31}$$

5. Vale a recíproca do Teorema 7.1.1.

Mais precisamente, se para cada função vetorial  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $t_0 \in I$  de modo que

$$\begin{aligned} & \gamma(t) \in A, \quad \text{para cada } t \in I, \\ \text{satisfazendo} \quad & \lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \vec{x}_0, \\ \text{temos que} \quad & \lim_{t \rightarrow t_0} f[\gamma(t)] = L, \end{aligned} \tag{7.32}$$

então deveremos ter

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L.$$

A demonstração desse fato será omitida.

Apliquemos os resultados acima ao:

**Exemplo 7.1.3** Calcule o valor dos limites abaixo, caso existam, justificando as respostas:

1.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}; \tag{7.33}$$

2.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^3 + y^4}; \tag{7.34}$$

3.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}. \tag{7.35}$$

### Resolução:

#### Do item 1.:

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \tag{7.36}$$

Observemos que se considerarmos a função vetorial  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

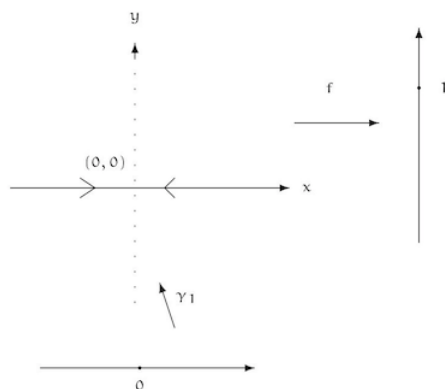
$$\gamma_1(t) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \tag{7.37}$$

então  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^2$ , satisfazendo:

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= \underbrace{(0, 0)}_{=\vec{x}_0} \\ \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_1(t)] &\stackrel{(7.37)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t, 0)] \\ &\stackrel{(7.36) \text{ com } t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + 0^4} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Observemos que neste caso (veja a figura abaixo)

$$\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0) = (0, 0) \quad \text{e} \quad t_0 \doteq 0.$$

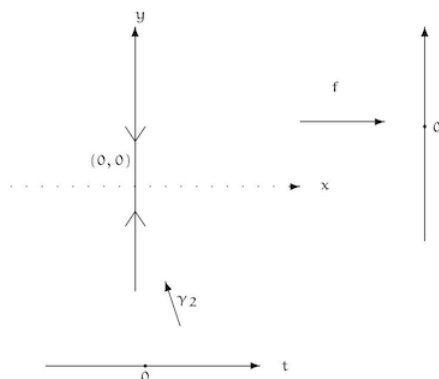


Por outro lado, se considerarmos a função vetorial  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma_2(t) \doteq (0, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (7.39)$$

teremos que  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  também será uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^2$ , satisfazendo (veja a figura abaixo):

$$\begin{aligned} \gamma_2(0) &= \underbrace{(0, 0)}_{=\bar{x}_0} \\ \text{e } \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_2(t)] &\stackrel{(7.39)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(0, t)] \\ &\stackrel{(7.36) \text{ com } t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^3}{0^2 + t^4} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.40)$$



Logo, de (7.38), (7.40) e do Teorema 7.1.1, segue que não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}.$$

Do item 2.:



Seja  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{y^4}{x^3 + y^4}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (7.41)$$

Observemos que se considerarmos a função vetorial  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

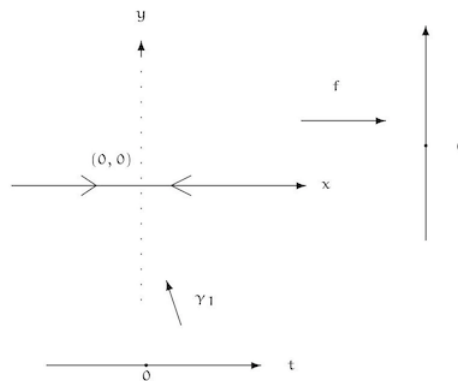
$$\gamma_1(t) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (7.42)$$

então  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^2$ , satisfazendo (veja a figura abaixo):

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= \underbrace{(0, 0)}_{=\vec{x}_0} \\ \text{e } \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_1(t)] &\stackrel{(7.42)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t, 0)] \\ &\stackrel{(7.41) \text{ com } t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^4}{t^3 + 0^4} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Observemos que neste caso

$$\vec{x}_0 \doteq (0, 0) \quad \text{e} \quad t_0 \doteq 0.$$

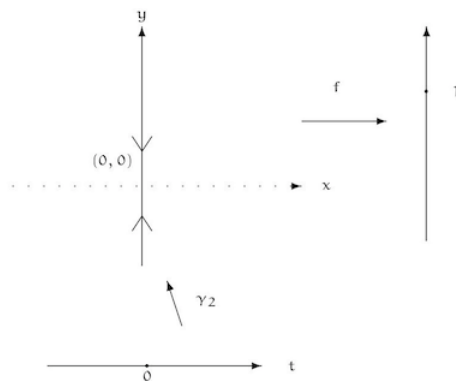


Por outro lado, se considerarmos a função vetorial  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma_2(t) \doteq (0, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (7.44)$$

então  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^2$ , satisfazendo (veja a figura abaixo):

$$\begin{aligned} \gamma_2(0) &= \underbrace{(0, 0)}_{=\vec{x}_0} \\ \text{e } \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_2(t)] &\stackrel{(7.44)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(0, t)] \\ &\stackrel{(7.41) \text{ com } t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{0^3 + t^4} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (7.45)$$



Logo, de (7.43), (7.45) e do Teorema 7.1.1, segue que não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^3 + y^4}.$$

Do item 3.:

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \quad (7.46)$$

Observemos que se considerarmos a função vetorial  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (7.47)$$

então  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva parametrizada em  $\underline{\mathbb{R}^2}$ , satisfazendo (veja a figura abaixo):

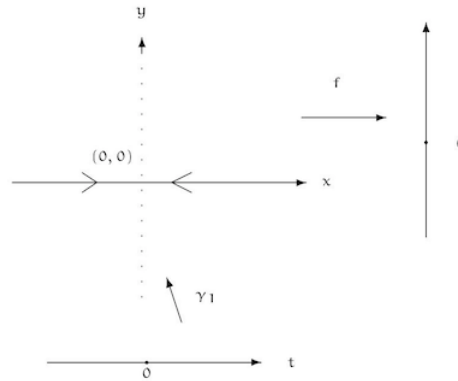
$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= \underbrace{(0, 0)}_{=\vec{x}_0} \\ \text{e } \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_1(t)] &\stackrel{(7.47)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t, 0)] \\ &\stackrel{(7.46) \text{ com } t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0^2}{t^2 + 0^4} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Observemos que neste caso

$$\vec{x}_0 \doteq (0, 0) \quad \text{e} \quad t_0 \doteq 0.$$

Notemos agora que, se considerarmos a função vetorial  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

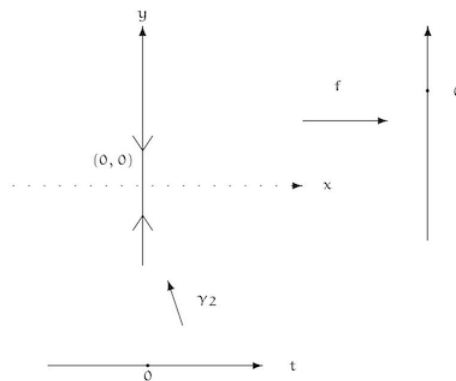
$$\gamma_2(t) \doteq (0, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (7.49)$$



então  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^2$ , satisfazendo (veja a figura abaixo):

$$\begin{aligned} \gamma_2(0) &= \underbrace{(0, 0)}_{=\vec{x}_0} \\ \text{e } \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_2(t)] &\stackrel{(7.49)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(0, t)] \\ &\stackrel{(7.46) \text{ com } t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t^2}{0^2 + t^4} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e nada poderemos concluir.

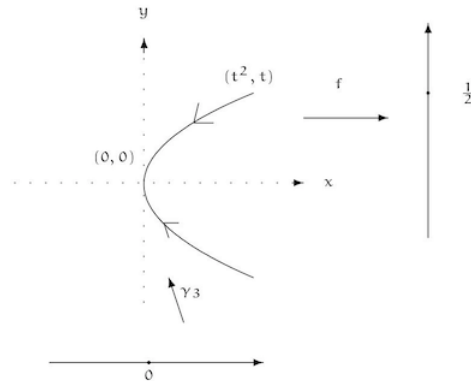


Porém, se considerarmos a função vetorial  $\gamma_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma_3(t) \doteq (t^2, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (7.50)$$

então  $\gamma_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva parametrizada em  $\underline{\mathbb{R}^2}$ , satisfazendo (veja a figura abaixo):

$$\begin{aligned} \gamma_3(0) &= \underbrace{(0, 0)}_{=\vec{x}_0} \\ \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_3(t)] &\stackrel{(7.50)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f\left[\left(t^2, t\right)\right] \\ &\stackrel{(7.46)}{=} \text{com } t \neq 0 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{7.51}$$



Logo, de (7.48), (7.51) e do Teorema 7.1.1, que não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x y^2}{x^2 + y^4},$$

completando a resolução. □

Como aconteceu na disciplina de Cálculo 1 (para funções de uma variável real, a valores reais) **não** é preciso muito esforço para que nos convençamos que estudar a existência de um limite utilizando, sempre, a Definição 7.1.1, será uma tarefa árdua.

Neste sentido vamos procurar estabelecer certas propriedades do limite introduzida acima, que nos permitam ampliar bastante a classe de funções para as quais podemos verificar a existência do limite e o cálculo do seu valor, simplesmente conhecendo-se a existência dos correspondentes limites, para algumas funções elementares.

Um resultado nesta direção é a dado pela:

**Proposição 7.1.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto não vazio,  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$  funções,  $\vec{x}_0$  ponto de acumulação de  $A$ , em  $\mathbb{R}^n$ , e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

1. *Suponhamos que existam os limites  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})$  e, além disso,*

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = L_2. \tag{7.52}$$

*Então*

(a) existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f \pm g)(\vec{x})$ .

Além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f \pm g)(\vec{x}) &= L_1 \pm L_2, \\ \text{isto é, } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f \pm g)(\vec{x}) &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \pm \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}); \end{aligned} \quad (7.53)$$

(b) existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f \cdot g)(\vec{x})$ .

Além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f \cdot g)(\vec{x}) &= L_1 \cdot L_2, \\ \text{isto é, } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f \cdot g)(\vec{x}) &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}); \end{aligned} \quad (7.54)$$

(c) se  $L_2 \neq 0$ , existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{f}{g} \right)(\vec{x})$ .

Além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{f}{g} \right)(\vec{x}) &= \frac{L_1}{L_2}, \\ \text{isto é, } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{f}{g} \right)(\vec{x}) &= \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Em particular, existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{1}{g} \right)(\vec{x})$ .

Além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{1}{g} \right)(\vec{x}) &= \frac{1}{L_2}, \\ \text{isto é, } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{1}{g} \right)(\vec{x}) &= \frac{1}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

2. Suponhamos que exista o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e, além disso,

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L.$$

Então existirá o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\alpha f)(\vec{x})$ .

Além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\alpha f)(\vec{x}) &= \alpha L, \\ \text{isto é, } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\alpha f)(\vec{x}) &= \alpha \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}). \end{aligned} \quad (7.57)$$

3. Suponhamos que exista o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e, além disso,

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = 0,$$

e a função  $g$  seja limitada no ponto  $\vec{x}_0$ .

Então existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f \cdot g)(\vec{x})$ .

Além disso, teremos

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f \cdot g)(\vec{x}) = 0. \quad (7.58)$$

4. Temos que

$$\begin{aligned} & \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \\ \text{se, e somente se,} & \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x}) - L] = 0. \end{aligned} \quad (7.59)$$

5. Em particular, temos que

$$\begin{aligned} & \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = 0 \\ \text{se, e somente se,} & \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} |f(\vec{x})| = 0. \end{aligned} \quad (7.60)$$

6. (Teorema da comparação) Suponhamos que exista  $r > 0$ , de modo que

$$f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}), \quad \text{para cada } \vec{x} \in (\mathcal{B}_r(\vec{x}_0) \cap A) \setminus \{\vec{x}_0\} \quad (7.61)$$

e existam os limites  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})$  e

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = L_2.$$

Então teremos

$$\begin{aligned} & L_1 \leq L_2, \\ \text{isto é,} & \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \leq \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}). \end{aligned} \quad (7.62)$$

7. (Teorema do confronto ou do sanduiche) Suponhamos que exista  $r > 0$ , de modo que

$$f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}) \leq h(\vec{x}), \quad \text{para cada } \vec{x} \in (\mathcal{B}_r(\vec{x}_0) \cap A) \setminus \{\vec{x}_0\}, \quad (7.63)$$

que existam os limites  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$ ,  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) = L$  e

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) = L. \quad (7.64)$$

Então existirá o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})$ .

Além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) &= L \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}). \end{aligned} \quad (7.65)$$

8. (Teorema da conservação do sinal) Suponhamos que exista o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e que

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L > 0. \quad (7.66)$$

Então, podemos encontrar  $r > 0$ , de modo que

$$f(\vec{x}) > 0, \quad \text{para cada } \vec{x} \in (\mathcal{B}_r(\vec{x}_0) \cap A) \setminus \{\vec{x}_0\}. \quad (7.67)$$

De modo análogo, se  $L < 0$ , podemos encontrar  $s > 0$ , de modo que

$$f(\vec{x}) < 0 \quad \text{para } \vec{x} \in (\mathcal{B}_s(\vec{x}_0) \cap A) \setminus \{\vec{x}_0\}. \quad (7.68)$$

### Demonstração:

As demonstrações dos itens acima são semelhantes as que foram feitas na disciplina de Cálculo 1, para funções de uma variável real, a valores reais.

Por isso faremos apenas a demonstração do item **1a.** .

As outras demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor.

### De 1a. :

Dado  $\varepsilon > 0$ , pela Definição **7.1.1**, precisamos encontrar

$$\delta > 0,$$

de modo que se  $\vec{x} \in A$

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \\ \text{deveremos ter} & |(f + g)(\vec{x}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon. \end{array}$$

Observemos que

1. como existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L_1$ , podemos encontrar

$$\delta_1 > 0,$$

de modo que, se  $\vec{x} \in A$

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_1, \\ \text{segue que} & |f(\vec{x}) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{array} \quad (7.69)$$

2. como existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})$  e  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = L_2$ , pela Definição **7.1.1**, podemos encontrar

$$\delta_2 > 0,$$

de modo que, se  $\vec{x} \in A$

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2, \\ \text{segue que} & |g(\vec{x}) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{array} \quad (7.70)$$

Seja

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0.$$

Com isto teremos

$$0 < \delta < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < \delta < \delta_2. \quad (7.71)$$

Logo, se  $\vec{x} \in A$

$$\begin{aligned} & \text{satisfaz} && 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \\ \text{de (7.71), segue que:} &&& 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_1 \end{aligned} \quad (7.72)$$

$$\text{e} \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2, \quad (7.73)$$

teremos

$$\begin{aligned} |(f + g)(\vec{x}) - (L_1 + L_2)| &= |[f(\vec{x}) - L_1] + [g(\vec{x}) - L_2]| \\ &\stackrel{\text{desigualdade triangular}}{\leq} |f(\vec{x}) - L_1| + |g(\vec{x}) - L_2| \\ &\stackrel{(7.72), (7.71), (7.69) \text{ e } (7.70)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 7.1.1, existirá o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f + g)(\vec{x})$ , além disso, teremos:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f + g)(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}),$$

como queríamos demonstrar. □

### Observação 7.1.5

1. Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Diremos que a função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é um infinitésimo no ponto  $\vec{x}_0$  se

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = 0, \quad (7.74)$$

onde  $\vec{x}_0$  é um ponto de acumulação do conjunto  $A$ , em  $\mathbb{R}^n$ .

Deste modo o item 3. da Proposição 7.1.1 acima, pode ser reescrito da seguinte forma:

"O produto de uma função que é infinitésimo no ponto  $\vec{x}_0$ , por uma função limitada no ponto  $\vec{x}_0$ , será uma função que é infinitésimo no ponto  $\vec{x}_0$ ".

2. Notemos se  $p, q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções polinomiais, então existem

$$\begin{aligned} & a_{00}, a_{01}, a_{10}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R} \\ \text{e} & b_{00}, b_{01}, b_{10}, \dots, b_{kl} \in \mathbb{R}, \\ \text{tais que} & p(x) = a_{00} + a_{01}x + a_{10}y + a_{02}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{mn}x^m y^n, \\ \text{e} & q(x) = b_{00} + b_{01}x + b_{10}y + b_{02}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots + b_{kl}x^k y^l, \end{aligned}$$

para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .



Devido ao fato acima e considerando as funções

$$f_1(x, y) \doteq k, \quad f_2(x, y) \doteq x \quad e \quad f_3(x, y) \doteq y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (7.75)$$

podemos gerar as funções polinomiais  $p$  e  $q$  acima.

Assim, do fato acima e dos itens 1a. e 1b. da Proposição 7.1.1 acima, poderemos encontrar os valores dos limites  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} p(\vec{x})$  e  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} q(\vec{x})$  e da função racional  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{p}{q} \right) (\vec{x})$ , se  $\vec{x}_0$  pertence ao domínio da função racional, ou seja, podemos estudar os limites das de funções polinomiais e de funções racionais em pontos dos seus respectivos domínios.

3. Na situação acima, dos itens 1. e 2 do Exemplo 7.1.1, do Exercício 7.1.1 e dos itens 1a. e 1b. da Proposição 7.1.1, segue que existirão os limites  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} p(\vec{x})$  e  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} q(\vec{x})$ .

Além disso, teremos:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} p(\vec{x}) = p(\vec{x}_0) \quad e \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} q(\vec{x}) = q(\vec{x}_0). \quad (7.76)$$

Além disso, se

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} q(\vec{x}) = q(\vec{x}_0) \neq 0,$$

temos que existirá o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{p}{q} \right) (\vec{x})$ .

Neste caso, teremos

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{p}{q} \right) (\vec{x}) = \frac{p(\vec{x}_0)}{q(\vec{x}_0)}. \quad (7.77)$$

Os detalhes das demonstrações destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Apliquemos as idéias acima ao:

**Exemplo 7.1.4** Calcule os limites, caso existam:

1.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^5 + y^4 - 2}{x^2 + y^4 + 1}. \quad (7.78)$$

2.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[ x \operatorname{sen} \left( \frac{x+y}{x^2 - y^3} \right) \right]. \quad (7.79)$$

3.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^4}. \quad (7.80)$$

**Resolução:**

**De 1.:**

Consideremos as funções  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(x, y) \doteq x^5 + y^4 - 2 \quad (7.81)$$

$$e \quad g(x, y) \doteq x^2 + y^4 + 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.82)$$

Dos dos itens 1 e 2. do Exemplo 7.1.1, do Exercício 7.1.1 e dos itens 1a. e 1b. da Proposição 7.1.1, segue que

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y) &\stackrel{(7.81)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^5 + y^4 - 2) \\
 &\stackrel{(7.53)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^5) + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (y^4) - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 2 \\
 &\stackrel{(7.54)}{=} \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} x \right)^5 + \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} y \right)^4 - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 2 \\
 &\stackrel{(7.9), (7.20), (7.8)}{=} \underset{\text{com } (x_0, y_0) \doteq (1, -1)}{=} 1^5 + (-1)^4 - 2 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.83}$$

Pelos mesmos motivos acima, teremos

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} g(x,y) &\stackrel{(7.82)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^2 + y^4 + 1) \\
 &\stackrel{(7.53)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^2) + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (y^4) + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 1 \\
 &\stackrel{(7.54)}{=} \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} x \right)^2 + \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} y \right)^4 + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 1 \\
 &\stackrel{(7.9), (7.20), (7.8)}{=} \underset{\text{com } (x_0, y_0) \doteq (1, -1)}{=} 1^2 + (-1)^4 + 1 \\
 &= 3 \neq 0.
 \end{aligned} \tag{7.84}$$

Logo, do item 3. da Proposição 7.1.1, segue que

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^5 + y^4 - 2}{x^2 + y^4 + 1} &\stackrel{(7.81) \text{ e } (7.82)}{=} \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} g(x,y)} \\
 &\stackrel{(7.83), (7.84)}{=} \frac{0}{3} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.85}$$

Portanto, existe o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^5 + y^4 - 2}{x^2 + y^4 + 1}$  e, além disso, teremos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^5 + y^4 - 2}{x^2 + y^4 + 1} \stackrel{(7.85)}{=} 0.$$

### De 2.:

Consideremos as funções  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^3 = x^2\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(x,y) \doteq x, \quad \text{para cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{7.86}$$

$$\text{e } g(x,y) \doteq \text{sen} \left( \frac{x+y}{x^2 - y^3} \right), \quad \text{para cada } (x,y) \in A. \tag{7.87}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \\
 &\stackrel{\text{item 2. do Exemplo 7.1.1}}{=} \underset{\text{com } (x_0, y_0) \doteq (0,0)}{=} 0.
 \end{aligned} \tag{7.88}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |g(x, y)| &= \left| \operatorname{sen} \left( \frac{x+y}{x^2-y^3} \right) \right| \\ &\leq 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in A. \end{aligned} \quad (7.89)$$

Logo, do item 3. da Proposição 7.1.1, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[ x \operatorname{sen} \left( \frac{x+y}{x^2-y^3} \right) \right] &\stackrel{(7.86) \text{ e } (7.87)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) g(x, y)] \\ &\stackrel{(G.34)}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Portanto, existe o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[ x \operatorname{sen} \left( \frac{x+y}{x^2-y^3} \right) \right]$  e, além disso, teremos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[ x \operatorname{sen} \left( \frac{x+y}{x^2-y^3} \right) \right] \stackrel{(7.90)}{=} 0.$$

De 3.:

Consideremos as funções  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: A \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(x, y) \doteq x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (7.91)$$

$$\text{e } g(x, y) \doteq \frac{x^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{para cada } (x, y) \in A. \quad (7.92)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &\stackrel{(7.91)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \\ &\stackrel{\text{item 2. do Exemplo 7.1.1, com } (x_0, y_0) \doteq (0, 0)}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |g(x, y)| &\stackrel{(7.92)}{=} \left| \frac{x^2}{x^2 + y^4} \right| \\ &\stackrel{x^2 \leq x^2 + y^4}{\leq} \left| \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^4} \right| \\ &= 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Logo, do item 3. da Proposição 7.1.1, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^4} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \frac{x^2}{x^2 + y^4} \right) \\ &\stackrel{(7.91) \text{ e } (7.92)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) g(x, y)] \\ &\stackrel{(G.34)}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Portanto, existe o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^4}$  e, além disso, teremos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^4} \stackrel{(7.95)}{=} 0,$$

completando a resolução. □

### Observação 7.1.6

Vale observar que no item 3. do Exemplo 7.1.4 acima, NÃO podemos aplicar:

1. o item 1b. da Proposição 7.1.1, isto é, limite do produto é igual ao produto dos limites.

De fato, como vimos no item 1. do Exemplo 7.1.3, não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x);$$

2. o item 1c. da Proposição 7.1.1 isto é, limite do quociente é igual ao quociente dos limites.

De fato, pois o limite do denominador em questão é zero, como mostra:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^4) &\stackrel{(7.53)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2) + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (y^4) \\ &\stackrel{(7.54)}{=} \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \right)^2 + \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \right)^4 \\ &\stackrel{(7.9), (7.20), \text{ com } (x_0, y_0) = (1, -1)}{=} 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para aumentar ainda mais a classe de funções a valores reais, de várias variáveis reais, para as quais possamos garantir a existência do limite e saber calcular seu valor, temos o seguinte importante resultado:

**Teorema 7.1.2** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\vec{x}_0$  um ponto de acumulação do conjunto  $A$ , em  $\mathbb{R}^n$ , de modo que existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  e, além disso,*

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L. \quad (7.96)$$

*Suponhamos que  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo aberto,  $L \in I$  e  $g: I \setminus \{L\} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que existe o limite  $\lim_{t \rightarrow L} g(t)$  e, além disso, tenhamos*

$$\lim_{t \rightarrow L} g(t) = M. \quad (7.97)$$

*Então, existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g[f(\vec{x})]$  e, além disso, teremos*

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g[f(\vec{x})] = M. \quad (7.98)$$

### Demonstração:

Da disciplina de Cálculo 1, dado  $\varepsilon > 0$ , como

$$\lim_{t \rightarrow L} g(t) = M,$$

podemos encontrar  $\delta_1 > 0$ , de modo que, se  $t \in I$

$$\begin{aligned} \text{satisfaz} & \quad |t - L| < \delta_1, \\ \text{deveremos ter} & \quad |g(t) - M| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Por outro lado, da Definição 7.1.1, como  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$ , para

$$\delta_1 > 0$$

podemos encontrar

$$\delta > 0,$$

de modo que, se  $\vec{x} \in A$

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \\ \text{deveremos ter} & |f(\vec{x}) - L| < \delta_1. \end{array} \quad (7.100)$$

Portanto, dado  $\varepsilon > 0$  conseguimos encontrar

$$\delta > 0,$$

de modo que, se  $\vec{x} \in A$

$$\begin{array}{ll} \text{satisfaz} & 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \\ \text{de (7.100), teremos} & |f(\vec{x}) - L| < \delta_1, \\ \text{e de (7.99), com } t \doteq f(\vec{x}), \text{ teremos} & |g[f(\vec{x})] - M| < \varepsilon, \end{array}$$

mostrando, pela Definição 7.1.1, que existe o limite  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g[f(\vec{x})]$  e, além disso, que

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g[f(\vec{x})] = M,$$

como queríamos demonstrar. □

### Observação 7.1.7

1. O Teorema 7.1.2 acima, pode ser visto como um modo de "mudar de variáveis" no limite considerado.

*Isto pode ser visto da seguinte forma: queremos calcular o seguinte limite (caso exista):*

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g[f(\vec{x})]. \quad (7.101)$$

*Para tanto, se considerarmos a "mudança de variáveis":*

$$t \doteq f(\vec{x}), \quad \text{para cada } \vec{x} \in A, \quad (7.102)$$

*no limite (7.101) acima, de (7.96), segue que*

$$\begin{array}{ll} \text{se} & \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0, \\ \text{teremos} & t = f(\vec{x}) \rightarrow L. \end{array} \quad (7.103)$$

*Deste modo teremos:*

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g[f(\vec{x})] &\stackrel{(7.102) \text{ e } (7.103)}{=} \lim_{t \rightarrow L} g[t] \\ &\stackrel{(7.97)}{=} M. \end{aligned}$$

2. Em particular, se no Teorema 7.1.2 acima, tivermos que a função  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $L \in I$  (visto na disciplina de Cálculo I), o resultado acima permanecerá válido, pois neste caso

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow L} g(t) &= g(L), \\ \text{isto é, } M &\doteq g(L), \\ \text{e assim teremos: } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g[f(\vec{x})] &= g(L), \end{aligned}$$

ou seja, vale a seguinte identidade:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g[f(\vec{x})] = g \left[ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \right], \quad (7.104)$$

ou, a grosso modo, podemos "trocar" o limite, quando  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ , com a função  $g$ .

Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo 7.1.5** Mostre que existe e calcule o valor do seguinte limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \left( \frac{x^3}{x^2 + y^4} \right). \quad (7.105)$$

**Resolução:**

Consideremos a função  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \frac{x^3}{x^2 + y^4}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \quad (7.106)$$

Lembremos que do item 3. do Exemplo 7.1.4, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &\stackrel{(7.106)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^4} \\ &\stackrel{(7.95)}{=} 0 \doteq L. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$g(t) \doteq \cos(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (7.108)$$

Da disciplina de Cálculo I, segue que a função  $g$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$ , em particular em

$$t = 0 \stackrel{(7.107)}{=} L.$$

Logo, do item 2. da Observação 7.1.7, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \left( \frac{x^3}{x^2 + y^4} \right) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g[f(x, y)] \\ &\stackrel{(7.104)}{=} g \left[ \underbrace{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)}_{\stackrel{(7.107)}{=} 0} \right] \\ &= \cos(0) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (7.109)$$

Portanto, existe o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{x^3}{x^2+y^4}\right)$  e, além disso,, teremos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{x^3}{x^2+y^4}\right) \stackrel{(7.109)}{=} 1,$$

completando a resolução. □

## 7.2 Continuidade de funções reais de várias variáveis reais

A noção de continuidade para funções a valores reais, de várias variáveis reais, é semelhante a relacionada com funções reais de uma variável real vista na disciplina de Cálculo 1, mais precisamente:

**Definição 7.2.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  (veja a Definição F.4.3 do Apêndice F),  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\vec{x}_0 \in A$ .*

*Diremos que a função  $f$  é contínua em  $\vec{x}_0$  se, e somente se,*

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0). \quad (7.110)$$

*Se a função  $f$  é contínua em cada um dos pontos do conjunto  $A$ , diremos que ela é contínua no conjunto  $A$  ou, simplesmente, contínua em  $A$ .*

### Observação 7.2.1

1. *Para uma função ser contínua em  $\vec{x}_0$ , ela precisa estar definida no ponto  $\vec{x}_0$  (ou seja,  $\vec{x}_0 \in A$ ), deverá existir o limite da função no ponto  $\vec{x}_0$  e, além disso, o valor do limite da função no ponto  $\vec{x}_0$  deve ser igual ao valor da função no ponto  $\vec{x}_0$ , ou seja,*

$$\begin{aligned} & \text{existe} && f(\vec{x}_0), \\ & \text{existe o limite} && \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}), \\ & \text{e, além disso, devemos ter:} && \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

2. *Como consequência da Definição 7.1.1 (isto é, da definição de limites para funções a valores reais, de várias variáveis reais) temos que a função  $f$  é contínua em  $\vec{x}_0$  se, e somente se, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar*

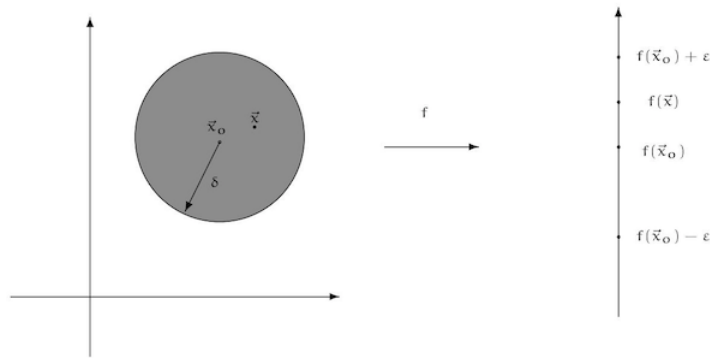
$$\delta > 0,$$

*de modo que, se  $\vec{x} \in A$*

$$\begin{aligned} & \text{satisfaz} && \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \\ & \text{deveremos ter} && |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.111)$$

*Do ponto de vista do diagrama de Venn temos a seguinte situação:*

**Exemplo 7.2.1** *Para cada um dos itens abaixo, encontrar o maior conjunto onde a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  será contínua.*



$$1. \quad f(x, y) \doteq k, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.112)$$

$$2. \quad f(x, y) \doteq x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.113)$$

$$3. \quad f(x, y) \doteq y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.114)$$

$$4. \quad f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (7.115)$$

$$5. \quad f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (7.116)$$

### Resolução:

#### De 1.:

Neste caso basta observar que para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , do item 1. do Exemplo 7.1.1 (veja (7.11)), segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &\stackrel{(7.112)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} k \\ &\stackrel{(7.11)}{=} k \\ &\stackrel{(7.112)}{=} f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Logo da Definição 7.2.1, segue que a função  $f$  é contínua em cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Como  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é arbitrário, segue que a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

#### De 2.:



Observemos que, para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , do item 2. do Exemplo 7.1.1 (veja (7.16)), segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &\stackrel{(7.113)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \\ &\stackrel{(7.16)}{=} x_0 \\ &\stackrel{(7.113)}{=} f(x_0, y_0), \\ \text{ou seja,} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &= f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Logo da Definição 7.2.1, segue que a função  $f$  é contínua em cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Como  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é arbitrário, segue que a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

**De 3.:**

Observemos que, para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , do Exercício 7.1.1, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &\stackrel{(7.114)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} y \\ &\stackrel{(7.20)}{=} y_0 \\ &\stackrel{(7.114)}{=} f(x_0, y_0), \\ \text{ou seja,} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &= f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Logo da Definição 7.2.1, segue que a função  $f$  é contínua em cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Como  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  é arbitrário, segue que a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

**De 4.:**

Observemos que:

1. Se

$$(x_0, y_0) \neq (0, 0), \tag{7.117}$$

teremos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &\stackrel{(x_0, y_0) \neq (0,0) \text{ e } (7.115)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ &\text{como } x_0^2 + y_0^2 \stackrel{(7.117)}{\neq} 0, \text{ do item 1c. da Proposição 7.1.1} \quad \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x^2 - y^2)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x^2 + y^2)} \\ &\stackrel{(7.76)}{=} \frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \\ &\stackrel{(x_0, y_0) \neq (0,0) \text{ e } (7.115)}{=} f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Logo, da Definição 7.2.1, segue que a função  $f$  é contínua em cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Como  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  é arbitrário, segue que a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

2. Por outro lado, se

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \tag{7.118}$$

afirmamos que o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

não existe.

De fato,

- se considerarmos a curva parametrizada  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (7.119)$$

teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_1(t)] &\stackrel{(7.119)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t, 0)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e } (7.115)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (7.120)$$

- por outro lado, se considerarmos a curva parametrizada  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma_2(t) \doteq (t, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R} \quad (7.121)$$

teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_2(t)] &\stackrel{(7.121)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e } (7.115)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - t^2}{t^2 + t^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.122)$$

Logo, de (7.120), (7.122) e do Teorema 7.1.1, segue que não existe o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

Logo, da Definição 7.2.1, a função  $f$  não será contínua em  $(0, 0)$ .

Com isto, de 1. e 2. acima, segue que o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  onde a função  $f$  é contínua será

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

### De 5.:

Observemos que:

1. Se

$$(x_0, y_0) \neq (0, 0), \quad (7.123)$$

teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &\stackrel{(x_0, y_0) \neq (0,0) \text{ e } (7.116)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \\ &\text{como } x_0^2 + y_0^2 \neq 0 \text{ e o item 1c. da Proposição 7.1.1} \quad \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} x^3}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x^2 + y^2)} \\ &\stackrel{(7.76)}{=} \frac{x_0^3}{x_0^2 + y_0^2} \\ &\stackrel{(x_0, y_0) \neq (0,0) \text{ e } (7.116)}{=} f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Logo, da Definição 7.2.1, segue que a função  $f$  é contínua em cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Como  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  é arbitrário, segue que a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

2. Por outro lado, se

$$(x_0, y_0) = (0, 0). \quad (7.124)$$

Consideremos as funções  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$g(x, y) \doteq x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (7.125)$$

$$\text{e } h(x, y) \doteq \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (7.126)$$

Notemos que, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , teremos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\stackrel{(x, y) \neq (0, 0) \text{ e } (7.116)}{=} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{x^2}{x^2 + y^2} \\ &\stackrel{(7.125) \text{ e } (7.126)}{=} g(x, y) h(x, y). \end{aligned} \quad (7.127)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) &\stackrel{(7.125)}{=} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \\ &\stackrel{(7.16), \text{ com } x_0 \doteq 0}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.128)$$

Além disso

$$\begin{aligned} |h(x, y)| &\stackrel{(7.126)}{=} \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \\ &\stackrel{x^2 \leq x^2 + y^2}{\leq} \left| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right| \\ &= 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned} \quad (7.129)$$

Logo, do item 1c. da Proposição 7.1.1, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} &\stackrel{(x, y) \neq (0, 0) \text{ e } (7.116)}{=} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \\ &\stackrel{(7.127)}{=} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [g(x, y) h(x, y)] \\ &\stackrel{\text{infinitésimo vezes limitada no ponto } (0, 0)}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0 \stackrel{(7.116)}{=} f(0, 0).$$

Logo, da Definição 7.2.1, a função  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ .

Portanto, dos itens 1. e 2., segue que a função  $f$  é contínua em cada ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , ou seja, a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , completando a resolução.  $\square$

Temos a:

**Proposição 7.2.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funções e  $\vec{x}_0 \in A$ . Suponhamos que as funções  $f, g$  são contínuas em  $\vec{x}_0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  então:*

1. as funções  $f \pm g$  serão contínuas em  $\vec{x}_0$ ;
2. a função  $f \cdot g$  será contínuas em  $\vec{x}_0$ ;
3. a função  $\alpha f$  será contínuas em  $\vec{x}_0$ ;
4. Se  $g(\vec{x}_0) \neq 0$ , a função  $\left(\frac{f}{g}\right)$  será contínuas em  $\vec{x}_0$ .

*Em particular, a função  $\left(\frac{1}{g}\right)$  será contínuas em  $\vec{x}_0$ .*

**Demonstração:**

As demonstrações dessas propriedades seguem dos itens da Proposição 7.1.1 e serão deixadas como exercício para o leitor □

Como consequência da Proposição 7.2.1 acima e do item 3. da Observação 7.1.5, temos o:

**Corolário 7.2.1** *Toda função polinomial de n-variáveis, é contínuas em  $\mathbb{R}^n$  e toda função racional de n-variáveis, é contínuas no seu domínio.*

**Demonstração:**

Devido ao que foi dito acima, deixaremos os detalhes como exercício para o leitor. □

Como consequência do Teorema 7.1.2 temos o:

**Corolário 7.2.2** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas em  $\vec{x}_0 \in A$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo aberto tal que  $\text{Im}(f) \subseteq I$  e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínuas em  $f(\vec{x}_0)$ .*

*Então  $g \circ f$  será contínuas em  $\vec{x}_0$ .*

**Demonstração:**

Segue da Definição de continuidade (ou seja, da Definição 7.2.1) e do Teorema 7.1.2. Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor. □

Um caso importante é dado pela:

**Proposição 7.2.2** *Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a aplicação  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \doteq x_i \tag{7.130}$$

*é contínuas em  $\mathbb{R}^n$ .*

*Esta aplicação é denominada i-ésima projeção.*

**Demonstração:**

Sejam

$$i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{e} \quad \vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n.$$

Mostremos que a função  $\pi_i$  é contínuas em  $\vec{x}_0$ .

Para isto notemos que, dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$\text{considerando-se } \delta \doteq \varepsilon, \quad (7.131)$$

$$\text{se } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \quad (7.132)$$

segue que:

$$\begin{aligned} |\pi_i(\vec{x}) - \pi_i(\vec{x}_0)| &= |x_i - x_{0i}| \\ &= \sqrt{(x_i - x_{0i})^2} \\ (x_i - x_{0i})^2 &\leq \sum_{j=1}^n (x_j - x_{0j})^2 \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{0j})^2} \\ &= \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \\ &\stackrel{(7.132)}{<} \delta \\ &\stackrel{(7.131)}{=} \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.133)$$

Logo, da Definição 7.1.1, segue que

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \pi_i(\vec{x}) = \pi_i(\vec{x}_0),$$

que pela Definição 7.2.1, implicará que a função  $\pi_i$  é contínua em cada ponto  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Portanto, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a função  $\pi_i$  é contínua em  $\mathbb{R}^n$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Como conseqüência do Teorema 7.1.2 e da Proposição 7.2.2 acima, temos o:

**Corolário 7.2.3** *Sejam  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , e a função  $h : D(h) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por*

$$\begin{aligned} h(x, y) &\doteq g(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in D(h), \quad (7.134) \\ \text{onde } D(h) &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in I\}. \end{aligned}$$

*Então a função  $h$  é uma função contínua em  $D(h)$ .*

*De modo análogo, se considerarmos a função  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$\begin{aligned} f(x, y) &\doteq g(y), \quad \text{para cada } (x, y) \in D(f), \quad (7.135) \\ \text{onde } D(f) &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in I\}, \end{aligned}$$

*então a função  $f$  será uma função contínua em  $D(f)$ .*

**Demonstração:**

Observemos que

$$\begin{aligned} h(x, y) &\stackrel{(7.134)}{=} g(x) \\ &\stackrel{(7.130), \text{ com } i=1}{=} g[\pi_1(x, y)] \\ &= (g \circ \pi_1)(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in D(h), \end{aligned} \quad (7.136)$$

onde a função  $\pi_1$  é a 1.<sup>a</sup> projeção (veja a Proposição 7.2.2).

Como, por hipótese, a função  $g$  e, pela Proposição 7.2.2, a função  $\pi_1$  é contínua nos seus respectivos domínios, do Corolário 7.2.2, segue que a função  $h$  (veja (7.136)) será uma função contínua em  $D(h)$ .

De modo semelhante, temos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &\stackrel{(7.135)}{=} g(y) \\ &\stackrel{(7.130), \text{ com } i=2}{=} g[\pi_2(x, y)] \\ &= (g \circ \pi_2)(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in D(f), \end{aligned} \tag{7.137}$$

onde a função  $\pi_2$  é a 2.<sup>a</sup> projeção (veja Proposição 7.2.2).

Como, por hipótese, a função  $g$  e, pela Proposição 7.2.2, a função  $\pi_2$  é contínua nos seus respectivos domínios, do Corolário 7.2.2, segue que a função  $f$  (veja (7.137)) será uma função contínua em  $D(f)$ , completando a demonstração. □

Concluimos este capítulo com um resultado sobre funções contínuas definida em subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$  (veja a Definição F.4.5 do Apêndice F), a saber:

**Teorema 7.2.1** *Sejam  $A$  é um subconjunto, não vazio, compacto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $A$ .*

*Então existem  $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A$ , tais que*

$$f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2), \quad \text{para cada } \vec{x} \in A,$$

*isto é, a função  $f$  atinge seu máximo e seu mínimo globais (ou absolutos) no conjunto  $A$ .*

**Demonstração:**

A demonstração será omitida. □

## Capítulo 8

# Derivadas parciais funções a valores reais, de várias variáveis reais

O objetivo deste capítulo é introduzir a noção de diferenciabilidade para funções a valores reais, de várias variáveis reais, e dar algumas aplicações deste conceito.

Como veremos, a noção de diferenciabilidade para funções a valores reais, de várias variáveis reais, é um pouco mais delicada de se introduzir que no caso de funções a valores reais, de uma variável real (estudada na disciplina de Cálculo 1).

Começaremos estudando as:

### 8.1 Derivadas parciais de primeira ordem

Trataremos inicialmente de funções a valores reais, de duas variáveis reais, e mais tarde trataremos do caso geral de funções a valores reais, de  $n$ -variáveis reais.

**Observação 8.1.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  (veja a Definição F.4.3 do Apêndice F),  $(x_0, y_0) \in A$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, que denotaremos por*

$$z = f(x, y).$$

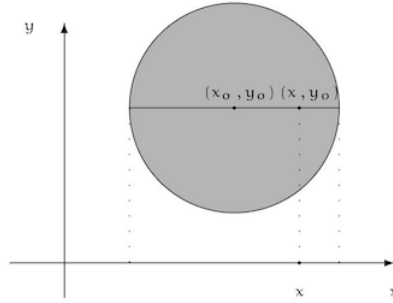
*Como  $(x_0, y_0) \in A$  e  $A$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$ , temos que existe  $\delta > 0$ , tal que*

$$\mathcal{B}_\delta((x_0, y_0)) \subseteq A.$$

*Com isto podemos definir a função  $g: D(g) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$g(x) \doteq f(x, y_0), \quad \text{para cada } x \in D(g), \quad (8.1)$$

*onde (veja a figura abaixo)*  $D(g) \doteq \{x \in \mathbb{R} ; (x, y_0) \in \mathcal{B}_\delta((x_0, y_0))\} \subseteq \mathbb{R}.$



**Definição 8.1.1** Se a função  $g : D(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (8.1), for uma função diferenciável em  $x_0$  (como na disciplina de Cálculo 1), então sua derivada em  $x_0$ , isto é,  $g'(x_0)$ , será denominada derivada parcial (de primeira ordem) da função  $f$ , em relação à variável  $x$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e indicada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0), \partial_x f(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), z_x(x_0, y_0) \text{ ou } \partial_x z(x_0, y_0). \quad (8.2)$$

### Observação 8.1.2

1. Na situação da Definição 8.1.1 acima, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) \quad (8.3)$$

$$\text{visto da disciplina de Cálculo 1} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\stackrel{(8.1)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\stackrel{\Delta x \doteq x - x_0}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\stackrel{h \doteq \Delta x}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \quad (8.4)$$

2. Consideremos

$$B \doteq \left\{ (x, y) \in A ; \text{ existe } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right\}.$$

Com isto, temos definida a função  $\frac{\partial f}{\partial x} : B \rightarrow \mathbb{R}$ .

Esta função será denominada função derivada parcial (de primeira ordem) da função  $f$  em relação à variável  $x$ .

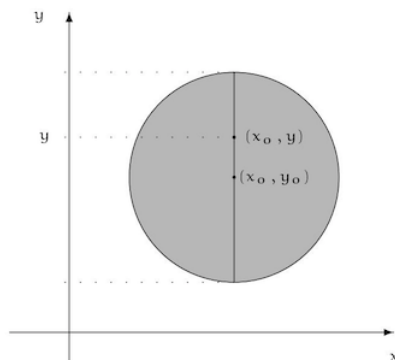
3. De modo análogo, definimos a derivada parcial de  $f$  em relação a variável  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ .

Mais precisamente, na situação da Observação 8.1.1, podemos definir a função  $h : D(h) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(y) \doteq f(x_0, y), \quad \text{para cada } y \in D(h), \quad (8.5)$$

$$\text{onde (veja a figura abaixo)} \quad D(h) \doteq \{y \in \mathbb{R} ; (x_0, y) \in \mathcal{B}_\delta((x_0, y_0))\} \subseteq \mathbb{R}.$$





Se a função  $h : D(h) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (8.5), for diferenciável em  $\underline{y}_0$ , então sua derivada em  $\underline{y}_0$  (como na disciplina de Cálculo 1), isto é,  $h'(\underline{y}_0)$ , será dita **derivada parcial (de primeira ordem) da função  $f$ , em relação à variável  $\underline{y}$ , no ponto**, e será indicada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0) \text{ ou } \partial_y z(x_0, y_0). \quad (8.6)$$

4. Na situação do item 3. acima, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(\underline{y}_0) \quad (8.7)$$

$$\text{visto na disciplina de Cálculo 1} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0}$$

$$\stackrel{(8.5)}{=} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$\stackrel{\Delta y \doteq y - y_0}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$\stackrel{k \doteq \Delta y}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \quad (8.8)$$

5. Consideremos

$$C \doteq \left\{ (x, y) \in A ; \text{ existe } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\}.$$

Com isto temos definida a função  $\frac{\partial f}{\partial y} : C \rightarrow \mathbb{R}$ .

Esta função será denominada **função derivada parcial (de primeira ordem) da função  $f$ , em relação à variável  $\underline{y}$** .

6. As funções derivadas parciais (de primeira ordem)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , definidas nos conjuntos  $B$  e  $C$  (introduzidos itens 2. e 5. acima), respectivamente, serão denominadas de **derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$** .

7. A seguir daremos uma interpretação geométrica para as derivadas parciais de 1.a ordem de uma função  $f$ , no ponto  $(x_0, y_0) \in A$ , no caso delas existirem.

Observemos que, por abuso da notação, a representação geométrica do gráfico da função

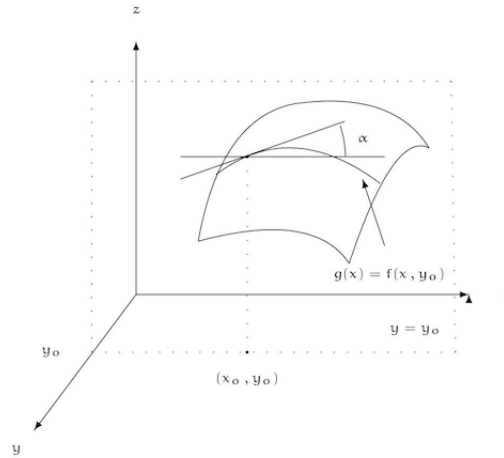
$$g(x) \doteq f(x, y_0), \quad \text{para cada } x \in D(g),$$

será um curva, contida na representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

A representação geométrica do traço desta curva pode ser obtida fazendo-se a intersecção, em  $\mathbb{R}^3$ , do plano

$$y = y_0,$$

com a representação geométrica do gráfico da função  $f$  (veja a figura abaixo).



Lembremos, da disciplina de Cálculo I, que  $g'(x_0)$  nos fornece o valor do coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função  $g$ , no ponto  $x_0$ , isto é, é igual  $\text{tg}(\alpha)$  (veja a figura acima).

No nosso caso, relativamente ao plano

$$y = y_0,$$

a inclinação da reta tangente à representação geométrica do traço da curva  $z = g(x)$ , no ponto  $(x_0, g(x_0))$ , será dada por  $g'(x_0)$ , isto é, por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Logo, geometricamente, a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

nos fornece, relativamente ao plano

$$y = y_0,$$

o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do traço da curva parametrizada

$$x \rightarrow (g(x), y_0), \quad \text{para cada } x \in D(g),$$

obtida da intersecção do plano

$$y = y_0,$$

com a representação geométrica do gráfico da função  $z = f(x, y)$ , no ponto

$$((x_0, y_0), f(x_0, y_0)).$$

Assim, no nosso caso, olhando no plano

$$y = y_0,$$

a inclinação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função  $z = g(x)$ , no ponto  $(x_0, g(x_0))$ , será dada por  $g'(x_0)$ , isto é, será igual a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

8. De um modo semelhante temos que, geometricamente, a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

será, relativamente ao plano

$$x = x_0,$$

o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do traço da curva

$$y \rightarrow (x_0, h(y)), \quad \text{para cada } y \in D(h),$$

(veja a figura abaixo) obtida da intersecção do plano

$$x = x_0,$$

com a representação geométrica do gráfico da função  $z = f(x, y)$ , no ponto

$$((x_0, y_0), f(x_0, y_0)).$$

Lembremos, uma vez mais da disciplina de Cálculo I, que  $h'(y_0)$ , é o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função  $h$  no ponto  $y_0$ , isto é, é igual  $\text{tg}(\beta)$  (veja a figura acima).

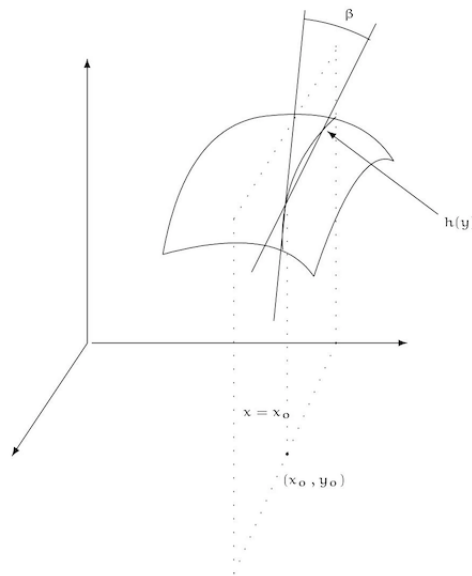
Assim, no nosso caso, relativamente ao plano

$$x = x_0,$$

a inclinação da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função  $z = h(y)$ , no ponto  $(h(y_0), y_0)$ , será dada por  $h'(y_0)$ , isto é, será igual a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Apliquemos os conceitos acima ao:



**Exemplo 8.1.1** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (8.9)$$

Calcule, se existir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1).$$

Além disso, calcule, onde existir,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

### Resolução:

Neste caso, temos que

$$(x_0, y_0) \doteq (1, -1). \quad (8.10)$$

Definamos a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} g(x) &\doteq f(x, y_0) \\ &\stackrel{(8.10)}{=} f(x, -1) \\ &\stackrel{(8.9)}{=} x^2 \cdot (-1) \\ &= -x^2, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Como a função  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  (visto na disciplina de Cálculo 1), em particular, será diferenciável em  $x_0 = 1$ .

Assim, segue existe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \stackrel{(8.10)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)$$

e, além disso:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) &\stackrel{(8.10)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.3)}{=} g'(x_0) \\
 &\stackrel{(8.10)}{=} g'(1) \\
 &\stackrel{(8.11)}{=} \left[ \underbrace{\frac{d}{dx}(-x^2)}_{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}} \right] \Big|_{x=1} \\
 &= [-2x] \Big|_{x=1} \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

De modo semelhante, se definirmos a função  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned}
 h(y) &\doteq f(x_0, y) \\
 &\stackrel{(8.10)}{=} f(1, y) \\
 &\stackrel{(8.9)}{=} 1^2 \cdot y \\
 &= y, \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R},
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

então, como a função  $h$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  (do Cálculo 1), em particular será diferenciável em  $y_0 = -1$ .

Logo, segue que existe

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \stackrel{(8.10)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$$

e, além disso,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) &\stackrel{(8.10)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.7)}{=} h'(y_0) \\
 &= h'(-1) \\
 &\stackrel{(8.12)}{=} \left[ \underbrace{\frac{d}{dy}y}_{=1} \right] \Big|_{y=-1} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Observemos também que, para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fixado, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &\stackrel{g(x) \doteq f(x, y_0) \stackrel{(8.9)}{=} x^2 y_0 \text{ e } (8.3)}{=} g'(x_0) \\ &= \left[ \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 y_0)}_{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}_{x_0}} \right] \Big|_{x=x_0} \\ &= [2xy_0] \Big|_{x=x_0} \\ &= 2x_0 y_0, \end{aligned} \tag{8.13}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &\stackrel{h(y) \doteq f(x_0, y) \stackrel{(8.9)}{=} x_0^2 y \text{ e } (8.7)}{=} h'(y_0) \\ &= \left[ \underbrace{\frac{d}{dy}(x_0^2 y)}_{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}_{x_0^2}} \right] \Big|_{y=y_0} \\ &= [x_0^2] \Big|_{y=y_0} \\ &= x_0^2, \end{aligned} \tag{8.14}$$

isto é, existem as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$  em cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e além disso teremos que as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  serão dadas por

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \stackrel{(8.13)}{=} 2xy \\ \text{e} &\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \stackrel{(8.14)}{=} x^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

Temos também o:

**Exemplo 8.1.2** Consideremos a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 \operatorname{sen}(x + y) + y \cos(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{8.15}$$

Calcule, caso existam,  $f_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  e  $f_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .

Onde existir, calcule  $f_x(x, y)$  e  $f_y(x, y)$ .

### Resolução:

Neste caso

$$(x_0, y_0) \doteq \left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \tag{8.16}$$

Considerando a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned}
 g(x) &\doteq f(x, y_0) \\
 &\stackrel{(8.16)}{=} f(x, 0) \\
 &\stackrel{(8.15)}{=} x^2 \operatorname{sen}(x) + \underbrace{0 \cos(x)}_{=0} \\
 &= x^2 \operatorname{sen}(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

temos que a função  $g$  será diferenciável em  $\mathbb{R}$  (visto na disciplina de Cálculo 1), em particular, no ponto  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Além disso, teremos

$$\begin{aligned}
 f_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &\stackrel{(8.16)}{=} f_x(x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.3)}{=} g'(x_0) \\
 &\stackrel{(8.16)}{=} \frac{\pi}{2} g'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &\stackrel{(8.17)}{=} \left\{ \frac{d}{dx} [x^2 \operatorname{sen}(x)] \right\} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} \\
 &\text{visto na disciplina de Cálculo 1} \left\{ 2x \operatorname{sen}(x) + x^2 \cos(x) \right\} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2 \frac{\pi}{2} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \\
 &= 2 \frac{\pi}{2} = \pi.
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

$$\text{Portanto } f_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \pi.$$

Por outro lado, considerando a função  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned}
 h(y) &\doteq f(x_0, y) \\
 &\stackrel{(8.16)}{=} f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) \\
 &\stackrel{(8.15)}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + y \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R},
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

temos que a função  $h$  será diferenciável em  $\mathbb{R}$  (visto na disciplina de Cálculo 1), em particular, será diferenciável em  $y_0 = 0$ .

Logo

$$\begin{aligned}
 f_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &\stackrel{(8.16)}{=} f_y(x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.7)}{=} h'(y_0) \\
 &\stackrel{(8.16)}{=} h'(0) \\
 &\stackrel{(8.19)}{=} \left\{ \frac{d}{dy} \left[ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \right] \right\} \Big|_{y=0} \\
 &\text{visto na disciplina de Cálculo 1} \stackrel{=}{=} \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \right\} \Big|_{y=0} \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto  $f_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$ .

Observemos também que, para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , teremos:

$$\begin{aligned}
 f_x(x_0, y_0) &\stackrel{\text{se } g(x) \doteq f(x, y_0) \stackrel{(8.15)}{=} x^2 \operatorname{sen}(x+y_0) + y_0 \cos(x) \text{ e } (8.3)}{=} g'(x_0) \\
 &= \left\{ \frac{d}{dx} \left[ x^2 \operatorname{sen}(x + y_0) + y_0 \cos(x) \right] \right\} \Big|_{x=x_0} \\
 &\text{visto na disciplina de Cálculo 1} \stackrel{=}{=} \left\{ 2x \operatorname{sen}(x + y_0) + x^2 \cos(x + y_0) - y_0 \operatorname{sen}(x) \right\} \Big|_{x=x_0} \\
 &= 2x_0 \operatorname{sen}(x_0 + y_0) + x_0^2 \cos(x_0 + y_0) - y_0 \operatorname{sen}(x_0), \tag{8.20}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 f_y(x_0, y_0) &\stackrel{\text{se } h(y) \doteq f(x_0, y) \stackrel{(8.15)}{=} x_0^2 \operatorname{sen}(x_0+y) + y \cos(x_0) \text{ e } (8.7)}{=} h'(y_0) \\
 &= \left\{ \frac{d}{dy} \left[ x_0^2 \operatorname{sen}(x_0 + y) + y \cos(x_0) \right] \right\} \Big|_{y=y_0} \\
 &\text{visto na disciplina de Cálculo 1} \stackrel{=}{=} \left\{ x_0^2 \cos(x_0 + y) + \cos(x_0) \right\} \Big|_{y=y_0} \\
 &= x_0^2 \cos(x_0 + y_0) + \cos(x_0), \tag{8.21}
 \end{aligned}$$

isto é, existem as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$  e, além disso, as funções  $f_x, f_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , serão dadas por

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &\stackrel{(8.20)}{=} 2x \operatorname{sen}(x + y) + x^2 \cos(x + y) - y \operatorname{sen}(x) \\
 \text{e } f_y(x, y) &\stackrel{(8.21)}{=} x^2 \cos(x + y) + \cos(x),
 \end{aligned}$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , completando a resolução. □

O caso a seguir é um pouco mais elaborado, como veremos:



**Exemplo 8.1.3** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (8.22)$$

Calcule, caso existam,  $f_x(0, 0)$  e  $f_y(0, 0)$ .

**Resolução:**

Neste caso

$$(x_0, y_0) \doteq (0, 0). \quad (8.23)$$

Consideremos a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} g(x) &\doteq f(x, y_0) \\ &\stackrel{(8.23)}{=} f(x, 0) \\ &\stackrel{(8.22)}{=} \begin{cases} \frac{x^3 - 0^2}{x^2 + 0^2}, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \\ \text{ou seja, } g(x) &\doteq x, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Logo a função  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  (visto na disciplina de Cálculo 1) e

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &\stackrel{(8.23)}{=} f_x(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(8.3)}{=} g'(x_0) \\ &\stackrel{(8.23)}{=} g'(0) \\ &\stackrel{(8.24)}{=} \left. \left\{ \underbrace{\frac{d}{dx}[x]}_{=1} \right\} \right|_{x=0} \\ &\text{visto na disciplina de Cálculo 1 } \underline{1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$f_x(0, 0) = 1.$$

Por outro lado, considerando a função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} h(y) &\doteq f(x_0, y) \\ &\stackrel{(8.23)}{=} f(0, y) \\ &\stackrel{(8.22)}{=} \begin{cases} \frac{0^3 - y^2}{0^2 + y^2}, & \text{para } y \neq 0 \\ 0, & \text{para } y = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1, & \text{para } y \neq 0 \\ 0, & \text{para } y = 0. \end{cases}, \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

temos que (visto na disciplina de Cálculo 1) a função  $h$  **não** é diferenciável em  $y = 0$ , pois não é contínua em  $y = 0$ .

Portanto não existe  $f_y(0, 0)$ , completando a resolução. □

**Observação 8.1.3** *Notemos que, no Exemplo 8.1.3 acima, existe a derivada parcial*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$

*mas não existe a derivada parcial*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

*ou seja, pode acontecer de uma função possuir uma das derivadas parciais de 1.ª ordem sem que, necessariamente, possua a outra derivada parcial de 1.ª ordem, em um mesmo ponto.*

Podemos definir as derivadas parciais de uma função a valores real, de  $n$ -variáveis reais, de modo análogo, como mostra a definição a seguir:

**Definição 8.1.2** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{x}_0 \doteq (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.*

*Como  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A$ , podemos encontrar  $\delta > 0$ , de modo que*

$$\mathcal{B}_\delta(\vec{x}_0) \subseteq A.$$

*Consideremos a função  $g_1 : \text{Dom}(g_1) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$g_1(x_1) \doteq f(x_1, \underbrace{x_{02}, \dots, x_{0n}}_{\text{estão fixos}}), \text{ para cada } x_1 \in \text{Dom}(g_1), \quad (8.25)$$

$$\text{onde } \text{Dom}(g_1) \doteq \{x_1 \in \mathbb{R} ; (x_1, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathcal{B}_\delta(\vec{x}_0)\}$$

*(isto é, fixamos as  $(n-1)$ -últimas coordenadas na função  $f$ ).*

*Se a função  $g_1$ , dada por (8.25), for uma função diferenciável em  $x_{01}$  (visto na disciplina Cálculo 1), então sua derivada em  $x_{01}$ , isto é,  $g_1'(x_{01})$ , será denominada derivada parcial (de primeira ordem) da função  $f$ , em relação à variável  $x_1$ , no ponto  $\vec{x}_0$  e será indicada por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \quad f_{x_1}(\vec{x}_0), \quad \partial_{x_1} f(\vec{x}_0) \quad \text{ou} \quad D_{x_1} f(\vec{x}_0). \quad (8.26)$$

Em geral, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , consideremos a função  $g_i: \text{Dom}(g_i) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g_i(x_i) \doteq f(\underbrace{x_{10}, x_{02}, \dots, x_{0(i-1)}}_{\text{estão fixadas}}, \underbrace{x_i}_{i\text{-ésima posição}}, \underbrace{x_{0(i+1)}, \dots, x_{0n}}_{\text{estão fixadas}}), \quad x_i \in \text{Dom}(g_i), \quad (8.27)$$

onde  $\text{Dom}(g_i) \doteq \{x_i \in \mathbb{R}; (x_{10}, x_{02}, \dots, x_{0(i-1)}, x_i, x_{0(i+1)}, \dots, x_{0n}) \in B_\delta(\vec{x}_0)\}$

(isto é, fixamos  $(n-1)$ -coordenadas da função  $f$ , a única que varia é a  $i$ -ésima coordenada da função  $f$ ).

Se a função  $g_i$ , dada por (8.27), é uma função diferenciável no ponto  $x_{0i}$  (visto na disciplina Cálculo 1), então sua derivada no ponto  $x_{0i}$ , isto é,  $g_i'(x_{0i})$ , será denominada derivada parcial (de primeira ordem) da função  $f$ , em relação à variável  $x_i$ , no ponto  $\vec{x}_0$  e será indicada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0), \quad f_{x_i}(\vec{x}_0), \quad \partial_{x_i} f(\vec{x}_0) \quad \text{ou} \quad D_{x_i} f(\vec{x}_0). \quad (8.28)$$

Com isto podemos resolver o:

**Exemplo 8.1.4** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) \doteq x \cos(y) + z, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (8.29)$$

Encontre, se existirem, as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$ , em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , em cada ponto de  $\mathbb{R}^3$ .

**Resolução:**

Para cada  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  teremos:

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0, z_0) &\stackrel{\text{se } g(x) \doteq f(x, y_0, z_0) \stackrel{(8.29)}{=} x \cos(y_0) + z_0 \text{ e } (8.27)}{=} g'(x_0) \\ &= \left\{ \frac{d}{dx} [x \cos y_0 + z_0] \right\} \Big|_{x=x_0} \\ &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} \cos(y_0). \end{aligned} \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} f_y(x_0, y_0, z_0) &\stackrel{\text{se } h(y) \doteq f(x_0, y, z_0) \stackrel{(8.29)}{=} x_0 \cos(y) + z_0 \text{ e } (8.27)}{=} h'(y_0) \\ &= \left\{ \frac{d}{dy} [x_0 \cos y + z_0] \right\} \Big|_{y=y_0} \\ &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} -x_0 \text{sen}(y_0). \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned} f_z(x_0, y_0, z_0) &\stackrel{\text{se } t(z) \doteq f(x_0, y_0, z) \stackrel{(8.29)}{=} x_0 \cos(y_0) + z \text{ e } (8.27)}{=} t'(z_0) \\ &= \left\{ \frac{d}{dz} [x_0 \cos y_0 + z] \right\} \Big|_{z=z_0} \\ &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} 1. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Portanto, de (8.30), (8.31) e (8.32), a função  $f$  tem derivadas parciais de primeira ordem, em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , em cada ponto de  $\mathbb{R}^3$ .

Além disso, novamente, de (8.30), (8.31) e (8.32), segue que as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , serão dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &\stackrel{(8.30)}{=} \cos(y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &\stackrel{(8.31)}{=} -x \operatorname{sen}(y) \\ \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &\stackrel{(8.32)}{=} 1, \end{aligned}$$

para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , completando na resolução. □

A seguir temos o:

**Exemplo 8.1.5** Para  $n \in \mathbb{N}$  fixado, consideremos as funções  $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(x, y) \doteq k, \tag{8.33}$$

$$g(x, y) \doteq x^n, \tag{8.34}$$

$$h(x, y) \doteq y^n. \tag{8.35}$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Mostre que as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  possuem derivadas parciais de 1.a ordem em relação à  $\underline{x}$  e em relação à  $\underline{y}$ , em cada por de  $\mathbb{R}^2$ .

Além disso, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \tag{8.36}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = n x^{n-1}, \tag{8.37}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0, \tag{8.38}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 0 \tag{8.39}$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = n y^{n-1}, \tag{8.40}$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

### Resolução:

Para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , definamos a função  $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} g_1(x) &\doteq g(x, y_0) \\ &\stackrel{(8.34)}{=} x^n. \end{aligned} \tag{8.41}$$

Com isto, pela Definição 8.1.1 (veja (8.3)), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &\stackrel{(8.3)}{=} g_1'(x_0) \\ &\stackrel{(8.41)}{=} \underset{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} n x_0^{n-1}, \end{aligned}$$

mostrando a existência da derivada parcial de 1.a ordem, em relação à  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e além disso, temos a validade da 1.a identidade de (8.37).

A verificação das outras afirmações serão deixadas como exercício para o leitor.

□

Para funções a valores reais, de duas variáveis reais, temos a:

**Proposição 8.1.1** *Sejam  $A$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  e  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funções que possuam derivadas parciais de 1.a ordem, em relação à  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Então:*

1. a função  $f + g$  admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e, além disso, teremos

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (8.42)$$

2. a função  $f - g$  admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e, além disso, teremos

$$\frac{\partial(f-g)}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (8.43)$$

3. a função  $c \cdot f$  admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e, além disso, teremos

$$\frac{\partial(c \cdot f)}{\partial x}(x_0, y_0) = c \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (8.44)$$

4. a função  $f \cdot g$  admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e, além disso, teremos

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (8.45)$$

5. se

$$g(x_0, y_0) \neq 0,$$

a função  $\frac{f}{g}$  admitirá derivada parcial de 1.a ordem, em relação à  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e, além disso, teremos

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{g^2(x_0, y_0)}. \quad (8.46)$$

### Demonstração:

As demonstrações dos itens acima são consequências das propriedades análogas da diferenciação de funções a valores, de uma variável real (veja a Definição 8.1.1, ou ainda (8.3)).

□

### Observação 8.1.4

1. Vale um resultado análogo à Proposição 8.1.1 para a derivada parcial de de 1.a ordem, em relação à variável  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ .

Deixaremos o enunciado e a respectiva demonstração como exercício para o leitor.

2. Notemos que se  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função polinomial de grau igual a

$$m + n, \quad (8.47)$$

ou seja,

$$p(x) = a_{00} + a_{01}x + a_{10}y + a_{02}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots + a_{mn}x^m y^n, \quad (8.48)$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , onde

$$a_{mn} \neq 0,$$

então, dos itens 1., 3. da Proposição 8.1.1 e do Exemplo 8.1.5, existirão as derivadas parciais de 1.a ordem,  $\frac{\partial p}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial p}{\partial y}(x, y)$ , para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e, além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) &\stackrel{(8.48)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [a_{00} + a_{01}x + a_{10}y + a_{02}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots + a_{mn}x^m y^n] \\ &\stackrel{(8.42)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [a_{00}] + \frac{\partial}{\partial x} [a_{01}x] + \frac{\partial}{\partial x} [a_{10}y] + \frac{\partial}{\partial x} [a_{02}x^2] + \frac{\partial}{\partial x} [a_{11}xy] + \frac{\partial}{\partial x} [a_{02}y^2] \\ &\quad + \cdots + \frac{\partial}{\partial x} [a_{mn}x^m y^n] \\ &\stackrel{(8.44)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [a_{00}] + a_{01} \frac{\partial}{\partial x} [x] + a_{10} \frac{\partial}{\partial x} [y] + a_{02} \frac{\partial}{\partial x} [x^2] + a_{11} \frac{\partial}{\partial x} [xy] \\ &\quad + a_{02} \frac{\partial}{\partial x} [y^2] + \cdots + a_{mn} \frac{\partial}{\partial x} [x^m y^n] \\ &\stackrel{(8.36) \text{ e } (8.37)}{=} 0 + a_{01} \cdot 1 + a_{10} \cdot 0 + a_{02} \cdot 2 \cdot x + a_{11} \cdot y \\ &\quad + a_{02} \cdot 0 + \cdots + a_{mn} \cdot m \cdot x^{m-1} y^n \\ &= a_{01} + 2a_{02}x + a_{11} \cdot y + \cdots + m a_{mn} x^{m-1} y^n, \end{aligned} \quad (8.49)$$

que também trata-se de uma função polinomial.

De modo semelhante podemos mostrar que a derivada parcial de 1.a ordem,  $\frac{\partial p}{\partial y}(x, y)$  também é uma função polinomial.

3. Portanto podemos concluir que uma função polinomial admite as derivadas parciais de 1.a ordem, em relação à variável  $\underline{x}$  e em relação à variável  $\underline{y}$ , em cada ponto de  $\mathbb{R}^2$  e, além disso, estas também serão funções polinomiais.

4. Notemos que (veja (8.49)) a função polinomial obtida a derivada parcial de 1.a ordem, em relação à variável  $\underline{x}$  e em relação à variável  $\underline{y}$ , será uma função polinomial de grau

$$m + n - 1, \quad (8.50)$$

ou seja, um a menos que o grau da função polinomial (8.48) (veja (8.47)).

5. Como consequência do item 3. acima, e do item 5. da Proposição 8.1.1 (veja (8.46) e o item 1. acima), que uma função racional admite as derivadas parciais de 1.a ordem, em relação à variável  $\underline{x}$  e em relação à variável  $\underline{y}$ , em cada ponto do seu domínio e, além disso, estas também serão funções racionais.

6. Valem as mesmas considerações acima para funções polinomiais e racionais de várias variáveis reais.

Deixaremos a verificação das afirmações acima como exercício para o leitor.

## 8.2 Derivadas parciais de ordem superior

**Definição 8.2.1** Consideremos  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  um subconjunto, não vazio, aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, que possui derivadas parciais de 1.a ordem, relativamente a  $\underline{x}$  e a  $\underline{y}$ , em cada ponto do conjunto  $A$ .

Então, para a função

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} : A \rightarrow \mathbb{R},$$

podemos tentar encontrar sua derivada parcial de 1.a ordem, relativamente a  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0) \in A$ ; isto é, a derivada parcial da função  $f_x$ , relativamente a  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ .

Caso exista, ela será dita derivada parcial de segunda ordem da função  $f$ , relativamente à variável  $\underline{x}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e será denotada por

$$f_{xx}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \partial_x^2 f(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad D_x^2 f(x_0, y_0), \quad (8.51)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0) \end{aligned} \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} &= (f_x)_x(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(8.4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0 + h, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned} \quad (8.53)$$

De modo análogo, a derivada parcial da função  $f_x$ , relativamente a  $\underline{y}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , caso exista, será dita derivada parcial de segunda ordem da função  $f$ , relativamente às variáveis  $\underline{x}$  e a  $\underline{y}$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  e denotada por

$$f_{xy}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \partial_{yx}^2 f(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad D_{yx}^2 f(x_0, y_0), \quad (8.54)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_{xy}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ &\doteq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0) \end{aligned} \quad (8.55)$$

$$\begin{aligned} &= (f_x)_y(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(8.8)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)}{k}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

De modo análogo, definimos derivada parcial de segunda ordem da função  $f$ , relativamente à variável  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  (se existir), denotada por

$$f_{yy}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \partial_y^2 f(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad D_y^2 f(x_0, y_0), \quad (8.57)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_{yy}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \\ &\doteq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned} &= (f_y)_y(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(8.8)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0, y_0 + k) - f_y(x_0, y_0)}{k}, \end{aligned} \quad (8.59)$$

e a derivada parcial de segunda ordem da função  $f$ , relativamente às variáveis  $y$  e a  $x$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  (se existir), denotada por

$$f_{yx}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \partial_{xy}^2 f(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad D_{xy}^2 f(x_0, y_0), \quad (8.60)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_{yx}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \\ &= (f_y)_x(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(8.4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned} \quad (8.61)$$

### Observação 8.2.1

1. *Todo cuidado é pouco!*

*A ordem em que aparecem nas várias derivadas parciais na Definição 8.2.1 acima é importante.*

*Veremos, em um exemplo mais a frente, que pode ocorrer situações em que*

$$f_{yx}(x_0, y_0) \neq f_{xy}(x_0, y_0).$$

*Para que não ocorra confusão basta lembrar, por exemplo, que*

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= (f_y)_x(x, y) \\ \text{e que} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0). \end{aligned}$$



2. Podemos, de modo semelhante, definir as derivadas parciais de terceira ordem da função  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ , a saber:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{f_{xxx}(x_0, y_0)}_{=(f_{xx})_x} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) \\
 &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{xx}(x_0 + h, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0)}{h} \\
 \underbrace{f_{yxx}(x_0, y_0)}_{=(f_{yx})_x} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) \\
 &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{yx}(x_0 + h, y_0) - f_{yx}(x_0, y_0)}{h} \\
 \underbrace{f_{xyx}(x_0, y_0)}_{=(f_{xy})_x} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x_0, y_0) \\
 &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) (x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{xy}(x_0 + h, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)}{h} \\
 \underbrace{f_{yyx}(x_0, y_0)}_{=(f_{yy})_x} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) \\
 &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{yy}(x_0 + h, y_0) - f_{yy}(x_0, y_0)}{h} \\
 \underbrace{f_{yxy}(x_0, y_0)}_{=(f_{yx})_y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x_0, y_0) \\
 &\doteq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.8)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_{yx}(x_0, y_0 + k) - f_{yx}(x_0, y_0)}{k} \\
 \underbrace{f_{yyy}(x_0, y_0)}_{=(f_{yy})_y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0) \\
 &\doteq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) \\
 &\stackrel{(8.8)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_{yy}(x_0, y_0 + k) - f_{yy}(x_0, y_0)}{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{f_{xyy}}_{=(f_{xy})_y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x_0, y_0) \\
&\doteq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)(x_0, y_0) \\
&\stackrel{(8.8)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_{xy}(x_0, y_0 + k) - f_{xy}(x_0, y_0)}{h} \\
\underbrace{f_{xxy}}_{=(f_{xx})_y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x_0, y_0) \\
&\doteq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)(x_0, y_0) \\
&\stackrel{(8.8)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_{xx}(x_0, y_0 + k) - f_{xx}(x_0, y_0)}{h} \\
\underbrace{f_{yxy}}_{=(f_{xy})_y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x_0, y_0) \\
&\doteq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)(x_0, y_0) \\
&\stackrel{(8.8)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_{yx}(x_0, y_0 + k) - f_{yx}(x_0, y_0)}{h}.
\end{aligned}$$

3. De modo semelhante podemos definir as derivadas parciais de ordem maior ou igual a quatro, em relação a  $\underline{x}$  e em relação a  $\underline{y}$ , da função  $\underline{f}$  ponto  $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ .

Deixaremos como exercício para o leitor introduzi-las.

4. Podemos definir as derivadas parciais de ordem superior, em um ponto  $\vec{x}_0$ , para funções de três ou mais variáveis, a valores reais, utilizando as idéias acima.

Deixaremos como exercício para o leitor introduzi-las.

Com isto temos a:

**Definição 8.2.2** Sejam  $\underline{A}$  um subconjunto, não vazio, aberto em  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $k \in \mathbb{N}$  fixado.

Diremos que a função  $\underline{f}$  é de classe  $C^k$  em  $\underline{A}$  se a função  $\underline{f}$  e cada uma das suas derivadas parciais até a ordem  $\underline{k}$ , existirem e forem funções contínuas no conjunto  $\underline{A}$ .

Neste caso escreveremos

$$f \in C^k(A; \mathbb{R}). \quad (8.62)$$

Diremos que a função  $\underline{f}$  é de classe  $C^\infty$  em  $\underline{A}$  se a função  $\underline{f}$  é de classe  $C^k$  em  $\underline{A}$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Neste caso escreveremos

$$f \in C^\infty(A; \mathbb{R}). \quad (8.63)$$

Apliquemos as ideias acima

**Exemplo 8.2.1** A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq xy, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (8.64)$$

é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

**Resolução:**

De fato, pois

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &\stackrel{(8.64)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[xy] \\ &= y, \end{aligned} \quad (8.65)$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &\stackrel{(8.64)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[xy] \\ &= x, \end{aligned} \quad (8.66)$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.65)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[y] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (8.67)$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.66)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[x] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (8.68)$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.65)}{=} \frac{\partial}{\partial y}[y] \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.66)}{=} \frac{\partial}{\partial x}[x] \\ &= 1, \end{aligned} \quad (8.69)$$

$$\begin{aligned} f_{xxx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.67)}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de modo análogo, pode-se mostrar que: } f_{xxy}(x, y) &= f_{xyy}(x, y) = f_{yyy}(x, y) \\ &= f_{yyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y) \\ &= f_{xyx}(x, y) = f_{yxy}(x, y) = 0, \end{aligned}$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

E, de modo semelhante, teremos que todas as demais derivadas parciais de ordem maior ou igual a quatro, são nulas em  $\mathbb{R}^2$ .

A verificação deste fato segue das identidades acima e os detalhes da mesma será deixada como exercício para o leitor.

Como a função e todas as suas derivadas parciais, de qualquer ordem, são as funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$  (pois são funções polinomiais), da Definição 8.2.2, segue que

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

completando a resolução. □

### Observação 8.2.2

1. Notemos que, do item 3. da Observação 8.1.4, Definição 8.2.1 e da Corolário 7.2.1, uma função polinomial de  $n$ -variáveis é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, pertence a

$$C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}).$$

2. Além disso, do item 5. da Observação 8.1.4, se o polinômio que define a função polinomial tem grau

$$n_0 \in \mathbb{N},$$

então todas as derivadas parciais da função polinomial, de ordem maior ou igual a

$$n_0 + 1,$$

serão iguais a zero, em todo  $\mathbb{R}^n$ .

Isto ocorre devido ao fato que a cada derivada parcial considerada, a função polinomial obtida terá grau menor ou igual a um a menos que o grau da função polinomial considerada inicialmente (veja (8.47), (8.50) e o item 6. da Observação 8.1.4).

3. Logo, do item 1. acima e do item 6. da Observação 8.1.4, temos que uma função racional de  $n$ -variáveis é de classe  $C^\infty$ , no seu respectivo domínio.

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração dos fatos acima.

Podemos aplicar as considerações acima ao

**Exercício 8.2.1** Mostre que função  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) \doteq 1 + x - 2y + 3x^2 + 4x^2y^3, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$ , ou seja,

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}).$$

Trataremos agora do

**Exercício 8.2.2** Mostre que a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x \operatorname{sen}(y) + y^2 \cos(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (8.70)$$

é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

**Resolução:**

Para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &\stackrel{(8.70)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \{x \operatorname{sen}(y) + y^2 \cos(x)\} \\ &= 1 \cdot \operatorname{sen}(y) + y^2 [-\operatorname{sen}(x)] \\ &= \operatorname{sen}(y) - y^2 \operatorname{sen}(x) \end{aligned} \quad (8.71)$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &\stackrel{(8.70)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \{x \operatorname{sen}(y) + y^2 \cos(x)\} \\ &= x \cos(y) + 2y \cos(x), \end{aligned} \quad (8.72)$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.71)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \{ \operatorname{sen}(y) - y^2 \operatorname{sen}(x) \} \\ &= y^2 \cos(x), \end{aligned} \quad (8.73)$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.71)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [ \operatorname{sen}(y) - y^2 \operatorname{sen}(x) ] \\ &= \cos(y) - 2y \operatorname{sen}(x), \end{aligned} \quad (8.74)$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.72)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [x \cos(y) + 2y \cos(x)] \\ &= 1 \cdot \cos(y) + 2y [-\operatorname{sen}(x)] \\ &= \cos(y) - 2y \operatorname{sen}(x), \end{aligned} \quad (8.75)$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.72)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [x \cos(y) + 2y \cos(x)] \\ &= x [-\operatorname{sen}(y)] + 2 \cos(x) \\ &= -x \operatorname{sen}(y) + 2 \cos(x). \end{aligned} \quad (8.76)$$

Notemos que todas as funções acima, juntamente com a função  $f$ , são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ . Considerando-se derivadas parciais de ordem maior igual à dois também serão funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

A verificação deste fato será deixado como exercício para o leitor.

Deste modo teremos

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

completando a resolução. □

**Observação 8.2.3** Como vimos no Exemplo 8.2.2:

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &\stackrel{(8.74)}{=} \cos(y) - 2y \operatorname{sen}(x) \\ &\stackrel{(8.75)}{=} f_{yx}(x, y), \end{aligned} \quad (8.77)$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Infelizmente, isso **NÃO** ocorre sempre, como mostrará o Exemplo 8.2.2 no final deste capítulo.

A pergunta que temos é a seguinte: sob que condições sobre a função  $f$ , teremos a identidade (8.77) acima?

Para responder a esta questão temos o:

**Teorema 8.2.1 (de Schwarz)** *Sejam  $A$  um subconjunto, não vazio, aberto em  $\mathbb{R}^2$  e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.*

*Suponhamos que a função  $f$  é tal que as funções  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$ , existem e sejam funções contínuas no conjunto  $A$ .*

Então

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y), \quad (8.78)$$

para cada  $(x, y) \in A$ .

Em particular, se a função  $f$  é de classe  $C^2$  em  $A$ , temos que a igualdade (8.78) estará satisfeita, em todo ponto do conjunto  $A$ .

### Demonstração:

Faremos a demonstração para o caso em a função  $f$  é de classe classe  $C^2$  em  $A$ .

A demonstração para o caso geral será omitida.

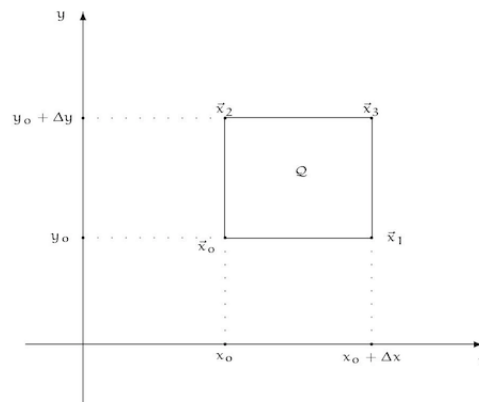
Fixemos  $(x_0, y_0) \in A$  e consideremos os pontos

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0), \quad \vec{x}_1 = (x_0 + \Delta x, y_0), \quad \vec{x}_2 = (x_0, y_0 + \Delta y) \quad \text{e} \quad \vec{x}_3 = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

onde  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , são tais que o retângulo

$$\begin{aligned} Q &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y\} \\ &= [x_0, x_0 + \Delta x] \times [y_0, y_0 + \Delta y] \end{aligned}$$

está contido no conjunto  $A$  (isto é possível pois o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$  - veja a figura abaixo, supondo  $\Delta x, \Delta y > 0$ ).



Consideremos

$$\Delta f \doteq f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Se definimos a função  $\phi : [x_0, x_0 + \Delta x] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$\phi(x) \doteq f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0), \quad \text{para cada } x \in [x_0, x_0 + \Delta x],$$

teremos que

$$\Delta f = \phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0).$$

Como a função  $\phi$  é diferenciável no intervalo  $(x_0, x_0 + \Delta x)$  e contínua em  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  (pois a função  $f$  é de classe  $\underline{C}^2$  em  $\underline{Q}$ ) segue, do Teorema do valormédio (visto na disciplina de Cálculo 1), que podemos encontrar  $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ , de modo que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \phi'(\xi)\Delta x \\ &= [f_x(\xi, y_0 + \Delta y) - f_x(\xi, y_0)] \Delta x. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Consideremos agora a função  $\psi : [y_0, y_0 + \Delta y] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$\psi(y) \doteq f_x(\xi, y), \quad \text{para cada } y \in [y_0, y_0 + \Delta y], \quad (8.80)$$

onde  $\xi$  está fixado, como acima.

Como a função  $\psi$  é diferenciável em  $(y_0, y_0 + \Delta y)$  e contínua em  $[y_0, y_0 + \Delta y]$  (pois a função  $f$  é de classe  $\underline{C}^2$  em  $\underline{Q}$ ), aplicando novamente o Teorema do valor médio (visto na disciplina de Cálculo 1), temos que podemos encontrar  $\eta \in (y_0, y_0 + \Delta y)$  de modo que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \psi'(\eta) \Delta y \Delta x \\ &\stackrel{(8.80)}{=} f_{yx}(\xi, \eta) \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (8.81)$$

Procedendo exatamente da mesma forma com a função  $\varphi : [y_0, y_0 + \Delta y] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\varphi(y) \doteq f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y), \quad \text{para cada } y \in [y_0, y_0 + \Delta y],$$

obteremos que

$$\Delta f = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$$

e existirão  $\gamma \in (x_0, x_0 + \Delta x)$  e  $\theta \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ , tais que

$$\Delta f = f_{xy}(\gamma, \theta) \Delta y \Delta x. \quad (8.82)$$

Logo, de (8.81) e (8.82), segue que

$$f_{yx}(\xi, \eta) = f_{xy}(\gamma, \theta).$$

Fazendo

$$(\xi, \eta), (\gamma, \theta) \rightarrow (x_0, y_0),$$

da continuidade das derivadas parciais mistas de 2.a ordem,  $f_{yx}$  e  $f_{xy}$ , segue que

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0),$$

como queríamos demonstrar. □

#### Observação 8.2.4

1. O Teorema 8.2.1 acima, nos dá condições suficientes, para que possamos trocar a ordem de derivação das derivadas parciais de segunda ordem de uma função, sem alterar o valor das mesmas.
2. Vale o análogo do Teorema 8.2.1 acima para funções a valores reais, de várias variáveis reais, ou seja: se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  é um subconjunto, não vazio, aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que todas as derivadas parciais de segunda ordem da função  $f$  (isto é,  $f_{x_i x_j}$ , para cada  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) existem e são funções contínuas em  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A$  então, para cada  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , segue que

$$f_{x_i x_j}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) = f_{x_j x_i}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}).$$

A demonstração deste fato será omitida.

Consideremos agora o:

**Exemplo 8.2.2** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (8.83)$$

Mostre que a função  $f$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , mas **não** é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Mostre também que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

### Resolução:

Notemos que a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

De fato, a função  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , pois é uma função racional cujo denominador só se anula em  $(0, 0)$  (veja (8.83)).

A verificação que a função  $f$  é contínua no ponto  $(0, 0)$  será deixada como exercício para o leitor, ou seja, que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 \stackrel{(8.83)}{=} f(0, 0).$$

Observemos que se  $(x, y) \neq (0, 0)$ , teremos:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned} \quad (8.84)$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{xy^4 + 3x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \quad (8.85)$$



Para  $(x, y) = (0, 0)$ , se considerarmos as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$g(x) \doteq f(x, 0) \stackrel{\text{Exercício 0}}{=} 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \quad (8.86)$$

e

$$h(y) \doteq f(0, y) \stackrel{\text{Exercício 0}}{=} 0, \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}, \quad (8.87)$$

então teremos:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= g'(0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &\stackrel{(8.86)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &\stackrel{h \neq 0 \text{ e } (8.83)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h0^3}{h^2 + 0^2} - 0 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (8.88)$$

$$\begin{aligned} f_y(0, 0) &= h'(0) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h(k) - h(0)}{k} \\ &\stackrel{(8.87)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} \\ &\stackrel{h \neq 0 \text{ e } (8.83)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0k^3}{0^2 + k^2} - 0 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (8.89)$$

Logo, de (8.84), (8.85), (8.88) e (8.89), segue que as funções  $f_x, f_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , serão dadas por:

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad (8.90)$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x y^4 + 3 x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (8.91)$$

Observemos que as funções  $f_x$  e  $f_y$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

De fato, elas são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , pois são funções racionais e portanto contínuas em seus domínios, a saber, em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Para verificar a continuidade das funções  $f_x$  e  $f_y$  no ponto  $(0, 0)$  observamos que, para  $(x, y) \neq$

$(0, 0)$ , teremos:

$$\begin{aligned}
 0 \leq |f_x(x, y)| &\stackrel{(8.90)}{=} \left| \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right| \\
 &= \left| \frac{y^3 (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \\
 &= \frac{\overbrace{|y^3|}^{=y^2|y|} \overbrace{|y^2 - x^2|}^{\leq x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^2} \\
 &\leq \frac{\overbrace{y^2}^{\leq x^2 + y^2} |y| (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\
 &\leq \frac{(x^2 + y^2)^2 |y|}{(x^2 + y^2)^2} \\
 &= |y|,
 \end{aligned}$$

que, do Teorema do sanduiche (ou seja, do item 7. do Teorema 7.1.1), implicará que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) &= 0 \\
 &\stackrel{(8.90)}{=} f_x(0, 0) \\
 &e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 \leq |f_y(x, y)| &= \left| \frac{x y^4 + 3 x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| \\
 &= \left| \frac{3 x y^2 \left( \frac{1}{3} y^2 + x^2 \right)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \\
 &= \frac{3 |x| y^2 \overbrace{\left( \frac{1}{3} y^2 + x^2 \right)}^{\leq x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^2} \\
 &\leq 3 \frac{|x| \overbrace{y^2}^{\leq x^2 + y^2} (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{|x|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= |x| \end{aligned}$$

que, do Teorema do sanduiche (ou seja, do item 7. do Teorema 7.1.1), implicará que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x,y) = 0 \stackrel{(8.91)}{=} f_y(0,0),$$

mostrando que as funções  $f_x$  e  $f_y$  são funções contínuas em  $(0,0)$  e assim serão funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

Portanto a função  $f$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Observemos também que:

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) &= (f_y)_x(0,0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \neq 0} \frac{h \cdot 0^4 + 3h^3 \cdot 0^2 - 0}{(h^2 + 0^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.92}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= (f_x)_y(0,0) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} \\ &= \lim_{k \neq 0} \frac{k^5 - 0^2 k^3}{(0^2 + k^2)^2} \\ &= 1, \end{aligned} \tag{8.93}$$

$$\begin{aligned} \text{ou seja, } f_{yx}(0,0) &= 0 \\ &= f_{xy}(0,0), \end{aligned}$$

como afirmamos.

Vamos agora verificar que a função  $f_{yx}$  não é contínua em  $(0,0)$ , mostrando que  $f$  **não** é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Na verdade a função  $f$  não é de classe  $C^2$ , em qualquer subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  que contenha a origem  $(0,0)$  e no conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  ela será de classe  $C^\infty$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Notemos que, derivando parcialmente a função  $f_y$ , relativamente a  $x$ , no ponto  $(x,y) \neq (0,0)$ , obteremos:

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) &= (f_y)_x(x,y) \\ &\stackrel{(8.90)}{\text{com } (x,y) \neq (0,0)} \frac{(y^4 + 9x^2 y^2)(x^2 + y^2)^2 - 4x(x y^4 + 3x^3 y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4}. \end{aligned}$$

Logo da identidade acima e de (8.92) segue que a função  $f_{yx} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f_{yx}(x, y) = \begin{cases} \frac{(y^4 + 9x^2y^2)(x^2 + y^2)^2 - 4x(xy^4 + 3x^3y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Mostremos que a função  $f_{yx}$  não é contínua em  $(x, y) = (0, 0)$ , ou seja,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_{yx}(x, y) \neq 0 = f_{yx}(0, 0). \quad (8.94)$$

Para isto calcularemos o limite acima à esquerda, ao longo da curva parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma(t) \doteq (t, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (8.95)$$

Com isto, obteremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f_{yx}[\gamma(t)] &\stackrel{(8.95)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f_{yx}(t, t) \\ &\stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^4 + 9t^2t^2)(t^2 + t^2)^2 - 4t(t^4 + 3t^3t^2)(t^2 + t^2)}{(t^2 + t^2)^4} \\ &\stackrel{\text{Exercício 1}}{=} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e observamos que este é distinto de

$$0 = f_{yx}(0, 0),$$

independentemente da existência do limite em (8.94).

Logo a função  $f_{yx}$  não é uma função contínua em  $(x, y) = (0, 0)$ , mostrando que a função  $f$  não é de classe  $\underline{C}^2$  em  $\underline{\mathbb{R}^2}$ . □

**Observação 8.2.5** No Exemplo 8.2.2 acima, vimos que a derivada parcial de 2.a ordem  $f_{yx}$  não é uma função contínua no ponto  $(0, 0)$  e que

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= 1 \neq \\ 0 &= f_{yx}(0, 0). \end{aligned}$$

## Capítulo 9

# Regra da cadeia e vetor gradiente para funções a valores reais, de várias variáveis reais

### 9.1 Regra da cadeia para funções a valores reais, de várias variáveis reais

Sejam  $A$  um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva parametrizada dada por

$$\gamma(t) \doteq (x(t), y(t)), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (9.1)$$

de modo que  $\gamma(t) \in A$ , para cada  $t \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  (veja a figura abaixo).

Queremos mostrar que se as funções  $f$  e  $\gamma$  são diferenciáveis em  $\vec{x}_0 \doteq \gamma(t_0)$  e  $t_0 \in I$ , respectivamente, então a função composta

$$\begin{aligned} F(t) &\doteq f[\gamma(t)] \\ &= f[(x(t), y(t))], \quad \text{para cada } t \in I, \end{aligned} \quad (9.2)$$

também será diferenciável em  $t_0$ .

Além disso, queremos obter uma expressão para a derivada  $F'(t_0)$ , isto é, para a derivada da função composta  $F = f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ , em termos das derivadas parciais de 1.ª ordem da função  $f$  no ponto  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$  e do vetor tangente à curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  em  $t_0$ , ou seja, do vetor  $\gamma'(t_0)$ .

No caso abaixo podemos agir diretamente, isto é:

**Exemplo 9.1.1** Consideremos a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

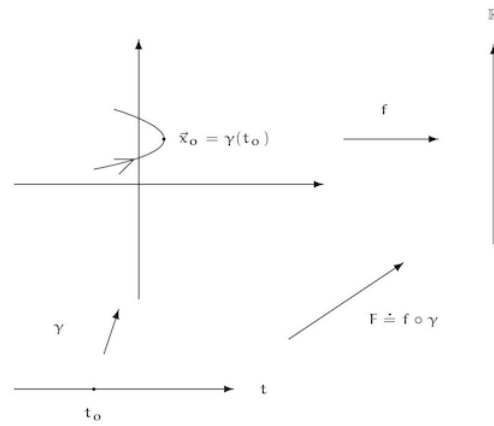
$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (9.3)$$

e a curva parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma(t) \doteq (\sin(t), \cos(t)), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (9.4)$$

Represente geometricamente o traço da curva parametrizada dada e calcule  $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , onde existir.

Resolução:



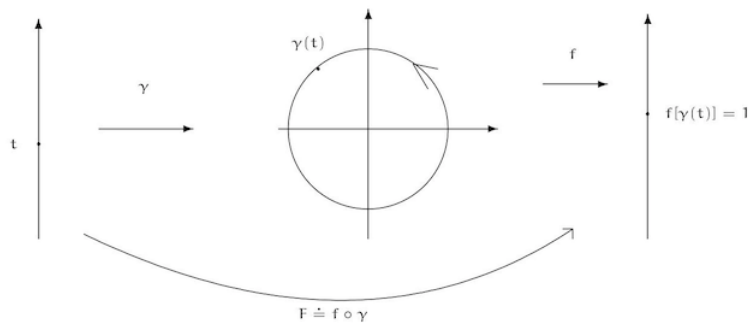
Neste caso temos que

$$\begin{aligned}
 (f \circ \gamma)(t) &= f[\gamma(t)] \\
 &\stackrel{(9.4)}{=} f[(\text{sen}(t), \text{cos}(t))] \\
 &\stackrel{(9.3)}{=} [\text{sen}(t)]^2 + [\text{cos}(t)]^2 \\
 &= 1, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Logo, a função  $F \doteq f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , será dada por

$$\begin{aligned}
 F(t) &\doteq f[\gamma(t)] \\
 &= 1, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

isto é, será a função constante igual a 1, em  $\mathbb{R}$  (veja a figura abaixo).



Logo a função  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} f[\gamma(t)] &= F'(t) \\
 &\stackrel{(9.5)}{=} 0, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &\stackrel{(9.3)}{=} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) \\ &= 2x, \end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &\stackrel{(9.3)}{=} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \\ &= 2y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} f[\gamma(t)], \frac{\partial}{\partial y} f[\gamma(t)] \right) &= \left( \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} f[(x(t), y(t))]}^{(9.7) 2x(t)}, \overbrace{\frac{\partial}{\partial y} f[(x(t), y(t))]}^{(9.7) 2y(t)} \right) \\ &= \left( 2 \underbrace{x(t)}_{(9.4) \text{ sen}(t)}, 2 \underbrace{y(t)}_{(9.4) \text{ cos}(t)} \right) \\ &= (2 \text{ sen}(t), 2 \text{ cos}(t)), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Além disso,

$$\gamma'(t) \stackrel{(9.4)}{=} (\text{cos}(t), -\text{sen}(t)), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \tag{9.10}$$

Portanto, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , de (9.9) e (9.10), segue que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} f[\gamma(t)], \frac{\partial}{\partial y} f[\gamma(t)] \right) \bullet \gamma'(t) &= (2 \text{ sen}(t), 2 \text{ cos}(t)) \bullet (\text{cos}(t), -\text{sen}(t)) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{9.11}$$

ou seja, neste exemplo temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f[\gamma(t)] &= F'(t) \\ &\stackrel{(9.6)}{=} 0 \\ &\stackrel{(9.11)}{=} \left( \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)], \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t)] \right) \bullet \gamma'(t), \end{aligned}$$

completando a resolução. □

Isto vale em geral, como nos afirma o seguinte resultado:

**Teorema 9.1.1 (da regra da cadeia)** *Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, em  $\mathbb{R}^2$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  função e  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva parametrizada, de modo que  $\gamma(t) \in A$ , para cada  $t \in I$ .*

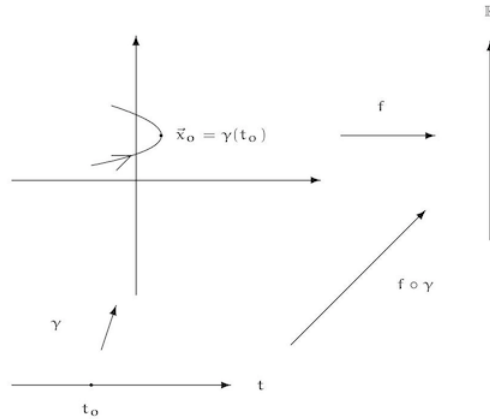
*Suponhamos a curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  seja diferenciável em  $t_0$  e a função  $f$  seja diferenciável em  $\vec{x}_0 \doteq \gamma(t_0)$  (para este conceito veja o Apêndice H).*

*Então (veja a figura abaixo) a função  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$F(t) \doteq [f \circ \gamma](t), \quad \text{para cada } t \in I, \tag{9.12}$$

será diferenciável em  $t_0$  e, além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0) &= F'(t_0) \\ &= (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{y}_0)) \bullet \gamma'(t_0) \\ \vec{x}_0 &\doteq \underline{\gamma}(t_0) \left( \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t_0)], \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t_0)] \right) \bullet \gamma'(t_0). \end{aligned} \quad (9.13)$$



### Demonstração:

Para esta demonstração precisaremos dos conceitos tratados no Apêndice H.

Sejam

$$\begin{aligned} \vec{x} &\doteq (x, y) \in A, \\ \vec{x}_0 &\doteq (x_0, y_0), \\ \mathbf{h} &\doteq \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \\ \text{e } \mathbf{k} &\doteq \mathbf{y} - \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

Com isto teremos que

$$(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \vec{x} - \vec{x}_0.$$

Como o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $\vec{x}_0 \in A$ , segue que podemos encontrar  $\delta > 0$ , de modo que

$$B \doteq B_\delta(\vec{x}_0) \subseteq A.$$

Como a função  $f$  é diferenciável em  $\vec{x}_0 = \gamma(t_0)$ , temos que

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) &\stackrel{\text{(H.31)}}{=} f_x(\vec{x}_0) \mathbf{h} + f_y(\vec{x}_0) \mathbf{k} + E(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \\ &= (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{x}_0)) \bullet (\mathbf{h}, \mathbf{k}) + E(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \\ &\stackrel{(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \vec{x} - \vec{x}_0}{=} (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{x}_0)) \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) + E(\vec{x} - \vec{x}_0) \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\text{onde } \lim_{(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \rightarrow (0,0)} \frac{E(\mathbf{h}, \mathbf{k})}{\|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|} = 0,$$

$$\text{ou, equivalentemente, } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{E(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0. \quad (9.15)$$



Definamos a função  $H : B \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$H(\vec{x}) \doteq \begin{cases} \frac{E(\vec{x})}{\|\vec{x}\|}, & \text{para } \vec{x} \in A \setminus \{\vec{x}_0\} \\ 0, & \text{para } \vec{x} = \vec{O} \end{cases}. \quad (9.16)$$

Logo, (9.15) é equivalente a

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{O}} H(\vec{x}) &= 0 \\ &= H(\vec{O}), \end{aligned} \quad (9.17)$$

ou seja, pela Definição 7.2.1, temos que a função  $H$  é uma função contínua em  $\vec{O}$ .

Com isto, para  $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ , teremos que

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) &\stackrel{(9.14)}{=} (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{x}_0)) \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) + E(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &\stackrel{\vec{x} \neq \vec{x}_0}{=} (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{x}_0)) \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) + E(\vec{x} - \vec{x}_0) \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \\ &= (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{x}_0)) \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{E(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \\ &\stackrel{\vec{x} \neq \vec{x}_0}{=} \stackrel{(9.16)}{=} (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{x}_0)) \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) + H(\vec{x} - \vec{x}_0) \|\vec{x} - \vec{x}_0\|. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Na expressão (9.18) acima, substituindo o vetor  $\vec{x}$  pelo vetor  $\gamma(t)$ , o vetor  $\vec{x}_0$  pelo vetor  $\gamma(t_0)$  e dividindo o resultado por  $t - t_0$ , para  $t > t_0$ , com  $t \in I$ , obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{f[\gamma(t)] - f[\gamma(t_0)]}{t - t_0} &= (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{x}_0)) \bullet \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + H[\gamma(t) - \gamma(t_0)] \underbrace{\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}}_{\substack{t \geq t_0 \\ \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\|}} \\ &= (f_x(\vec{x}_0), f_y(\vec{x}_0)) \bullet \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + H[\gamma(t) - \gamma(t_0)] \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\|. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Notemos que se passarmos o limite na expressão acima, quando

$$t \rightarrow t_0^+,$$

teremos:

- como a função vetorial  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é contínua em  $t_0$ , segue que

$$\gamma(t) \rightarrow \gamma(t_0).$$

- como consequência do item acima teremos que

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \rightarrow 0,$$

assim, de (9.17), segue que

$$H[\gamma(t) - \gamma(t_0)] \rightarrow 0.$$

- além disso, temos que

$$\left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\| \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow t_0^+$ , pois a curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é diferenciável em  $t_0$ .

Assim, das considerações acima, teremos:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ H[\gamma(t) - \gamma(t_0)] \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} \right\} = 0. \quad (9.20)$$

Portanto ao passarmos o limite na expressão (9.19), quando  $t \rightarrow t_0^+$ , obteremos:

$$\begin{aligned} F_+'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f[\gamma(t)] - f[\gamma(t_0)]}{t - t_0} \\ &\stackrel{(9.19) \text{ e } (9.20)}{=} (f_x(\bar{x}_0), f_y(\bar{x}_0)) \bullet \lim_{t \rightarrow t_0^+} \left[ \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right] \\ &= (f_x(\bar{x}_0), f_y(\bar{x}_0)) \bullet \gamma'(t_0), \end{aligned}$$

o que mostra que (visto na disciplina de Cálculo 1) a função  $F = (f \circ \gamma)$  é diferenciável à direita de  $t_0$  e que vale a identidade (9.13), para a derivada à direita da função  $F$  no ponto  $t_0$ .

De modo análogo, pode-se mostrar que a função  $F = (f \circ \gamma)$  é diferenciável à esquerda de  $t_0$  e que vale a identidade (9.13), para a derivada à esquerda da função  $F$  no ponto  $t_0$ .

Assim, a derivada à direita e à esquerda da função  $F$  existem, são iguais a (9.13), no ponto  $t_0$ , ou seja, a a função  $F = (f \circ \gamma)$  é diferenciável no ponto  $t_0$  e que vale a identidade (9.13), completando a demonstração do resultado. □

### Observação 9.1.1

1. Se a curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é dada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{para cada } t \in I \quad (9.21)$$

é uma curva parametrizada diferenciável em  $t_0$  e

$$\gamma(t_0) = (x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \gamma'(t_0) = \left( \frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0) \right),$$

podemos reescrever (9.13), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0) &= \frac{dF}{dt}(t_0) \\ &\stackrel{(9.13)}{=} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \bullet \left( \frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{dy}{dt}(t_0), \end{aligned} \quad (9.22)$$

ou, omitindo os pontos  $(x_0, y_0)$  e  $t_0$  em questão, poderemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} &= \frac{dF}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \end{aligned} \quad (9.23)$$

onde a função  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$F(t) \doteq f[x(t), y(t)], \quad \text{para cada } t \in I. \quad (9.24)$$

2. Podemos provar um resultado análogo ao Teorema 9.1.1 para funções a valores reais, de  $n$  variáveis reais e curvas parametrizadas diferenciáveis em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, para a função  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e a curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , satisfazendo condições análogas às do Teorema 9.1.1.

Deixaremos como exercício para o leitor o enunciado e a demonstração do mesmo.

3. Observemos que, na situação do item 2. acima, se a função  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$F(t) \doteq (f \circ \gamma)(t), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (9.25)$$

temos que a expressão (9.13) tornar-se-á:

$$F'(t_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}[\gamma(t_0)], \frac{\partial f}{\partial x_2}[\gamma(t_0)], \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}[\gamma(t_0)] \right) \bullet \gamma'(t_0),$$

ou, de uma outra forma:

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \frac{dx_i}{dt}(t_0), \quad (9.26)$$

onde a curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por

$$\gamma(t) \doteq (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (9.27)$$

satisfazendo:  $\vec{x}_0 = \gamma(t_0)$ .

Ou, de forma resumida, escreveremos:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}, \quad (9.28)$$

onde a função  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$F(t) \doteq f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad \text{para cada } t \in I. \quad (9.29)$$

4. Podemos provar um resultado análogo ao Teorema 9.1.1 para funções a valores vetoriais, de  $n$  variáveis reais e curvas parametrizadas em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, para uma função

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

e uma curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfazendo condições análogas às do Teorema 9.1.1.

Deixaremos como exercício para o leitor o enunciado e a demonstração do mesmo.

Observemos que a função  $F: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  será dada por

$$F(t) \doteq (f \circ \gamma)(t) \\ = ((f_1 \circ \gamma)(t), (f_2 \circ \gamma)(t), \dots, (f_m \circ \gamma)(t)), \quad \text{para cada } t \in I. \quad (9.30)$$

Neste caso, temos que

$$F'(t_0) = \left( \frac{d(f_1 \circ \gamma)}{dt}(t_0), \frac{d(f_2 \circ \gamma)}{dt}(t_0), \dots, \frac{d(f_m \circ \gamma)}{dt}(t_0) \right), \quad (9.31)$$

onde, aplicando (9.13), a cada uma das componentes da função  $F'(t_0)$ , obteremos:

$$F'(t_0) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \frac{dx_i}{dt}(t_0), \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \frac{dx_i}{dt}(t_0)}_{j\text{-ésima posição}}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \frac{dx_i}{dt}(t_0) \right), \quad (9.32)$$

onde a curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é dada por

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\doteq (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad \text{para cada } t \in I, \\ \text{satisfazendo: } \vec{x}_0 &= \gamma(t_0). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Ou de forma resumida:

$$\frac{dF}{dt} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}}_{j\text{-ésima posição}}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right), \quad (9.34)$$

onde a função  $F: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dada por

$$F(t) \doteq (f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_m(x_1(t), \dots, x_n(t))), \quad \text{para cada } t \in I. \quad (9.35)$$

5. Podemos obter um resultado análogo para o seguinte caso:

Sejam  $A$  e  $B$  abertos, não vazios, de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente, (veja a figura abaixo).

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

são funções tais que a função  $g$  seja diferenciável em

$$\vec{t}_0 \in B$$

(no sentido da Observação H.3.5),

$$g(\vec{t}_0) = \vec{x}_0 \in A$$

e a função  $f$  ser diferenciável em

$$\vec{x}_0 \in A.$$

Neste caso a função  $F: B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(\vec{t}) \doteq (f \circ g)(\vec{t}), \quad \text{para cada } \vec{t} \in B, \quad (9.36)$$

será diferenciável em  $\vec{t}_0$  e, além disso, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , teremos:

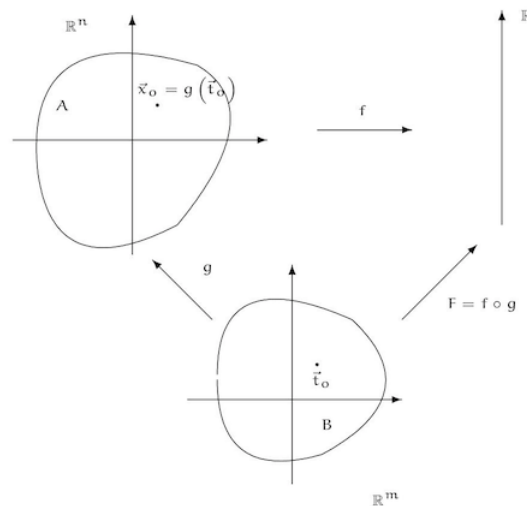
$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\vec{t}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \frac{dx_i}{dt_j}(\vec{t}_0), \quad (9.37)$$

onde a função  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por

$$F(\vec{t}) = (x_1(t_1, t_2, \dots, t_m), x_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_m)), \quad (9.38)$$

para cada

$$\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in B.$$



Consideremos os:

**Exemplo 9.1.2** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (9.39)$$

e a curva parametrizada  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma(t) \doteq (e^{t^2}, 2t + 1), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (9.40)$$

Verifique que a função  $F \doteq f \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e calcule  $\frac{dF}{dt}(t)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

### Resolução:

Observemos que a função  $f$ , dada por (9.39), é diferenciável em todo o  $\mathbb{R}^2$  (pois é uma função polinomial) e  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é curva parametrizada diferenciável em  $\mathbb{R}$  (pois suas funções coordenadas são funções diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ ).

Deixaremos a verificação das afirmações como exercício para o leitor.

Logo, do Teorema 9.1.1, segue que a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(t) \doteq (f \circ \gamma)(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (9.41)$$

será diferenciável em  $\mathbb{R}$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &\stackrel{(9.39)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [x^2 y] \\ &\stackrel{(9.39)}{=} 2xy, \end{aligned} \quad (9.42)$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &\stackrel{(9.39)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [x^2 y] \\ &\stackrel{(9.39)}{=} x^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Além disso, se

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= (e^{t^2}, 2t + 1), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{9.44}$$

teremos:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (x'(t), y'(t)) \\ &\stackrel{(9.44)}{=} (2te^{t^2}, 2), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{9.45}$$

Logo, da regra da cadeia (isto é, do Teorema 9.13), segue que:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(t) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)], \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t)] \right) \bullet \gamma'(t) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}[x(t), y(t)], \frac{\partial f}{\partial y}[x(t), y(t)] \right) \bullet (x'(t), y'(t)) \\ &\stackrel{(9.43)}{=} \stackrel{(9.45)}{=} (2x(t)y(t), [x(t)]^2) \bullet (2te^{t^2}, 2) \\ &\stackrel{x(t)=e^{t^2}, y(t)=2t+1}{=} (2e^{t^2}(2t+1), e^{2t^2}) \bullet (2te^{t^2}, 2) \\ &= 2e^{2t^2}(4t^2 + 2t + 2), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

completando a resolução. □

Temos resolvido o:

**Exercício 9.1.1** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 - y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2\tag{9.46}$$

e a curva parametrizada  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (x(t), y(t)) \\ &\doteq (t, t^3), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{9.47}$$

Mostre que a função  $F \doteq (f \circ \gamma): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\underline{\mathbb{R}}$  e calcule  $\frac{dF}{dt}(t)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Como as funções  $f$  e  $\gamma$  são diferenciáveis em  $\underline{\mathbb{R}^2}$  e  $\underline{\mathbb{R}}$ .

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Temos também que:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &\stackrel{(9.46)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [x^2 - y^2] \\ &\stackrel{(9.46)}{=} 2x,\end{aligned}\tag{9.48}$$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &\stackrel{(9.46)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [x^2 - y^2] \\ &\stackrel{(9.46)}{=} -2y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}\tag{9.49}$$

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (x'(t), y'(t)) \\ &\stackrel{(9.47)}{=} (1, 3t^2), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{9.50}$$

temos, pelo Teorema 9.1.1, que a função  $F = (f \circ \gamma)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ .

Além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(t) &\stackrel{(9.13)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}[(x(t), y(t))] \overbrace{\frac{dx}{dt}(t)}^{(9.50)_1} + \frac{\partial f}{\partial y}[(x(t), y(t))] \overbrace{\frac{dy}{dt}(t)}^{(9.50)_3 t^2} \\ &\stackrel{(9.47)}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t, t^3)}_{(9.49)_{2t}} \cdot 1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t, t^3)}_{(9.50)_{-2t^3}} \cdot 3t^2 \\ &= 2t - 6t^5, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

completando a resolução.

□

**Observação 9.1.2** *Seja  $A$  um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$  e  $(x_0, y_0) \in A$ . Suponhamos que a função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  seja diferenciável em*

$$\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$$

e que a função  $y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja diferenciável em

$$x_0 \in I,$$

de modo que  $(x, y(x)) \in A$ , para cada  $x \in I$ , com

$$y(x_0) = y_0.$$

Deste modo se considerarmos a curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma(x) \doteq (x, y(x)), \quad \text{para cada } x \in I, \quad (9.51)$$

temos que a curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  será diferenciável em  $x_0$  e  $\gamma(I) \subseteq A$ .

Logo, do Teorema 9.1.1, segue que a função  $F = (f \circ \gamma): I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

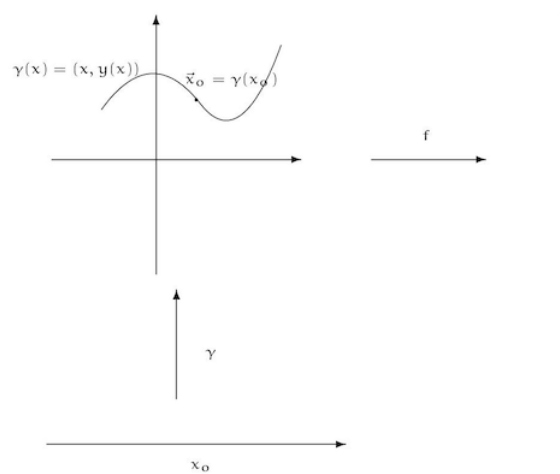
$$\begin{aligned} F(x) &\doteq (f \circ \gamma)(x) \\ &= f(x, y(x)), \quad \text{para cada } x \in I, \end{aligned} \quad (9.52)$$

será diferenciável em  $x_0$ .

Além disso, da Regra da Cadeia, teremos

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x_0) &\stackrel{(9.52)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(x_0)] \frac{dx}{dx}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(x_0)] \frac{dy}{dx}(x_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{dy}{dx}(x_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y'(x_0). \end{aligned} \quad (9.53)$$

Notemos que, na situação acima, o traço da curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  coincide com o gráfico de uma função da variável  $x$ , a saber, será o gráfico da função  $y = y(x)$ , para cada  $x \in I$  (veja a figura abaixo).



## 9.2 Vetor gradiente

**Definição 9.2.1** Sejam  $\underline{A}$  um subconjunto aberto, não vazio, em  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  e

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

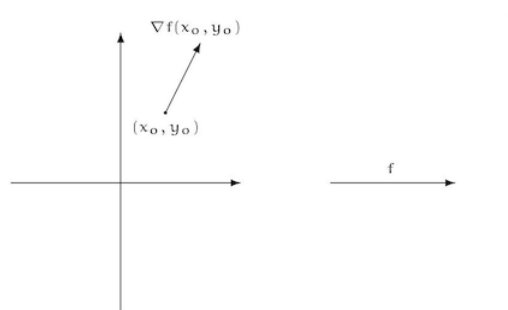
uma função que tem derivadas parciais no ponto  $(x_0, y_0)$ .

Definimos o vetor gradiente da função  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ , indicado por  $\nabla f(x_0, y_0)$ , como sendo o vetor

$$\nabla f(x_0, y_0) \doteq (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)). \quad (9.54)$$

### Observação 9.2.1

1. Geometricamente, o vetor gradiente da função  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é visto como um vetor associado ao ponto  $(x_0, y_0)$  (veja a figura figura abaixo).



2. Podemos definir, de modo análogo, o vetor gradiente no ponto  $\vec{x}_0 \in A$  para uma função  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que tenha todas as derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $\vec{x}_0 \in A$ , onde o conjunto  $\underline{A}$  é um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ .

Neste caso definiremos vetor gradiente da função  $f$  no ponto  $\vec{x}_0$ , indicado por  $\nabla f(\vec{x}_0)$ ,



como sendo o vetor de  $\mathbb{R}^n$  dado por:

$$\begin{aligned}\nabla f(\vec{x}_0) &\doteq \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \cdot \vec{e}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \cdot \vec{e}_n.\end{aligned}\quad (9.55)$$

Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo 9.2.1** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função, dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (9.56)$$

Calcule, se existir,  $\nabla f(1, 1)$  e represente-o geometricamente.

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$  (pois é uma função polinomial).

Como

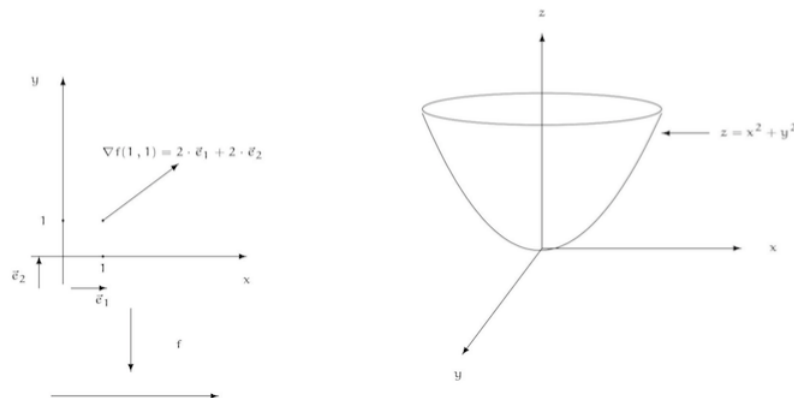
$$\begin{aligned}f_x(x, y) &\stackrel{(9.56)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [x^2 + y^2] \\ &= 2x,\end{aligned}\quad (9.57)$$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &\stackrel{(9.56)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [x^2 + y^2] \\ &\stackrel{(9.56)}{=} 2y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}\quad (9.58)$$

temos que

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 1) &= (f_x(1, 1), f_y(1, 1)) \\ &\stackrel{(9.57)}{=} (2, 2) \\ &= 2 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2.\end{aligned}$$

A figura abaixo à esquerda, nos dá uma representação geométrica do vetor  $\nabla f(1, 1)$ .



A representação geométrica do gráfico da função  $f$  é o parabolóide de revolução, obtido da rotação da parábola  $z = y^2$  do plano  $yOz$  em torno do eixo do  $Oz$  (veja a figura acima, à direita), completando a resolução. □

Para o entendimento da observação a seguir é necessário ver o Apêndice H.

## Observação 9.2.2

1. Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$  e suponhamos que a função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $(x_0, y_0)$  (veja o item 1. da Observação H.2.1, isto é, (H.11)).

Sabemos que

$$f_x(x_0, y_0) \stackrel{(8.4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (9.59)$$

$$f_y(x_0, y_0) \stackrel{(8.8)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \quad (9.60)$$

assim teremos:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &\stackrel{(H.31)}{=} f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + E(h, k) \\ &= f(x_0, y_0) + (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \bullet (h, k) + E(h, k) \\ &\stackrel{(9.55)}{=} f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \bullet (h, k) + E(h, k), \end{aligned} \quad (9.61)$$

$$\text{onde} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Tomando-se

$$\vec{x} \doteq (x, y), \quad \vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0), \quad h \doteq x - x_0 \quad k \doteq y - y_0 \quad e \quad \vec{X} \doteq \vec{x} - \vec{x}_0,$$

então, a expressão (9.61) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \bullet \vec{X} + E(\vec{X}), \\ \text{onde,} \quad \lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{0}} \frac{E(\vec{X})}{\|\vec{X}\|} &= 0. \end{aligned}$$

2. Vimos, na disciplina de Cálculo 1, que se a função  $f$  é diferenciável em  $x_0 \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , então considerando-se

$$\begin{aligned} h &\doteq x - x_0, \\ \text{teremos:} \quad f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)h + E(h) \\ \text{onde} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{|h|} &= 0 \end{aligned}$$

e  $f'(x_0)$  é denominada derivada primeira da função  $f$  no ponto  $x_0$ .

Logo, para funções  $f$  a valores reais, de duas variáveis, se ela for uma função diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , nada mais natural que definir a derivada primeira da função  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ , que indicaremos por  $f'(x_0, y_0)$ , como sendo

$$f'(x_0, y_0) \doteq \nabla f(x_0, y_0). \quad (9.62)$$

3. De modo semelhante se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\vec{x}_0 \in A$ , onde o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , para cada  $\vec{x} \in A$ , teremos:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) + E(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &\stackrel{\vec{x} \doteq \vec{x} - \vec{x}_0}{=} f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \bullet \vec{X} + E(\vec{X}) \end{aligned} \quad (9.63)$$

$$\text{onde} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow 0} \frac{E(\vec{X})}{\|\vec{X}\|} = 0.$$

Como no item 2., definimos a derivada primeira da função  $f$  no ponto  $\vec{x}_0$ , que será indicada por  $f'(\vec{x}_0)$ , como sendo:

$$f'(\vec{x}_0) \doteq \nabla f(\vec{x}_0). \quad (9.64)$$

4. Se a função  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável no ponto  $\vec{x}_0 \in A$ , onde  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , como poderíamos definir a derivada da função  $f$  no ponto  $\vec{x}_0$  ?

A resposta a esta questão será dada mais adiante.

Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo 9.2.2** Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x, y, z) \doteq \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2), \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (9.65)$$

Mostre que a função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^3$  e encontre o vetor gradiente  $\nabla f(x, y, z)$ , para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Resolução:**

A função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ , pois é uma função polinomial em  $\mathbb{R}^3$ .

Além disso, para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &\stackrel{(9.65)}{=} \frac{\partial f}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} 2x \\ &= x, \end{aligned} \quad (9.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &\stackrel{(9.65)}{=} \frac{\partial f}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} 2y \\ &= y, \end{aligned} \quad (9.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &\stackrel{(9.65)}{=} \frac{\partial f}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} 2z \\ &= z. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Logo, para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , segue que:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &\stackrel{(9.55)}{=} f_x(x, y, z) \cdot \vec{e}_1 + f_y(x, y, z) \cdot \vec{e}_2 + f_z(x, y, z) \cdot \vec{e}_3 \\ &\stackrel{(9.66), (9.67) \text{ e } (9.68)}{=} x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\nabla f(x, y, z) = (x, y, z), \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Temos também o:

**Exemplo 9.2.3** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 - y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (9.69)$$

Mostre que a função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e encontre o vetor gradiente  $\nabla f(x, y)$ , para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Resolução:**

A função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  pois é uma função polinomial em  $\mathbb{R}^2$ .

Além disso, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &\stackrel{(9.69)}{=} \frac{\partial f}{\partial x} [x^2 - y^2] \\ &= 2x, \end{aligned} \quad (9.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &\stackrel{(9.69)}{=} \frac{\partial f}{\partial y} [x^2 - y^2] \\ &= -2y. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Logo, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , segue que

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &\stackrel{(9.55)}{=} f_x(x, y) \cdot \vec{e}_1 + f_y(x, y) \cdot \vec{e}_2 \\ &\stackrel{(9.70), (9.71)}{=} 2x \cdot \vec{e}_1 - 2y \cdot \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (9.72)$$

□

**Observação 9.2.3** Notemos que, no Exemplo 9.2.3 temos, em particular, o vetor

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 0) &\stackrel{(9.72), \text{ com } x \doteq 1 \text{ e } y \doteq 0}{=} 2 \cdot \vec{e}_1 \\ &= (2, 0) \end{aligned} \quad (9.73)$$

é ortogonal à curva de nível da função  $f$  que passa pelo ponto  $(1, 0)$ , isto é, é ortogonal a curva

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = f(1, 0) \stackrel{(9.69), \text{ com } x \doteq 1 \text{ e } y \doteq 0}{=} 1 \right\} \stackrel{(9.69)}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

De fato, uma parametrização da curva de nível acima pode ser dada por  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde

$$\gamma(t) \doteq \left( \sqrt{1+t^2}, t \right), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (9.74)$$

Logo,  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva parametrizada diferenciável e o vetor tangente à mesma em  $\underline{t}$  será dada por:

$$\gamma'(t) \stackrel{(9.74)}{=} \left( \frac{1}{2} \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}, 1 \right), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (9.75)$$

Em particular, o vetor tangente à curva parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  em  $\underline{t=0}$ , que corresponde ao ponto

$$\begin{aligned} \gamma(0) &\stackrel{(9.74)}{=} \stackrel{\text{com } t=0}{=} (1, 0), \\ \text{será o vetor: } \gamma'(0) &\stackrel{(9.75)}{=} \stackrel{\text{com } t=0}{=} (0, 1). \end{aligned} \quad (9.76)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 0) \bullet \gamma'(0) &\stackrel{(9.73)}{=} \stackrel{(9.76)}{=} (2, 0) \bullet (0, 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

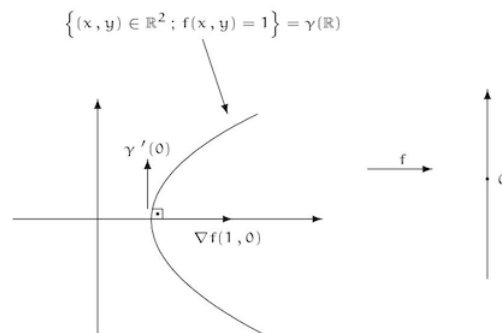
mostrando que estes vetores são ortogonais.

Notemos que o ponto

$$\gamma(0) = (1, 0)$$

é um ponto da curva de nível  $\underline{c=1}$ , associada a função  $\underline{f}$ .

Na figura abaixo, temos a representação geométrica da curva de nível acima bem como os vetores  $\underline{\gamma'(0)}$  e  $\underline{\nabla f(1, 0)}$ .



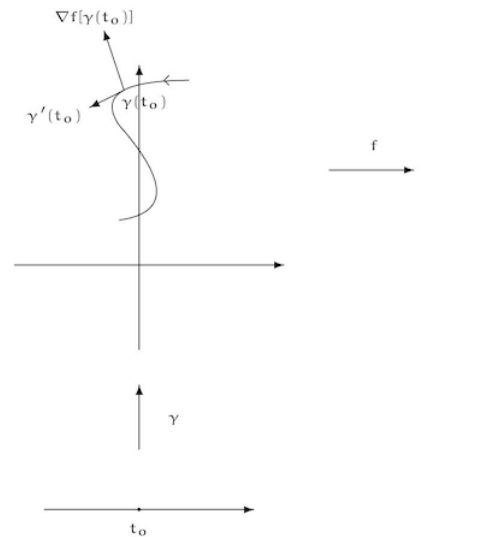
O que ocorreu no Exemplo 9.2.3, ou ainda, na Observação 9.2.3 acima, é um fato geral que é uma consequência da:

**Proposição 9.2.1** Seja  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $(x_0, y_0) \in A$  (para detalhes deste conceito, ver Apêndice H), onde  $A$  é um subconjunto aberto, não vazio, de  $\underline{\mathbb{R}^2}$  e

$$\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0). \quad (9.77)$$

Então o vetor gradiente  $\underline{\nabla f(x_0, y_0)}$  é um vetor normal (ou ortogonal) à curva de nível da função  $\underline{f}$  que contém o ponto  $\underline{(x_0, y_0)}$ , ou seja, se a curva de nível acima possuir uma parametrização regular dada por  $\gamma : I \doteq (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de modo que

$$\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$$



(veja a figura abaixo), teremos

$$\nabla f[\gamma(t_0)] \bullet \gamma'(t_0) = 0. \quad (9.78)$$

### Demonstração:

Observemos que, será mostrado mais a frente, que com as hipóteses acima (a saber, que (9.77)), teremos que a curva de nível

$$c = f(x_0, y_0),$$

que contém o ponto  $(x_0, y_0)$ , pode ser obtida como o traço de uma curva parametrizada regular

$$\begin{aligned} \gamma : I \doteq (t_0 - \delta, t_0 + \delta) &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \text{com } \gamma(t_0) &= (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Supondo que isto seja verdade, como a curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é curva regular, segue que deverá ser diferenciável no intervalo aberto  $I$  e além disso, se

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x(t), y(t)), \quad \text{para cada } t \in I, \\ \text{teremos } \gamma'(t) &= (x'(t), y'(t)) \neq \vec{0}, \quad \text{para cada } t \in I. \end{aligned}$$

Como a curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva de nível associada à função  $f$ , deveremos ter

$$f[\gamma(t)] = f[\gamma(t_0)], \quad \text{para cada } t \in I \quad (\text{isto é, deverá ser a função constante}). \quad (9.79)$$

Como a função  $f$  tem derivadas parciais de 1.a ordem e  $\underline{\gamma}$  são diferenciáveis em  $(x_0, y_0)$  e  $t_0$ , respectivamente, segue que a função  $F \doteq (f \circ \gamma) : I \rightarrow \mathbb{R}$ , será diferenciável em  $t_0$ .

Derivando a equação (9.79), em relação a  $t$ , no ponto  $t = t_0$  obteremos, pela regra da cadeia (ou

seja, o Teorema 9.1.1), que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d[f \circ \gamma]}{dt}(t_0) \\ &\stackrel{(f \circ \gamma)(t) = f(x(t), y(t))}{=} f_x[\gamma(t_0)] \frac{dx}{dt}(t_0) + f_y[\gamma(t_0)] \frac{dy}{dt}(t_0) \\ &= (f_x[\gamma(t_0)], f_y[\gamma(t_0)]) \bullet \left( \frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0) \right) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \bullet \gamma'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$ , será um vetor ortogonal à curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  no instante  $t = t_0$ , isto é, à curva de nível da função  $f$  que contém o ponto  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ , como queríamos demonstrar. □

**Observação 9.2.4** Vale um resultado análogo para funções a valores reais, de várias variáveis reais.

*Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-lo e demonstrá-lo.*

**Exemplo 9.2.4** Encontrar uma equação vetorial (ou uma equação geral, pois a reta está no plano  $xOy$ ) da reta normal à curva que é a representação geométrica do gráfico da função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ &\doteq x + \text{sen}(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{9.80}$$

que contém o ponto

$$\vec{x}_0 \doteq \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1 \right).$$

**Resolução:**

Para isto, definamos a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq x + \text{sen}(x) - y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{9.81}$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &\stackrel{(9.81)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [x + \text{sen}(x) - y] \\ &= 1 + \cos(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{9.82}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &\stackrel{(9.81)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [x + \text{sen}(x) - y] \\ &= -1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{9.83}$$

Observemos que a função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Notemos também que a curva de nível zero, associada à função  $f$ , é a curva dada pela representação geométrica do gráfico da função  $g$ .

De fato, pois

$$\begin{aligned}
 & \text{curva de nível zero associada à função } f \\
 & \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = 0 \right\} \stackrel{(9.81)}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + \text{sen}(x) - y = 0 \right\} \\
 & = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = \underbrace{x + \text{sen}(x)}_{\stackrel{(9.80)}{=} g(x)}} \right\} \\
 & = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = g(x) \right\} \\
 & = \underbrace{\left\{ (x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{gráfico da função } g} \tag{9.84}
 \end{aligned}$$

Observemos também que a curva acima, dada por (9.84), pode ser obtida como o traço da função vetorial  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned}
 \gamma(t) &= (x(t), y(t)) \\
 &\doteq (t, t + \text{sen}(t)), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \tag{9.85}
 \end{aligned}$$

que será uma curva parametrizada regular.

De fato, pois é de classe  $\underline{C}^\infty$  em  $\mathbb{R}$  e, além disso, teremos

$$\begin{aligned}
 \gamma'(t) &= (x'(t), y'(t)) \\
 &\stackrel{(9.82) \text{ e } (9.83)}{=} (1, 1 + \cos(t)) \\
 &\neq (0, 0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x, y) &\stackrel{(9.54)}{=} (f_x(x, y), f_y(x, y)) \\
 &\stackrel{(9.81)}{=} (1 + \cos(x), -1), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{9.86}
 \end{aligned}$$

Logo, da Proposição 9.2.1 acima, segue que o vetor

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right) \stackrel{(9.86)}{=} \text{com } x \doteq \frac{\pi}{2}, y \doteq \frac{\pi}{2} + 1 \quad (1, -1), \tag{9.87}$$

será um vetor normal à curva parametrizada regular  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , no instante  $t \doteq \frac{\pi}{2}$ .

Portanto uma equação vetorial da reta que é normal a representação geométrica do gráfico da função  $g$  (dada por (9.80)), no ponto

$$\vec{x}_0 \doteq \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right), \tag{9.88}$$

será dada por:

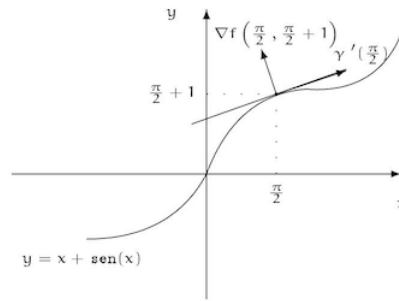
$$X = \vec{x}_0 + t \cdot \nabla f(\vec{x}_0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}$$

que, de (9.88) e (9.87), é equivalente à:

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right) + t \cdot (1, -1), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, temos a seguinte situação:





**Observação 9.2.5** Uma outra maneira de encontrar uma equação vetorial da reta normal acima é lembrando que, de (9.87), o vetor

$$\nabla f(\vec{x}_0) \stackrel{(9.87)}{=} (1, -1) \neq \vec{0}$$

é um vetor normal à curva em questão, no ponto  $\vec{x}_0$  dado.

Logo a equação geral da reta normal à curva dada, no ponto em questão, será (estamos no plano  $xOy$ ):

$$\begin{aligned} 1 \cdot y + (-1) \cdot x + d &= 0, \\ \text{ou seja, } y - x + d &= 0. \end{aligned} \quad (9.89)$$

Para encontrar o valor da constante  $d$  na equação (9.89) acima, basta lembrar que o ponto

$$\vec{x}_0 = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1 \right)$$

deverá pertencer à reta em questão, cuja equação geral é dada por (9.89).

Logo, substituindo as coordenadas do ponto  $\vec{x}_0$  na equação (9.89), deveremos ter:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) + d &= 0, \\ \text{o que implicará em: } d &= 1. \end{aligned} \quad (9.90)$$

Portanto, substituindo (9.90) em (9.89), teremos que uma equação geral (pois estamos no  $\mathbb{R}^2$ ) da reta normal à curva dada, no ponto  $\vec{x}_0$ , será dada por:

$$y - x + 1 = 0.$$

Podemos aplicar as mesmas ideias ao:

**Exemplo 9.2.5** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq xy + 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (9.91)$$

1. Represente, geometricamente, as curvas de nível zero, de nível  $\underline{1}$  e de nível  $\underline{2}$ , associadas a função  $\underline{f}$ , em alguns pontos de  $\mathbb{R}^2$ ;
2. Represente, geometricamente, alguns vetores gradientes da função  $\underline{f}$ ;

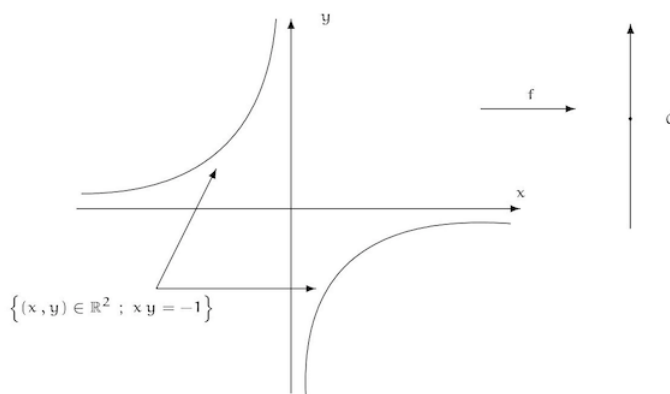
**Resolução:****De 1.:**

- Curva de nível zero, associada à função  $f$ :

Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = 0\} &\stackrel{(9.91)}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy + 1 = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = -1\}, \end{aligned}$$

ou seja, uma hipérbole no plano  $xOy$  (veja a figura abaixo).



- Curva de nível  $\underline{1}$ , associada à função  $f$ :

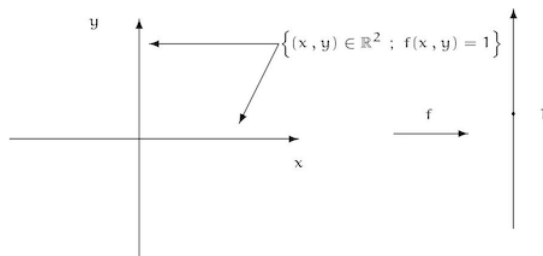
Neste caso temos

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = 1\} &\stackrel{(9.91)}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy + 1 = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 0\}, \end{aligned}$$

ou seja, as retas

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0,$$

ou ainda, os eixos coordenados do plano  $xOy$  (veja a figura abaixo).

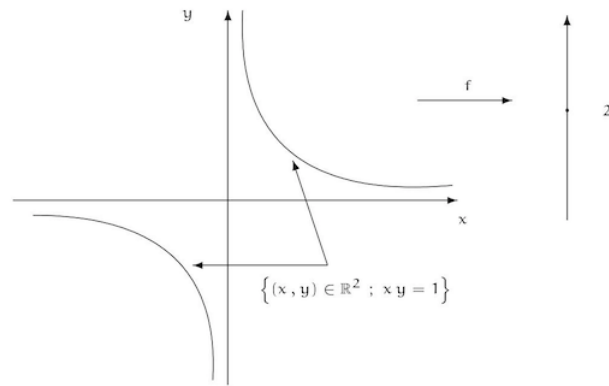


- Curva de nível  $\underline{2}$ , associada à função  $\underline{f}$ :

Neste caso temos

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = 2\} &\stackrel{(9.91)}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy + 1 = 2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 1\}, \end{aligned}$$

ou seja, uma hipérbole no plano  $xOy$  (veja a figura abaixo).



**De 2. :**

Sabemos que, em cada ponto  $(x, y)$  onde

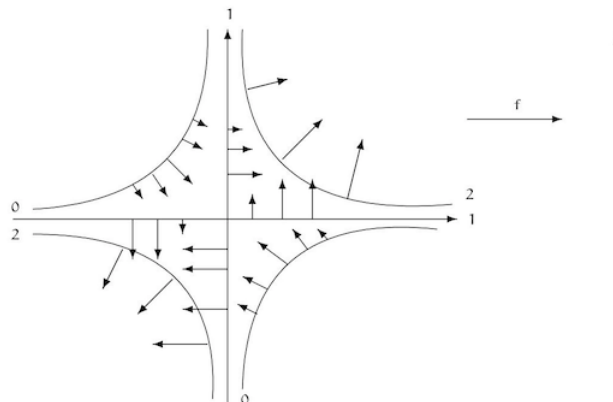
$$\nabla f(x, y) \neq \vec{0},$$

teremos o vetor gradiente  $\nabla f(x, y)$ , deverá ser normal à curva de nível associada à função  $\underline{f}$ , que contém o ponto  $(x, y)$ , no ponto  $(x, y)$ .

O único problema é saber o sentido que ele aponta ("para dentro" da curva de nível ou "para fora" da mesma).

Veremos mais a frente que eles devem apontar no sentido de "maior crescimento" da função  $\underline{f}$ .

Baseado nestas informações temos a seguinte figura associada à função  $\underline{f}$  e seus respectivos vetores gradientes:



□

### 9.3 Derivada direcional de funções a valores reais, de várias variáveis reais

A seguir introduziremos o conceito de derivada de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, em um ponto, na direção de um vetor, a saber:

**Definição 9.3.1** Consideremos  $A$  um subconjunto aberto, não vazio, do  $\mathbb{R}^n$ ,  $P_0 \in A$ ,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  um vetor unitário (isto é,  $\|\vec{v}\| = 1$ ).

Definimos a derivada direcional da função  $f$  no ponto  $P_0$ , na direção de  $\vec{v}$ , que será denotada por  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ , como sendo o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{v}) - f(P_0)}{t}, \quad (9.92)$$

quando este limite existir.

**Notação 9.3.1** Outras notações para a derivada direcional de  $f$  no ponto  $P_0$ , na direção (unitário) de  $\vec{v}$  são:

$$\partial_{\vec{v}} f(P_0), \quad \text{ou} \quad f_{\vec{v}}(P_0), \quad \text{ou} \quad D_{\vec{v}} f(P_0). \quad (9.93)$$

#### Observação 9.3.1

1. Se existir, podemos interpretar, geometricamente, a derivada direcional da função  $f$  no ponto  $P_0$ , na direção do vetor (unitário)  $\vec{v}$ , isto é, o número real  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ , como sendo o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função a valores reais, de uma variável real,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g(t) \doteq f(P_0 + t \cdot \vec{v}), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (9.94)$$

onde  $I$  é uma intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  contendo  $t = 0$ .

Logo,

$$\begin{aligned} f_{\vec{v}}(P_0) &\stackrel{(9.92)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{v}) - f(P_0)}{t} \\ &\stackrel{(9.94)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} g'(0), \\ \text{ou seja,} \quad &\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = g'(0). \end{aligned} \quad (9.95)$$

2. Consideremos a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto  $A$ , um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$  e os vetores unitários

$$\vec{e}_1 \doteq (1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{e}_2 \doteq (0, 1).$$

Calculemos as derivadas direcionais (caso existam)

$$f_{\vec{e}_1}(P_0) \quad \text{e} \quad f_{\vec{e}_2}(P_0).$$

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(P_0) &\stackrel{(9.92)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{e}_1) - f(P_0)}{t} \\ &\stackrel{P_0 + t \cdot \vec{e}_1 = (x_0 + t, y_0)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &\stackrel{(8.4)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (9.96)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}(P_0) &\stackrel{(9.92)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{e}_2) - f(P_0)}{t} \\ &\stackrel{P_0 + t \cdot \vec{e}_2 = (x_0, y_0 + t)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &\stackrel{(8.8)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (9.97)$$

**Conclusão:** a derivada direcional da função  $f$  no ponto  $P_0$ , na direção dos vetores unitários

$$\vec{e}_1 \quad \text{e} \quad \vec{e}_2,$$

serão as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$ , em relação a  $x$  e a  $y$ , no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , respectivamente.

3. Em geral, se  $A$  é um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P_0 \in A$ , e a função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $P_0$ , se considerarmos, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , os vetores unitários

$$\vec{e}_i \doteq (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0), \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (9.98)$$

A verificação desta afirmação será deixada como exercício para o leitor.

4. No caso  $n = 2$ , consideremos um vetor unitário

$$P_0 \doteq (x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (a, b) \quad (9.99)$$

e definamos a função  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq f(x_0 + at, y_0 + bt) \\ &\stackrel{(9.99)}{=} f(P_0 + t \cdot \vec{v}), \quad \text{para cada } t \in I \end{aligned} \quad (9.100)$$

e a curva parametrizada diferenciável  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\doteq (x_0 + at, y_0 + bt, g(t)) \\ &\stackrel{(9.99)}{=} (P_0 + t \cdot \vec{v}, g(t)), \quad \text{para cada } t \in I, \end{aligned} \quad (9.101)$$

onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ , contendo  $t = 0$ , considerado de modo que as expressões acima façam sentido.

Como

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (x_0 + at, y_0 + bt, g(t)) \\ &= (x_0, y_0, 0) + g(t) \cdot (0, 0, 1) + t \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0), \quad \text{para cada } t \in I,\end{aligned}$$

temos que o traço da curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  estará contido no plano  $\pi$ , que tem uma equação vetorial dada por:

$$\pi : X = (x_0, y_0, 0) + \lambda \cdot (0, 0, 1) + \beta \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0), \quad \text{para cada } \lambda, \beta \in \mathbb{R}. \quad (9.102)$$

Para verificar este fato, basta tomar os seguintes valores para os parâmetros do plano:

$$\lambda = g(t) \quad \text{e} \quad \beta = t.$$

Observemos que o plano  $\pi$  é um plano perpendicular ao plano  $xOy$ , pois o vetor

$$(0, 0, 1) \times (\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0),$$

é um vetor, diferente do vetor nulo, e normal ao plano  $\pi$  e é ortogonal ao vetor  $(0, 0, 1)$ , que é um vetor normal ao plano  $xOy$ .

Notemos que, o coeficiente angular da reta tangente a representação geométrica do gráfico da função  $g$ , no ponto  $(0, g(0))$ , será dado por:

$$\begin{aligned}g'(0) &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &\stackrel{(9.100)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[(x_0, y_0) + t \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})] - f(x_0, y_0)}{t} \\ &\stackrel{(9.99)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{v}) - f(P_0)}{t} \\ &\stackrel{(9.92)}{=} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0). \quad (9.103)\end{aligned}$$

Por outro lado, o vetor tangente à curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em  $t = 0$ , será dado por:

$$\begin{aligned}\gamma'(0) &\stackrel{(9.101)}{=} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, g'(0)) \\ &\stackrel{(9.103)}{=} \left( \mathbf{a}, \mathbf{b}, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) \right) \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0) + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) \cdot (0, 0, 1), \quad (9.104)\end{aligned}$$

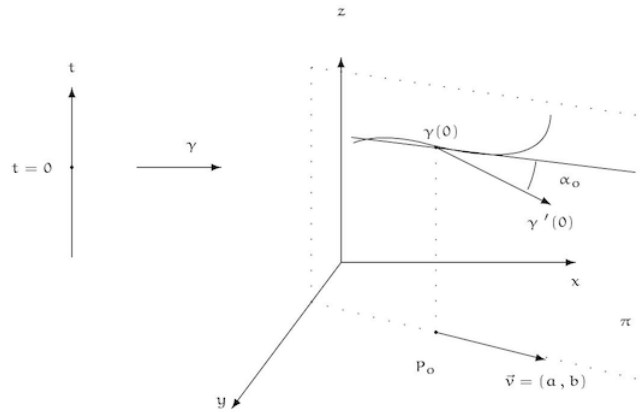
isto é, o vetor  $\gamma'(0)$  é paralelo ao plano  $\pi$ , pois um seu vetor diretor, a saber, o vetor  $(0, 0, 1)$ , é paralelo a um dos vetores diretores do plano  $\pi$ , no caso, é coincidente.

Deste modo podemos identificar o número real  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ , com o coeficiente angular da reta tangente à representação geométrica do gráfico da curva parametrizada diferenciável  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que está contida no plano  $\pi$ , em  $t = 0$ .

Mas, como visto na disciplina de Cálculo 1, sabemos que o coeficiente angular da reta tangente é dado por  $\tan(\alpha_0)$ , onde  $\alpha_0$  é o ângulo que a reta tangente, que está contida no plano  $\pi$ , faz com a reta passa pelo ponto  $\gamma(0)$  e tem a direção do vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , que também está contido no plano  $\pi$  (veja a figura abaixo).

**Conclusão:** geometricamente, as considerações acima podem ser caracterizadas na figura abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \tan(\alpha_0). \quad (9.105)$$



Apliquemos as idéias acima ao:

**Exemplo 9.3.1** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 - xy + 5y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (9.106)$$

Calcular, se existir,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ , onde

$$\vec{v} \doteq \left( \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \quad (9.107)$$

$$\text{e } P_0 \doteq (-1, 2). \quad (9.108)$$

**Resolução:**

Observemos que

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &\stackrel{(9.107)}{=} \left\| \left( \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \right\| \\ &= \sqrt{\left( \frac{3}{5} \right)^2 + \left( \frac{4}{5} \right)^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ou seja, o vetor  $\vec{v}$  é um vetor unitário em  $\mathbb{V}^2$ .

Assim, se existir, temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) &\stackrel{(9.92)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{v}) - f(P_0)}{t} \\
 &\stackrel{(9.107) \text{ e } (9.108)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left[(-1, 2) + t \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)\right] - f(-1, 2)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 + \frac{3}{5}t, 2 - \frac{4}{5}t\right) - f(-1, 2)}{t} \\
 &\stackrel{(9.106)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left[\left(-1 + \frac{3}{5}t\right)^2 - \left(-1 + \frac{3}{5}t\right)\left(2 - \frac{4}{5}t\right) + 5\left(2 - \frac{4}{5}t\right)\right] - [(-1)^2 + (-1)2 + 5 \cdot 2]}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(13 - \frac{36}{5}t + \frac{21}{25}t^2\right) - 13}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{36}{5} + \frac{21}{25}t\right) \\
 &= -\frac{36}{5}. \tag{9.109}
 \end{aligned}$$

Logo, pela Definição 9.3.1, existe  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ .

Além disso, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) \stackrel{(9.109)}{=} -\frac{36}{5}, \tag{9.110}$$

ou seja, a derivada direcional da função  $f$  no ponto  $P_0 = (-1, 2)$ , na direção do vetor (unitário)  $\vec{v} \doteq \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$  será igual a  $-\frac{36}{5}$ , completando a resolução.  $\square$

**Observação 9.3.2** Observemos que, no Exemplo 9.3.1 acima, temos que:

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x, y) &\stackrel{(9.54)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \\
 &\stackrel{(9.106)}{=} (2x - y, -x + 5), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{9.111}
 \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
 \nabla f(P_0) &\stackrel{(9.108)}{=} \nabla f(-1, 2) \\
 &\stackrel{(9.111)}{=} (-4, 6). \tag{9.112}
 \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \nabla f(P_0) \cdot \vec{v} &\stackrel{(9.112) \text{ e } (9.107)}{=} (-4, 6) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \\
 &= \frac{-12}{5} - \frac{24}{5} \\
 &= -\frac{36}{5} \\
 &\stackrel{(9.110)}{=} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0),
 \end{aligned}$$



ou seja, no Exemplo 9.3.1 acima vale a identidade:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = \nabla f(P_o) \bullet \vec{v}.$$

Como veremos a seguir, isto ocorre em geral, mais precisamente temos o:

**Teorema 9.3.1** *Sejam  $A$  um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_o \doteq (x_o, y_o) \in A$ ,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\vec{v} = (a, b)$  um vetor unitário de  $V^2$ .*

*Se a função  $f$  é diferenciável em  $P_o$  (para mais detalhes, ver o Apêndice H), então a função  $f$  admitirá derivada direcional no ponto  $P_o$ , na direção  $\vec{v}$ .*

*Além disso, teremos*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_o) = \nabla f(P_o) \bullet \vec{v}. \quad (9.113)$$

### Demonstração:

Consideremos a função vetorial  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma(t) \doteq (x(t), y(t)) \quad (9.114)$$

$$= (x_o + a t, y_o + b t) \quad (9.115)$$

$$= P_o + t \cdot \vec{v}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (9.116)$$

que é uma curva parametrizada diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , satisfazendo

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= (a, b) \\ &= \vec{v}. \end{aligned} \quad (9.117)$$

Definamos a função  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq (f \circ \gamma)(t) \\ &= f[\gamma(t)] \\ &\stackrel{(9.114)}{=} f[x(t), y(t)] \end{aligned} \quad (9.118)$$

$$\stackrel{(9.115)}{=} f(x_o + a t, y_o + b t) \quad (9.119)$$

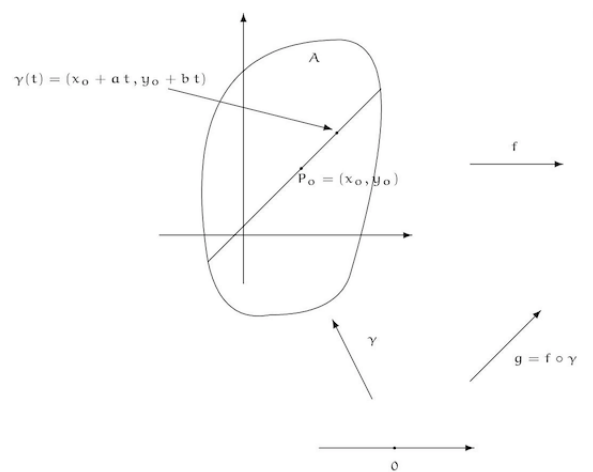
$$\stackrel{(9.116)}{=} f(P_o + t \cdot \vec{v}), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (9.120)$$

onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , escolhido de modo conveniente para que o ponto

$$(P_o + t \cdot \vec{v}) \in A,$$

para cada  $t \in I$  (veja a figura abaixo).

Da diferenciabilidade da função  $f$  no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$  e da curva parametrizada diferenciável  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  em  $t=0$  segue, da regra da cadeia (ou seja, o Teorema 9.1.1), a diferenciabilidade da função  $g = f \circ \gamma$ , em  $t=0$ .



Além disso, da regra da cadeia (ou seja, o Teorema 9.1.1), segue que:

$$\begin{aligned}
 g'(0) &\stackrel{(9.118)}{=} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \\
 &\stackrel{\text{regra da cadeia (veja (9.13))}}{=} f_x(P_0) \frac{dx}{dt}(0) + f_y(P_0) \frac{dy}{dt}(0) \\
 &\stackrel{(9.115)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) a + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) b \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right) \bullet (a, b) \\
 &\stackrel{P_0 = (x_0, y_0)}{=} \nabla f(x_0, y_0) \bullet \gamma'(0) \\
 &\stackrel{(9.117)}{=} \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{v}. \tag{9.121}
 \end{aligned}$$

Da Definição 9.3.1, teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) &\stackrel{(9.92)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{v}) - f(P_0)}{t} \\
 &\stackrel{(9.116)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[\gamma(t)] - f[\gamma(0)]}{t} \\
 &\stackrel{(9.118)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\
 &\stackrel{\text{visto da disciplina de Cálculo 1}}{=} g'(0). \tag{9.122}
 \end{aligned}$$

Logo, existe a derivada direcional da função  $f$  em  $P_0 = (x_0, y_0)$ , na direção do vetor  $\vec{v}$  e, de (9.121) e (9.122), segue vale a seguinte identidade

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0) \bullet \vec{v},$$

como queríamos demonstrar. □

Para os dois primeiros itens da observação abaixo é necessário ver o Apêndice H.

### Observação 9.3.3

1. Vale o análogo do Teorema 9.3.1, para uma função a valores reais, de  $n$  variáveis reais, isto é, se  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $P_0 \in A$ , onde  $A$  é um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ , então para cada vetor  $\vec{v} \in V^n$  unitário, temos que existe a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$  e, além disso,, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0) \bullet \vec{v}. \quad (9.123)$$

2. O Teorema 9.3.1 acima, nos diz que se a função  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $P_0 \in A$  então, para cada vetor  $\vec{v} \in V^n$ , que é unitário, temos que existe a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ .

Porém, em geral, não vale a recíproca, isto é, é possível que uma função  $f$  tenha todas as derivadas direcionais em um ponto, em qualquer direção unitária, mas não seja diferenciável neste ponto.

Para ilustrar esta situação temos o seguinte exemplo:

Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (9.124)$$

Notemos que a função  $f$  é contínua em

$$P_0 \doteq (0, 0). \quad (9.125)$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) & \stackrel{\text{se } (x, y) \neq (0, 0), \text{ de (9.124)}}{=} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left( x \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x = 0 \quad (9.126)$$

e

$$\begin{aligned} 0 & \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ |y| = \sqrt{y^2} & \leq \sqrt{y^2 + x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ & \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & = 1, \end{aligned} \quad (9.127)$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Portanto, segue que (infinitésimo  $\times$  limitada)

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &\stackrel{(9.124)}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &\stackrel{(9.126) \text{ e } (9.127)}{=} 0 \\ &\stackrel{(9.124)}{=} f(0,0), \end{aligned}$$

ou seja, a função  $f$  é contínua em

$$P_0 \doteq (0,0).$$

Mostremos que a função  $f$  tem derivada direcional, no ponto

$$P_0 \doteq (0,0),$$

em qualquer direção unitária  $\vec{v} \in V^2$ .

Consideremos

$$\vec{v} \doteq (a, b), \tag{9.128}$$

um vetor unitário de  $V^2$  (isto é,  $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ )

Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) &\stackrel{(9.92)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{v}) - f(P_0)}{t} \\ &\stackrel{(9.125) \text{ e } (9.128)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t a, 0 + t b) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t a, t b)}{t} \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e } (9.124)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \frac{(t a) |(t b)|}{\underbrace{\sqrt{(t a)^2 + (t b)^2}}_{=\sqrt{t^2(a^2+b^2)}=\sqrt{t^2}\sqrt{a^2+b^2}=|t|\sqrt{a^2+b^2}}} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \frac{t |t| a |b|}{|t| \sqrt{a^2 + b^2}} \right] \\ &\stackrel{\sqrt{a^2+b^2}=1 \text{ e } t \neq 0}{=} a |b|. \end{aligned} \tag{9.129}$$

Portanto, a função  $f$  tem derivada direcional no ponto  $P_0 = (0,0)$ , na direção do vetor unitário  $\vec{v}$ , para cada vetor unitário  $\vec{v} = (a, b) \in V^2$ .

Em particular, :

$$\begin{aligned}
 \text{se } \vec{v} &\doteq \vec{e}_1 \\
 &= \underbrace{(1)}_{\doteq a}, \underbrace{(0)}_{\doteq b}, \\
 \text{teremos: } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(0,0) \\
 &\stackrel{a=1, b=0 \text{ em (9.129)}}{=} 0,
 \end{aligned} \tag{9.130}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e se } \vec{v} &\doteq \vec{e}_2 \\
 &= (0, 1), \\
 \text{teremos: } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}(0,0) \\
 &\stackrel{a=0, b=1 \text{ em (9.129)}}{=} 0.
 \end{aligned} \tag{9.131}$$

Assim, para estudarmos a diferenciabilidade da função  $f$  no ponto  $P_o = (x_o, y_o) = (0, 0)$ , precisaremos estudar o limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|},$$

onde, para  $(h,k) \neq (0,0)$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 E(h,k) &\stackrel{(H.10)}{=} f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o) h - f_y(x_o, y_o) k \\
 &\stackrel{(x_o, y_o) = (0,0)}{=} f(h,k) - \underbrace{f(0,0)}_{(9.124)_0} - \underbrace{f_x(0,0)}_{(9.130)_0} h - \underbrace{f_y(0,0)}_{(9.131)_0} k \\
 &= f(h,k) \\
 &\stackrel{(h,k) \neq (0,0) \text{ e (9.124)}}{=} \frac{h|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
 &= \sqrt{h^2 + k^2} \frac{h|k|}{h^2 + k^2}.
 \end{aligned} \tag{9.132}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} &\stackrel{(9.132)}{=} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{h^2 + k^2} \frac{h|k|}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
 &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h|k|}{h^2 + k^2}.
 \end{aligned} \tag{9.133}$$

Observemos que, considerando-se a curva parametrizada  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma(t) \doteq (t, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \tag{9.134}$$

temos que o limite acima, ao longo dessa curva parametrizada, tornar-se-á:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[\gamma(t)]}{\|\gamma(t)\|} &\stackrel{(9.134)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[(t, t)]}{\|(t, t)\|} \\
 &\stackrel{(9.133)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t|t|}{t^2 + t^2} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}
 \end{aligned}$$

e este limite não existe (tente calculá-lo pela direita e pela esquerda de  $t=0$ , ou seja, o limite (9.133) não existirá, mostrando que a função  $f$  não é diferenciável no ponto  $P_0 = (0, 0)$ .

3. Uma demonstração análoga a que exibimos para o Teorema 9.3.1, mostra que o mesmo resultado é válido para funções a valores reais, de  $n$  variáveis reais.

Mais especificamente, se a função  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $P_0 \in A$ , onde  $A$  é um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ , e o vetor  $\vec{v}$  um vetor unitário de  $V^n$ , então existirá a derivada direcional da função  $f$  no ponto  $P_0$ , na direção de  $\vec{v}$  e, além disso, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v}. \quad (9.135)$$

4. Observemos que se, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o vetor

$$\vec{e}_i \doteq (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}}, 0, \dots, 0)$$

é um vetor unitário de  $V^n$ , então teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) &= \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(P_0) \\ &\stackrel{(9.135)}{=} \nabla f(P_0) \cdot \vec{e}_i, \end{aligned} \quad (9.136)$$

$$\text{isto é, } \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{e}_i, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (9.137)$$

5. Sejam  $A$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_0 \in A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no ponto  $P_0$  e  $\gamma : I \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável, satisfazendo

$$\begin{aligned} \gamma(t_0) &= P_0, \quad t_0 \in I, \\ \gamma'(t_0) &\neq \vec{0}, \end{aligned}$$

cujos traço da curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  esteja contido em uma curva de nível associada à função  $f$ .

Suponhamos que

$$\gamma(t) \doteq (x(t), y(t)), \quad \text{para cada } t \in I.$$

Como

$$g(t) \doteq f[\gamma(t)] = \text{constante}, \quad \text{para cada } t \in I, \quad (9.138)$$

pois o traço da curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está contido em uma curva de nível associada à função  $f$ , e as funções  $f$  e  $\gamma$  são diferenciáveis em  $P_0$  e  $t_0$ , respectivamente, segue, da regra da cadeia (ou seja, o Teorema 9.1.1), que a função  $g = f \circ \gamma$  será uma função diferenciável em  $t_0$ .

Derivando, em relação a  $t$ , a equação (9.138), obteremos, pela Regra da cadeia (ou seja,

o Teorema 9.1.1), que:

$$\begin{aligned}
 & 0 \stackrel{(9.138)}{=} g'(t_0) \\
 & = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) \\
 & = \frac{d}{dt}\{f[(x(t), y(t))]\} \Big|_{t=t_0} \\
 & \stackrel{\text{regra da cadeia (veja (9.13))}}{=} f_x[(x(t_0), y(t_0))] \frac{dx}{dt}(t_0) + f_y[(x(t_0), y(t_0))] \frac{dy}{dt}(t_0) \\
 & = \nabla f[\gamma(t_0)] \cdot \gamma'(t_0) \\
 & \stackrel{\|\gamma'(t_0)\| \neq 0}{=} \|\gamma'(t_0)\| \left( \nabla f[\gamma(t_0)] \cdot \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right) \\
 & = \|\gamma'(t_0)\| \nabla f[\gamma(t_0)] \cdot \vec{v},
 \end{aligned}$$

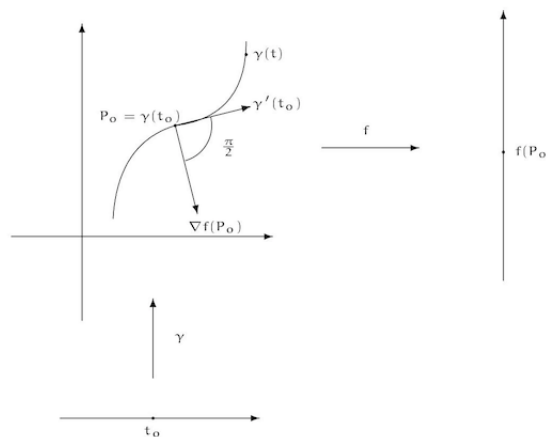
onde  $\vec{v} \doteq \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ .

Notemos que, por construção, o vetor  $\vec{v}$  é um vetor unitário de  $\mathbb{V}^2$ .

Como

$$\begin{aligned}
 & \|\gamma'(t_0)\| \neq 0, \\
 & \text{deveremos ter } \nabla f[\gamma(t_0)] \cdot \vec{v} = 0.
 \end{aligned} \tag{9.139}$$

Em particular, os vetores  $\nabla f(P_0)$  e  $\gamma'(t_0)$  são ortogonais, ou seja, o vetor gradiente da função  $f$  no ponto  $P_0$ , é ortogonal à curva de nível associada à função  $f$ , que contém o ponto  $P_0$  (veja a figura abaixo).



Logo a derivada direcional da função  $f$  no ponto  $P_0 = \gamma(t_0)$ , na direção do vetor tangente (unitário) à uma curva de nível associada à função  $f$  no ponto  $P_0$ , será nula.

6. Observemos também que, na situação acima, se

$$\nabla f(P_0) \neq \vec{0},$$

como visto na disciplina de Geometria Analítica, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) &\stackrel{(9.135)}{=} \nabla f(P_0) \bullet \vec{v} \\ &= \|\nabla f(P_0)\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) \\ &\stackrel{\|\vec{v}\|=1}{=} \|\nabla f(P_0)\| \cos(\theta), \end{aligned} \quad (9.140)$$

onde  $\theta \in [0, \pi]$  é o ângulo entre os vetores, não nulos,  $\nabla f(P_0)$  e  $\vec{v}$ .

Como consequência do item 6. da Observação 9.3.3 acima, temos o:

**Corolário 9.3.1** *Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$ ,  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $P_0$ , satisfazendo*

$$\nabla f(P_0) \neq \vec{0} \quad e \quad \vec{v} \in V^2$$

um vetor unitário.

Então a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$  assumirá seu maior valor quando

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}. \quad (9.141)$$

Por outro lado, a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$  assumirá seu menor valor quando

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}. \quad (9.142)$$

Finalmente, a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$  será nula se o vetor  $\vec{v}$  for um vetor tangente (unitário) à curva de nível  $f(P_0)$ , associada à função  $f$ , ou seja, (veja a figura abaixo) à curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ , tal que

$$f[\gamma(t)] = f(P_0), \quad \text{para cada } t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

### Demonstração:

Do item 6. da Observação 9.3.3, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \|\nabla f(P_0)\| \cos(\theta). \quad (9.143)$$

Logo o valor da expressão (9.143) será máximo se, e somente se,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= 1, \\ \text{isto é, } \theta &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, os vetores  $\vec{v}$  e  $\nabla f(P_0)$  têm mesma direção e sentido (veja a figura abaixo).

Conclusão, como o vetor  $\vec{v}$  deve ser unitário, deveremos considerar o vetor:

$$\vec{v} \doteq \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}.$$

O valor da expressão (9.143) será mínima se, e somente se,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= -1, \\ \text{isto é, } \theta &= \pi, \end{aligned}$$



ou seja, os vetores  $\underline{v}$  e  $\nabla f(P_0)$  têm mesma direção e sentidos opostos (veja figura abaixo).

Conclusão, como o vetor  $\underline{v}$  deve ser unitário, deveremos considerar o vetor:

$$\underline{v} \doteq -\frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}.$$

Finalmente, a expressão (9.143) será igual a zero se, e somente se,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= 0, \\ \text{isto é, } \theta &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

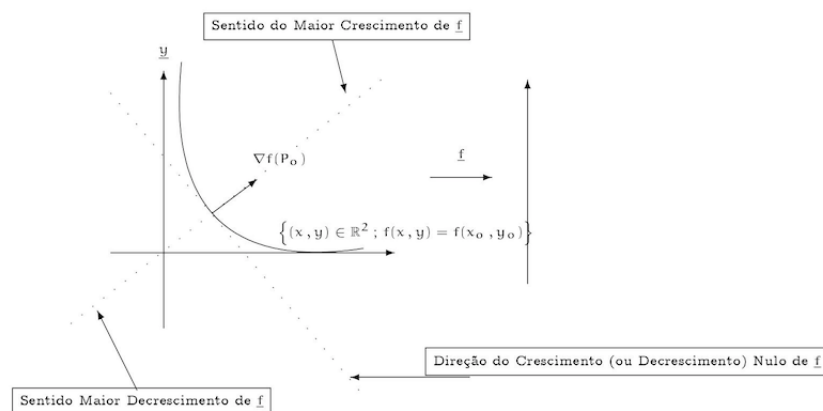
ou seja, os vetores  $\underline{v}$  e  $\nabla f(P_0)$  deverão ser ortogonais.

Sabemos que o vetor tangente a uma curva de nível  $f(P_0)$ , associada à função  $f$ , isto é, o vetor  $\gamma'(0)$ , deve ser ortogonal ao vetor  $\nabla f(P_0)$ .

Logo o vetor  $\underline{v}$  deverá ser paralelo ao vetor  $\gamma'(0)$ , pois

$$\underline{v} \perp \nabla f(P_0) \quad \text{e} \quad \gamma'(0) \perp \nabla f(P_0) \quad \text{em} \quad V^2.$$

Portanto, podemos encontrar uma parametrização da curva de nível  $f(P_0)$ , associada à função  $f$ , para que a mesma tenha como vetor tangente no ponto  $P_0$ , o vetor  $\underline{v}$  (veja a figura abaixo), completando a demonstração do resultado.



□

#### Observação 9.3.4

1. Vale o análogo do Corolário 9.3.1 acima, para funções a valores reais, de  $n$  variáveis reais, isto é, suponhamos que  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $P_0$ , com

$$\nabla f(P_0) \neq \vec{0} \quad \text{e} \quad \underline{v} \in V^n$$

um vetor unitário.

Então a derivada direcional  $\partial_{\underline{v}} f(P_0)$  será máxima se, e somente se,

$$\underline{v} \doteq \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|},$$

será mínima se, e somente se,

$$\vec{v} \doteq -\frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$$

e será nula se o vetor  $\vec{v}$  é um vetor (unitário) tangente à hiper-superfície de nível  $f(P_0)$ , associada à função  $f$ .

A demonstração deste resultado é semelhante a que apresentamos acima e será deixada como exercício para o leitor.

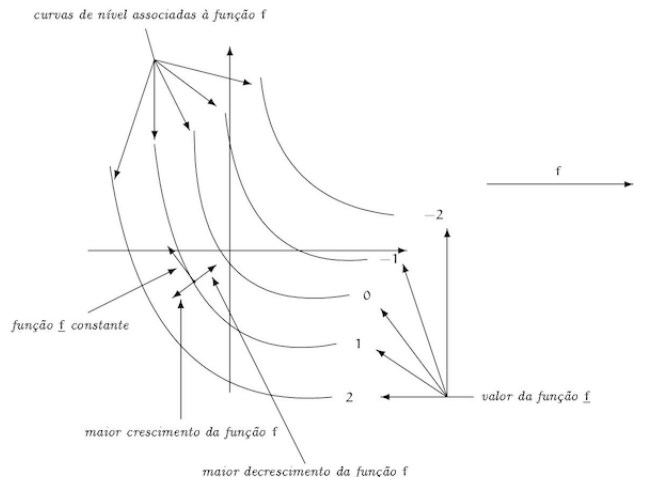
2. Como a derivada direcional pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente a representação geométrica do gráfico de uma função a valores reais, de uma variável real (veja o item 3. da Observação 9.3.1), segue que ela, em um certo sentido, nos fornece o crescimento (ou decrescimento) da função.

Baseado nisto, podemos observar que as conclusões do Corolário 9.3.1 acima, nos dizem que, estando em um ponto  $P_0$  do domínio da função  $f$ , a direção e sentido que devemos tomar para que a função  $f$  cresça mais rapidamente, é direção e sentido do gradiente da função  $f$  em  $P_0$  (pois nesta direção a função terá o maior crescimento).

Por outro lado, a direção e sentido que devemos tomar para que a função  $f$  decresça mais rapidamente, é a direção e sentido oposto do gradiente da função  $f$  em  $P_0$  (pois nesta direção a função terá o maior decrescimento).

E, finalmente, a direção que devemos tomar para que a função  $f$  não cresça, nem decresça (isto é, fique constante) é a do vetor tangente às hiper-superfícies de nível  $f(P_0)$ , associadas à função  $f$  no ponto  $P_0$  (pois nesta direção a função será constante).

Geometricamente, as considerações acima podem ser caracterizadas pela figura abaixo:



Como veremos mais a frente (será visto no Capítulo 12), estas informações serão muito úteis para encontrarmos máximo e/ou mínimo globais (ou absolutos) para funções a valores reais, de várias variáveis reais, contínuas em subconjunto compactos de  $\mathbb{R}^n$ .

## Capítulo 10

# Plano tangente e reta normal à uma superfície

### 10.1 Superfície parametrizada em $\mathbb{R}^3$

Começaremos pela:

**Definição 10.1.1** *Suponhamos que a função  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dada por*

$$F(u, v) \doteq (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad \text{para cada } (u, v) \in A, \quad (10.1)$$

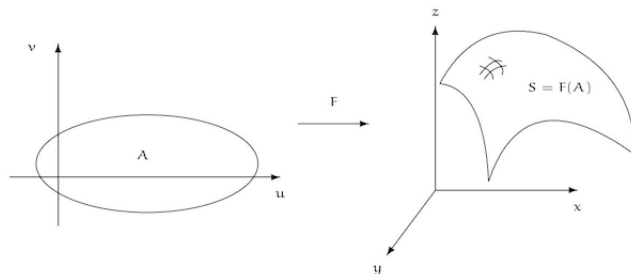
onde o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$ .

A imagem

$$S \doteq F(A) \subseteq \mathbb{R}^3,$$

daremos o nome de superfície parametrizada pela função  $F$ .

**Observação 10.1.1** *Na situação da Definição 10.1.1 acima, geometricamente, teremos:*



Para prosseguir precisaremos da:

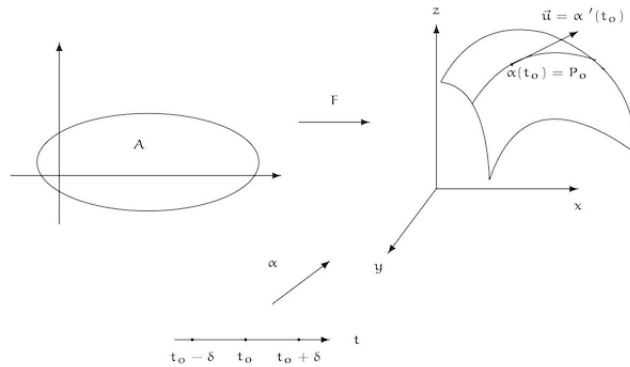
**Definição 10.1.2** *Seja  $S \doteq F(A) \subseteq \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada pela função  $F$ , como na Definição 10.1.1 acima e  $P_0 \in S$ .*

*Diremos que um vetor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  é um vetor tangente à superfície parametrizada  $S$ , no ponto  $P_0$ , se podemos encontrar uma curva parametrizada diferenciável, passando, no instante  $t_0$ , pelo ponto  $P_0$ , cujo traço está contido na superfície  $S$  e cujo vetor velocidade no instante  $t_0$ , coincide com  $\vec{u}$ , ou seja (veja a figura abaixo), se podemos encontrar uma curva parametrizada diferenciável*

$$\alpha: I \doteq (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

de modo que

$$\alpha(t_0) = P_0, \quad \alpha(t) \in S, \quad \text{para } t \in I \quad \text{e} \quad \vec{u} = \alpha'(t_0). \quad (10.2)$$



Ou seja, o vetor  $\vec{u}$  deverá ser vetor tangente a alguma curva parametrizada diferenciável, que passa pelo ponto  $P_0 \in S$  e está contida na superfície  $S$ .

**Observação 10.1.2** A seguir, exibiremos dois vetores tangentes a uma superfície parametrizada no ponto  $P_0 \in S$ , particularmente importantes.

Para isto consideremos a seguinte situação:

1. seja

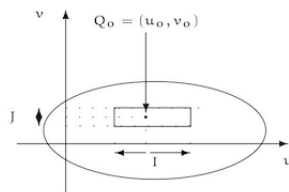
$$Q_0 \doteq (u_0, v_0) \in A$$

um ponto do conjunto  $A$ .

Como o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$ , podemos encontrar  $I, J \subseteq \mathbb{R}$ , intervalos aberto de  $\mathbb{R}$ , de modo que

$$I \times J \subseteq A,$$

ou seja, o retângulo  $I \times J$  está contido em  $A$  (veja a figura abaixo).



Assim podemos considerar as seguintes duas curvas parametrizadas, cujos traços estão contidos na superfície parametrizada  $S = F(A)$ , a saber:

- $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

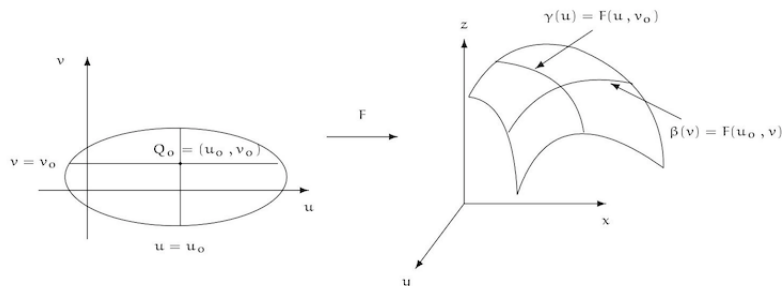
$$\gamma(u) \doteq F(u, v_0), \quad \text{para cada } u \in I, \quad (10.3)$$

- $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$\beta(v) \doteq F(u_0, v), \quad \text{para cada } v \in J, \quad (10.4)$$

que serão denominadas linhas coordenadas da superfície parametrizada  $S = F(A)$  no ponto  $P_0 = F(u_0, v_0)$ .

Com isto, temos a seguinte situação geometricamente:



2. Suponhamos que a função  $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$F(u, v) \doteq (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad \text{para cada } (u, v) \in A, \quad (10.5)$$

seja uma função de modo que cada uma de suas funções coordenadas, a saber, as funções

$$x, y, z : A \rightarrow \mathbb{R},$$

são funções contínuas, com derivadas parciais de 1.ª ordem contínuas em  $\underline{A}$ .

Neste caso, diremos que a superfície parametrizada  $S \doteq F(A) \subseteq \mathbb{R}^3$  é uma superfície parametrizada diferenciável.

Com isto temos que as curvas parametrizadas

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

introduzidas no item 1. acima (isto é, as linhas de coordenadas, dadas por (10.3) e (10.4)), serão curvas parametrizadas diferenciáveis, em

$$u_0 \in I \quad \text{e} \quad v_0 \in J,$$

respectivamente (pois são funções compostas de funções diferenciáveis).

Além disso, os vetores tangentes às linhas coordenadas

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{em } u_0 \in I \quad \text{e} \quad v_0 \in J,$$

respectivamente, serão dados por:

$$\begin{aligned} \gamma'(u_0) &\stackrel{(10.3)}{=} \frac{d}{du} [F(u, v_0)] \Big|_{u=u_0} \\ &\stackrel{(10.5)}{=} \frac{d}{du} (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) \Big|_{u=u_0} \\ &\stackrel{(8.4)}{=} \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \\ &\stackrel{\text{Notação}}{=} \partial_u F(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (10.6)$$

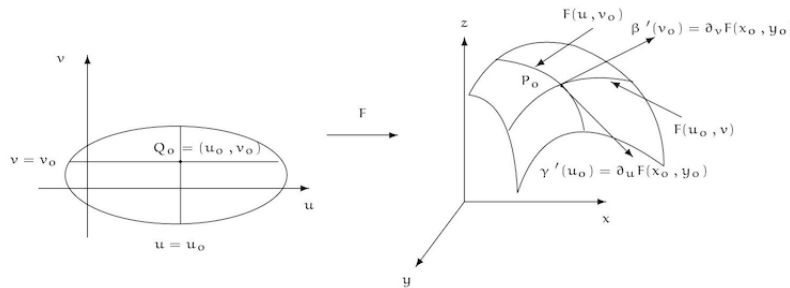
e

$$\begin{aligned} \beta'(v_0) &\stackrel{(10.3)}{=} \frac{d}{dv} [F(u_0, v)] \Big|_{v=v_0} \\ &\stackrel{(10.5)}{=} \frac{d}{dv} (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)) \Big|_{v=v_0} \\ &\stackrel{(8.8)}{=} \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \\ &\stackrel{\text{Notação}}{=} \partial_v F(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Em particular, os vetores

$$\gamma'(u_0) \quad e \quad \beta'(v_0),$$

serão vetores tangentes à superfície parametrizada diferenciável  $S \doteq F(A)$ , no ponto  $P_0 \doteq F(Q_0)$  (veja a figura abaixo).



Baseado nas considerações acima, temos a:

**Definição 10.1.3** Na situação acima, suponhamos que, para cada  $(u, v) \in A$ , tenhamos

$$\gamma'(u) \times \beta'(v) \neq \vec{0}, \quad (10.8)$$

onde  $\times$  denota o produto vetorial em  $\mathbb{V}^3$ , ou seja, os vetores  $\gamma'(u)$  e  $\beta'(v)$  são L.I. em  $\mathbb{V}^3$ , para cada  $(u, v) \in A$ .

Neste caso, diremos que a superfície parametrizada diferenciável  $S = F(A)$  é uma superfície parametrizada regular de  $\mathbb{R}^3$ .

**Observação 10.1.3**

1. Suponhamos que  $S \doteq F(A)$  é superfície parametrizada regular e  $\alpha : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço está contido na superfície  $S$  e  $s_0 \in K$ , onde  $K$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  (veja a figura abaixo).

Então, o vetor tangente à curva parametrizada  $\alpha : K \rightarrow S$ , no ponto  $s_0$ , isto é, o vetor  $\alpha'(s_0)$ , pode ser escrito como combinação linear dos vetores (eles são L.I. em  $\mathbb{V}^3$ )

$$\gamma'(u_0) \quad \text{e} \quad \beta'(v_0),$$

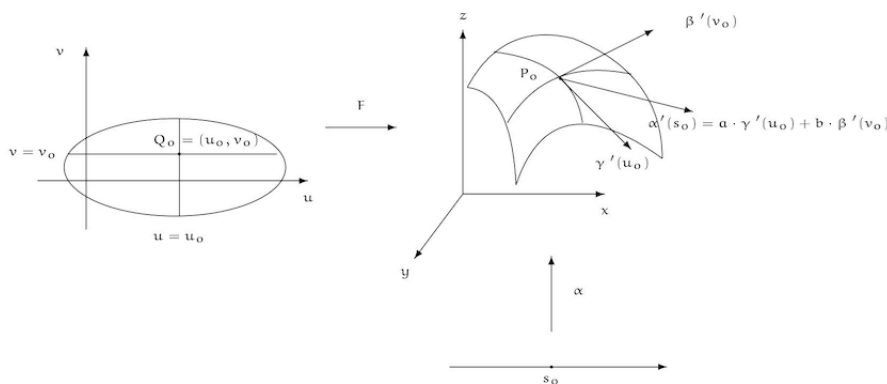
ou seja, podemos encontrar constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ , de modo que

$$\alpha'(s_0) = a \cdot \gamma'(u_0) + b \cdot \beta'(v_0), \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \text{onde} \quad P_0 &\doteq \alpha(s_0) \\ &= (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)), \quad \text{para} \quad (u_0, v_0) \in A \\ \text{e} \quad \alpha(s_0) &= \gamma(u_0) \\ &= \beta(v_0), \end{aligned}$$

para algum  $u_0 \in I$  e  $v_0 \in J$ .

Lembremos que, como anteriormente, as curvas parametrizada  $\gamma : I \rightarrow S$  e  $\beta : J \rightarrow S$  são as linhas coordenadas da função  $F$ , pelo ponto  $(u_0, v_0) \in A$  (veja a figura abaixo).

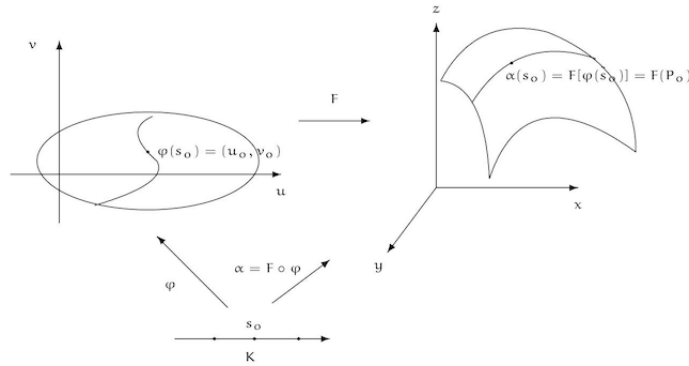


De fato, consideremos,  $K$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e a função  $\varphi : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\varphi(s) \doteq (u(s), v(s)), \quad \text{para cada} \quad s \in K, \quad (10.10)$$

de modo que (veja a figura abaixo)

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (F \circ \varphi)(s), \quad \text{para cada} \quad s \in K \\ \text{e} \quad \varphi(s_0) &= (u(s_0), v(s_0)) \\ &= (u_0, v_0). \end{aligned} \quad (10.11)$$



Deste modo, o vetor tangente à curva parametrizada  $\alpha : K \rightarrow S$ , em  $s_0 \in I$ , será dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha}{ds}(s_0) &\stackrel{(10.11)}{=} \frac{d}{dt} [F \circ \varphi](s_0) \\
 &\stackrel{(10.1)}{=} \frac{d}{ds} [[x(u(s), v(s)), y(u(s), v(s)), z(u(s), v(s))]] \Big|_{s=s_0} \\
 &\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} \left[ \partial_u x[u(s_0), v(s_0)] \frac{du}{ds}(s_0) + \partial_v x[u(s_0), v(s_0)] \frac{dv}{ds}(s_0) \right] \cdot \vec{e}_1 \\
 &\quad + \left[ \partial_u y[u(s_0), v(s_0)] \frac{du}{ds}(s_0) + \partial_v y[u(s_0), v(s_0)] \frac{dv}{ds}(s_0) \right] \cdot \vec{e}_2 \\
 &\quad + \left[ \partial_u z[u(s_0), v(s_0)] \frac{du}{ds}(s_0) + \partial_v z[u(s_0), v(s_0)] \frac{dv}{ds}(s_0) \right] \cdot \vec{e}_3 \\
 &= \frac{du}{ds}(s_0) \underbrace{(\partial_u x(u_0, v_0), \partial_u y(u_0, v_0), \partial_u z(u_0, v_0))}_{\stackrel{(10.6)}{=} \gamma'(t_0)} \\
 &\quad + \frac{dv}{ds}(s_0) \underbrace{(\partial_v x(u_0, v_0), \partial_v y(u_0, v_0), \partial_v z(u_0, v_0))}_{\stackrel{(10.7)}{=} \beta'(t_0)} \\
 &= \frac{du}{ds}(s_0) \cdot \gamma'(u_0) + \frac{dv}{dt}(s_0) \cdot \beta'(v_0) \\
 &= a \cdot \gamma'(u_0) + b \cdot \beta'(v_0),
 \end{aligned}$$

onde  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  são os números reais, dados por

$$a \doteq \frac{du}{ds}(s_0) \quad e \quad b \doteq \frac{dv}{ds}(s_0), \quad (10.12)$$

isto é, o vetor tangente à curva parametrizada  $\alpha : K \rightarrow S$ , da superfície  $S = F(A)$ , no ponto  $P_0 \doteq \alpha(r_0) \in S$ , pode ser escrito como combinação linear dos vetores tangentes às linhas de coordenadas da superfície  $\underline{S}$  no ponto  $\underline{P}_0$ , ou seja, como combinação linear dos vetores

$$\gamma'(u_0) \quad e \quad \beta'(v_0),$$

como queríamos demonstrar.



2. Vale observar que, da disciplina de Geometria Analítica, dois vetores de  $\mathbb{V}^3$  têm produto vetorial não nulo se, e somente se, eles são L.I. em  $\mathbb{V}^3$ .

Logo, esses dois vetores juntamente com um único ponto, geram um plano em  $\mathbb{R}^3$ .

Em particular, se a superfície parametrizada  $S = F(A)$  é regular, segue que os vetores tangentes às linhas coordenadas são vetores tangentes superfície  $S$ , que serão L.I. em  $\mathbb{V}^3$ , isto é, os vetores

$$\gamma'(u_0) \quad \text{e} \quad \beta'(v_0),$$

serão vetores tangentes à superfície  $S = F(A)$ , no ponto  $(u_0, v_0)$  e são L.I. em  $\mathbb{V}^3$ .

Portanto eles, juntamente com o ponto  $P_0 \doteq F(Q_0)$  da superfície  $S = F(A)$ , geram um único plano de  $\mathbb{R}^3$ .

## 10.2 Plano tangente em um ponto de uma superfície parametrizada

Com isto temos a:

**Definição 10.2.1** Na situação acima, definimos o plano tangente à superfície parametrizada regular  $S \doteq F(A)$ , no ponto

$$P_0 \doteq F(Q_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)),$$

como sendo o plano de  $\mathbb{R}^3$ , que contém o ponto  $P_0$  e tem como vetores diretores os vetores

$$\gamma'(u_0) \quad \text{e} \quad \beta'(v_0)$$

(que são vetores L.I em  $\mathbb{V}^3$ , pois a superfície parametrizada é regular e eles são vetores tangentes à superfície parametrizada diferenciável  $S = F(A)$ , no ponto  $Q_0 \doteq (u_0, v_0)$ ).

Uma equação vetorial do plano tangente à superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , no ponto

$$\begin{aligned} P_0 \doteq F(Q_0) \\ = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)), \end{aligned}$$

pode ser dada, explicitamente, por:

$$X = P_0 + t \cdot \gamma'(u_0) + s \cdot \beta'(v_0), \quad \text{para cada } t, s \in \mathbb{R}. \quad (10.13)$$

O vetor

$$\gamma'(u_0) \times \beta'(v_0)$$

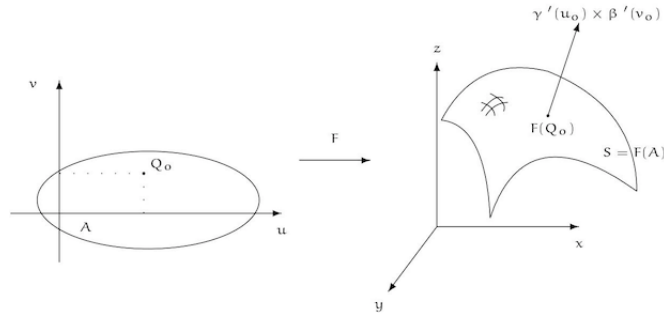
será dito vetor normal a superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , no ponto  $Q_0 \doteq (u_0, v_0)$ .

**Observação 10.2.1** Observemos que, na situação acima, o vetor

$$\gamma'(u_0) \times \beta'(v_0)$$

será dito vetor normal a superfície  $S = F(A)$ , no ponto  $Q_0 = (u_0, v_0)$  e não no ponto  $P_0 = F(Q_0)$ , da superfície  $S = F(A)$  (veja a figura abaixo).

Isto decorre do fato que a superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , pode possuir auto-intersecções e assim não ficaria bem definido o vetor normal à superfície parametrizada regular  $S = F(A)$  em um ponto que pertença a auto-intersecção, mas o vetor normal, definido acima, ficará sempre bem definido.



Temos um resultado análogo da Proposição 9.2.1, para o caso  $n = 3$ .

Mais precisamente, temos o:

**Proposição 10.2.1** *Sejam  $B$  um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^3$ ,  $P_0 \doteq (x_0, y_0, z_0) \in B$  e  $f: B \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $\underline{P}_0$ , de modo que*

$$\nabla f(P_0) \neq \vec{0}. \quad (10.14)$$

*Então a superfície de nível  $f(P_0)$ , associada à função  $f$ , pode ser obtida como uma superfície parametrizada regular em uma vizinhança do ponto  $\underline{P}_0$ , isto é, em uma bola aberta  $B_\delta(\underline{P}_0)$ , para algum  $\delta > 0$ .*

*Mais precisamente, podemos encontrar um subconjunto  $A$  aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$  e uma função  $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que é diferenciável em  $\underline{A}$ , de modo que  $S \doteq F(A)$ , seja uma superfície parametrizada regular, com*

$$\begin{aligned} f(P_0) &\in S \\ \text{e} \quad f[F(u, v)] &= f(P_0), \quad \text{para cada } (u, v) \in A. \end{aligned} \quad (10.15)$$

*Além disso, o vetor  $\nabla f(P_0)$  (que não é o vetor nulo) é um vetor normal (ou ortogonal) à superfície parametrizada regular  $S = F(A)$  no ponto  $\underline{P}_0$ , isto é, à superfície de nível da função  $f$ , de valor  $f(P_0)$ , que contém o ponto  $\underline{P}_0$ .*

*Neste caso, uma equação geral do plano tangente à superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , no ponto  $\underline{P}_0$ , será dada por:*

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0, \quad (10.16)$$

*ou, de modo abreviado,*

$$\text{se, e somente, se} \quad \nabla f(P_0) \bullet (P - P_0) = 0, \quad (10.17)$$

*onde  $P \doteq (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .*

### **Demonstração:**

Será mostrado mais adiante, que podemos obter a superfície de nível  $f(P_0)$ , da função  $f$ , como uma superfície parametrizada regular, definida em uma vizinhança do ponto  $\underline{P}_0$ , ou seja, podemos

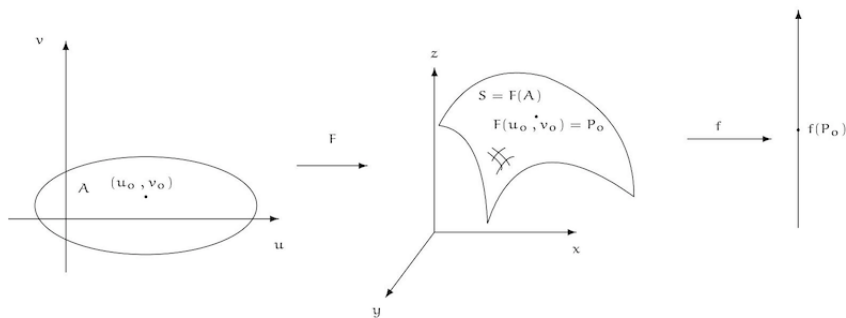
encontrar um subconjunto  $A$ , aberto de  $\mathbb{R}^2$  e uma função  $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que é dada por

$$F(u, v) \doteq \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad \text{para } (u, v) \in A, \quad (10.18)$$

de modo que  $(u_0, v_0) \in A$ ,  
 $P_0 \doteq F(u_0, v_0)$   
 $= (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$   
e  $F(A) \subseteq f^{-1}(\{P_0\})$ , (10.19)

ou seja,  $f[F(u, v)] = f(P_0)$  (= constante), para  $(u, v) \in A$ . (10.20)

Geometricamente, a situação acima pode ser ilustrada pela figura abaixo:



Como

$$S = F(A) \subseteq f^{-1}(\{P_0\})$$

é uma superfície parametrizada regular, temos que um vetor tangente à superfície  $S$ , no ponto  $P_0$ , pode ser obtido como anteriormente, isto é, como combinação linear dos vetores

$$\gamma'(u_0) \quad \text{e} \quad \beta'(v_0),$$

onde as funções  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , são as linhas coordenadas da superfície parametrizada diferenciável  $S = F(A)$ , no ponto

$$P_0 = \gamma(u_0) \\ = \beta(v_0), \quad u_0 \in I \quad \text{e} \quad v_0 \in J,$$

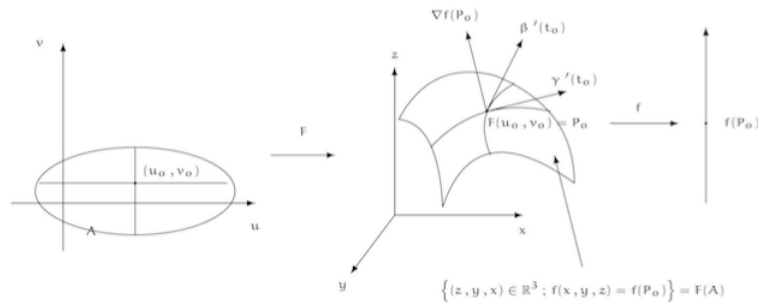
correspondentes às curvas coordenadas:  $v = v_0$  e  $u = u_0$ , respectivamente,

$$\text{ou ainda, } \gamma(u) \doteq F(u, v_0), \quad \text{para cada } u \in I \quad (10.21)$$

$$\text{e } \beta(v) \doteq F(u_0, v), \quad \text{para cada } v \in J, \quad (10.22)$$

onde  $I$  e  $J$  são intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ , contendo  $u_0$  e  $v_0$ , respectivamente, e satisfazendo  $I \times J \subseteq A$  (veja a figura abaixo).

Como as funções  $f$  e  $F$  são funções diferenciáveis em  $P_0$ ,  $Q_0 \doteq (u_0, v_0)$ , respectivamente, segue que as curvas parametrizadas  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ , serão curvas parametrizadas diferenciáveis em  $u_0$  e  $v_0$ , respectivamente.



Além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \gamma'(u) &= \frac{d\gamma}{du}(u_0) \\ &\doteq \frac{\partial F}{\partial u}(u, v_0), \end{aligned} \quad (10.23)$$

$$\begin{aligned} \beta'(v) &= \frac{d\beta}{dv}(v_0) \\ &\doteq \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Logo, como

$$f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \stackrel{(10.18)}{=} f[F(u, v)] \quad (10.25)$$

$$\stackrel{(10.20)}{=} f(P_0), \quad \text{para } (u, v) \in U, \quad (10.26)$$

derivando esta identidade, parcialmente em relação a  $u$  e a  $v$ , no ponto  $Q_0 \doteq (u_0, v_0)$ , obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(10.26)}{=} \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u}(u_0, v_0) \\ &\stackrel{(10.25) \text{ e regra da cadeia (veja (9.13))}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \\ &\stackrel{(9.54) \text{ e (10.18)}}{=} \nabla f(P_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \\ &\stackrel{(10.23)}{=} \nabla f(P_0) \cdot \gamma'(u_0), \end{aligned} \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(10.26)}{=} \frac{\partial(f \circ F)}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &\stackrel{(10.25) \text{ e regra da cadeia (veja (9.13))}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \\ &\stackrel{(9.54) \text{ e (10.18)}}{=} \nabla f(P_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &\stackrel{(10.23)}{=} \nabla f(P_0) \cdot \beta'(v_0), \end{aligned} \quad (10.28)$$

ou seja, de (10.27) e (10.28), segue que o vetor  $\nabla f(P_0)$  é ortogonal aos vetores

$$\gamma'(u_0) \text{ e } \beta'(v_0),$$

que são vetores geradores do plano tangente a superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , no ponto  $Q_o \doteq (u_o, v_o)$ .

Isto implicará que o vetor  $\nabla f(P_o)$  (que não é o vetor nulo) é um vetor normal ao plano tangente à superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , no ponto  $P_o$ , ou ainda, à superfície de nível da superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , no ponto  $P_o$ .

Neste caso, como visto na disciplina de Geometria Analítica, a equação do plano tangente a superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , no ponto  $Q_o = (u_o, v_o)$ , será dada pela equação (10.16) ou a equação (10.17), finalizando a demonstração.  $\square$

**Observação 10.2.2** A demonstração da Proposição 10.2.1 acima, pode ser utilizada para mostrar que se a função vetorial

$$\phi : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva parametrizada diferenciável, dada por

$$\begin{aligned} \phi(t) &\doteq (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{para cada } t \in K, \\ \text{com } \phi(t_o) &= P_o, \end{aligned}$$

cujo traço está contido na superfície de nível  $f(P_o)$  da função  $f$  (que vamos supor ser uma superfície parametrizada regular), então sabemos que

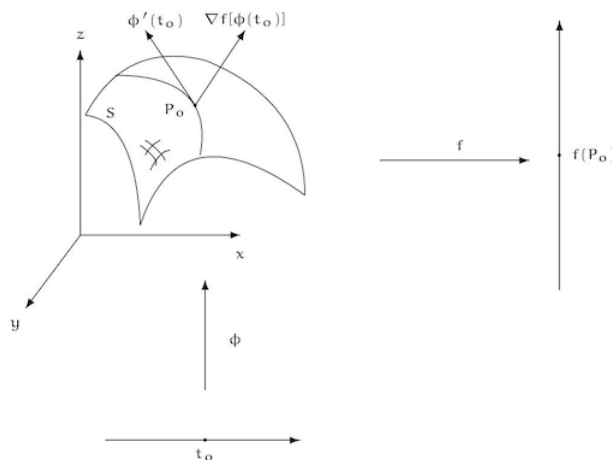
$$f[\phi(t)] = f(P_o) \quad \text{para } t \in K, \quad (10.29)$$

então os vetores  $\nabla f(P_o)$  (vetor normal à superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , isto é, à superfície de nível da função  $f$  em  $P_o$ ) e  $\phi'(t_o)$  (vetor tangente à superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , em  $t_o$ , ou ainda, em  $P_o$ ) serão vetores ortogonais (veja a figura abaixo).

Para mostrar isto, basta derivar a equação (10.29), em relação a  $t$ , e utilizar a regra da cadeia (ou seja, o Teorema 9.1.1), para concluirmos que

$$\nabla f[\phi(t_o)] \bullet \phi'(t_o) = 0. \quad (10.30)$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.



Aplicamos as ideias acima aos:

**Exemplo 10.2.1** Seja  $\underline{S}$  uma superfície que é o gráfico da equação

$$x^2 y z + 3 y^2 = 2 x z^2 - 8 z, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (10.31)$$

$$\text{isto é, } S \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 y z + 3 y^2 = 2 x z^2 - 8 z\}. \quad (10.32)$$

Pede-se:

1. mostrar que, em alguma vizinhança do ponto

$$P_o \doteq (1, 2, -1) \in S, \quad (10.33)$$

à superfície  $\underline{S}$  pode ser obtida como uma superfície parametrizada regular;

2. encontrar uma equação geral do plano tangente à superfície  $\underline{S}$  no ponto

$$P_o = (1, 2, -1);$$

3. encontrar uma equação vetorial da reta normal à superfície  $\underline{S}$ , no ponto  $P_o = (1, 2, -1)$ ;

4. a reta normal obtida no item 3. intercepta o plano  $\underline{\pi}$ , que tem por equação geral

$$\pi : x + 3y - 2z = 10 \quad ?$$

Caso afirmativo, em que ponto se interceptam ?

**Resolução:**

**Do item 1.:**

Consideremos a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) = x^2 y z + 3 y^2 - 2 x z^2 + 8 z, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (10.34)$$

Notemos que a superfície  $\underline{S}$ , será a superfície de nível zero, associada à função  $\underline{f}$ , isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; f(x, y, z) = 0\}. \quad (10.35)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} f(P_o) &\stackrel{(10.33)}{=} f(1, 2, -1) \\ &\stackrel{(10.34)}{=} \text{com } x \doteq 1, y \doteq 2 \text{ e } z \doteq -1 \quad 1^2 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) \\ &= 0, \\ \text{isto é, } P_o &\stackrel{(10.33)}{=} (1, 2, -1) \in S \quad (\text{veja (10.35)}). \end{aligned}$$

Além disso, a função  $\underline{f}$ , dada por (10.34), é uma função diferenciável em  $\underline{\mathbb{R}^3}$  (pois é uma função

polinomial) e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &\stackrel{(10.35)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [x^2 y z + 3 y^2 - 2 x z^2 + 8 z] \\ &= 2 x y z - 2 z^2,\end{aligned}\tag{10.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &\stackrel{(10.35)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [x^2 y z + 3 y^2 - 2 x z^2 + 8 z] \\ &= x^2 z + 6 y,\end{aligned}\tag{10.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &\stackrel{(10.35)}{=} \frac{\partial}{\partial z} [x^2 y z + 3 y^2 - 2 x z^2 + 8 z] \\ &= x^2 y - 4 x z + 8,\end{aligned}\tag{10.38}$$

logo,

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &\stackrel{(10.36), (10.37) \text{ e } (10.38)}{=} (2 x y z - 2 z^2, x^2 z + 6 y, x^2 y - 4 x z + 8),\end{aligned}\tag{10.39}$$

assim:

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 2, -1) &\stackrel{(10.39)}{=} \text{com } x \doteq 1, y \doteq 2 \text{ e } z \doteq -1 \quad (-6, 11, 14) \\ &\neq (0, 0, 0) = \vec{0}.\end{aligned}\tag{10.40}$$

Logo, da Proposição 10.2.1 segue que, em uma vizinhança do ponto  $P_o = (1, 2, -1) \in S$ , a superfície  $\underline{S}$  pode ser obtida como uma superfície parametrizada regular.

**Do item 2.:**

Da Proposição 10.2.1, segue que o vetor

$$\begin{aligned}\nabla f(P_o) &\stackrel{(9.35)}{=} \nabla f(1, 2, -1) \\ &\stackrel{(10.40)}{=} (-6, 11, 14),\end{aligned}$$

será um vetor normal à superfície  $\underline{S}$ , no ponto

$$P_o \stackrel{(10.33)}{=} (1, 2, -1) \in S.$$

Logo, como visto da disciplina Geometria Analítica, temos que uma equação geral do plano  $\pi$  procurado, que indicaremos por  $\underline{\pi}$ , tangente à superfície  $\underline{S}$ , no ponto  $\underline{P}_o$ , será da forma:

$$\pi : -6x + 11y + 14z + d = 0,\tag{10.41}$$

onde a constante  $d$  pode ser obtida sabendo-se que o ponto

$$P_o = (1, 2, -1)$$

pertence ao plano  $\underline{\pi}$ , isto é,

$$\begin{aligned}-6 + 22 - 14 + d &= 0, \\ \text{ou seja, } d &= -2.\end{aligned}\tag{10.42}$$

Portanto, de (10.41) e (10.42), uma equação geral do plano  $\underline{\pi}$ , tangente à superfície  $\underline{S}$ , no ponto  $P_o = (1, 2, -1)$ , será dada por:

$$-6x + 11y + 14z - 2 = 0.\tag{10.43}$$

**Do item 3.:**

Como o vetor

$$\nabla f(P_0) \stackrel{(10.40)}{=} (-6, 11, 14)$$

é um vetor normal à superfície  $\underline{S}$ , temos que uma equação vetorial da reta, que indicaremos por  $\underline{r}$ , normal à superfície  $\underline{S}$ , no ponto  $\underline{P}_0$ , será da forma:

$$\begin{aligned} r : X = P_0 + t \cdot \nabla f(P_0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \\ \text{ou seja, } (x, y, z) = (1, 2, -1) + t \cdot (-6, 11, 14), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (10.44)$$

**Do item 4.:**

Seja  $P \doteq (x, y, z)$  o ponto onde a reta normal do item 3. encontrar o plano

$$x + 3y - 2z = 10. \quad (10.45)$$

Como o ponto  $\underline{P}$  pertence à reta  $\underline{r}$ , deverá existir  $\underline{t} \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1, 2, -1) + t \cdot (-6, 11, 14) \\ &= (1 - 6t, 2 + 11t, -1 + 14t), \end{aligned} \quad (10.46)$$

para algum  $t \in \mathbb{R}$ .

Para esse ponto  $\underline{P}$  pertencer ao plano  $\underline{\pi}$ , que tem equação geral (10.45), devemos ter:

$$\begin{aligned} (1 - 6t) + 3(2 + 11t) - 2(-1 + 14t) &= 10, \\ \text{ou seja, } t &= -1. \end{aligned}$$

Fazendo  $\underline{t} = -1$  na equação (10.46), temos que o ponto que pertence a reta  $\underline{r}$  normal e ao plano  $\underline{\pi}$  acima, será o ponto

$$P \doteq (7, -9, -15).$$

□

Temos agora o:

**Exercício 10.2.1** Dada a curva parametrizada diferenciável  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , cujas equações paramétricas, são dadas por:

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{2} t \end{cases}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (10.47)$$

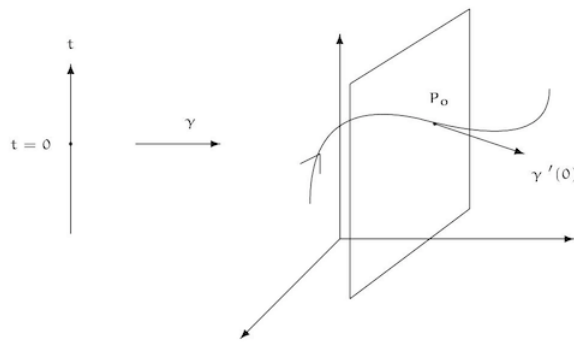
$$\text{isto é, } \gamma(t) \doteq (e^t, e^{-t}, \sqrt{2} t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (10.48)$$

encontrar uma equação geral do plano normal ao traço da curva parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  em  $\underline{t} = 0$ .

Em particular, teremos uma equação geral do plano normal ao traço da curva parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  no ponto

$$\begin{aligned} P_0 &\doteq \gamma(0) \\ &\stackrel{(10.48)}{=} (1, 1, 0). \end{aligned} \quad (10.49)$$



**Resolução:**

Observemos que um vetor normal ao plano normal ao traço da curva parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  no ponto  $P_0 = \gamma(0)$ , será um vetor tangente à curva parametrizada em  $t = 0$ , ou seja, será o vetor  $\underline{\gamma'(0)}$  (veja a figura abaixo).

Mas

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &\stackrel{(10.48)}{=} (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \\ &\neq (0, 0, 0) = \vec{0}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (10.50)$$

logo a função vetorial  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva parametrizada regular.

Portanto, o vetor

$$\gamma'(0) \stackrel{(10.50)}{=} \stackrel{\text{com } t=0}{=} (1, -1, \sqrt{2}),$$

será um vetor normal ao plano procurado.

Logo, uma equação geral do plano normal ao traço da curva parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em  $t = 0$ , será dada por:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + (-1) \cdot y + (\sqrt{2}) \cdot z + d &= 0, \\ \text{ou seja, } x - y + \sqrt{2}z + d &= 0. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Como o ponto

$$\begin{aligned} P_0 &= \gamma(0) \\ &\stackrel{(10.49)}{=} \stackrel{\text{com } t=0}{=} (1, 1, 0), \end{aligned} \quad (10.52)$$

deve pertencer ao plano procurado, deveremos ter

$$\begin{aligned} 1 - 1 + \sqrt{2} \cdot 0 + d &= 0, \\ \text{isto é, } d &= 0. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Portanto, substituindo (10.53) na equação (10.51), uma equação geral do plano normal à curva parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em  $t = 0$ , será dada por:

$$x - y + \sqrt{2}z = 0,$$

completando a resolução.

□

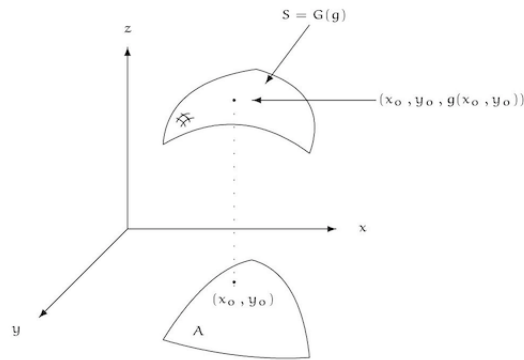
## Observação 10.2.3

1. Consideremos  $\underline{A}$  um subconjunto aberto, não vazio, em  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  e  $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

Suponhamos que a superfície  $\underline{S}$  é o gráfico da função  $g$ , isto é,

$$S \doteq \left\{ (x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in A \right\} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad (10.54)$$

onde a função  $g$  é uma função diferenciável em  $\underline{A}$  (vide a figura abaixo).



A questão que colocamos é a seguinte: como obter a equação geral do plano tangente à superfície  $\underline{S}$ , no ponto

$$P_0 \doteq (x_0, y_0, g(x_0, y_0)),$$

se este existir?

Para responder esta questão, observemos que se considerarmos a função  $f : V \doteq A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$f(x, y, z) \doteq g(x, y) - z, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in V \quad (10.55)$$

temos que a superfície  $\underline{S}$  será a superfície de nível zero associada à função  $f$  isto é,

$$\begin{aligned} \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \underbrace{f(x, y, z)}_{\stackrel{(10.55)}{=} g(x, y) - z}} = 0 \right\} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; g(x, y) - z = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = g(x, y) \right\} \\ &= \left\{ (x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in A \right\} \\ &\stackrel{(10.54)}{=} S. \end{aligned}$$

Como a função  $f$ , dada por (10.55), é uma função diferenciável em  $\underline{V}$  (pois a função  $g$  é

diferenciável em  $A$ ) e

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &\stackrel{(9.54)}{=} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &\stackrel{(10.55)}{=} \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1 \right), \end{aligned} \quad (10.56)$$

$$\begin{aligned} \text{teremos: } \nabla f(x_0, y_0, z_0) &= \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \\ &\neq (0, 0, 0) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Logo, da Proposição 10.2.1, segue que este vetor será um vetor normal a superfície  $S$ , no ponto  $P_0 \doteq (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ .

Portanto, uma equação geral do plano tangente à superfície  $S$ , no ponto  $P_0$ , poderá ser dada por (devido a (10.16) e (10.56)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y + (-1) \cdot z + d &= 0, \\ \text{ou seja, } \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y + (-1) \cdot z + d &= 0. \end{aligned} \quad (10.57)$$

Como o ponto

$$P_0 = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$$

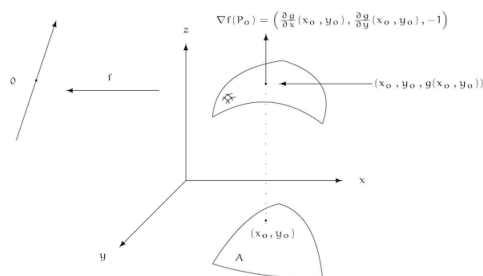
deverá pertencer a este plano, cuja equação geral é dada por (10.57), deveremos ter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) x_0 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) y_0 - g(x_0, y_0) + d &= 0, \\ \text{ou seja, } d = g(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) x_0 - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) y_0. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Portanto, substituindo (10.58) na equação do plano tangente à superfície  $S$  no ponto  $P_0$ , isto é, na equação (10.57), obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) y - z + g(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) x_0 - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) y_0 &= 0, \\ \text{ou ainda: } z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0). \end{aligned} \quad (10.59)$$

Geometricamente, temos a seguinte situação para as considerações acima:



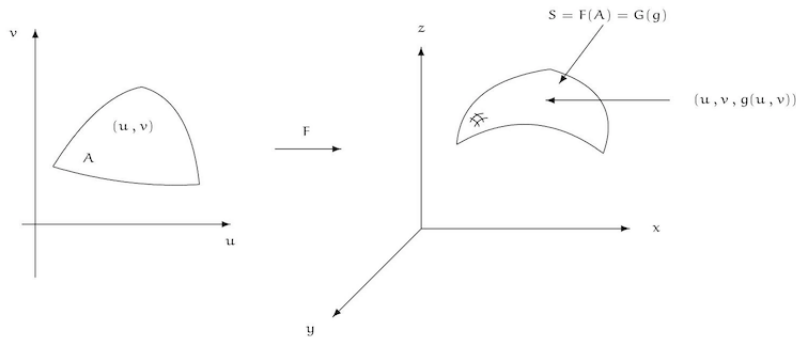
2. Compare a expressão (10.59) com a expressão da definição de diferenciabilidade da função  $\underline{g}$  em  $(x_0, y_0)$  (a saber, (H.9) trocando-se a função  $\underline{f}$  pela função  $\underline{g}$ ).

O que há de comum?

3. Outro modo de tratar o problema acima seria considerar uma função  $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$F(u, v) \doteq (u, v, g(u, v)), \quad \text{para cada } (u, v) \in A. \quad (10.60)$$

Geometricamente teremos a seguinte situação, relativamente ao caso acima:



Como a função  $\underline{g}$  é diferenciável em  $\underline{A}$ , segue que a função  $\underline{F}$  será diferenciável em  $\underline{A}$ .

Além disso,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \stackrel{(10.60)}{=} \left( 1, 0, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \right) \quad (10.61)$$

$$\text{e } \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \stackrel{(10.60)}{=} \left( 0, 1, \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right), \quad (10.62)$$

para cada  $(u, v) \in A$  e estes dois vetores são, obviamente, L.I. em  $\underline{V}^3$ .

Portanto  $\underline{S} = F(\underline{A})$  é uma superfície parametrizada regular e o plano tangente à superfície  $\underline{S} = F(\underline{A})$ , no ponto  $(u_0, v_0)$ , terá uma equação geral dada por (10.59), pois as linhas coordenadas no ponto  $(u_0, v_0) \in A$ , a saber, as funções  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\gamma(u) \doteq (u, v_0, g(u, v_0)) \quad (10.63)$$

$$\text{e } \beta(v) \doteq (u_0, v, g(u_0, v)), \quad (10.64)$$

para  $u \in I$  e  $v \in J$ , respectivamente, serão funções diferenciáveis em  $\underline{I}$  e  $\underline{J}$  (que são intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ , tais que  $\underline{I} \times \underline{J} \subseteq \underline{A}$ ), respectivamente, e os vetores

$$\gamma'(u) \stackrel{(10.63)}{=} \left( 1, 0, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \right) \quad (10.65)$$

$$\text{e } \beta'(v) \stackrel{(10.63)}{=} \left( 0, 1, \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) \quad (10.66)$$

são, obviamente, L.I. em  $\underline{V}^3$ , para cada  $(u, v) \in I \times J$ .

Em particular, os vetores

$$\gamma'(u_0) = \left( 1, 0, \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \quad (10.67)$$

$$e \quad \beta'(v_0) = \left( 0, 1, \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \right), \quad (10.68)$$

poderão ser tomados vetores diretores do plano em questão.

Assim uma equação vetorial do plano em questão, será dada por:

$$X = (u_0, v_0, g(u_0, v_0)) + t \cdot \gamma'(u_0) + s \cdot \beta'(v_0), \quad \text{para cada } t, s \in \mathbb{R}, \quad (10.69)$$

e, por meio desta, podemos obter uma equação geral do plano em questão, que nos fornecerá a equação (10.59).

Deixaremos estes detalhes como exercício para o leitor.

4. Resumindo temos, pelo menos, três modos diferentes de apresentar uma superfície parametrizada regular, em uma vizinhança de um ponto  $P_0$ , pertencente a mesma, a saber:

(a) Se a superfície  $S$  é dada como a imagem de uma aplicação  $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciável em  $Q_0 \doteq (u_0, v_0) \in A$ , de tal modo que os vetores

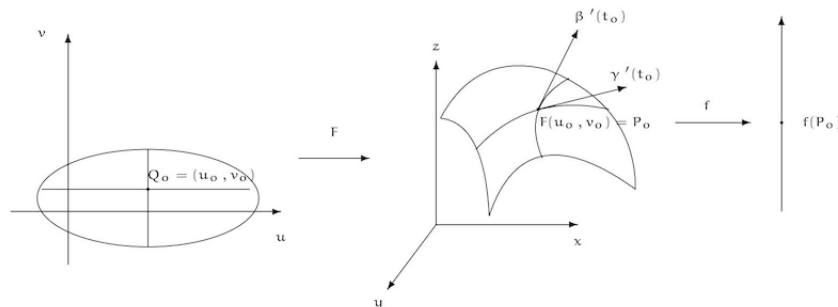
$$\begin{aligned} & \gamma'(u_0) \\ e & \beta'(v_0) \quad \text{são L.I. em } \underline{V^3}, \\ \text{onde } & \gamma(u) \doteq F(u, v_0), \quad \text{para cada } u \in I \end{aligned} \quad (10.70)$$

$$e \quad \beta(v) \doteq F(u_0, v), \quad \text{para cada } v \in J, \quad (10.71)$$

são as linhas coordenadas da superfície  $S = F(A)$ , pelo ponto  $(u_0, v_0)$ , isto é, temos uma superfície parametrizada regular (veja a figura abaixo).

Neste caso, uma equação vetorial do plano tangente à superfície parametrizada regular  $S = F(A)$ , no ponto  $Q_0 = (u_0, v_0) \in A$ , será dada por:

$$X = P_0 + t \cdot \gamma'(u_0) + s \cdot \beta'(v_0), \quad \text{para cada } t, s \in \mathbb{R}. \quad (10.72)$$



(b) Se a superfície  $S$  é dada como uma superfície de nível

$$f(P_0) = f(x_0, y_0, z_0)$$

de uma função diferenciável  $f: B \xrightarrow{\text{aberto}} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que

$$\nabla f(P_0) \neq \vec{0}.$$

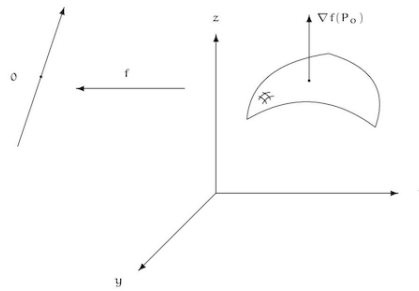
Neste caso, uma equação geral do plano tangente à superfície

$$S \subseteq \{P \in \mathbb{R}^3; f(P) = f(P_0)\}, \quad (10.73)$$

no ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ , será dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0. \quad (10.74)$$

Em particular, o vetor  $\nabla f(P_0)$ , que não é o vetor nulo, será um vetor normal a superfície  $S$  no ponto  $P_0$  (veja a figura abaixo).



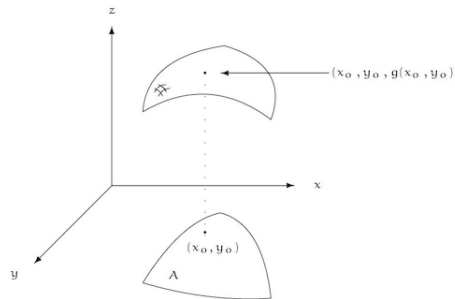
(c) Se a superfície  $S$ , é dada como o gráfico de uma função  $g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $A$ .

Neste caso, uma equação geral do plano tangente à superfície

$$S \subseteq \{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in A\} \quad (10.75)$$

no ponto  $P_0 \doteq (x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \in S$ , será dada por (veja a figura abaixo):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - z + g(x_0, y_0) = 0. \quad (10.76)$$



# Capítulo 11

## Máximos e mínimos de funções a valores reais, de várias variáveis reais

### 11.1 Definições e resultados gerais

Começaremos pela:

**Definição 11.1.1** *Seja  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.*

*Diremos que  $P_0 \in A$  é um ponto de máximo global (ou absoluto) da função  $f$  se*

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \text{para todo } P \in A. \quad (11.1)$$

*Neste caso diremos que o valor  $f(P_0)$  é o valor do máximo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $A$ .*

*De modo semelhante, diremos que  $P_0 \in A$  é um ponto de mínimo global (ou absoluto) da função  $f$  se*

$$f(P) \geq f(P_0), \quad \text{para todo } P \in A. \quad (11.2)$$

*Neste caso diremos que o valor  $f(P_0)$  é o valor do mínimo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $A$ .*

Temos também a:

**Definição 11.1.2** *Seja  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.*

*Diremos que  $P_0 \in A$  é um ponto de máximo local (ou relativo) da função  $f$ , se podemos encontrar uma bola*

$$B_\delta \doteq B_\delta(P_0),$$

*centrada no ponto  $P_0$  e raio  $\delta > 0$ , de modo que*

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \text{para todo } P \in A \cap B_\delta. \quad (11.3)$$

*Neste caso diremos que o valor  $f(P_0)$  é o valor de máximo local (ou relativo) da função  $f$ .*

*De modo semelhante, diremos que  $P_0 \in A$  é um ponto de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ , se podemos encontrar uma bola*

$$B_\delta \doteq B_\delta(P_0),$$

*centrada no ponto  $P_0$  e raio  $\delta > 0$ , de modo que*

$$f(P) \geq f(P_0), \quad \text{para todo } P \in A \cap B_\delta. \quad (11.4)$$

*Neste caso diremos que  $f(P_0)$  é o valor de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ .*

**Observação 11.1.1**

1. *Empregaremos o termo extremo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $A$  para designarmos um ponto do domínio da função  $f$  que é um ponto de máximo ou de mínimo global (ou absoluto) da função  $f$ .*

*De modo análogo, empregaremos o termo extremo local (ou relativo) da função  $f$  para designarmos um ponto do domínio da função  $f$  que é um ponto de máximo ou de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ .*

2. *Segue das Definições 11.1.1 e 11.1.2 acima, que se uma função  $f$  tem extremo global (ou absoluto) no ponto  $P_0 \in A$ , então a função  $f$  terá extremo local (ou relativo) no ponto  $P_0 \in A$ .*

*A recíproca é falsa, isto é, uma função  $f$  pode ter um extremo local (ou relativo) no ponto  $P_0 \in A$ , mas não ter extremo global (ou absoluto) no ponto  $P_0 \in A$ .*

*Mais adiante exibiremos exemplos que mostram que isto pode ocorrer.*

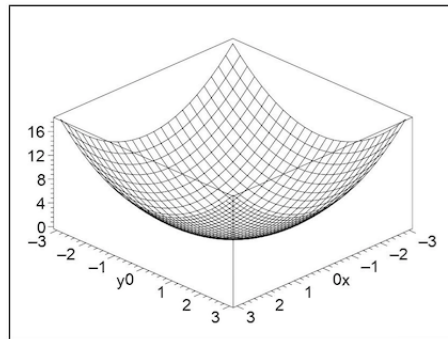
Consideremos o:

**Exemplo 11.1.1**

Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (11.5)$$

Encontre, se existirem os extremos globais (ou absolutos) da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Resolução:**

Notemos que, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , teremos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\stackrel{(11.5)}{=} x^2 + y^2 \\ &\geq 0 \\ &\stackrel{(11.5), \text{ com } x=y=0}{=} f(0, 0). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Logo, pela Definição 11.1.1 (veja (11.1)), o ponto

$$P_0 \doteq (0, 0)$$



é ponto de mínimo global (ou absoluto) da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Logo

$$0 = f(0, 0)$$

será o valor de mínimo global (ou absoluto) da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Note que a representação geométrica do gráfico da função  $f$  é o parabolóide de revolução, com vértice na origem e "concauidade" voltada para cima (veja a figura acima).

Notemos também que a função  $f$  **não** possui máximo global (ou absoluto) em  $\mathbb{R}^2$ .

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

□

### Observação 11.1.2

1. Do item 2. da Observação 11.1.1 e de (11.6), segue que o ponto

$$P_0 \doteq (0, 0)$$

é ponto de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ .

Logo

$$0 = f(0, 0)$$

será o valor de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ .

2. Como vimos no item 2. da Observação 9.3.4, se uma função  $f$  tem derivadas parciais de 1.a ordem em seu domínio e o gradiente da mesma não se anula, então existe o gradiente da função  $f$ , em cada ponto do domínio.

Além disso, do item 2. da Observação 9.3.4, segue que a direção e sentido de maior crescimento da função  $f$ , perto de um ponto  $P_0$  do seu domínio, é fornecida pelo gradiente da função calculada no ponto  $P_0$ .

Por outro lado, na direção e sentido oposto do gradiente da função calculada no ponto  $P_0$ , teremos o decréscimo mais rápido da função, perto de um ponto  $P_0$ .

Baseado nas considerações acima tratemos do:

**Exemplo 11.1.2** Consideremos o conjunto

$$A \doteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 3 \text{ e } x \leq y \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (11.7)$$

e a função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq 2x - y, \quad \text{para cada } (x, y) \in A. \quad (11.8)$$

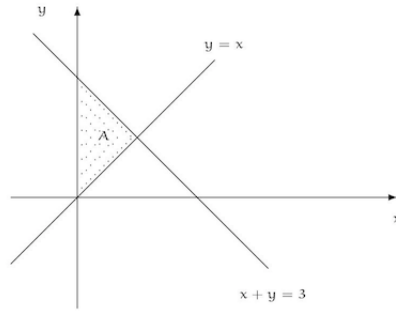
Encontrar, se existirem, os pontos de máximo e mínimo globais (ou absolutos) da função  $f$  no conjunto  $A$ .

### Resolução:

Observemos que a função  $f$  é contínua no conjunto  $A$  (pois é uma função polinomial) e o conjunto  $A$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ , pois é um subconjunto fechado e limitado em  $\mathbb{R}^2$ .

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor;

Logo, do Teorema 7.2.1, segue que a função  $f$  tem máximo e mínimo globais (ou absolutos) no conjunto  $A$ .



Na figura abaixo temos a representação geométrica do domínio da função  $f$ :

Na verdade temos que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  no conjunto  $A$  (pois é uma função polinomial).

Além disso, para  $(x, y) \in A$ , temos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &\stackrel{(9.54)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \vec{e}_2 \\ &\stackrel{(11.8)}{=} 2 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ &= (2, -1). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Notemos que, do item 2. da Observação 11.1.2 acima, segue que os valores da função  $f$  crescem mais rapidamente (respectivamente, diminuem mais rapidamente) à medida que se avança na direção e sentido (respectivamente, sentido contrário) do vetor gradiente da função, isto é, do vetor

$$\nabla f(x, y) = 2 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad (11.10)$$

para cada  $(x, y) \in A$ .

Notemos que, neste exemplo, o vetor gradiente é constante.

Logo, das considerações acima, podemos concluir que a função cresce na direção e sentido do vetor (11.10) e decresce na direção e sentido oposto do vetor (11.10).

Logo pela ilustração abaixo podemos perceber que o máximo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $A$ , é atingido no ponto

$$P_0 \doteq \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

e o seu mínimo global (ou absoluto), ocorrerá ponto

$$P_1 \doteq (0, 3).$$

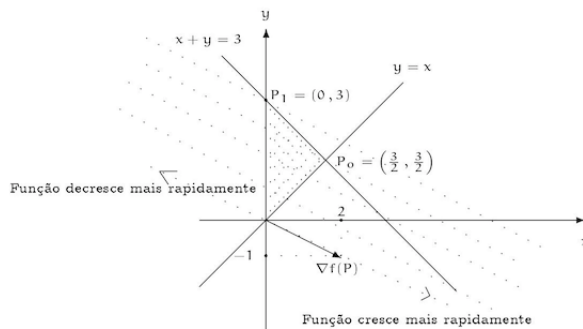
Vamos verificar que isto de fato ocorre.

Se  $(x, y) \in A$ , teremos (veja (11.7))

$$x + y \leq 3 \quad \text{e} \quad x \leq y.$$

Logo somando-se estas duas desigualdades, obteremos

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 3 + y \quad \text{e} \quad x \leq y, \\ \text{que é equivalente à: } x &\leq \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x - y \leq 0. \end{aligned} \quad (11.11)$$



Logo, para cada  $(x, y) \in A$ , teremos:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) &\stackrel{(11.8)}{=} (2x - y) - \left[2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right] \\ &= 2x - y - \frac{3}{2} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right) + (x - y) \\ &\stackrel{(11.11)}{\leq} 0, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } f(x, y) \leq f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \text{para todo } (x, y) \in A,$$

isto é, o ponto

$$P_0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \tag{11.12}$$

é um ponto de máximo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $A$ .

Notemos que, o valor máximo global de  $f$  no conjunto  $A$  será:

$$\begin{aligned} f(P_0) &\stackrel{(11.12)}{=} f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &\stackrel{(11.8)}{=} 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Agora vamos verificar que o ponto

$$P_1 \doteq (0, 3)$$

é ponto de mínimo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $A$ .

Notemos que, para  $(x, y) \in A$ , teremos

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(0, 3) &\stackrel{(11.8)}{=} 2x - y - [2 \cdot 0 - 3] \\ &= 2x - y + 3 \\ &= 3x + (3 - x - y) \\ &\stackrel{\text{de (11.7) temos: } x \geq 0 \text{ e } 3 - x - y \geq 0}{\geq} 0. \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } f(x, y) \geq f(0, 3), \quad \text{para todo } (x, y) \in A,$$

isto é, o ponto

$$P_1 = (0, 3) \quad (11.13)$$

é um ponto de mínimo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $A$ .

O valor de mínimo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $A$ , será:

$$\begin{aligned} f(P_1) &\stackrel{(11.13)}{=} f(0, 3) \\ &\stackrel{(11.8)}{=} 2 \cdot 0 - 3 \\ &= -3, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

**Observação 11.1.3** No Exemplo 11.1.2 acima, também podemos observar que as curvas de nível associadas à função  $f$ , são as retas

$$2x - y = k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{R}.$$

Logo se "andarmos" na direção perpendicular às essas retas, teremos as maiores variações da função  $f$ , mais precisamente, maior crescimento ou maior decrescimento da função  $f$ .

A direção perpendicular às retas

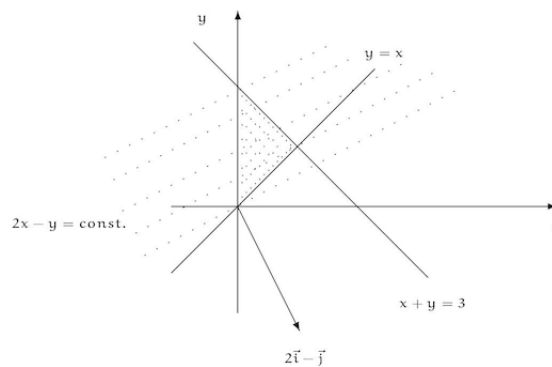
$$2x - y = f(x, y) = k$$

(que são as curvas de nível associadas à função  $f$ ) é dada pelo vetor

$$(2, -1) \in \mathbb{R}^2,$$

isto é, a direção do vetor gradiente da função  $f$  (veja (11.10)) que, neste caso, é um vetor constante.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Nosso objetivo a seguir, será encontrar todos os pontos de máximos e/ou mínimos locais (ou relativos) de uma função de várias variáveis reais, a valores reais.

Para começar a encontrar tais pontos de máximos ou mínimos locais (ou relativos) de uma função a valores reais, de  $n$ -variáveis reais, temos o:

**Teorema 11.1.1** *Sejam  $A$  um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que tem máximo ou mínimo local (ou relativo) no ponto  $P_0 \in A$ .*

*Se as derivadas parciais de 1.a ordem da  $f$  existirem no ponto  $P_0$ , então elas deverão ser iguais a zero neste ponto, isto é,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0 \quad (11.14)$$

para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , ou seja,

$$\nabla f(P_0) = 0. \quad (11.15)$$

### Demonstração:

Exibiremos a demonstração para o caso em que o ponto  $P_0$  é um ponto de máximo local (ou relativo) da função  $f$ .

O caso em que o ponto  $P_0$  é um ponto de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ , fica demonstrado a partir deste tomando-se a função

$$g \doteq -f.$$

Os detalhes deste caso serão deixados como exercício para o leitor.

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , consideremos  $\vec{e}_i$  o vetor unitário do  $\mathbb{R}^n$ , que possui a  $i$ -ésima coordenada igual a 1 e as restantes iguais a 0 (ou seja, o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ ).

Como o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $P_0 \in A$  é um ponto de máximo local (ou relativo) da função  $f$ , pela Definição 11.1.2, podemos encontrar uma bola aberta

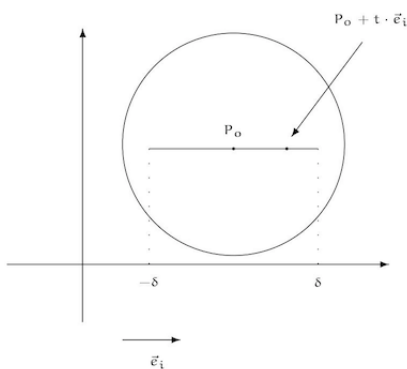
$$B_\delta \doteq B_\delta(P_0),$$

centrada em  $P_0$  e de raio  $\delta > 0$ , que podemos supor estar contida no conjunto  $A$  (que é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ), de modo que

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \text{para } P \in B_\delta. \quad (11.16)$$

Sabemos que, para  $t \in (-\delta, \delta)$ , temos (veja a figura abaixo):

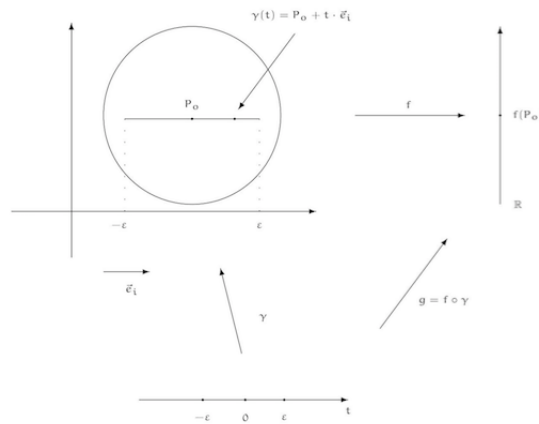
$$P_0 + t \cdot \vec{e}_i \in B_\delta \subseteq A.$$



Desse modo, a função a valores reais, de uma variável real,  $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g(t) \doteq f(P_0 + t \cdot \vec{e}_i), \quad \text{para cada } t \in (-\delta, \delta) \quad (11.17)$$

estará bem definida (veja a figura abaixo).



Observemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \stackrel{(11.17)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t \cdot e_i) - f(P_0)}{t} \\ \stackrel{\text{Definição 8.1.2}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0),$$

ou seja, a função  $g$  possui derivada em  $t = 0$  e, além disso, temos

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0). \quad (11.18)$$

Além do mais, para  $t \in (-\delta, \delta)$ , teremos:

$$g(t) \stackrel{(11.17)}{=} f(P_0 + t \cdot e_i) \\ \stackrel{(11.16)}{\leq} f(P_0) \\ \stackrel{(11.17)}{=} g(0).$$

pois, por hipótese, a função  $f$  tem um máximo local no ponto  $P_0$ .

Logo, em  $t = 0$ , a função de uma variável real, a valores reais,  $g$  tem um ponto de máximo local.

Assim, como visto na disciplina Cálculo I, devemos ter

$$g'(0) = 0.$$

Portanto, de (11.18), segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0,$$

para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , completando a demonstração do resultado. □

#### Observação 11.1.4

1. Em outras palavras, o Teorema 11.1.1 acima nos diz que se uma função atinge um máximo ou mínimo local (ou relativo, ou seja, um extremo local ou relativo) em um ponto pertencente ao interior do seu domínio e suas derivadas parciais existem neste ponto, então o gradiente da função deverá ser nulo neste ponto.

Deste modo, o Teorema 11.1.1 fornece uma condição necessária para que um ponto, pertencente ao interior do domínio de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, que tenha derivadas parciais no seu domínio, seja um extremo local (ou relativo) da função.

2. Como veremos na Observação 11.1.5 a seguir, esta condição pode não ser suficiente, isto é, existem funções que têm o gradiente nulo num ponto e a mesma não tem extremo local (ou relativo) nesse ponto.

Baseado no item 1. da Observação 11.1.4 acima, introduziremos a:

**Definição 11.1.3** Suponhamos que  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seja diferenciável em  $A$ , onde o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Os pontos  $P \in A$  tais que

$$\nabla f(P) = 0 \quad (11.19)$$

serão chamados de pontos críticos da função  $f$  no conjunto  $A$ .

Todo cuidado é pouco, como mostra a:

**Observação 11.1.5** Notemos que nem todo ponto crítico de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, é ponto de máximo ou mínimo local (ou relativo) da função.

Para ver isto, basta considerar a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 - y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (11.20)$$

A função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  (pois é uma função polinomial) e seu gradiente será

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &\stackrel{(9.54)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \vec{e}_2 \\ &\stackrel{(11.20)}{=} (2x, -2y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (11.21)$$

que somente se anula no ponto

$$P_0 \doteq (0, 0).$$

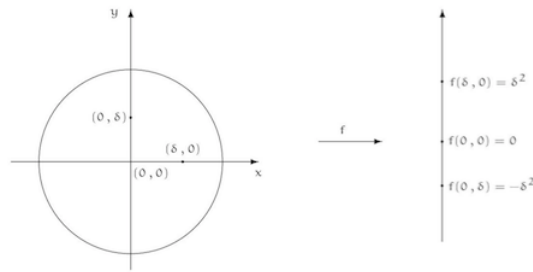
Porém este ponto não é ponto de máximo ou de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ .

De fato, para todo  $\delta > 0$ , teremos

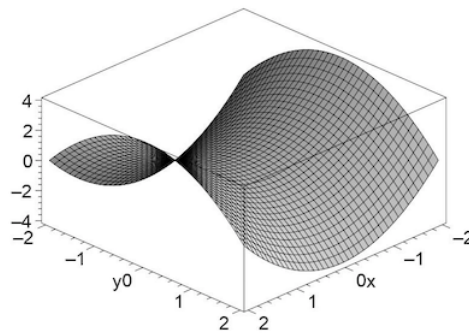
$$\begin{aligned} f(0, \delta) &\stackrel{(11.20)}{=} -\delta^2 \\ &< 0 \\ &< \delta^2 \\ &\stackrel{(11.20)}{=} f(\delta, 0) \end{aligned} \quad (11.22)$$

mostrando que, em qualquer bola aberta de centro no ponto  $P_0 = (0, 0)$  e raio  $\delta > 0$ , existem pontos nessa bola aberta, cujos valores da função ficam abaixo ou acima do valor da função  $f$  no ponto  $P_0$ , mostrando que no ponto  $P_0 = (0, 0)$  a função  $f$  não tem um extremos locais (ou relativos).

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



A representação geométrica do gráfico da função  $f$  é o parabolóide hiperbólico, isto é, a sela, representada na figura abaixo.



Neste caso temos a:

**Definição 11.1.4** Um ponto crítico de uma função que não é ponto de máximo e nem de mínimo local (ou relativo) será chamado de ponto de sela da função.

**Exemplo 11.1.3** A função introduzida na Observação 11.1.5 (dada por (11.20)), tem um ponto de sela no ponto

$$P_0 = (0, 0).$$

**Resolução:**

De fato, pois é um ponto crítico da função  $f$  que não é um ponto de máximo ou de mínimo local (ou relativo) da função  $f$  (veja (11.22)).

□

**Observação 11.1.6**

1. Observemos que um ponto crítico  $P_0$  de uma função  $f$ , é um ponto de sela da função  $f$  se, e somente se, em cada bola, que denotaremos por  $B_\delta$ , centrada no ponto  $P_0$  e raio  $\delta > 0$ , contida no domínio da função  $f$ , podemos encontrar pontos  $P_1$  e  $P_2$ , pertencentes a mesma, de modo que

$$f(P_1) < f(P_0) < f(P_2).$$

2. Notemos que, pelo Teorema 11.1.1, para localizar extremos locais (ou relativos) de uma função que tem as derivadas parciais de 1.ª ordem nos pontos interiores do seu domínio,



basta restringirmos nossa atenção aos pontos críticos da função  $f$ , ou seja, neste caso, os pontos de máximo ou mínimo locais (ou relativos) da função  $f$ , no interior do seu domínio, estarão entre os pontos críticos da função  $f$ .

Isto será de grande importância no estudo dos extremos locais (ou relativos) de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, como veremos a seguir.

## 11.2 Teste do hessiano

Os resultados a seguir nos fornecerão condições suficientes para decidir se um ponto crítico de uma função a valores reais, de várias variáveis reais, é um ponto de máximo, mínimo local (ou relativo) ou ponto de sela da função.

Apresentaremos primeiramente um resultado para funções a valores reais, de duas variáveis reais. Tal resultado é conhecido como teste do hessiano.

O caso de função a valores reais, de mais de duas variáveis reais, será tratado mais a frente (veja o Teorema K.1.2 do Apêndice K).

Antes, porém, introduziremos a:

**Definição 11.2.1** *Seja  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  em  $A$  onde  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $P \in A$ .*

*Definimos a matriz hessiana da função  $f$  no ponto  $P$ , indicada por  $Hess_f(P)$ , como sendo a seguinte matriz quadrada de ordem  $n$ :*

$$Hess_f(P) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{pmatrix}. \quad (11.23)$$

O determinante da matriz quadrada (11.23), será denotado por  $H_f(P)$  e denominado hessiano da função  $f$  no ponto  $P$ , isto é,

$$H_f(P) \doteq \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{vmatrix}. \quad (11.24)$$

### Observação 11.2.1

- Podemos dar a seguinte caracterização para a matriz hessiana associada a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , no ponto  $P \in A$ , onde está é de classe  $C^2$  em um subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ :

Começamos considerando a função gradiente da função  $f$ , isto é, a função  $\nabla f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\nabla f(P) \doteq \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right). \quad (11.25)$$

Como  $f \in C^2(A; \mathbb{R})$ , segue que  $\nabla f \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ .

Em particular, existe a matriz jacobiana associada à transformação  $\nabla f$ , no ponto  $P$ , a saber:

$$J_{\nabla f}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (P) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (P) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (P) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (P) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (P) \end{pmatrix}$$

Teorema de Schwarz, ou seja, (8.78)

$$\stackrel{(11.23)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{pmatrix}$$

$\stackrel{(11.23)}{=} \text{Hess}_f(P).$

Conclusão:

$$\text{Hess}_f(P) = J_{\nabla f}(P), \quad \text{para cada } P \in A. \quad (11.26)$$

2. Suponhamos que a função  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  no subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $p \in A$ .

Neste caso a matriz hessiana da função  $f$ , no ponto  $P$ , será dada por:

$$\text{Hess}_f(P) \stackrel{(11.23), \text{ com } n=2}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix}$$

Teorema de Schwarz, ou seja, (8.78)

$$\stackrel{(11.23)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix}. \quad (11.27)$$

Logo, de (11.27), segue que a matriz quadrada  $\text{Hess}_f(P)$  é uma matriz simétrica, isto é,

$$[\text{Hess}_f(P)]^t = \text{Hess}_f(P),$$

onde  $\underline{B}^t$  denota a matriz transposta associada à matriz  $\underline{B}$ .

Além disso, o hessiano da função  $f$ , no ponto  $\underline{P}$ , será dado por:

$$\begin{aligned} H_f(\underline{P}) &\stackrel{(11.27)}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{P}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underline{P}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underline{P}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{P}) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{P}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{P}) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underline{P}) \right)^2. \end{aligned} \quad (11.28)$$

3. Em geral, se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a função é de classe  $C^2$  em um subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  segue, do Teorema de Schwarz (ou seja, o Teorema 8.2.1), que a matriz quadrada  $\text{Hess}(\underline{P})$  é uma matriz simétrica, isto é,

$$[\text{Hess}_f(\underline{P})]^t = \text{Hess}_f(\underline{P}). \quad (11.29)$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

4. Notemos que, se  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  e  $\underline{C}$  são números reais, tais que

$$\underline{A} \underline{C} - \underline{B}^2 > 0 \quad (11.30)$$

então, segue que

$$\underline{A}, \underline{C} \neq 0.$$

De fato, caso contrário, se

$$\underline{A} = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{C} = 0,$$

deveríamos ter

$$\underbrace{\underline{A} \underline{C}}_{=0} - \underline{B}^2 = -\underline{B}^2 \leq 0,$$

contrariando (11.30).

5. Notemos também que, se  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  e  $\underline{C}$  são números reais tais que

$$\underline{A} \underline{C} - \underline{B}^2 > 0 \quad \text{e} \quad \underline{A} > 0, \quad (11.31)$$

então deveremos ter

$$\underline{C} > 0.$$

De fato, caso contrário,

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad \underline{C} \leq 0, \\ &\text{de (11.31), segue que} \quad \underline{A} \underline{C} \leq 0 \\ &\text{e assim teremos:} \quad \underbrace{\underline{A} \underline{C}}_{\leq 0} - \underbrace{\underline{B}^2}_{\leq 0} \leq 0, \end{aligned}$$

o que contradiz (11.31).

De modo análogo, se

$$AC - B^2 > 0 \quad e \quad A < 0 \quad (11.32)$$

então, deveremos ter

$$C < 0.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

6. No caso

$$n \doteq 2,$$

considerando a função  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  no subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ , se

$$H_f(P) > 0 \quad (11.33)$$

teremos, por (11.28), que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \right)^2 = H_f(P) \stackrel{(11.33)}{>} 0. \quad (11.34)$$

Definindo-se

$$A \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad C \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \quad e \quad B \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad (11.35)$$

de (11.34), segue que

$$AC - B^2 > 0.$$

Assim, dos itens 4. e 5. acima, segue que

$$\begin{aligned} & A > 0, \\ & \text{se, e somente se,} \quad C > 0, \\ & \text{que, de (2.35), é equivalente à:} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0 \\ & \text{se, e somente se,} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) > 0. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Para classificar os pontos críticos de funções a valores reais, duas variáveis reais, de classe  $C^2$  em um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , temos o:

**Teorema 11.2.1 (teste do hessiano - caso  $n=2$ )**

Seja  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2$  uma função de classe  $C^2$  em um subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Suponhamos que  $P_0 \in A$  é um ponto crítico da função  $f$  isto é,

$$\nabla f(P_0) = 0. \quad (11.37)$$

Então:

1. se

$$H_f(P_0) > 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0, \quad (11.38)$$

então o ponto  $P_0$  será um ponto de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ .

2. se

$$H_f(P_o) > 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) < 0, \quad (11.39)$$

então o ponto  $\underline{P}_o$  será um ponto de máximo local (ou relativo) da função  $\underline{f}$ .

3. se

$$H_f(P_o) < 0, \quad (11.40)$$

então o ponto  $\underline{P}_o$  será um ponto de sela da função  $\underline{f}$ .

4. se

$$H_f(P_o) = 0, \quad (11.41)$$

não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico  $\underline{P}_o$  da função  $\underline{f}$ .

**Demonstração:****Do item 1. :**

De (11.25), temos que

$$\begin{aligned} \nabla f(P_o) &= 0, \\ \text{se, e somente se, } \frac{\partial f}{\partial x}(P_o) &= \frac{\partial f}{\partial y}(P_o) = 0. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Como o conjunto  $\underline{A}$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  e as derivadas parciais, até segunda ordem, da função  $\underline{f}$  são contínuas no conjunto  $\underline{A}$  (pois a função  $\underline{f}$  é de classe  $C^2$  no conjunto  $\underline{A}$ ),

$$\begin{aligned} H_f(P_o) &> 0, \\ e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) &> 0, \end{aligned}$$

do item 8. da Proposição 7.1.1, segue que existe uma bola aberta

$$\mathcal{B}_\delta \doteq \mathcal{B}_\delta(P_o),$$

centrada no ponto

$$P_o \doteq (x_o, y_o)$$

e de raio  $\delta > 0$ , de modo que

$$H_f(P) > 0 \quad (11.43)$$

$$e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0, \quad (11.44)$$

para todo  $P \doteq (x, y) \in \mathcal{B}_\delta$ .

Consideremos

$$h \doteq x - x_o, \quad (11.45)$$

$$e \quad k \doteq y - y_o, \quad (11.46)$$

$$\text{onde } P \doteq (x, y) \in \mathcal{B}_\delta,$$

$$\text{ou seja, } P = (x, y)$$

$$\stackrel{(11.45) \text{ e } (11.46)}{=} (x_o + h, y_o + k) \in \mathcal{B}_\delta \subseteq A.$$

A fórmula de Taylor de ordem  $\underline{1}$  para a função  $f$ , no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ , (veja (I.18), com  $n = 1$ ) nos fornecerá:

$$\begin{aligned} f(P) &= f(x, y) \\ &= f(P_o) + \frac{1}{1!} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(P_o) h + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o) k \right] + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{P}) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{P}) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{P}) k^2 \right] \\ &\stackrel{\frac{\partial f}{\partial x}(P_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_o) \stackrel{(11.42)}{=} 0}{=} f(P_o) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{P}) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{P}) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{P}) k^2 \right], \end{aligned} \quad (11.47)$$

onde o ponto  $\bar{P} \in \mathcal{B}_\delta$ , será da forma

$$\begin{aligned} \bar{P} &= (\bar{x}, \bar{y}) \\ &\doteq (x_o + c h, y_o + c k), \end{aligned}$$

para algum  $c \in (0, 1)$ .

Definamos

$$A \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{P}) \stackrel{(11.44)}{>} 0, \quad (11.48)$$

$$B \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{P}), \quad (11.49)$$

$$C \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{P}). \quad (11.50)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(11.43)}{<} H_f(\bar{P}) \\ &\stackrel{(11.28)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{P}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{P}) - \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{P}) \right]^2 \\ &\stackrel{(11.48), (11.49) \text{ e } (11.50)}{=} A C - B^2. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Para

$$k \neq 0,$$

subsituindo-se (11.48), (11.49) e (11.50), na expressão (11.47), obteremos:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_o, y_o) &= f(P) - f(P_o) \\ &\stackrel{(11.47), (11.48), (11.49) \text{ e } (11.50)}{=} \frac{1}{2} \left[ A h^2 + 2 B h k + C k^2 \right] \end{aligned} \quad (11.52)$$

$$\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{k^2}{2} \left[ A \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 2 B \frac{h}{k} + C \right]. \quad (11.53)$$

Considerando-se

$$v \doteq \frac{h}{k} \quad (11.54)$$

teremos que (11.53), será equivalente a:

$$f(x, y) - f(x_o, y_o) = \frac{k^2}{2} \left[ A v^2 + 2 B v + C \right]. \quad (11.55)$$

Logo quem determina o sinal da expressão à esquerda de (11.55), é o sinal da expressão à direita da mesma.

Como

$$\begin{aligned} k &\neq 0, \\ \text{temos que } \frac{k^2}{2} &> 0, \end{aligned} \quad (11.56)$$

ou seja, quem determinará o sinal da expressão à esquerda de (11.55) será o sinal da expressão:

$$A v^2 + 2 B v + C. \quad (11.57)$$

Observemos que o discriminante associado a equação do 2.º grau

$$\begin{aligned} A v^2 + 2 B v + C &= 0, \\ \text{é dado por } \Delta &= (2 B)^2 - 4 A C \\ &= 4 (B^2 - A C) \\ &\stackrel{(11.51)}{=} -4 H(\bar{P}) \\ &\stackrel{(11.43)}{<} 0. \end{aligned} \quad (11.58)$$

Logo, a parábola

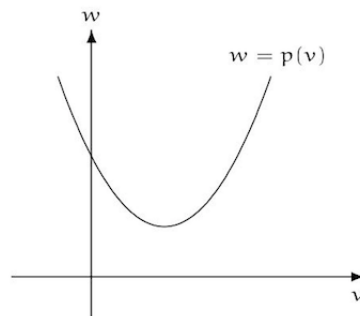
$$p(v) \doteq A v^2 + 2 B v + C, \quad \text{para cada } v \in \mathbb{R},$$

tem concavidade voltada para cima (pois, de (11.48), temos que  $A > 0$ ) e não possui raízes reais (pois, de (11.58), temos que  $\Delta < 0$ ).

Portanto

$$p(v) > 0, \quad \text{para } v \in \mathbb{R}. \quad (11.59)$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Portanto, se  $k \neq 0$ , temos:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\stackrel{(11.55)}{=} \frac{k^2}{2} [A v^2 + 2 B v + C] \\ &= \underbrace{\frac{k^2}{2}}_{\stackrel{(11.56)}{>} 0} \underbrace{p(v)}_{\stackrel{(11.59)}{>} 0} > 0, \\ \text{ou seja, } f(x, y) - f(x_0, y_0) &> 0 \quad \text{para } (x, y) \in \mathcal{B}_\delta. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Notemos que, se

$$k = 0$$

teremos, de (11.47), que:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\stackrel{(11.52)}{=} \frac{1}{2} \underbrace{A}_{\stackrel{(11.48)}{> 0}} h^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{11.61}$$

Portanto, de (11.60) e (11.61), segue que para todo  $(x, y) \in \mathcal{B}_\delta$ , teremos

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\geq 0, \\ \text{isto é, } f(x, y) &\geq f(x_0, y_0) \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathcal{B}_\delta, \end{aligned}$$

mostrando, pela Definição 11.1.2, que a função  $f$  tem um mínimo local (ou relativo) no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , completando a demonstração 1. .

**Do item 2.:**

Neste caso, consideramos a função  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g(x, y) \doteq -f(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in A.$$

Logo teremos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P_0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) \stackrel{(11.39)}{>} 0$$

e o hessiano da função  $g$  é igual ao hessiano da função  $f$  em cada ponto do conjunto  $A$ .

Deixaremos a verificação destas afirmações como exercício para o leitor.

Portanto, pelo item 1. deste resultado, segue que a função  $g$  terá um ponto de mínimo local (ou relativo) no ponto  $\underline{P}_0$ , conseqüentemente, a função

$$f = -g,$$

terá um ponto de máximo local (ou relativo) no ponto  $\underline{P}_0$ , completando a demonstração do item 2. .

**Do item 3.:**

Dado

$$\vec{v} \doteq (h, k),$$

consideremos a curva parametrizada  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\doteq P_0 + t \cdot \vec{v} \\ &= (x_0 + t h, y_0 + t k), \quad \text{para cada } t \in (-\delta, \delta) \end{aligned} \tag{11.62}$$

e a função  $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{v}}(t) &\doteq f[\gamma(t)] \\ &\stackrel{(11.62)}{=} f(P_0 + t \cdot \vec{v}) \\ &= f(x_0 + h t, y_0 + k t) \end{aligned} \tag{11.63}$$

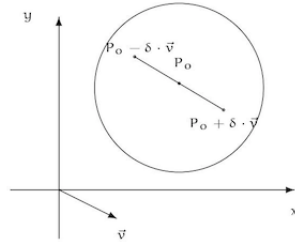
para cada  $t \in (-\delta, \delta)$  (delta obtido como na demonstração do item 1. - veja a figura abaixo).



Notemos que a curva parametrizada  $\underline{\gamma}$  é de classe  $C^\infty$  em  $(-\delta, \delta)$  e, além disso, temos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &\stackrel{(11.62)}{=} (h, k) \\ &= \vec{v}, \end{aligned} \quad (11.64)$$

$$\begin{aligned} \text{em particular, teremos: } \gamma(0) &\stackrel{(11.62), \text{ com } t=0}{=} P_0 \\ \text{e } \gamma'(0) &= \vec{v}. \end{aligned} \quad (11.65)$$



Observe que a função

$$\varphi_{\vec{v}},$$

dada por (11.63), é a restrição da função  $f$  ao segmento de reta de  $\mathbb{R}^2$  cujos extremos são pontos (veja figura acima)

$$P_0 - \delta \cdot \vec{v} \quad \text{e} \quad P_0 + \delta \cdot \vec{v}$$

Esta restrição nos fornece a informação de como se comporta o gráfico da função  $f$ , quando interceptado por um plano vertical paralelo ao vetor  $\vec{v}$  e passando pelo ponto  $(P_0, f(P_0))$ .

Usando a regra da cadeia (isto é, Teorema 9.1.1), teremos

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{v}}'(t) &\stackrel{(11.63)}{=} \frac{d}{dt}[f \circ \gamma](t) \\ &= \nabla f[\gamma(t)] \bullet \gamma'(t) \end{aligned} \quad (11.66)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(9.13)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)] \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t)] \frac{dy}{dt}(t) \\ &\stackrel{x(t)=x_0+th \text{ e } y(t)=y_0+tk}{=} \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)] h + \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t)] k. \end{aligned} \quad (11.67)$$

$$\begin{aligned} \text{Fazendo } t = 0 \text{ em (11.66), teremos: } \varphi_{\vec{v}}'(0) &= \nabla f[\gamma(0)] \bullet \gamma'(0) \\ &\stackrel{(11.65)}{=} \nabla f(P_0) \bullet \vec{v}. \end{aligned} \quad (11.68)$$

Derivando a equação (11.67), em relação a  $t$ , e utilizando novamente a regra da cadeia (isto é, o

Teorema 9.1.1), obteremos:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\vec{v}}''(t) &\stackrel{(11.67)}{=} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)] h + \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t)] k \right] \\
 &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \circ \gamma \right) (t) \right] h + \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} \circ \gamma \right) (t) \right] k \\
 &\stackrel{(9.13)}{=} \left[ \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) [\gamma(t)] \bullet \gamma'(t) \right] h + \left[ \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) [\gamma(t)] \bullet \gamma'(t) \right] k \\
 &\stackrel{(11.64)}{=} \left[ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\gamma(t)], \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}[\gamma(t)] \right) \bullet (h, k) \right] h + \left[ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}[\gamma(t)], \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[\gamma(t)] \right) \bullet (h, k) \right] k \\
 &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\gamma(t)] h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}[\gamma(t)] k \right] h + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}[\gamma(t)] h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[\gamma(t)] k \right] k \\
 &\stackrel{(8.78)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\gamma(t)] h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}[\gamma(t)] h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[\gamma(t)] k^2.
 \end{aligned}$$

Fazendo  $t = 0$  na expressão acima, obteremos

$$\varphi_{\vec{v}}''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) k^2. \quad (11.69)$$

Definindo-se

$$\begin{aligned}
 A &\doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0), \\
 B &\doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\
 \text{e } C &\doteq \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)
 \end{aligned} \quad (11.70)$$

teremos

$$\begin{aligned}
 B^2 - A C &\stackrel{(11.70)}{=} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \right]^2 - \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) \right] \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \right] \\
 &\stackrel{(11.28)}{=} H_f(P_0) \\
 &\stackrel{(11.40)}{<} 0.
 \end{aligned} \quad (11.71)$$

Consideremos a função  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned}
 Q(\vec{v}) &= Q(h, k) \\
 &\doteq \varphi_{\vec{v}}''(0) \\
 &\stackrel{(11.70) \text{ e } (11.69)}{=} A h^2 + 2 B h k + C k^2
 \end{aligned} \quad (11.72)$$

para  $\vec{v} = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ .

**Afirmção (I):** existem vetores unitários  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^2$ , de modo que

$$\varphi_{\vec{u}}''(0) \quad \text{e} \quad \varphi_{\vec{v}}''(0)$$

têm sinais opostos.

Se isso for verdade, pelo teste da derivada segunda para funções a valores reais, de uma variável real (visto na disciplina de Cálculo I), a restrição da função  $f$  a uma direção terá um mínimo local no ponto  $\underline{P}_0$  e na outra direção terá um máximo local no ponto  $\underline{P}_0$ .

Com isto temos que existem pontos, arbitrariamente próximos, do ponto  $\underline{P}_0$ , cujos valores da função  $f$  são maiores do que o valor  $f(\underline{P}_0)$  (na direção de mínimo local) e outros pontos onde valores são menores do que o valor  $f(\underline{P}_0)$  (na direção de máximo local).

Isto é, pela Definição 11.1.4, o ponto  $\underline{P}_0$  será um ponto sela para a função  $f$ , como queríamos demonstrar.

Para mostrarmos a afirmação (I) acima, consideraremos os seguintes casos:

1.o Caso: se

$$A = C = 0. \quad (11.73)$$

Neste caso, como

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(11.40)}{>} H_f(\underline{P}_0) \\ &\stackrel{(2.72)}{=} B^2 - AC, \\ &\stackrel{(11.73)}{=} B^2, \end{aligned}$$

$$\text{o que implicará que: } B \neq 0. \quad (11.74)$$

Assim

$$\begin{aligned} Q(1, -1) &\stackrel{(11.72)}{=} A \cdot (1)^2 + 2 \cdot B \cdot 1 \cdot (-1) + C \cdot (-1)^2 \\ &\stackrel{(11.73)}{=} -2B, \\ Q(1, 1) &\stackrel{(11.72)}{=} A \cdot (1)^2 + 2 \cdot B \cdot 1 \cdot 1 + C \cdot 1^2 \\ &\stackrel{(11.73)}{=} 2B, \end{aligned}$$

e assim de (11.74), segue que:  $Q(1, -1)$  e  $Q(1, 1)$  têm sinais opostos.

Neste caso considerando-se

$$\begin{aligned} \vec{u} &\doteq \frac{(1, -1)}{\|(1, -1)\|} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1, -1), \\ \vec{v} &\doteq \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1), \end{aligned}$$

teremos a conclusão da afirmação (I).

2.o Caso: se

$$A = 0 \quad \text{e} \quad C \neq 0. \quad (11.75)$$

Neste caso, como

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(11.40)}{>} H_f(\underline{P}_0) \\ &\stackrel{(2.72)}{=} B^2 - AC \\ &\stackrel{(11.75)}{=} B^2, \end{aligned}$$

$$\text{o que implicará que: } B \neq 0. \quad (11.76)$$

Assim

$$\begin{aligned} Q\left(-\frac{C}{4B}, 1\right) &\stackrel{(11.72)}{=} A \cdot \left(-\frac{C}{4B}\right)^2 + 2 \cdot B \cdot \left(-\frac{C}{4B}\right) \cdot 1 + C \cdot 1^2 \\ &\stackrel{(11.75)}{=} \frac{C}{2}, \\ Q\left(-\frac{3C}{2B}, 1\right) &\stackrel{(11.72)}{=} A \cdot \left(-\frac{3C}{2B}\right)^2 + 2 \cdot B \cdot \left(-\frac{3C}{2B}\right) \cdot 1 + C \cdot 1^2 \\ &\stackrel{(11.75)}{=} -2C, \end{aligned}$$

ou seja, de (11.75), segue que  $Q\left(-\frac{C}{4B}, 1\right)$  e  $Q\left(-\frac{3C}{2B}, 1\right)$  têm sinais opostos.

Neste caso, considerando-se:

$$\vec{u} \doteq \frac{\left(-\frac{C}{4B}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{C}{4B}, 1\right)\right\|},$$

e

$$\vec{v} \doteq \frac{\left(-\frac{3C}{2B}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{3C}{2B}, 1\right)\right\|}$$

teremos a conclusão da afirmação (I).

**3.º Caso :** se

$$A \neq 0. \tag{11.77}$$

Temos que

$$\begin{aligned} Q(1, 0) &\stackrel{(11.72)}{=} A \cdot (1)^2 + 2 \cdot B \cdot 1 \cdot 0 + C \cdot 0^2 \\ &= A, \\ Q\left(\frac{B}{A}, -1\right) &\stackrel{(11.72)}{=} A \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^2 + 2 \cdot B \cdot \left(\frac{B}{A}\right) \cdot (-1) + C \cdot (-1)^2 \\ &= \underbrace{(B^2 - AC)}_{\stackrel{(2.72)}{=} H_f(P_0) < 0} A^{-1}, \end{aligned}$$

isto é,  $Q(1, 0)$  e  $Q\left(\frac{B}{A}, -1\right)$  têm sinais opostos. (11.78)

Neste caso tomando-se:

$$\begin{aligned} \vec{u} &\doteq \frac{(1, 0)}{\|(1, 0)\|} \\ &= (1, 0), \\ \vec{v} &\doteq \frac{\left(\frac{B}{A}, -1\right)}{\left\|\left(\frac{B}{A}, -1\right)\right\|} \end{aligned}$$

teremos a conclusão da afirmação (I).

Ou seja, em qualquer um dos casos é sempre possível encontrar dois vetores unitários  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , de modo que

$$\varphi_{\vec{u}}''(0) \quad \text{e} \quad \varphi_{\vec{v}}''(0)$$

têm sinais opostos, mostrando que afirmação (I) é verdadeira e completando a demonstração do item 3. .

**Do item 4.:**

Consideremos as seguintes funções:  $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(x, y) \doteq x^4 + y^4, \quad g(x, y) \doteq -x^4 - y^4 \quad \text{e} \quad h(x, y) \doteq x^4 - y^4, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Notemos que o ponto

$$P_o \doteq (0, 0)$$

é um ponto crítico para as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ .

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Além disso, os hessianos das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  também se anulam no ponto  $P_o = (0, 0)$ .

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Entretanto, a origem é um ponto mínimo local (na verdade global) para a função  $f$ , um ponto máximo local (na verdade global) para a função  $g$  e um ponto de sela para a função  $h$ , isto é, nada podemos concluir nesta situação.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercícios para o leitor.

Isto completa a demonstração do resultado. □

**Observação 11.2.2**

1. *Do item 6. da Observação 11.2.1, segue que podemos demonstrar um resultado equivalente ao Teorema 11.2.1 acima, trocando-se a hipótese*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o) > 0$$

em (11.38) ou (11.39), por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o) > 0,$$

que as respectivas conclusões permanecerão válidas, isto é, vale o seguinte resultado:

Seja  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2$  uma função de classe  $C^2$  definida em um subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Suponhamos  $P_o \in A$  é um ponto crítico de  $f$  isto é,

$$\nabla f(P_o) = 0.$$

Então:

(a) se

$$H_f(P_o) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o) > 0, \tag{11.79}$$

então o ponto  $P_o$  será um ponto de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ .

(b) se

$$H_f(P_0) > 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) < 0, \quad (11.80)$$

então o ponto  $\underline{P}_0$ , será um ponto de máximo local (ou relativo) da função  $\underline{f}$ .

(c) se

$$H_f(P_0) < 0, \quad (11.81)$$

então o ponto  $\underline{P}_0$  será um ponto de sela da função  $\underline{f}$ .

(d) se

$$H_f(P_0) = 0,$$

não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico  $\underline{P}_0$ .

2. A equação (11.69), pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{v}}''(0) &\stackrel{(11.69)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) k^2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) h + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) k \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) k + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \right) \\ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \right) \\ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= [\text{Hess}_f(P_0)\vec{v}] \cdot \vec{v} \\ \text{isto é, } \varphi_{\vec{v}}''(0) &= [\text{Hess}_f(P_0)\vec{v}] \cdot \vec{v}, \quad (11.82) \end{aligned}$$

onde  $\cdot$  denota o produto de matrizes.

3. No Apêndice K (veja o Teorema K.1.2), podemos encontrar um modo de classificar pontos críticos de funções de duas ou mais variáveis, a valores reais, utilizando-se um elemento importante associado a matrizes quadradas, denominado **autovalores** (no caso associados à matriz hessiana da função em questão, calculada em cada um dos pontos críticos da mesma).

### 11.3 Aplicando o teste do hessiano

Nesta seção consideraremos alguns exemplos para aplicarmos os resultado desenvolvidos na seção anterior.

Começaremos pelo:

**Exemplo 11.3.1** Classifique os pontos críticos da função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (11.83)$$

isto é, encontrar todos os pontos críticos da função  $f$  e dizer, em cada um destes pontos, se a função tem ponto de máximo local (ou relativo), um ponto de mínimo local (ou relativo) ou um ponto sela.

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Além disso, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &\stackrel{(11.83)}{=} \frac{\partial}{\partial x} (x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2) \\ &= 4x^3 - 4x \end{aligned} \quad (11.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &\stackrel{(11.83)}{=} \frac{\partial}{\partial y} (x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2) \\ &= 4y^3 - 4y, \end{aligned} \quad (11.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(11.84)}{=} \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 - 4x) \\ &= 12x^2 - 4, \end{aligned} \quad (11.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &\stackrel{(11.85)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(11.85)}{=} \frac{\partial}{\partial y} (4y^3 - 4y) \\ &= 12y^2 - 4, \end{aligned} \quad (11.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \stackrel{(2.8)}{=} \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 - 4x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11.88)$$

Vamos procurar os pontos críticos da função  $f$ , ou seja,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , de modo que:

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \nabla f(x, y) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{(11.84) \text{ e } (11.85)}{=} (4x^3 - 4x, 4y^3 - 4y), \\ \text{ou seja,} \quad &\begin{cases} 0 = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) \\ 0 = 4y^3 - 4y = 4y(y-1)(y+1) \end{cases}, \\ \text{ou ainda,} \quad &\begin{cases} x = 0, 1, -1 \\ y = 0, 1, -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (11.89)$$

que nos fornece as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} P_1 &\doteq (0, 0), & P_2 &\doteq (0, 1), & P_3 &\doteq (0, -1), \\ P_4 &\doteq (1, 0), & P_5 &\doteq (1, 1), & P_6 &\doteq (1, -1), \\ P_7 &\doteq (-1, 0), & P_8 &\doteq (-1, 1), & P_9 &\doteq (-1, -1). \end{aligned} \quad (11.90)$$

A matriz hessiana associada à função  $f$ , no ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , será dada por:

$$\begin{aligned} \text{Hess}_f(x, y) &\stackrel{(11.27)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(11.86), (11.87) \text{ e } (11.88)}{=} \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11.91)$$

Logo o hessiano da função  $f$  em  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , será dado por:

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &\stackrel{(11.91)}{=} \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix} \\ &= 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1). \end{aligned} \quad (11.92)$$

Com o teste do hessiano (ou seja, o Teorema 11.2.1) podemos montar a seguinte tabela:

ponto $\underline{P}$	valor de $H_f(P)$	valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)$	Classificação do ponto $\underline{P}$	valor de $f(P)$
$P_1 = (0, 0)$	$16 > 0$	$-4 < 0$	máximo local	0
$P_2 = (0, 1)$	$-32 < 0$		sela	-1
$P_3 = (0, -1)$	$-32 < 0$		sela	-1
$P_4 = (1, 0)$	$-32 < 0$		sela	-1
$P_5 = (1, 1)$	$64 > 0$	$8 > 0$	mínimo local	-2
$P_6 = (1, -1)$	$64 > 0$	$8 > 0$	mínimo local	-2
$P_7 = (-1, 0)$	$-32 < 0$		sela	-1
$P_8 = (-1, 1)$	$64 > 0$	$8 > 0$	mínimo local	-2
$P_9 = (-1, -1)$	$64 > 0$	$8 > 0$	mínimo local	-2

Observe que, pelo item 1. do Teorema 11.2.1, o ponto  $\underline{P}_1$  é um ponto de máximo local da função  $f$ , mas não é um máximo global da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .

De fato pois, por exemplo,

$$\begin{aligned} f(2, 0) &\stackrel{(11.83)}{=} 8 \\ &> 0 \\ &= f(0, 0) \\ &= f(P_1). \end{aligned}$$

Porém, os pontos de mínimo locais, a saber

$$P_5, P_6, P_8 \text{ e } P_9$$

são, na verdade, pontos de mínimo globais da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .



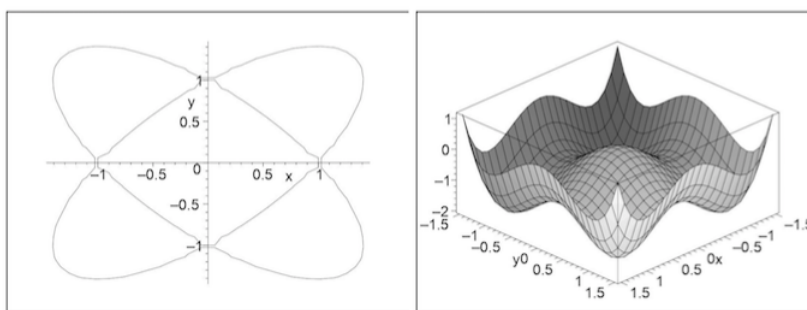
De fato, nestes pontos a função  $f$  terá o valor  $\underline{-2}$  (veja tabela acima) e para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\begin{aligned} f(x, y) + 2 &\stackrel{(11.83)}{=} x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2 \\ &= (x^4 - 2x^2 + 1) + (y^4 - 2y^2 + 1) \\ &= (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(x, y) \geq -2$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

isto é, os pontos de mínimo locais são, na verdade, pontos de mínimo globais da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ , mostrando a afirmação acima.

A figura abaixo à direita mostra a representação geométrica do gráfico da função  $f$  e a figura abaixo à esquerda mostra os pontos críticos da função  $f$  e a curva de nível  $\underline{-1}$  da função  $f$  (isto é, a curva de nível que contém todos os pontos de sela da função  $f$ ).



**Observação 11.3.1** O Teorema 11.2.1 só é válido em  $\mathbb{R}^2$ , isto é, para funções a valores reais, de duas variáveis reais.

Situações mais gerais (funções a valores reais, de duas ou mais variáveis) são tratadas no Apêndice K.

## 11.4 Encontrando máximo (ou mínimo) global

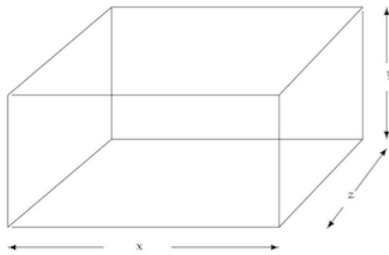
No Exemplo 11.4.1 considerado a seguir, o objetivo é encontrar o mínimo global (ou absoluto) da função no seu domínio.

Utilizaremos o teste do hessiano (ou seja, o Teorema 11.2.1) para classificar o único ponto crítico da função envolvida, que será um ponto de mínimo local (ou relativo).

O trabalho maior será mostrar que esse ponto de mínimo local (ou relativo) é, na verdade, um ponto de mínimo global (ou absoluto) da função no seu domínio.

**Exemplo 11.4.1** Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo reto cujo volume é  $V \text{ m}^3$  fixado.

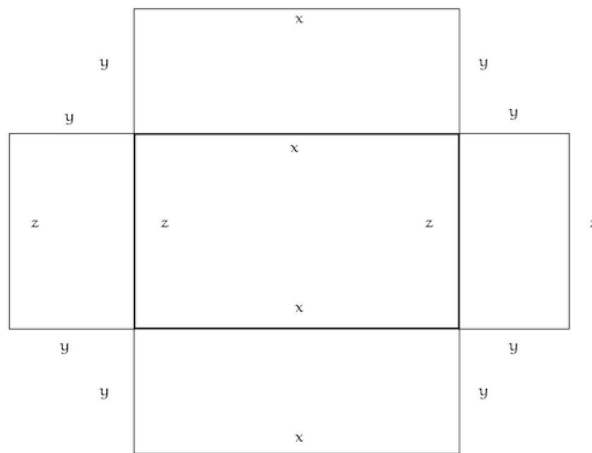
Determine as dimensões da caixa para que se gaste o mínimo de material possível, para construí-la.

**Resolução:**

Denotemos por  $x$  e  $z$  as dimensões da base da caixa e por  $y$  a sua altura, todos estes elementos dados em metros (como na figura abaixo).

A área total da caixa, que indicaremos por  $\mathcal{A}$  será igual a área lateral, juntamente com a área da base, do paralelepípedo reto, ou seja, será dada por:

$$\mathcal{A} \doteq 2yx + 2yz + xz \quad \text{para cada } x, y, z > 0. \quad (11.93)$$



Como, para cada  $x, y, z > 0$ , temos que

$$V = x y z \quad (11.94)$$

é dado (volume de um paralelepípedo reto), segue que, por exemplo,

$$z = \frac{V}{xy}, \quad \text{para cada } x, y > 0. \quad (11.95)$$

Substituindo-se (11.95) em (11.93), obteremos

$$\mathcal{A}(x, y) = 2xy + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y}, \quad \text{para cada } x, y > 0. \quad (11.96)$$

Notemos que a função  $\mathcal{A}$  é de classe  $C^\infty$  no conjunto  $\mathcal{R}$ , onde

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y > 0\} \\ &= (0, \infty) \times (0, \infty). \end{aligned} \quad (11.97)$$

Além disso, para cada  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}(x, y) \stackrel{(11.96)}{=} 2y - 2\frac{V}{x^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y}(x, y) \stackrel{(11.96)}{=} 2x - \frac{V}{y^2}, \quad (11.98)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}(x, y) \stackrel{(11.98)}{=} \frac{4V}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2}(x, y) \stackrel{(11.98)}{=} \frac{2V}{y^3}, \quad (11.99)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x \partial y}(x, y) \stackrel{(K.90)}{=} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y \partial x}(x, y) \stackrel{(11.98)}{=} 2 \quad (11.100)$$

Nosso problema se resume em achar o ponto de mínimo global da função  $\mathcal{A}$  no conjunto  $\mathcal{R}$ .

Observemos que a função  $\mathcal{A}$  é de classe  $C^\infty$  no conjunto  $\mathcal{R}$  (pois é uma função racional) e o conjunto  $\mathcal{R}$  não é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  (pois não é nem um subconjunto fechado e nem é limitado de  $\mathbb{R}^3$ ).

Logo não podemos garantir, até esse momento, que a função  $\mathcal{A}$  tem um mínimo global no conjunto  $\mathcal{R}$ .

O que faremos é encontrar os pontos críticos da função  $\mathcal{A}$ , no conjunto  $\mathcal{R}$ , e mostrar que em um deles a função terá um mínimo global (absoluto) no conjunto  $\mathcal{A}$ .

Vamos procurar os pontos críticos da função  $\mathcal{A}$  no conjunto  $\mathcal{R}$ , isto é:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \mathcal{A}(x, y) \\ &= \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{(11.98)}{=} \left( 2y - 2\frac{V}{x^2}, 2x - \frac{V}{y^2} \right), \\ \text{ou seja,} \quad &\begin{cases} 2y - 2\frac{V}{x^2} = 0 \\ 2x - \frac{V}{y^2} = 0 \end{cases}, \\ \text{isto é,} \quad &\begin{cases} yx^2 = V \\ 2xy^2 = V \end{cases}. \end{aligned} \quad (11.101)$$

Com isto obteremos

$$x_0 = \sqrt[3]{2V} \quad \text{e} \quad y_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}. \quad (11.102)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, a função  $\mathcal{A}$  terá um único ponto crítico no conjunto  $\mathcal{R}$  e este ocorre no ponto

$$P_0 \doteq \left( \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \right). \quad (11.103)$$

Como

$$\begin{aligned} &x_0 y_0 z_0 \stackrel{(11.94)}{=} V, \\ \text{de (11.102), segue que:} \quad &z_0 = \sqrt[3]{2V}. \end{aligned} \quad (11.104)$$

Notemos que, a matriz hessiana associada a função  $\mathcal{A}$ , será dada por:

$$\begin{aligned} \text{Hess}_{\mathcal{A}}(x, y) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(11.99) \text{ e } (11.100)}{=} \begin{vmatrix} \frac{4V}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{2V}{y^3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{8V^2}{x^3 y^3} - 4. \end{aligned} \quad (11.105)$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{Hess}_{\mathcal{A}}(x_0, y_0) &\stackrel{(11.103)}{=} \text{Hess}_{\mathcal{A}}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right) \\ &\stackrel{(11.105)}{=} 12 > 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}(P_0) &\stackrel{(11.103)}{=} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right) \\ &\stackrel{(11.99)}{=} 2 > 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo teste do hessiano (ou seja, o item 1. do Teorema 11.2.1), podemos concluir que o ponto

$$P_0 = \left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right)$$

é um ponto de mínimo local (ou relativo) da função  $\mathcal{A}$  no conjunto  $\mathcal{R}$ .

Na verdade, mostraremos a seguir que o ponto  $P_0$  é um ponto de mínimo global da função  $\mathcal{A}$  no conjunto  $\mathcal{R}$ .

A verificação deste fato, pode ser mostrada da seguinte maneira.

Observemos que, para cada

$$y_1 > 0$$

fixado, a função  $\mathcal{A}_{y_1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{y_1}(x) &\doteq \mathcal{A}(x, y_1) \\ &\stackrel{(11.96)}{=} 2xy_1 + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y_1}, \quad \text{para cada } x \in (0, \infty), \end{aligned} \quad (11.106)$$

possui um (único) ponto de mínimo global (ou absoluto) no conjunto  $(0, \infty)$ .

Para mostrarmos isto observemos que a função  $\mathcal{A}_{y_1}$  tem um único ponto crítico no conjunto  $(0, \infty)$ , que ocorrerá no ponto

$$x_1 \doteq \sqrt{\frac{V}{y_1}} \in (0, \infty). \quad (11.107)$$

De fato, pois para encontrar os pontos críticos da função  $\underline{A}_{y_1}$ , basta encontrarmos  $x \in (0, \infty)$  de modo que:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{A}_{y_1}'(x) \\ &\stackrel{(11.106)}{=} 2y_1 - 2\frac{V}{x^2} \\ &= 2\frac{y_1x^2 - V}{x^2}, \end{aligned}$$

o que implicará em:  $y_1x^2 - V = 0$ ,

isto é,  $x = \sqrt{\frac{V}{y_1}}$ . (11.108)

Portanto, para cada  $y_1 > 0$  fixado,

$$x_1 \doteq \sqrt{\frac{V}{y_1}} \in (0, \infty) \tag{11.109}$$

é o único ponto crítico da função  $\underline{A}_{y_1}$  no conjunto  $(0, \infty)$ .

Notemos que, para cada  $y_1 > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{A}_{y_1}(x) &\stackrel{(11.106)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2xy_1 + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y_1} \right) \\ &\quad \text{visto na disciplina de Cálculo I} \\ &\quad \underline{\underline{+\infty}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{y_1}(x) &\stackrel{(11.106)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x \underbrace{y_1}_{>0} + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y_1} \right) \\ &\quad \text{visto na disciplina de Cálculo I} \\ &\quad \underline{\underline{+\infty}}. \end{aligned}$$

Portanto, para cada

$$y_1 > 0 \quad \text{fixado,}$$

podemos concluir que a função  $\underline{A}_{y_1}$  (que é diferenciável em  $(0, \infty)$ ), terá um ponto de mínimo global (ou absoluto) da função  $\underline{A}_{y_1}$  no seu único ponto crítico, isto é, no ponto

$$x_1 \doteq \sqrt{\frac{V}{y_1}},$$

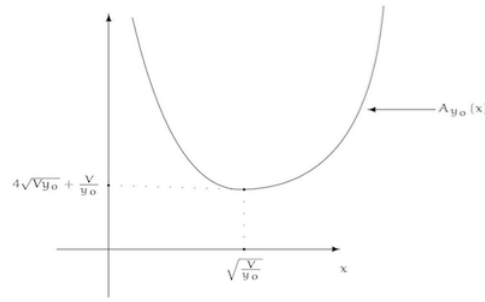
como afirmamos em (11.107).

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.

Para cada

$$y_1 > 0 \quad \text{fixado,}$$

o valor do mínimo global (ou absoluto) da função  $\underline{A}_{y_1}$  em  $(0, \infty)$ , que indicaremos por  $\underline{m}(y_1)$ , será



dada por :

$$\begin{aligned}
 m(y_1) &\doteq \mathcal{A}_{y_1}(x_1) \\
 &\stackrel{(11.107)}{=} \mathcal{A}_{y_1}\left(\sqrt{\frac{V}{y_1}}\right) \\
 &\stackrel{(11.106)}{=} \mathcal{A}\left(\sqrt{\frac{V}{y_1}}, y_1\right) \\
 &\stackrel{(11.96)}{=} 4\sqrt{Vy_1} + \frac{V}{y_1}. \tag{11.110}
 \end{aligned}$$

Com isto teremos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x, y_1) &\stackrel{(11.106)}{=} \mathcal{A}_{y_1}(x) \\
 &\geq m(y_1), \quad \text{para cada } x \in (0, \infty). \tag{11.111}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, a função  $m : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned}
 m(y) &\doteq \mathcal{A}_y(x_0) \\
 &\stackrel{(11.107)}{=} 4\sqrt{Vy} + \frac{V}{y}, \quad \text{para cada } y \in (0, \infty) \tag{11.112}
 \end{aligned}$$

(que nos fornece o valor do mínimo global (ou absoluto) da função  $\mathcal{A}_y$  em  $(0, \infty)$ ), também possui um ponto de mínimo global (ou absoluto) em  $(0, \infty)$ .

De fato, observemos que a função  $m$ , dada por (11.112), tem um único ponto crítico em  $(0, \infty)$ .

De fato, o ponto crítico da função  $m$  em  $(0, \infty)$ , ocorrerá quando:

$$\begin{aligned}
 0 &= m'(y) \\
 &\stackrel{(11.112)}{=} 2\sqrt{\frac{V}{y}} - \frac{V}{y^2}, \\
 \text{ou seja,} \quad &2\sqrt{\frac{V}{y}} = \frac{V}{y^2} \\
 \text{ou ainda,} \quad &y^3 = \frac{V}{4}, \\
 \text{implicando que} \quad &y_1 \doteq \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \tag{11.113}
 \end{aligned}$$

é o único ponto crítico da função  $m$  em  $(0, \infty)$ .

Notemos que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} m(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( 4\sqrt{V}y + \frac{V}{y} \right)$$

visto na disciplina de Cálculo I  $+\infty$ ,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} m(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 4\sqrt{\underbrace{V}_{>0}}y + \frac{V}{y} \right)$$

visto na disciplina de Cálculo I  $+\infty$ .

Estes fatos, juntamente com o fato que a função  $m$  é diferenciável em  $(0, \infty)$ , segue que seu ponto mínimo global (ou absoluto) ocorrerá no seu único ponto crítico, a saber em

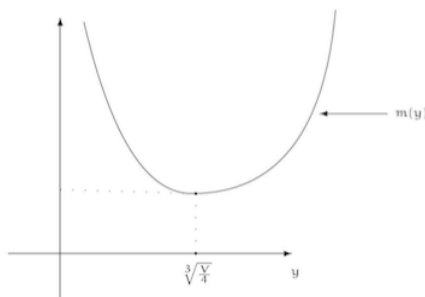
$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

Portanto

$$m(y) \geq m(y_1)$$

$$\stackrel{(11.113)}{=} m\left(\sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right), \quad \text{para todo } y \in (0, \infty). \quad (11.114)$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Observemos que

$$y_1 \stackrel{(11.113)}{=} \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$$

$$\stackrel{(11.102)}{=} y_0, \quad (11.115)$$

$$x_1 \stackrel{(11.109)}{=} \sqrt{\frac{V}{y_1}}$$

$$\stackrel{(11.113)}{=} \sqrt{\frac{V}{\sqrt[3]{\frac{V}{4}}}}$$

$$= \sqrt[3]{2V}$$

$$\stackrel{(11.113)}{=} x_0. \quad (11.116)$$

Assim, para todo  $x, y \in (0, \infty)$ , teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y) &\stackrel{(11.106)}{=} \mathcal{A}_y(x) \\ &\stackrel{(11.111)}{\geq} m(y) \\ &\stackrel{(11.114)}{\geq} m\left(\sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right) \\ &\stackrel{(11.112), (11.115) \text{ e } (11.116)}{=} \mathcal{A}_{y_0}(x_0) \\ &\stackrel{(11.106)}{=} \mathcal{A}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right). \end{aligned}$$

Portanto, o ponto

$$P_0 = \left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right) \quad (11.117)$$

será o ponto de mínimo global (ou absoluto) da função  $\mathcal{A}$  no conjunto  $\mathcal{R}$ .

Finalmente, segue que de (11.117) e (11.95), que as dimensões da caixa de volume  $V$ , que gastará menos papelão para ser construída serão:

$$x = \sqrt[3]{2V}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \quad \text{e} \quad z = \sqrt[3]{2V},$$

completando a resolução. □

**Observação 11.4.1** *Todo o trabalho que tivemos no Exemplo 11.4.1 acima, ocorre porque **não** temos um resultado que nos garanta que o mínimo global (ou absoluto) da função  $\mathcal{A}$ , dada por (11.96), no conjunto  $\mathcal{R}$  existe.*

*Lembremos novamente que, apesar da função  $\mathcal{A}$ , dada por (11.96), ser contínua no conjunto*

$$\mathcal{R} \doteq (0, \infty) \times (0, \infty),$$

*este conjunto **não** é nem fechado, nem limitado em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, **não** é um conjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ .*

*O que fizemos foi mostrar que o ponto de mínimo local (relativo) da função  $\mathcal{A}$ , dada por (11.96), obtido pelo teste do hessiano aplicado à função  $\mathcal{A}$  é, na verdade, um ponto mínimo global (ou absoluto) da função  $\mathcal{A}$  no conjunto  $\mathcal{R}$ .*

## 11.5 Extremos globais de funções a valores reais, de várias variáveis reais, definidas em regiões fechadas e limitadas de $\mathbb{R}^n$

Assim como ocorre com funções a valores reais, de uma variável real, uma função a valores reais, de várias variáveis reais, **não** precisa, necessariamente, ter pontos de máximo ou de mínimo globais (ou absolutos) no seu domínio.

Um exemplo bem simples é dado pela função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq x + y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$



Esta função não possui pontos máximo nem mínimo globais (ou absolutos) e, a bem da verdade, nem possui pontos críticos.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Lembremos do seguinte resultado enunciado no Capítulo 7, mais precisamente, o Teorema 7.2.1):

**Teorema 11.5.1** *Seja  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Se a função  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função contínua no conjunto  $K$ , então existem  $P_1, P_2 \in K$ , de modo que*

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2), \quad \text{para todo } P \in K. \quad (11.118)$$

*Em outras palavras, o ponto  $P_1$  será um ponto de mínimo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $K$  e o ponto  $P_2$  será um ponto de máximo global (ou absoluto) da função  $f$  no conjunto  $K$ .*

### Observação 11.5.1

1. *Notemos que, os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , não precisam, necessariamente, ser os únicos com satisfazendo (11.118), isto é, a função  $f$  pode, eventualmente, ter vários pontos de máximo ou de mínimo globais (ou absolutos) no conjunto  $K$ .*

*Neste caso, em todos os pontos de máximo globais (ou absolutos) a função terá o mesmo valor.*

*Analogamente para os pontos de mínimo globais (ou absolutos).*

*Um exemplo deste fato é uma função que seja constante no conjunto  $K$ .*

*Neste caso, todos os seus pontos são pontos de máximo globais (ou absolutos) e todos os seus pontos são pontos de mínimo globais (ou absolutos) da função no conjunto  $K$*

2. *Se o conjunto  $K$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  e a função  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $K$  e diferenciável no conjunto  $\overset{\circ}{K}$  (veja a seção F.4, ou ainda, o item 3. da Definição F.4.4) então, pelo Teorema (11.5.1), segue que existem pontos de máximo e mínimo globais (ou absolutos) da função  $f$  no conjunto  $K$ .*

*Para localizá-los podemos começar procurando os pontos críticos da função  $f$  no interior do conjunto  $K$  (isto é, os pontos do conjunto  $K$  que não fazem parte da sua fronteira) e comparar com os valores da função  $f$  sobre a fronteira do conjunto  $K$ .*

*Assim, bastará encontrar os valores da função em todos os pontos críticos que pertencem ao interior do conjunto  $K$  e os extremos globais da restrição da função  $f$  a fronteira de  $K$ .*

*O maior entre os valores acima será o valor máximo global da função  $f$  no conjunto  $K$  e o menor valor acima será o valor mínimo global da função  $f$  no conjunto  $K$ .*

3. *Note que não há necessidade de utilizarmos o teste do hessiano ou dos autovalores (ou seja, os Teoremas 11.2.1 ou K.1.2) nos pontos críticos encontrados acima, pois estaremos interessados em localizar os pontos de máximo e mínimo globais (ou absolutos) da função  $f$  no conjunto compacto  $K$ .*
4. *Enfatizamos que podemos ter extremos globais da função  $f$  em  $K$ , ocorrendo na fronteira do conjunto  $K$  e estes extremos não serão pontos críticos da função  $f$  no interior do conjunto  $K$ , como veremos em exemplos a seguir.*

Começaremos pelo:

**Exemplo 11.5.1** Determine os extremos globais da função  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x^3 + y^3 - 3x - 3y, \quad \text{para cada } (x, y) \in K, \quad (11.119)$$

onde o conjunto  $K$ , é dado por

$$\begin{aligned} K &\doteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 2] \text{ e } y \in [-2, 2] \right\} \\ &= [0, 2] \times [-2, 2]. \end{aligned} \quad (11.120)$$

**Resolução:**

Notemos que o conjunto  $K$  é um subconjunto compacto em  $\mathbb{R}^2$ .

De fato, pois é um subconjunto fechado e limitado em  $\mathbb{R}^2$ .

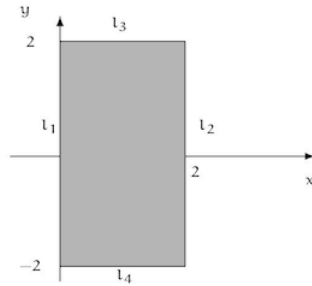
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso, notemos que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  no conjunto  $K$  (pois é uma função polinomial).

Em particular, é uma função contínua em no conjunto  $K$ .

Logo, pelo Teorema 11.5.1, segue que a função  $f$  atinge máximo e mínimo globais no conjunto  $K$ .

A região  $K$  é o retângulo ilustrado na figura abaixo.



Vamos procurar os pontos críticos da função  $f$  no interior no conjunto  $K$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{K} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in (0, 2) \text{ e } y \in (-2, 2) \right\} \\ &= (0, 2) \times (-2, 2). \end{aligned} \quad (11.121)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observemos também que, para  $(x, y) \in \overset{\circ}{K}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &\stackrel{(11.119)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [x^3 + y^3 - 3x - 3y] \\ &= 3x^2 - 3 \end{aligned} \quad (11.122)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &\stackrel{(11.119)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [x^3 + y^3 - 3x - 3y] \\ &= 3y^2 - 3. \end{aligned} \quad (11.123)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \quad (11.124)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \stackrel{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad (11.125)$$

Notemos que

$$(x, y) \in \overset{\circ}{K}$$

será ponto crítico da função  $f$  se, e somente, se:

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \nabla f(x, y) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{(11.122)}{=} \stackrel{(11.123)}{=} (3x^2 - 3, 3y^2 - 3), \\ \text{ou seja, } &\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}, \\ \text{ou ainda, } &\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{11.126}$$

Logo, de (11.126), os pontos críticos da função  $f$  no conjunto  $\overset{\circ}{K}$  serão:

$$P_1 \doteq (1, -1) \in \overset{\circ}{K} \quad \text{e} \quad P_2 \doteq (1, 1) \in \overset{\circ}{K}. \tag{11.127}$$

**Observação 11.5.2** *Observemos que*

$$(-1, 1) \notin \overset{\circ}{K} \quad \text{e} \quad (-1, -1) \notin \overset{\circ}{K}.$$

Logo este dois pontos **não** são pontos críticos da função  $f$  no conjunto  $\overset{\circ}{K}$  (na verdade, não pertencem nem mesmo pertecem ao próprio conjunto  $\underline{K}$ ).

Com isto teremos:

P	(x, y)	pertence ao interior de $\underline{K}$	valor de $f(P)$ (veja (11.119))
$P_1$	(1, -1)	ok	0
$P_2$	(1, 1)	ok	-4
	(-1, 1)	não	não interessa
	(-1, -1)	não	não interessa

(11.128)

Desse modo, devemos considerar apenas os pontos  $P_1$  e  $P_2$  (pois somente estes pertencem ao interior de  $K$ ).

Passemos agora à análise dos valores de máximo e mínimos da restrição da função  $f$  à fronteira do conjunto  $\underline{K}$ .

Dividiremos a fronteira do conjunto  $\underline{K}$  em quatro conjuntos (a saber, quatro intervalos), cada qual contemplando um lado do retângulo dado pela figura acima (que é a representação geométrica do conjunto  $\underline{K}$ ).

Notemos que a fronteira do conjunto  $\underline{K}$  é dada por:

$$\partial K = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4, \tag{11.129}$$

onde  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  são como na figura acima.

**1.o caso:** encontremos o máximo da restrição da função  $f$  ao conjunto

$$\begin{aligned} l_1 &\doteq \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2; y \in [-2, 2] \right\} \\ &= \{0\} \times [-2, 2]. \end{aligned} \tag{11.130}$$

Neste caso, a restrição da função  $f$  ao conjunto  $\underline{l}_1$ , nos fornecerá a função  $g_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g_1(y) \doteq f(0, y) \\ \stackrel{(11.119)}{=} \stackrel{\text{com } x=0}{=} y^3 - 3, \quad \text{para cada } y \in [-2, 2]. \quad (11.131)$$

Encontremos o máximo e o mínimo globais da função  $g_1$  no intervalo fechado  $[-2, 2]$  (que existem pois a função  $g_1$  é contínua no intervalo fechado e limitado  $[-2, 2]$ , ou seja, um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ ) utilizando as técnicas desenvolvidas na disciplina de Cálculo I.

Para isto, comecemos, encontrando os pontos críticos da função  $g_1$  no intervalo aberto  $(-2, 2)$ .

Como a função  $g_1$ , dada por (11.131), é diferenciável o intervalo aberto  $(-2, 2)$ , seus pontos críticos ocorrerão somente nos pontos onde a sua derivada é zero, ou seja,

$$\begin{aligned} & y \in (-2, 2), \\ \text{tais que } & 0 = g_1'(y) = 0 \\ & \stackrel{(11.131)}{=} 3y^2 - 3, \\ \text{isto implicará que } & y_1 \doteq -1 \in (-2, 2) \text{ e } y_2 \doteq 1 \in (-2, 2), \end{aligned} \quad (11.132)$$

serão os únicos pontos críticos da função  $g_1$ , que pertencem ao intervalo aberto  $(-2, 2)$ .

Logo, dos fatos acima e de (11.131), deveremos levar em conta o valor da função  $f$  nos pontos

$$P_3 \doteq (0, -1) \quad \text{e} \quad P_4 \doteq (0, 1). \quad (11.133)$$

$$f(0, -1) = g_1(-1) = 2 \quad \text{e} \quad f(0, 1) = g_1(1) = -2. \quad (11.134)$$

Finalmente, devemos calcular o valor da função  $g_1$  nos extremos do intervalo  $[-2, 2]$ , isto é, nos pontos

$$y_3 \doteq -2 \quad \text{e} \quad y_4 \doteq 2,$$

que, por (11.131), correspondem a levar em conta o valor da função  $f$  nos pontos:

$$P_5 \doteq (0, -2) \quad \text{e} \quad P_6 \doteq (0, 2). \quad (11.135)$$

obtendo-se também os valores

$$f(0, -2) = g_1(-2) = -2 \quad \text{e} \quad f(0, 2) = g_1(2) = 2. \quad (11.136)$$

**2.o caso:** sobre o conjunto

$$\begin{aligned} \ell_2 & \doteq \{(2, y) \in \mathbb{R}^2; y \in [-2, 2]\} \\ & = \{2\} \times [-2, 2]. \end{aligned} \quad (11.137)$$

Agimos de modo semelhante ao 1.o caso.

Neste caso, a restrição da função  $f$  ao conjunto  $\underline{l}_2$ , nos fornecerá a função  $g_2 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g_2(y) \doteq f(2, y) \\ \stackrel{(11.119)}{=} 2 + y^3 - 3y, \quad \text{para cada } -y \in [-2, 2]. \quad (11.138)$$

Como temos a seguinte relação entre as funções  $\underline{g}_1$  e  $\underline{g}_2$  (veja (11.131) e (11.138))

$$g_2 = 2 + g_1,$$

obteremos os mesmos valores para  $\underline{y}$  que do 1.o caso, porém lembremos que, neste caso, teremos

$$x = 2,$$

ou seja, deveremos levar em conta o valor da função  $\underline{f}$  nos seguintes pontos

$$P_7 \doteq (2, -1), \quad P_8 \doteq (2, 1), \quad P_9 \doteq (2, -2) \quad \text{e} \quad P_{10} \doteq (2, 2). \quad (11.139)$$

$$f(2, -1) = g_2(-1) = 4, \quad f(2, 1) = g_2(1) = 0, \quad f(2, -2) = g_2(-2) = 0, \quad \text{e} \quad f(2, 2) = g_2(2) = 4. \quad (11.140)$$

**3.o caso:** sobre o conjunto

$$\begin{aligned} \ell_3 &\doteq \{(x, 2) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 2]\} \\ &= [0, 2] \times \{2\}. \end{aligned} \quad (11.141)$$

Neste caso, a restrição da função  $\underline{f}$  ao conjunto  $\underline{\ell}_3$ , nos fornecerá a função  $g_3 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} g_3(x) &\doteq f(x, 2) \\ &\stackrel{(11.119)}{=} x^3 - 3x + 2, \quad \text{para cada } x \in [0, 2]. \end{aligned} \quad (11.142)$$

Encontremos o máximo e o mínimo globais da função  $\underline{g}_3$  no intervalo fechado e limitado  $[0, 2]$  (que existe pois a função  $\underline{g}_3$  é contínua em  $[0, 2]$ , e este é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ ) utilizando, novamente, as técnicas desenvolvidas na disciplina de Cálculo I.

Para isto, comecemos, encontrando os pontos críticos da função  $\underline{g}_3$  no intervalo aberto  $(0, 2)$ .

Como a função  $\underline{g}_3$  é diferenciável no intervalo aberto  $(0, 2)$ , seus pontos críticos ocorrerão somente nos pontos onde a derivada é zero, ou seja,

$$\begin{aligned} &x \in (0, 2), \\ \text{tais que} \quad &0 = g_3'(x) \\ &\stackrel{(11.142)}{=} 3x^2 - 3, \\ \text{isto implicará que} \quad &x_1 \doteq -1 \notin (0, 2) \quad \text{e} \quad x_2 \doteq 1 \in (0, 2), \end{aligned} \quad (11.143)$$

ou seja, o único ponto crítico da função  $\underline{g}_3$ , que pertence ao intervalo aberto  $(0, 2)$  será o

$$x = 1.$$

Assim, baseados nas considerações acima, deveremos que levar em conta o valor da função  $\underline{f}$  no ponto

$$P_{11} \doteq (1, 2). \quad (11.144)$$

Finalmente, devemos calcular o valor da função  $\underline{g}_3$  nos extremos do intervalo  $[0, 2]$ , isto é, nos pontos

$$x_3 \doteq 0 \quad \text{e} \quad x_4 \doteq 2,$$

ou seja, precisaremos levar em conta o valor da função  $f$  nos pontos:

$$P_{12} \doteq (0, 2) \stackrel{(11.135)}{=} P_6 \quad \text{e} \quad P_{13} \doteq (2, 2) \stackrel{(11.139)}{=} P_{10}. \quad (11.145)$$

Ficamos então com os seguintes valores:

$$f(1, 2) = g_3(1) = 0, \quad f(0, 2) = g_3(0) = 2 \quad \text{e} \quad f(2, 2) = g_3(2) = 4. \quad (4)$$

Para finalizar temos o:

**4.º caso:** sobre o conjunto

$$\begin{aligned} \ell_4 &\doteq \{(x, -2) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 2]\} \\ &= [0, 2] \times \{-2\}. \end{aligned} \quad (11.146)$$

Neste caso, a restrição da função  $f$  ao conjunto  $\ell_4$ , nos fornecerá a função  $g_4 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} g_4(x) &\doteq f(x, -2) \\ &\stackrel{(11.119)}{=} x^3 - 3x - 22, \quad \text{para cada } x \in [0, 2]. \end{aligned} \quad (11.147)$$

Como temos a seguinte relação entre as funções  $g_3$  e  $g_4$  (veja (11.142) e (11.147))

$$g_2 = 2 + g_1,$$

obtemos os mesmos valores do 3.º caso, porém lembremos que, neste caso, teremos

$$y = -2,$$

ou seja, deveremos levar em conta o valor da função  $f$  nos seguintes pontos:

$$P_{14} \doteq (1, -2), \quad P_{15} \doteq (0, -2) \stackrel{(11.135)}{=} P_5 \quad \text{e} \quad P_{16} \doteq (2, -2) \stackrel{(11.139)}{=} P_9. \quad (11.148)$$

Resumindo, os pontos, e respectivos valores da função  $f$  nos mesmos, que nos interessam estão na seguinte tabela:

$P_i$	$(x, y)$	valor de $f(x, y)$
$P_1$	$(1, -1)$	0
$P_2$	$(1, 1)$	-4
$P_3$	$(0, -1)$	2
$P_4$	$(0, 1)$	-2
$P_5$	$(0, -2)$	-2
$P_6$	$(0, 2)$	2
$P_7$	$(2, -1)$	4
$P_8$	$(2, 1)$	0
$P_9$	$(2, -2)$	0
$P_{10}$	$(2, 2)$	4
$P_{11}$	$(1, 2)$	0
$P_{14}$	$(1, -2)$	-4

Para obtermos o máximo global da função  $f$  basta encontrar o maior valor da função  $f$  na lista acima, cujo o valor  $\underline{4}$  (na coluna à direita).

Este valor ocorrerá nos pontos

$$P_7 = (2, -1) \quad \text{e} \quad P_{10} = (2, 2),$$

ambos pertencentes a fronteira do conjunto  $\underline{K}$ , ou seja, os pontos máximo global da função  $f$  no conjunto compacto  $\underline{K}$  ocorrerão nos pontos

$$P_7 = (2, -1), \quad P_{10} = (2, 2) \in \partial K. \quad (11.149)$$

Para obtermos o mínimo global da função  $f$  basta encontrar o menor valor da função  $f$  na lista acima, que será o valor  $\underline{-4}$  (na coluna à direita).

Este valor ocorrerá nos pontos

$$P_2 = (1, 1) \in \overset{\circ}{K} \quad \text{e} \quad P_{14} = (1, -2) \in \partial K,$$

ou seja, os pontos mínimo global da função  $f$  no conjunto compacto  $\underline{K}$  ocorrerão nos pontos

$$P_2 = (1, 1) \in \overset{\circ}{K} \quad \text{e} \quad P_{14} = (1, -2) \in \partial K. \quad (11.150)$$

**Conclusão:** a função  $f$  tem dois pontos de máximo globais no conjunto compacto  $\underline{K}$ , que ocorrem nos pontos

$$(2, -1) \quad \text{e} \quad (2, 2),$$

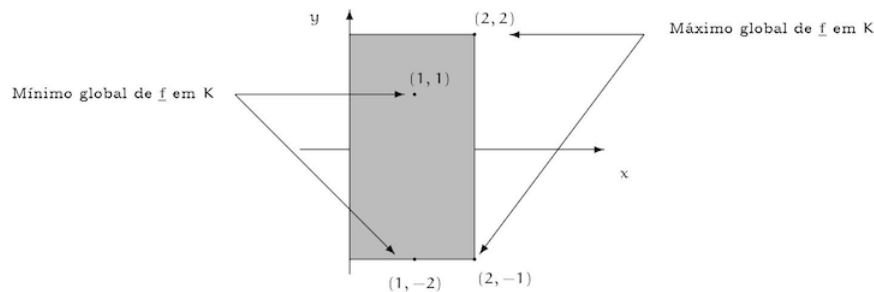
que estão na fronteira do conjunto  $\underline{K}$ , cujo valor de máximo global da função  $f$  será  $\underline{4}$ .

Além disso, a função  $f$  tem dois pontos de mínimo globais no conjunto compacto  $\underline{K}$ , que ocorrem nos pontos

$$(1, 1) \quad \text{e} \quad (1, -2),$$

sendo que o primeiro pertence ao interior do conjunto  $\underline{K}$  e o segundo pertence a fronteira do conjunto  $\underline{K}$ , cujo valor de mínimo global da função  $f$  será  $\underline{-4}$ , completando a resolução.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



□

Podemos aplicar as mesmas técnicas ao

**Exemplo 11.5.2** Determine os extremos globais da função  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) \doteq x y, \quad \text{para cada } (x, y) \in K, \quad (11.151)$$

onde

$$K \doteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}. \quad (11.152)$$

**Resolução:**

Semelhante ao Exemplo 11.5.1 acima, observemos que o conjunto  $\underline{K}$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ , pois é uma bola fechada de  $\mathbb{R}^2$ .

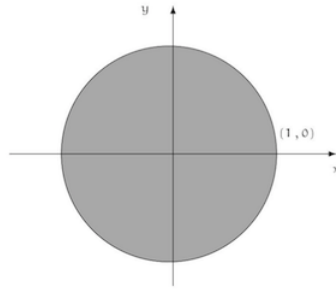
Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Notemos também que a função  $\underline{f}$  é de classe  $C^\infty$  no conjunto  $\underline{K}$  (pois é uma função polinomial em  $\mathbb{R}^2$ ), em particular, será uma função contínua no conjunto  $\underline{K}$ .

Logo, pelo Teorema 11.5.1, segue que a função  $\underline{f}$  atinge máximo e mínimo globais no conjunto  $\underline{K}$ .

Neste caso o conjunto  $\underline{K}$  é o círculo de centro na origem e raio igual a 1.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Notemos que, para cada  $(x, y) \in \overset{\circ}{K}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &\stackrel{(11.151)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [xy] \\ &= y \end{aligned} \tag{11.153}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &\stackrel{(11.151)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [xy] \\ &= x. \end{aligned} \tag{11.154}$$

Encontremos os pontos críticos da função  $\underline{f}$  no interior do conjunto  $\underline{K}$ , isto é, os pontos do interior do conjunto  $\underline{K}$ , onde o gradiente da função  $\underline{f}$  é igual a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \nabla f(x, y) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{(11.153)}{=} \stackrel{(11.154)}{=} (y, x), \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

$$\text{isto é, o único ponto crítico de } \underline{f} \text{ em } \overset{\circ}{K}, \text{ será: } P_1 \doteq (0, 0) \tag{11.155}$$

que pertence ao interior do conjunto  $\underline{K}$  (é o centro do referido círculo).

Assim teremos que levar em conta o valor da função  $\underline{f}$  no ponto

$$P_1 \doteq (0, 0). \tag{11.156}$$

e o valor da função  $\underline{f}$  neste ponto é 0, isto é,

$$f(0, 0) = 0.$$



Encontremos os valores de máximo e mínimo globais da restrição da função  $f$  à fronteira do conjunto  $\underline{K}$ .

Observemos que a fronteira do conjunto  $\underline{K}$ , é a circunferência de centro em  $(0, 0)$  e raio igual a  $\underline{1}$ , isto é:

$$\begin{aligned} \partial K &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} \\ &= \{(\cos(t), \text{sen}(t)); t \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned} \quad (11.157)$$

Assim, a função a ser considerada será a função  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq f[\cos(t), \text{sen}(t)] \\ &\stackrel{(11.151)}{=} \cos(t) \text{sen}(t) \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}(2t), \quad \text{para cada } t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (11.158)$$

Observemos que a função  $g$  é contínua em  $[0, 2\pi]$ , que é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ , logo sabemos que ela deverá assumir valor máximo e mínimo globais no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Para encontrar esse extremos globais da função  $g$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ , basta aplicarmos as técnicas desenvolvidas na disciplina de Cálculo I.

Notemos que os pontos críticos da função  $g$  em  $(0, 2\pi)$ , ocorrerão (a função é diferenciável no intervalo aberto  $(0, 2\pi)$ ) onde a derivada é igual a zero, isto é:

$$\begin{aligned} 0 &= g'(t) \\ &\stackrel{(11.158)}{=} \cos(2t), \end{aligned}$$

ou seja, nos pontos:  $t_1 \doteq \frac{\pi}{4}$ ,  $t_2 \doteq \frac{3\pi}{4}$ ,  $t_3 \doteq \frac{5\pi}{4}$  e  $t_4 \doteq \frac{7\pi}{4}$ . (11.159)

Notemos que todos os pontos acima, pertencentes ao intervalo aberto  $(0, 2\pi)$ .

Assim, baseado nas considerações acima, teremos que levar em conta o valor da função  $f$  nos

seguintes pontos

$$\begin{aligned} P_2 &\doteq \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ P_3 &\doteq \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right) \\ &= \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ P_4 &\doteq \left( \cos \left( \frac{5\pi}{4} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{4} \right) \right) \\ &= \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ P_5 &\doteq \left( \cos \left( \frac{7\pi}{4} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi}{4} \right) \right) \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \end{aligned}$$

ou seja, nos pontos:

$$\begin{aligned} P_2 &\doteq \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), & P_3 &\doteq \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ P_4 &\doteq \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \text{e} & P_5 &\doteq \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned} \quad (11.160)$$

Com isto temos que

$$g \left( \frac{\pi}{4} \right) \stackrel{(11.158)}{=} \frac{1}{2} \stackrel{(11.158)}{=} g \left( \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{e} \quad g \left( \frac{3\pi}{4} \right) \stackrel{(11.158)}{=} -\frac{1}{2} \stackrel{(11.158)}{=} g \left( \frac{7\pi}{4} \right).$$

Além do mais, temos que considerar os valores da função  $g$  nos extremos do intervalo  $[0, 2\pi]$ , isto é, teremos que levar em conta o valor da função  $f$  nos seguintes pontos

$$\begin{aligned} P_6 &\doteq (\cos(0), \operatorname{sen}(0)) \\ &= (1, 0), \\ P_7 &\doteq (\cos(2\pi), \operatorname{sen}(2\pi)) \\ &= (1, 0) \\ &= P_6, \end{aligned}$$

ou seja, no ponto:  $P_6 \doteq (1, 0).$  (11.161)

Resumindo, os pontos, e respectivos valores da função  $f$  nos mesmos, que nos interessam estão na seguinte tabela:

$P_i$	$(x, y)$	valor de $f(x, y)$
$P_1$	$(0, 0)$	0
$P_2$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
$P_3$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$
$P_4$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
$P_5$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$
$P_6$	$(1, 0)$	0

Para obtermos o máximo global da função  $f$ , basta encontrar o maior valor da função  $f$  na lista acima, que é o valor  $\frac{1}{2}$  (na coluna à direita).

Este valor ocorrerá nos pontos

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ambos pertencentes a fronteira do conjunto  $K$ , ou seja, os pontos máximo global da função  $f$  no conjunto compacto  $K$  ocorrerão nos pontos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \partial K. \quad (11.162)$$

Para obtermos o mínimo global da função  $f$  basta encontrar o menor valor da função  $f$  na lista acima, que será o valor  $-\frac{1}{2}$  (na coluna à direita).

Este valor ocorrerá nos pontos

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ambos pertencentes a fronteira do conjunto  $K$ , ou seja, os pontos mínimo global da função  $f$  no conjunto compacto  $K$  ocorrerão nos pontos

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \partial K, \quad (11.163)$$

completando a resolução.

Reunindo os resultados encontrados no interior e na fronteira de  $K$  vemos que o valor de máximo global da função  $f$  em  $K$  é  $1/2$  (pois é o maior valor em (1)-(2)-(3)) e o valor de mínimo global da função  $f$  em  $K$  é  $-1/2$  (pois é o menor valor em (1)-(2)-(3)).

O valor de máximo da função  $f$  em  $K$  é atingido nos pontos referentes aos valores de  $t = \frac{\pi}{4}$  e  $t = \frac{5\pi}{4}$  que correspondem aos pontos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

respectivamente.

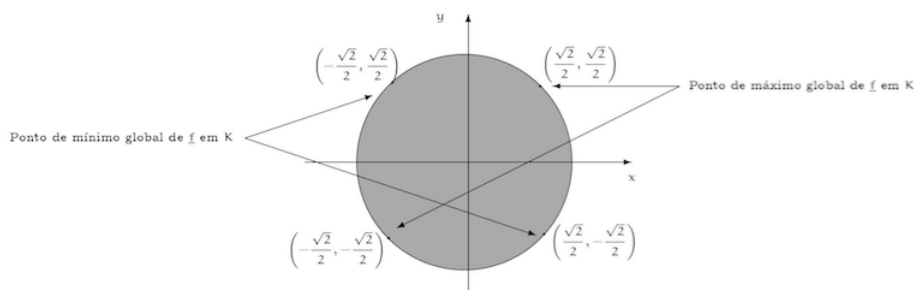
O valor de mínimo da função  $f$  em  $K$  é atingido nos pontos referentes aos valores de  $t = \frac{3\pi}{4}$  e  $t = \frac{7\pi}{4}$  que correspondem aos pontos

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

respectivamente.

Todos estes pontos se encontram na fronteira de  $K$ , ou seja, os valores de máximo e de mínimo globais da função  $f$  em  $K$  são atingidos em pontos que estão na fronteira de  $K$

A figura abaixo ilustrar a situação descrita acima.



# Capítulo 12

## Multiplicadores de Lagrange

Neste último capítulo trataremos de encontrar, quando existir, o máximo e/ou o mínimo de uma função, a valores reais, de várias variáveis, quando esta está restrita a algum tipo de restrição, que será denominado de vínculo.

Começaremos com a:

### 12.1 Problema com um vínculo

#### 12.1.1 Introdução

Suponhamos que  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções a valores reais, de duas variáveis reais, definidas em um subconjunto aberto  $A$ , de  $\mathbb{R}^2$  e de classe  $C^1$  no conjunto  $A$ .

O problema que passaremos a estudar será o de encontrar os extremos (máximo e/ou mínimo) da função  $f$ , quando esta está sujeita à uma restrição do tipo

$$g(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in A, \quad (12.1)$$

ou seja, encontrar os extremos da função  $f$ , para pontos domínio da função  $f$ , que estão sobre a curva de nível zero da função  $g$ , isto é, encontrar os extremos (globais) da função

$$f : \{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (12.2)$$

Ou ainda, queremos encontrar o(s) ponto(s)

$$(x, y) \in A$$

que satisfaz(em) à condição

$$g(x, y) = 0,$$

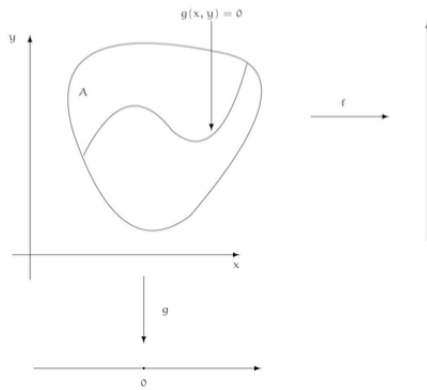
denominado vínculo (ou condição lateral) que maximizem ou minimizem os valores da função  $f$ .

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima

#### 12.1.2 Teorema do multiplicador de Lagrange, para um vínculo

Faremos o estudo do problema colocado na seção acima, por meio das seguintes observações:

##### Observação 12.1.1

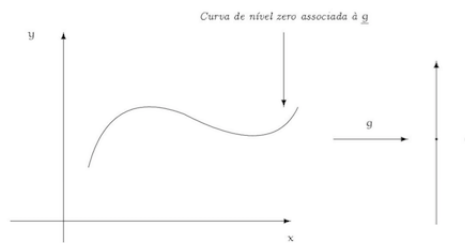


1. Notemos que o vínculo

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{12.3}$$

representa a curva de nível zero associada à função  $g$ , que assumiremos satisfazer a condição

$$\nabla g(x, y) \neq \vec{0}, \text{ para } (x, y) \in A. \tag{12.4}$$



2. Observemos que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , o conjunto

$$\{(x, y) \in A ; f(x, y) = t\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{12.5}$$

representa a curva de nível igual a  $t$  associada à função  $f$ .

Variando  $t \in \mathbb{R}$ , obteremos uma família de curvas de nível associadas à função  $f$ .

Suponhamos, por exemplo, que a curva de nível  $t_0$ , associada à função  $f$ , intercepta a curva de nível zero associada à função  $g$ , isto é,

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\} \tag{12.6}$$

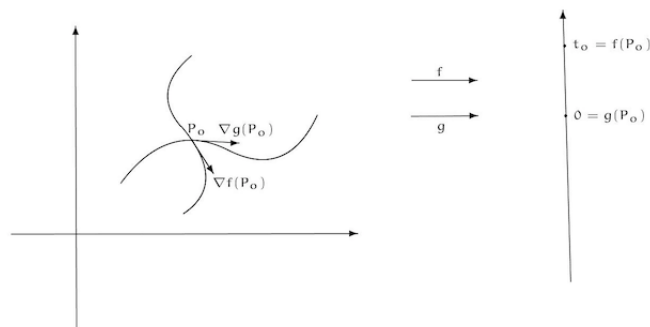
transversalmente, isto é, de modo que uma curva não seja tangente à outra, ou ainda, os vetores

$$\nabla f(x_0, y_0) \text{ e } \nabla g(x_0, y_0)$$

são linearmente independentes, no correspondente ponto de intersecção, que denotaremos por

$$P_0 \doteq (x_0, y_0) \in A.$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Então, para valores de  $t$  próximos do valor  $t_0$ , a curva de nível

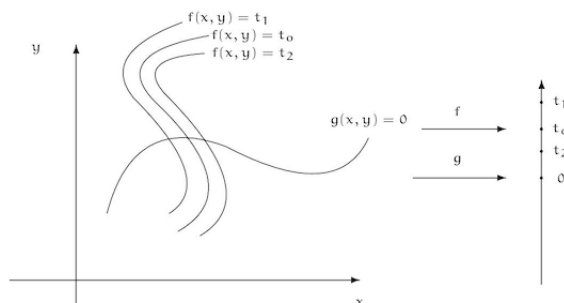
$$\{(x, y) \in A ; f(x, y) = t\},$$

também irá interceptar a curva de nível zero associada à função  $g$ , isto é, à curva

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\}.$$

Mais do que isso, para valores de  $t$  próximos do valor  $t_0$ , as curvas de nível  $t$ , associadas à função  $f$ , interceptarão a curva de nível zero, associada à função  $g$ , transversalmente nos pontos da interseção entre ambas.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Isto significa que o valor  $t_0$  **não** pode ser um valor de mínimo ou de máximo da função  $f$  quando restrita ao vínculo

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\}.$$

De fato, se as curvas de nível  $t$ , associadas à função  $f$ , para valores de  $t$  próximos do valor  $t_0$ , cruzam transversalmente, a curva de nível zero, associada à função  $g$  então, para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, temos que se

$$t_1 \in (t_0, t_0 + \varepsilon) \tag{12.7}$$

a curva de nível  $t_1$ , associada à função  $f$ , cruzará transversalmente, a curva de nível zero, associada à função  $g$ , ou seja, a curva (12.3).

Neste caso teremos que o número real  $t_0$  **não** poderá ser um valor máximo da função  $f$ , quando restrita ao vínculo (12.3), pois se

$$P_0 = (x_0, y_0) \in \{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\} \cap \{(x, y) \in A ; f(x, y) = t_0\}$$

e

$$P_1 \doteq (x_1, y_1) \in \{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\} \cap \{(x, y) \in A ; f(x, y) = t_1\},$$

então teremos:  $f(x_1, y_1) = t_1 \stackrel{(12.7)}{>} t_0 = f(x_0, y_0),$

mostrando que o número real  $t_0$  **não** poderá ser um valor máximo da função  $f$ , quando restrita ao vínculo (12.3).

Por outro lado, para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, teremos que se

$$t_2 \in (t_0 - \varepsilon, t_0), \quad (12.8)$$

a curva de nível  $t_2$ , associada à função  $f$ , cruzará transversalmente, a curva de nível zero, associada à função  $g$ , isto é, a curva (12.3).

Logo o valor  $t_0$  **não** poderá ser um valor de mínimo da função  $f$ , quando restrita ao vínculo (12.3).

De fato, pois

se  $P_2 \doteq (x_2, y_2) \in \{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\} \cap \{(x, y) \in A ; f(x, y) = t_2\},$

então teremos:  $f(x_2, y_2) = t_2 \stackrel{(12.8)}{<} t_0 = f(x_0, y_0),$

mostrando que o número real  $t_0$  **não** poderá ser um valor mínimo da função  $f$ , quando restrita ao vínculo (12.3).

3. Portanto, das análises feitas no item acima, podemos concluir que a função  $f$  **somente** poderá atingir um valor extremo (máximo ou mínimo) quando restrita ao vínculo (12.3), em um determinado ponto

$$P_0 = (x_0, y_0),$$

se a curva de nível

$$f(x, y) = f(P_0)$$

for uma curva tangente à curva de nível zero, associada à função  $g$ , no ponto  $P_0$ , ou seja, se os vetores

$$\nabla f(P_0) \quad \text{e} \quad \nabla g(P_0)$$

forem paralelos, ou ainda,

$$\nabla f(P_0) = \lambda \cdot \nabla g(P_0), \quad (12.9)$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

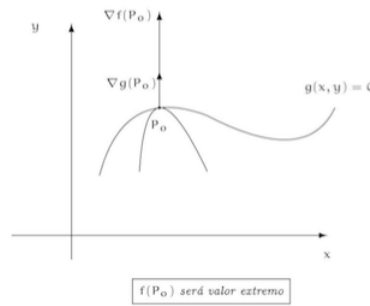
A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.

4. Note que as considerações acima podem ser verificadas da seguinte forma:

Suponhamos que a curva de nível zero associada à função  $g$ , isto é,

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\},$$





possa ser representada, na forma paramétrica, pela curva parametrizada regular  $\gamma : I \doteq (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma(t) \doteq (x(t), y(t)), \quad \text{para cada } t \in I,$$

ou seja,

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0 \quad \text{para cada } t \in I.$$

Pode-se mostrar que se a função  $g$  é diferenciável no conjunto aberto  $A$  e se

$$\nabla g(x, y) \neq \vec{0}, \quad \text{para cada } (x, y) \in A,$$

então a situação acima ocorrerá.

A verificação deste fato será omitida.

Logo, a restrição da função  $f$ , ao vínculo (12.3), será a restrição da função  $f$ , à curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que denotaremos por  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\doteq f[\gamma(t)] \\ &= f[x(t), y(t)], \quad \text{para cada } t \in I. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Deste modo, para analisar os extremos da função  $f$  restrita ao vínculo (12.3), basta encontrar os extremos da função  $\varphi$  no intervalo  $I$ , esta função é uma função real, de uma variável real (estudada na disciplina de Cálculo I).

Observemos que a função  $\varphi$  é de classe  $C^1$  no intervalo aberto  $I$  (pois ela é a função composta de funções de classe  $C^1$ ) e assim, se existir um extremo da função  $\varphi$ , ele deverá ocorrer em ponto crítico da função  $\varphi$ , ou seja, em um ponto  $t_0 \in I$ , de modo que

$$\varphi'(t_0) = 0. \quad (12.11)$$

Mas, da regra da cadeia (ou seja, do Teorema 9.1.1), temos que:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\stackrel{(12.10) \text{ e } (9.13)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}[x(t), y(t)] \overbrace{\frac{dx}{dt}(t)}{=x'(t)} + \frac{\partial f}{\partial y}[x(t), y(t)] \overbrace{\frac{dy}{dt}(t)}{=y'(t)} \\ &\stackrel{(12.10)}{=} \nabla f[x(t), y(t)] \bullet \gamma'(t). \end{aligned} \quad (12.12)$$

Assim, fazendo

$$t = t_0$$

e tomando-se

$$P_0 = (x(t_0), y(t_0)),$$

e (12.12), obteremos:

$$\begin{aligned} \nabla f(P_0) \cdot \gamma'(t_0) &\stackrel{(12.12)}{=} \varphi'(t_0) \\ &\stackrel{(12.11)}{=} 0, \end{aligned} \quad (12.13)$$

ou seja, o vetor  $\gamma'(t_0)$  deve ser ortogonal ao vetor  $\nabla f(P_0)$ .

Lembremos que o vetor  $\gamma'(t_0)$  é ortogonal ao vetor  $\nabla g(P_0)$ , pois  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma parametrização da curva de nível zero, associada à função  $g$ .

Como o vetor  $\nabla f(P)$  é ortogonal às curvas de nível associadas à função  $f$ , que contém o ponto  $P$ , segue-se que no ponto  $P_0$ , a curva de nível zero, associada à função  $g$  (isto é, (12.3)) e a curva de nível  $f(P_0)$ , associada à função  $f$ , isto é,

$$\{(x, y) \in A; f(x, y) = f(P_0)\},$$

deverão ser tangentes no ponto  $P_0$ .

Portanto, deveremos ter

$$\nabla f(P_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(P_0)$$

para algum  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , mostrando a validade de (12.9).

5. Observe que as condição

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(x_0, y_0),$$

para algum  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  e

$$g(x_0, y_0) = 0,$$

são equivalentes a que o ponto

$$(x_0, y_0, \lambda_0) \in A \times \mathbb{R}$$

seja um ponto crítico da função de três variáveis  $h: A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por dada por

$$h(x, y, \lambda) \doteq f(x, y) - \lambda g(x, y), \quad \text{para cada } (x, y, \lambda) \in A \times \mathbb{R}. \quad (12.14)$$

De fato, o ponto

$$(x_0, y_0, \lambda_0) \in A \times \mathbb{R}$$

será um ponto crítico da função  $h$ , dada por (12.14), se, e somente se:

$$\begin{aligned} &\nabla h(x_0, y_0, \lambda_0) = (0, 0, 0), \\ &\text{que, de (12.14), é equivalente à:} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \stackrel{(12.14)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \\ 0 = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \stackrel{(12.14)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ 0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \stackrel{(12.14)}{=} -g(x_0, y_0) \end{array} \right. , \quad (12.15)$$

mas as duas primeiras equações acima são equivalentes a equação

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(x_0, y_0)$$

e a terceira a é equivalente a equação

$$g(x_0, y_0) = 0,$$

como afirmamos acima.

6. O raciocínio acima pode ser aproveitado para o caso de  $n$ -variáveis.

Vejam os casos em que as funções  $f$  e  $g$  são funções de três variáveis, a valores reais, satisfazendo as mesmas hipóteses acima, a saber, são funções de classe  $C^1$  no conjunto  $A$ , que é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$ , e

$$\nabla g(P) \neq 0 \quad \text{para} \quad P \in A.$$

Esta última condição garante que a superfície de nível zero associada à função  $g$ , isto é,

$$\{(x, y, z) \in A ; g(x, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad (12.16)$$

venha a definir uma superfície, que indicaremos por  $S$ , que é uma superfície parametrizada regular perto de cada ponto  $P_0 \in A$ .

A verificação deste fato será omitida.

Em particular, para cada ponto  $P_0 \in S$ , existem duas curvas

$$\gamma_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2\},$$

satisfazendo que

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P_0$$

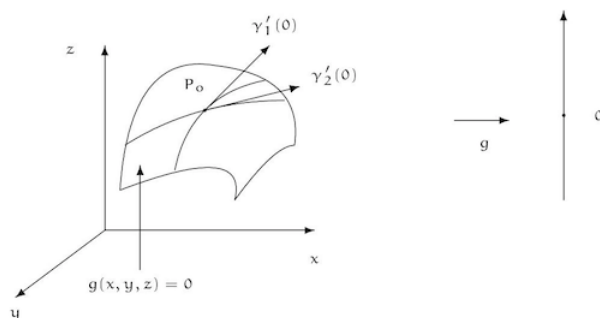
e os vetores

$$\gamma_1'(0) \quad \text{e} \quad \gamma_2'(0)$$

são linearmente independentes..

As curvas parametrizadas acima são as, assim denominadas, linhas coordenadas associada à parametrização da superfície  $S$ .

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Se

$$P_o = (x_o, y_o, z_o)$$

é um ponto de extremo da função  $f$ , restrita ao vínculo (12.16), então as funções  $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$\varphi_1(t) \doteq f[\gamma_1(t)] \quad e \quad \varphi_2(t) \doteq f[\gamma_2(t)], \quad \text{para cada } t \in I, \quad (12.17)$$

também terão extremo (máximo ou mínimo) em  $t = 0$ , que corresponde ao ponto

$$P_o = \gamma_1(0) = \gamma_2(0).$$

Como as funções  $\varphi_1, \varphi_2$  são de classe  $C^1$  no intervalo aberto  $I$  (pois são funções compostas de funções de classe  $C^1$ ) segue que, onde elas tiverem um extremo, este deverá ser ponto crítico das mesmas.

Em particular

$$t = 0,$$

deverá ser um ponto crítico das funções  $\varphi_1, \varphi_2$  (são funções a valores reais, de uma variável real, estudadas na disciplina de Cálculo I), ou seja, deveremos ter

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0. \quad (12.18)$$

Derivando em as relações (12.18) acima, em relação a  $t$ , e utilizando a regra da cadeia (ou seja, do Teorema 9.1.1), obtemos as relações (semelhante ao que fizemos em (A.6)) :

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \nabla f[\gamma_1(t)] \bullet \gamma_1'(t), \\ \varphi_2'(t) &= \nabla f[\gamma_2(t)] \bullet \gamma_2'(t). \end{aligned} \quad (12.19)$$

Em particular, fazendo  $t = 0$  em (12.19), obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(12.18)}{=} \varphi_1'(0) \\ &\stackrel{(12.19)}{=} \nabla f[\gamma_1(0)] \bullet \gamma_1'(0) \\ 0 &\stackrel{(12.18)}{=} \varphi_2'(0) \\ &\stackrel{(12.19)}{=} \nabla f[\gamma_2(0)] \bullet \gamma_2'(0), \end{aligned} \quad (12.20)$$

$$\text{ou seja,} \quad \nabla f(P_o) \bullet \gamma_1'(0) = 0 \quad e \quad \nabla f(P_o) \bullet \gamma_2'(0) = 0. \quad (12.21)$$

Como os vetores

$$\gamma_1'(0) \quad e \quad \gamma_2'(0)$$

são linearmente independentes em  $\mathbb{R}^3$ , deveremos ter o vetor  $\nabla f(P_o)$  ortogonal ao plano gerado por estes dois vetores, isto é, pelos vetores

$$\gamma_1'(0) \quad e \quad \gamma_2'(0),$$

que contém o ponto  $P_o$ , que nada mais é que o plano tangente à superfície de nível zero, associada à função  $g$  (ou seja, (12.16)) no ponto  $P_o$ .

Como

$$\nabla g(P_o) \neq \vec{0}$$

é um vetor ortogonal ao plano acima, segue-se os vetores

$$\nabla g(P_0) \quad \text{e} \quad \nabla f(P_0)$$

deverão ser paralelos, isto é,

$$\nabla f(P_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(P_0),$$

para algum  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , como o que ocorreu no item 3. (que tratou do caso  $n = 2$ ).

7. A situação acima se estende para  $n$ -variáveis e o argumento a ser usado é análogo ao que utilizamos acima, bastando para tanto considerar  $(n - 1)$  curvas parametrizadas regulares, contidas na superfície de nível zero, associada à função  $g$ , que contém o ponto  $P_0$ , cujos  $(n - 1)$  vetores tangentes formem um conjunto linearmente independente.

A existência dessas curvas parametrizadas regulares pode ser garantida por um resultado que será omitido.

Com isto terminamos de exibir um esboço da demonstração do:

**Teorema 12.1.1 (do multiplicador de Lagrange, para um vínculo)** *Sejam  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$ , definidas em um subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Suponhamos que*

$$\nabla g(P) \neq 0, \quad \text{para cada } P \in A. \quad (12.22)$$

*Se no ponto*

$$P_0 \in A,$$

*a função  $f$  possui um ponto extremo (máximo ou mínimo) quando restrita ao vínculo*

$$\{p \in A ; g(p) = 0, \} \quad (12.23)$$

*então deverá existir*

$$\lambda_0 \in \mathbb{R},$$

*tal que*

$$\nabla f(P_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(P_0) \quad \text{e} \quad g(P_0) = 0, \quad (12.24)$$

*ou, de outro modo, o ponto*

$$(P_0, \lambda_0) \in A \times \mathbb{R}$$

*deverá ser um ponto crítico da função  $h : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$h(P, \lambda) \doteq f(P) - \lambda \cdot g(P), \quad \text{para cada } (P, \lambda) \in A \times \mathbb{R}. \quad (12.25)$$

**Demonstração:**

Veja os itens da Observação 12.1.1.

□

**Observação 12.1.2**

1. Na situação que

$$n = 2,$$

se tivermos em mãos a representação geométrica dos gráficos das curvas de nível da função  $f$  e da curva de nível zero, associada à função  $g$  (isto é, do vínculo), então podemos,

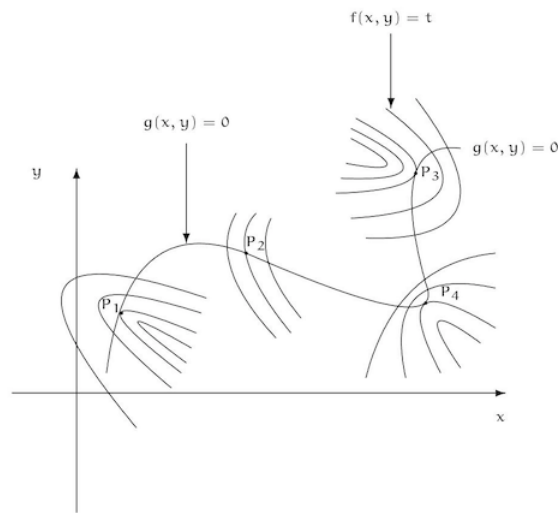
visualmente, saber onde a função  $f$  poderá ter seus extremos (máximo ou mínimo), quando restrita ao restrito ao vínculo

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Vale observar que poderemos ter, eventualmente, vários pontos onde vale (A.20), ou seja, o Teorema nos fornece condições necessárias para que uma função tenha um extremo quando restrita a um vínculo.

Em algumas situações teremos que fazer um estudo à parte para encontrarmos, de fato, os extremos procurados, como mostra a situação da figura abaixo.

A figura abaixo nos fornece, um exemplo, de representação geométrica das curvas de nível, associada à função  $f$ , e da curva de nível zero, associada à função  $g$ .



Podemos ver que os pontos extremos (máximo ou mínimo) da função  $f$ , restrita ao vínculo

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\},$$

se existirem, deverão ocorrer nos pontos

$$P_1, P_3 \text{ ou } P_4.$$

De fato, pois nestes pontos as curvas de nível, associadas à função  $f$ , e de nível zero, associada à função  $g$ , serão tangentes, isto é,

$$\nabla f(P_i) = \lambda_i \cdot \nabla g(P_i)$$

para

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ com } i \in \{1, 3, 4\}.$$

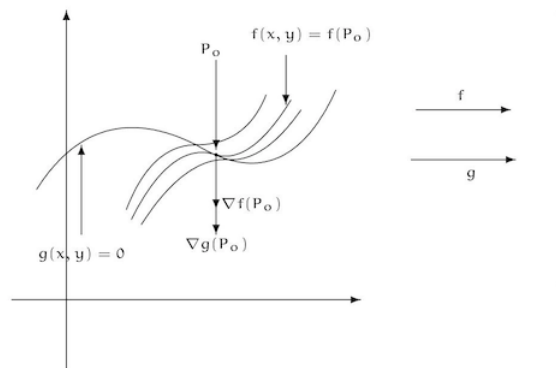
2. A figura acima ilustra o fato que as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange são necessárias, mas podem não ser suficiente para encontrarmos os extremos de uma função restrita a um vínculo.

Neste caso (como na figura acima), devemos encontrar entre os pontos encontrados no Teorema do multiplicador de Lagrange, quais deles têm as propriedades que queremos, ou seja, qual deles é máximo ou mínimo global da função restrita ao vínculo.

3. Uma situação mais crítica seria o caso de encontrarmos vários pontos que satisfazem o Teorema do multiplicador de Lagrange e entre eles termos pontos onde a função não tem nem mesmo um extremo local, quando restrita ao vínculo.

Na situação apresentada na figura abaixo, temos que o ponto  $P_0$  é um ponto onde vale o Teorema do multiplicador de Lagrange (pois vale a condição (12.9)), mas a função f não tem um extremo (nem local) no ponto  $P_0$ , quando restrita ao vínculo

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\}.$$



### 12.1.3 Aplicações

A seguir aplicaremos o Teorema do multiplicador de Lagrange (ou seja, o Teorema 12.1.1) aos:

**Exemplo 12.1.1** *Encontre, se existir, o ponto*

$$P_0 \doteq (x_0, y_0),$$

*sobre o ramo da hipérbole*

$$xy = 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in A \doteq (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad (12.26)$$

*que está mais próximo à origem  $(0, 0)$ .*

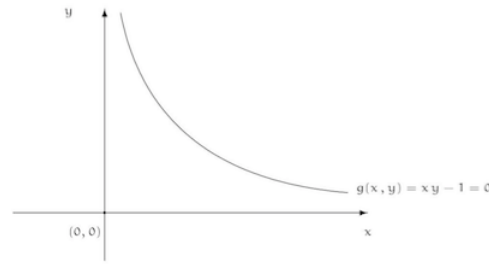
#### Resolução:

Observemos que a função a ser minimizada é função distância de um ponto  $P = (x, y)$  à origem  $P_0 = (0, 0)$ , isto é, a função  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} d(x, y) &\doteq d(P, P_0) \\ &\text{visto na disciplina de Geometria Analítica } \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{para cada } P \doteq (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (12.27)$$

sujeita ao vínculo

$$\{(x, y) \in A ; g(x, y) = 0\}, \quad (12.28)$$



onde a função  $g : A \doteq (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por (a representação geométrica do seu gráfico é dado pela figura abaixo)

$$g(x, y) \doteq xy - 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in A. \quad (12.29)$$

Um fato simples a ser notado é que se o ponto  $P = (x, y) \in A$  é um ponto que satisfaz o vínculo (12.28) e minimiza a função  $d$ , então este mesmo ponto minimizará a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &\doteq d^2(x, y) \\ &\stackrel{(12.27)}{=} x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (12.30)$$

restrita ao mesmo vínculo (12.28) e reciprocamente.

Logo basta encontrarmos o(s) ponto(s) de mínimo da função  $f$ , sujeita ao vínculo (12.28).

Esta observação facilitará os cálculos das derivadas parciais, pois a função  $f$  não envolve radicais.

Logo, nosso problema, resume-se a encontrar o mínimo global da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (12.31)$$

sujeita à ao vínculo

$$\begin{aligned} g(x, y) &\doteq xy - 1 \\ &= 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in A. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Observemos que as funções  $f$  e  $g$  são de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$  nos conjuntos  $\mathbb{R}^2$  e  $A$ , respectivamente (pois são funções polinomiais).

Notemos também que, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , teremos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{(12.31)}{=} (2x, 2y) \end{aligned} \quad (12.33)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y) &= \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{(12.32)}{=} (y, x) \neq (0, 0), \end{aligned} \quad (12.34)$$

para cada  $(x, y) \in A \stackrel{(12.26)}{=} (0, \infty) \times \mathbb{R}$ .

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (isto é, o Teorema 12.1.1), temos que um ponto

$$P_o = (x_o, y_o)$$



que satisfaz a condição de minimizar a função  $f$ , restrita ao vínculo (12.32), deverá satisfazer, para algum  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , as equações

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}, \\ \text{que, de (12.33) e (12.34), é equivalente à:} & \begin{cases} (2x_0, 2y_0) = \lambda_0 (y_0, x_0) \\ x_0 y_0 - 1 = 0 \end{cases}, \\ \text{ou seja,} & \begin{cases} 2x_0 = \lambda_0 y_0 \\ 2y_0 = \lambda_0 x_0 \\ x_0 y_0 = 1 \end{cases}, \\ \text{isto é:} & \begin{cases} 2x_0 = \lambda_0 y_0 \\ y_0 = \frac{\lambda_0 x_0}{2} \\ x_0 y_0 = 1 \end{cases}, \\ \text{ou ainda,} & \begin{cases} 2x_0 = \lambda_0^2 \frac{x_0}{2} \\ 2y_0 = \lambda_0 x_0 \\ x_0 y_0 = 1 \end{cases}, \\ \text{e como } x_0 \in (0, \infty), \text{ segue que:} & \begin{cases} \lambda_0 = -2 \text{ ou } \lambda_0 = 2 \\ 2y_0 = \lambda_0 x_0 \\ x_0 y_0 = 1 \end{cases}, \\ \text{e com isto teremos, ou} & \begin{cases} \lambda_0 = 2 \\ x_0 = y_0 \\ x_0 y_0 = 1 \end{cases} \quad (12.35) \\ \text{ou} & \begin{cases} \lambda_0 = -2 \\ x_0 = -y_0 \\ x_0 y_0 = 1 \end{cases}. \quad (12.36) \end{aligned}$$

Notemos que o sistema (12.36) não possui solução pois, das duas últimas equações, deveríamos ter

$$-x_0^2 = 1,$$

que não tem solução real.

Assim, a única solução corresponderá ao sistema (12.35), cuja mesma será:

$$\lambda_0 = 2 \quad \text{e} \quad (x_0, y_0) = (1, 1). \quad (12.37)$$

De fato pois, neste caso, das últimas duas equações, deveremos ter

$$\begin{aligned} & x_0^2 = 1, \\ & \text{e como } x_0 \in (0, \infty), \\ & \text{segue que } x_0 = 1, \\ & \text{e assim, a 2.a equação de (12.35), garante que: } y_0 = 1, \end{aligned}$$

mostrando (12.37).

Afirmamos que no ponto

$$P_0 \doteq (1, 1),$$

a função  $f$  tem um de mínimo, quando restrita ao vínculo (12.28).

De fato,

como  $xy = 1$ , para  $x \in (0, \infty)$ ,  
teremos:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(1, 1) &\stackrel{(12.31)}{=} x^2 + y^2 - 2 \\ &\stackrel{(12.32) \text{ implica que } y = \frac{1}{x}}{=} \overbrace{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}^{\frac{x^4 + 1 - 2x^2}{x^2}} \\ &= \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} \\ &\geq 0, \\ \text{isto é, } f(x, y) &\geq f(1, 1) \\ &\stackrel{(12.31)}{=} 2, \end{aligned}$$

para todo ponto  $(x, y)$  sobre o ramo de hipérbole

$$xy = 1, \quad \text{para cada } x \in (0, \infty),$$

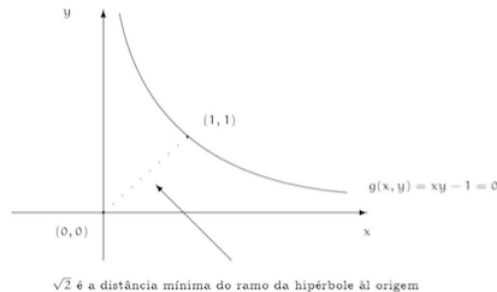
como afirmamos acima.

Notemos, porém, que a distância mínima será igual a  $\sqrt{2}$ , ou seja, é dada por

$$d(1, 1) \stackrel{(12.30)}{=} \sqrt{f(1, 1)},$$

pois minimizamos a função  $d^2$ , completando a resolução.

A representação geométrica da situação acima descrita na figura abaixo.



□

Podemos também aplicar as ideias desenvolvidas nesta seção ao:

**Exemplo 12.1.2** Determine (se existir) o ponto

$$P_0 \doteq (x_0, y_0)$$

sobre a reta

$$x + 2y = 1 \tag{12.38}$$

cujos o produto de suas coordenadas seja o maior possível.

**Resolução:**

A função a ser maximizada é a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq xy, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{12.39}$$

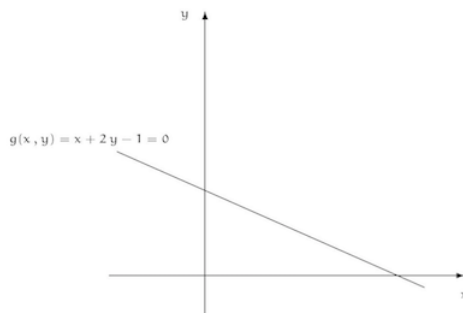
quando sujeita ao vínculo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}, \tag{12.40}$$

onde a função  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$g(x, y) \doteq x + 2y - 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{12.41}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Observemos que as funções  $f$  e  $g$  são de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$  (pois são funções polinomiais). Notemos também que, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , teremos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{(12.39)}{=} (y, x), \end{aligned} \tag{12.42}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y) &= \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{(12.41)}{=} (1, 2) \neq (0, 0). \end{aligned} \tag{12.43}$$

Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (isto é, Teorema 12.1.1), um ponto

$$P_0 \doteq (x_0, y_0)$$

que satisfaz a condição de maximizar a função  $f$ , restrita ao vínculo (12.40), deverá satisfazer, para algum  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , as equações

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}, \\ \text{que, de (12.42) e (12.43), é equivalente à:} & \begin{cases} (y_0, x_0) = \lambda_0 (1, 2) \\ x_0 + 2y_0 = 1 = 0 \end{cases}, \\ \text{ou seja,} & \begin{cases} y_0 = \lambda \\ x_0 = 2\lambda_0 \\ x_0 + 2y_0 = 1 \end{cases}, \\ \text{ou ainda,} & \begin{cases} y_0 = \lambda_0 \\ \lambda_0 = \frac{x_0}{2} \\ x_0 + 2y_0 = 1 \end{cases}, \\ \text{isto é,} & \begin{cases} y_0 = \frac{x_0}{2} \\ \lambda_0 = \frac{x_0}{2} \\ 4\lambda_0 = 1 \end{cases}, \\ \text{logo} & \begin{cases} \lambda_0 = \frac{1}{4} \\ x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{1}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo, o candidato ao ponto procurado é o ponto

$$P_0 \doteq \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

Afirmamos que o ponto  $P_0 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$  é realmente um ponto de máximo global da função  $f$ , quando restrita ao vínculo (12.40).

De fato,

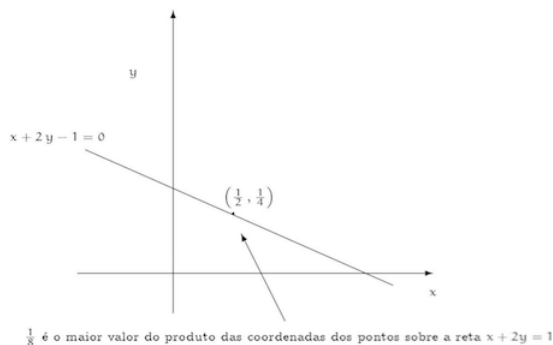
$$\begin{aligned}
 & \text{como } x + 2y = 1, \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ segue que} \\
 f(x, y) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) & \stackrel{(12.39)}{=} xy - \frac{1}{8} \\
 & \stackrel{(12.41)}{=} \text{implicará que } x=1-2y \quad (1-2y)y - \frac{1}{8} \\
 & = -2y^2 + y - \frac{1}{8} \\
 & = -2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \\
 & \leq 0, \\
 \text{isto é, } f(x, y) & \leq f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \\
 & \stackrel{(12.39)}{=} \frac{1}{8},
 \end{aligned}$$

para todo ponto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  que pertença à reta

$$x + 2y = 1,$$

completando a resolução.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



□

Um problema envolvendo funções a valores reais, com três variáveis reais, é dado pelo:

**Exercício 12.1.1** *Suponhamos que*

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \quad e \quad d \in \mathbb{R}$$

*estão fixados.*

*Encontre o ponto*

$$P \doteq (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

*pertencente ao plano*

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{12.44}$$

*mais próximo ao ponto*

$$P_0 \doteq (x_0, y_0, z_0),$$

fixado

Encontre também o valor da correspondente distância mínima.

**Resolução:**

Precisamos minimizar a função distância de um ponto  $P$  ao ponto  $P_0$ , isto é, minimizar a função  $d: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$d(x, y, z) \doteq d(P, P_0)$$

visto em Geometria Analítica  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ , para  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

(12.45)

sujeita ao vínculo

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; g(x, y, z) = 0\},$$
(12.46)

onde a função  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$g(x, y, z) \doteq ax + by + cz + d, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$
(12.47)

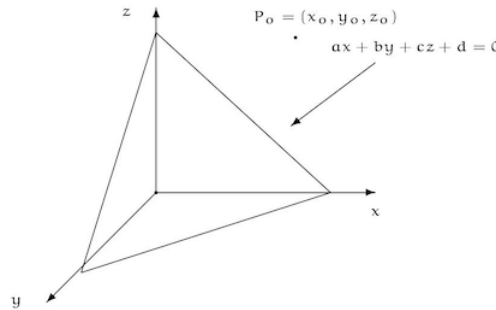
Agiremos como na resolução Exemplo 12.1.1, ou seja, iremos minimizarmos a função  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) \doteq d^2(x, y, z)$$

$$= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
(12.48)

sujeita ao vínculo (12.46).

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Observemos que as funções  $f$  e  $g$  são de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$  (pois são funções polinomiais). Notemos também que, para  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , teremos:

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)$$

$$\stackrel{(12.48)}{=} (2(x - x_0), 2(y - y_0), 2(z - z_0)),$$
(12.49)

e

$$\nabla g(x, y, z) = \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \right)$$

$$\stackrel{(12.47)}{=} (a, b, c) \stackrel{a^2+b^2+c^2 \neq 0}{\neq} (0, 0, 0).$$
(12.50)

Logo podemos aplicar o Teorema do multiplicador de Lagrange (isto é, Teorema 12.1.1).

Neste caso, um ponto

$$P_1 \doteq (x_1, y_1, z_1)$$

que satisfaz a condição de maximizar a função  $f$ , restrita ao vínculo (12.46), deverá satisfazer, para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , as equações:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \nabla f(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 \cdot \nabla g(x_1, y_1, z_1) \\ g(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases} \\ \text{que, de (12.49) e (12.50), é o mesmo que:} & \begin{cases} 2(x_1 - x_0), 2(y_1 - y_0), 2(z_1 - z_0) = \lambda_1(a, b, c), \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \end{cases} \\ \text{ou seja,} & \begin{cases} 2(x_1 - x_0) = \lambda_1 a \\ 2(y_1 - y_0) = \lambda_1 b \\ 2(z_1 - z_0) = \lambda_1 c \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \end{cases}, \\ \text{ou ainda,} & \begin{cases} x_1 = \frac{\lambda_1 a}{2} + x_0 \\ y_1 = \frac{\lambda_1 b}{2} + y_0 \\ z_1 = \frac{\lambda_1 c}{2} + z_0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \end{cases}, \quad (12.51) \\ \text{isto é,} & \begin{cases} x_1 = \frac{\lambda_1 a}{2} + x_0 \\ y_1 = \frac{\lambda_1 b}{2} + y_0 \\ z_1 = \frac{\lambda_1 c}{2} + z_0 \\ \frac{\lambda_1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \end{cases} \\ \text{ou seja,} & \begin{cases} x_1 = \frac{\lambda_1 a}{2} + x_0 \\ y_1 = \frac{\lambda_1 b}{2} + y_0 \\ z_1 = \frac{\lambda_1 c}{2} + z_0 \\ \frac{\lambda_1}{2} = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \quad (12.52) \end{aligned}$$

$$\text{isto é, } \begin{cases} x_1 = x_0 - \frac{a^2 x_0 + a b y_0 + a c z_0 + a d}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y_1 = y_0 - \frac{b a x_0 + b^2 y_0 + b c z_0 + b d}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z_1 = z_0 - \frac{c a x_0 + c b y_0 + c^2 z_0 + c d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases},$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} x_1 = \frac{b(b x_0 - a y_0) + c(c x_0 - a z_0) - a d}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y_1 = \frac{a(a y_0 - b x_0) + c(c y_0 - b z_0) - b d}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z_1 = \frac{a(a z_0 - c x_0) + b(b z_0 - c y_0) - c d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}.$$

Mostremos que, no ponto

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1),$$

a função  $f$  tem um mínimo global, quando restrita ao vínculo (12.46).

De fato, pois a função não possui máximo, quando restrita ao vínculo (12.46) e temos

$$f(x, y, z) \stackrel{(12.48)}{=} x^2 + y^2 + z^2 \geq 0, \quad \text{para } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Além disso, a distância do ponto

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

ao plano

$$a x + b y + c z + d = 0,$$

será dada por:

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x_1, y_1, z_1)} &\stackrel{(12.48)}{=} \sqrt{\underbrace{(x_1 - x_0)^2}_{\stackrel{(12.51)}{=} \frac{\lambda_1^2 a}{2}} + \underbrace{(y_1 - y_0)^2}_{\stackrel{(12.51)}{=} \frac{\lambda_1^2 b}{2}} + \underbrace{(z_1 - z_0)^2}_{\stackrel{(12.51)}{=} \frac{\lambda_1^2 c}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} a^2 + \frac{\lambda_1^2}{4} b^2 + \frac{\lambda_1^2}{4} c^2} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} (a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|\lambda_1|}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &\stackrel{(12.52)}{=} \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \end{aligned}$$



que é a fórmula conhecida da distância de um ponto

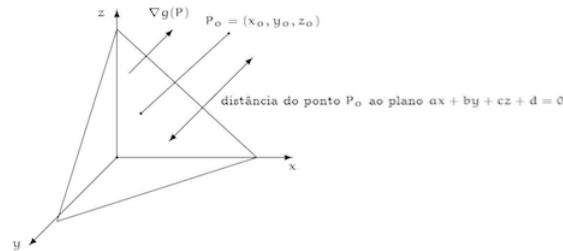
$$P_o = (x_o, y_o, z_o)$$

a um plano que possui equação geral dada por

$$ax + by + cz + d = 0,$$

visto na disciplina de Geometria Analítica, completando a resolução.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



□

Um outro problema envolvendo funções a valores reais, de três variáveis reais, é dado pelo

**Exercício 12.1.2** *Determine, se existir, as dimensões de um paralelepípedo reto de volume máximo, cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados, que esteja inscrito no elipsóide*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1. \quad (12.53)$$

### Resolução:

Representando por

$$P \doteq (x, y, z)$$

os comprimentos das arestas do paralelepípedo, com

$$(x, y, z)$$

no primeiro octante, isto é,

$$x, y, z > 0,$$

vemos que o seu volume é expresso pela função  $V : (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$V(x, y, z) \doteq 8xyz, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in (0, \infty)^3. \quad (12.54)$$

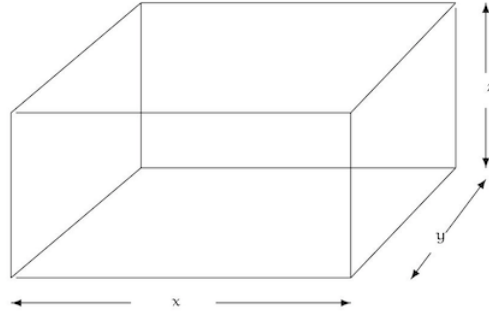
A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.

Assim, devemos encontrar o máximo da função  $V$ , quando restrita ao vínculo

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; g(x, y, z) = 0\}, \quad (12.55)$$

onde a função  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$g(x, y, z) \doteq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (12.56)$$



isto é, quando o ponto  $P = (x, y, z)$  pertence ao elipsoide de equação (12.53).

Lembremos que como o elipsoide é um conjunto fechado e limitado em  $\mathbb{R}^3$  (isto é, é um conjunto compacto de  $\mathbb{R}^3$ ) e a função  $V$ , dada por (12.54), é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$  (pois é uma função polinomial), em particular, é uma função contínua em  $\mathbb{R}^3$ .

Logo, do Teorema 7.2.1, segue que esta possuirá valores de máximo e mínimo globais sobre o elipsoide.

Observemos que a função  $g$  também é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$  (pois é uma função polinomial).

Além disso, para  $(x, y, z) \in (0, \infty)^3$ , teremos:

$$\begin{aligned} \nabla V(x, y, z) &= \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &\stackrel{(12.54)}{=} (8yz, 8xz, 8xy), \end{aligned} \quad (12.57)$$

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y, z) &= \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &\stackrel{(12.56)}{=} \left( \frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, \frac{z}{8} \right) \neq (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (12.58)$$

Logo, podemos utilizar o Teorema do multiplicador de Lagrange (ou seja, o Teorema 12.1.1) para encontrarmos o possível ponto

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (0, \infty)^3,$$

que minimizará a função  $V$ , dada por (12.54), sobre o vínculo (12.55).

Aplicando tal resultado, deverá existir

$$\lambda_0 \in \mathbb{R},$$

de modo que:

que, de (12.57) e (12.58), é o mesmo que:

$$\begin{cases} \nabla V(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} (8y_0z_0, 8x_0z_0, 8x_0y_0) = \lambda_0 \left( \frac{x_0}{2}, \frac{2y_0}{9}, \frac{z_0}{8} \right) \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{16} - 1 = 0 \\ 8y_0z_0 = \frac{\lambda_0 x_0}{2} \\ 8x_0z_0 = \frac{2\lambda_0 y_0}{9} \\ 8x_0y_0 = \frac{\lambda_0 z_0}{8} \end{cases},$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{16} = 1 \\ \frac{2y_0}{x_0} = \frac{9x_0}{2y_0} \\ \frac{z_0}{x_0} = \frac{4x_0}{z_0} \\ \frac{z_0}{2y_0} = \frac{8y_0}{9z_0} \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{16} = 1 \\ \frac{y_0^2}{9} = \frac{x_0^2}{4} \\ z_0^2 = 4x_0^2 \\ \frac{z_0^2}{16} = \frac{y_0^2}{9} \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{4} = 1 \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{array}{l} \text{como } x > 0, \text{ teremos:} \\ \text{mas } ,y, z > 0, \text{ implicando em:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_0^2}{9} = \frac{x_0^2}{4} \\ x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{z_0^2}{16} = \frac{y_0^2}{9} \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{4} = 1 \\ x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y_0 = \sqrt{3} \\ z_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \end{array} \right. ,$$

Logo

$$P_0 \doteq \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right), \quad (12.59)$$

é o ponto que satisfaz as condições do Teorema do multiplicador de Lagrange.

Como só temos esse ponto satisfazendo o Teorema do multiplicador de Lagrange, segue que ele nos fornecerá o ponto de máximo global da função  $V$  restrita ao vínculo (12.55).

Observemos que o volume mínimo será zero, que corresponderia ao volume de um retângulo inscrito no elipsoide.

Como os lados do paralelepípedo são paralelos aos planos coordenados, segue que os vértices do mesmo serão dados pelos seguintes pontos:

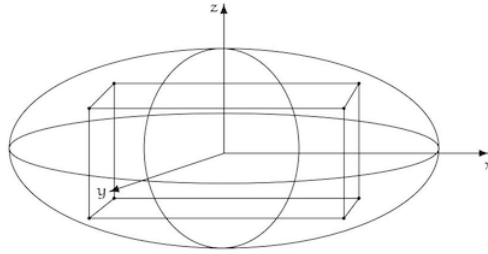
$$\begin{array}{ll} P_1 \doteq \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right), & P_2 \doteq \left( -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right), \\ P_3 \doteq \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right), & P_4 \doteq \left( -\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right), \\ P_5 \doteq \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3} \right), & P_6 \doteq \left( -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3} \right), \\ P_7 \doteq \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3} \right), & P_8 \doteq \left( -\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3} \right), \end{array}$$

e seu volume será igual a

$$\begin{aligned} V(P_o) &\stackrel{(12.59)}{=} V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \\ &\stackrel{(12.54)}{=} 8 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{64\sqrt{3}}{3} \text{ unidades de volume,} \end{aligned}$$

completando a resolução.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



□



## Capítulo 13

# Multiplicadores de Lagrange para dois vínculos

No capítulo 12 tratamos do problema de encontrar os extremos de uma função de várias variáveis reais, a valores reais, quando restrita a um vínculo.

Neste capítulo tratamos do problema de encontrar os extremos de uma função de várias variáveis reais, a valores reais, quando está restrita a dois vínculos.

### 13.1 Problema para dois vínculos

O objetivo desta seção é considerar o problema de achar os extremos (máximo ou mínimo) de uma função de três variáveis,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sujeita às condições, denominados de vínculos,

$$\{(x, y, z) \in A; g(x, y, z) = 0\} \quad \text{e} \quad \{(x, y, z) \in A; h(x, y, z) = 0\}, \quad (13.1)$$

onde  $g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções dadas.

O que faremos é uma análise semelhante a que foi feita na seção 12.1 do capítulo 12.

#### 13.1.1 Teorema dos multiplicadores de Lagrange para dois vínculos

Começaremos estabelecendo o resultado principal, a saber:

**Teorema 13.1.1** (dos multiplicadores de Lagrange, para dois vínculos) *Consideremos  $\underline{A}$  um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^3$  e as funções  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\underline{C}^1$  no conjunto  $\underline{A}$ .*

*Consideremos os conjuntos*

$$B \doteq \{(x, y, z) \in A; g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (13.2)$$

*e suponhamos que os vetores*

$$\nabla g(x, y, z) \quad \text{e} \quad \nabla h(x, y, z)$$

*sejam linearmente independentes, para cada  $(x, y, z) \in B$ , ou seja, não são paralelos, em cada ponto do conjunto  $\underline{B}$ .*

*Se o ponto*

$$P_o \doteq (x_o, y_o, z_o) \in B$$

*é um extremo (máximo ou mínimo) da função  $f$ , restrita ao conjunto  $\underline{B}$ , então deverão existir constantes*

$$\lambda_o, \mu_o \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu_0 \cdot \nabla h(x_0, y_0, z_0). \quad (13.3)$$

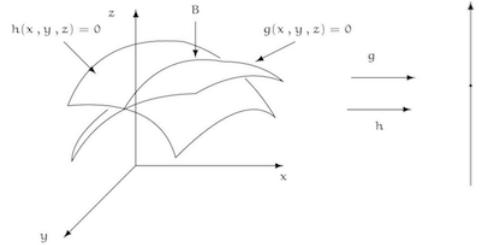
**Demonstração:**

Observemos que as restrições

$$\{(x, y, z) \in A; g(x, y, z) = 0 = h(x, y, z)\}$$

nos fornecem uma curva obtida da intersecção das superfícies de nível zero das funções  $g$  e da função  $h$ .

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima



Seja

$$P_0 \doteq (x_0, y_0, z_0)$$

um ponto extremo (máximo ou mínimo) da restrição da função  $f$  ao conjunto  $B$ .

Vamos assumir que o ponto  $P_0$  é um ponto de máximo da restrição da função  $f$  ao conjunto  $B$ .

A demonstração para o caso em que o ponto  $P_0$  é um ponto de mínimo da restrição da função  $f$  ao conjunto  $B$ , é análoga e será deixada como exercício para o leitor.

A condição que os gradientes das funções  $g$  e  $h$  são linearmente independentes em cada ponto do conjunto  $B$ , garante que pontos do conjunto  $B$ , próximos ao ponto  $P_0$ , podem ser descritos por uma curva parametrizada diferenciável, que indicaremos por  $\gamma : I \doteq (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que será dada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{para cada } t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad (13.4)$$

satisfazendo

$$\gamma(0) = P_0 \quad \text{e} \quad \gamma'(t) \neq \vec{O}, \quad \text{para cada } t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (13.5)$$

Em particular, a curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  será uma curva parametrizada diferenciável regular.

A demonstração deste fato será omitida.

Deste modo temos que a função  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$u(t) \doteq f[\gamma(t)], \quad \text{para cada } t \in I, \quad (13.6)$$

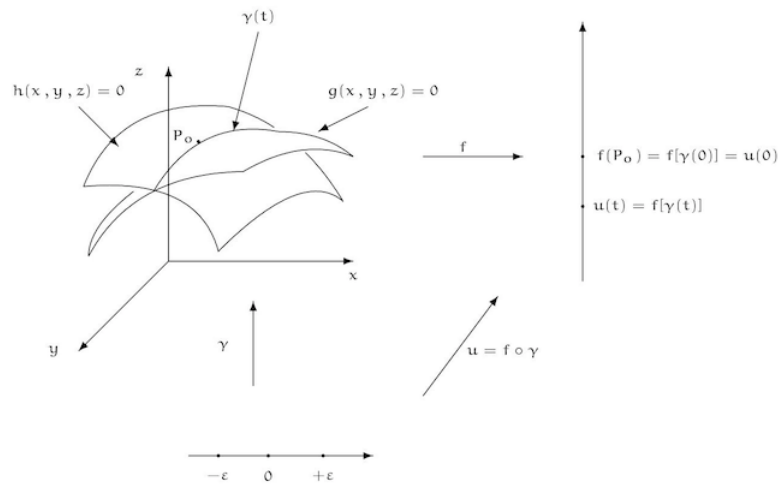
terá a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} u(t) &\stackrel{(13.6)}{=} f[\gamma(t)] \\ &\leq \text{P}_0 \text{ é o ponto de máximo de } f, \text{ relativamente à } (13.2) \\ &\leq f(P_0) \\ &\stackrel{(13.5)}{=} f[\gamma(0)] \\ &\stackrel{(13.6)}{=} u(0), \quad \text{para cada } t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \end{aligned}$$



pois a função  $f$  tem um máximo no ponto  $P_0 = \gamma(0)$ , quando restrita ao conjunto  $B$ .

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Assim, a função

$$u = f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que é uma função a valores reais, de uma variável real, de classe  $C^1$  em  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  (pois é composta de funções que têm essa propriedade), atingirá seu valor máximo no ponto

$$0 \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Logo, como visto na disciplina de Cálculo I, segue que deveremos ter

$$u'(0) = 0. \tag{13.7}$$

Mas, pela regra da cadeia (ou seja, o Teorema 9.1.1),

$$u'(t) \stackrel{(9.13)}{=} \nabla f[\gamma(t)] \bullet \gamma'(t), \quad \text{para cada } t \in I, \tag{13.8}$$

em particular, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(13.7)}{=} u'(0) \\ &\stackrel{(13.8)}{=} \nabla f[\gamma(0)] \cdot \gamma'(0) \\ &\stackrel{\gamma(0)=P_0}{=} \nabla f(P_0) \cdot \gamma'(0), \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \nabla f(P_0) \cdot \gamma'(0) = 0. \tag{13.9}$$

Como, para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  temos

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in B &= \{(x, y, z) \in A ; g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}, \\ \text{segue que } \underbrace{g[\gamma(t)]}_{=(g \circ \gamma)(t)} &= 0 \\ &= \underbrace{h[\gamma(t)]}_{=(h \circ \gamma)(t)}, \quad \text{para cada } t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{aligned} \tag{13.10}$$

Derivando estas duas equações em relação a  $t$  e utilizando a regra da cadeia (ou seja, o Teorema 9.1.1), obteremos:

$$\begin{aligned} \nabla g[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) &\stackrel{(9.13)}{=} \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)(t) \\ &\stackrel{(13.10)}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla h[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) &\stackrel{(9.13)}{=} \frac{d}{dt}(h \circ \gamma)(t) \\ &\stackrel{(13.10)}{=} 0, \quad \text{para cada } t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \end{aligned}$$

em particular, se  $t = 0$ , teremos;  $\nabla g[\gamma(0)] \cdot \gamma'(0) = 0$  (13.11)

e  $\nabla h[\gamma(0)] \cdot \gamma'(0) = 0$ . (13.12)

Como

$$\gamma(0) = P_o,$$

teremos

$$\nabla g(P_o) \cdot \gamma'(0) = 0$$

e  $\nabla h(P_o) \cdot \gamma'(0) = 0$ . (13.13)

Desta forma, vemos que o vetor não nulo,

$$\gamma'(0)$$

é ortogonal aos vetores

$$\nabla g(P_o) \quad \text{e} \quad \nabla h(P_o),$$

que, por hipótese, são linearmente independentes.

Logo, deste fato e da disciplina de Geometria Analítica, segue que o conjunto

$$\{\gamma'(0), \nabla g(P_o), \nabla h(P_o)\}$$

forma uma base para o  $\mathbb{R}^3$ .

Ou seja, todo vetor de  $\mathbb{R}^3$  pode ser escrito como combinação linear desses três vetores.

Em particular, o vetor

$$\nabla f(P_o),$$

pode ser escrito como combinação linear desses três vetores, ou seja, existem constantes

$$\lambda_o, \mu_o, \nu_o \in \mathbb{R},$$

de modo que

$$\nabla f(P_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(P_o) + \mu_o \cdot \nabla h(P_o) + \nu_o \cdot \gamma'(0). \quad (13.14)$$

Mas:

$$0 \stackrel{(13.9)}{=} \nabla f(P_o) \bullet \gamma'(0)$$

$$\stackrel{(13.14)}{=} [\lambda_o \cdot \nabla g(P_o) + \mu_o \cdot \nabla h(P_o) + \nu_o \cdot \gamma'(0)] \bullet \gamma'(0)$$

$$\begin{aligned} \text{propriedades do produto interno} &\quad \lambda_o \left( \underbrace{\nabla g(P_o) \bullet \gamma'(0)}_{\stackrel{(13.13)}{=} 0} \right) + \mu_o \left( \underbrace{\nabla h(P_o) \bullet \gamma'(0)}_{\stackrel{(13.13)}{=} 0} \right) + \nu_o \left( \underbrace{\gamma'(0) \bullet \gamma'(0)}_{= \|\gamma'(0)\|^2} \right) \\ &= \nu_o \|\gamma'(0)\|^2. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Como

$$\begin{aligned} & \gamma'(0) \neq \vec{0}, \\ \text{segue que} & \quad \|\gamma'(0)\|^2 > 0. \end{aligned}$$

Logo, deste fato e de (13.15), segue que deveremos ter

$$\nu_o = 0. \quad (13.16)$$

Assim, substituindo-se (13.16) em (13.14), obteremos

$$\nabla f(P_o) = \lambda_o \cdot \nabla g(P_o) + \mu_o \cdot \nabla h(P_o)$$

completando a demonstração. □

**Observação 13.1.1** *Observemos que, no Teorema 13.1.1, a condição (13.3) é uma condição necessária para que a função  $f$  tenha um extremo global no ponto  $P_o$ , quando restrita aos vínculos (13.2), mas pode não ser uma condição suficiente, ou seja, podemos obter vários pontos que satisfazem a condição (13.3) e assim precisaremos descobrir entre eles qual deles é que resolve o problema em questão (a saber, qual dará origem ao máximo e qual dará origem ao mínimo da função quando restrita aos vínculos).*

### 13.1.2 Aplicações

A seguir aplicaremos o Teorema de multiplicadores de Lagrange para dois vínculos (ou seja, o Teorema 13.1.1)ao:

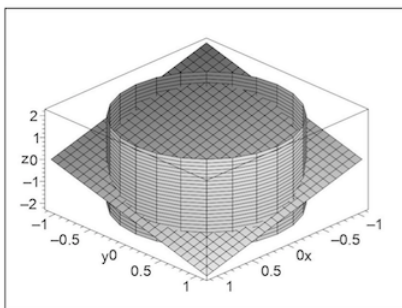
**Exemplo 13.1.1** *Determine os semi-eixos maior e menor, da elipse dada pela interseção do cilindro de revolução*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 = 1\} \quad (13.17)$$

com o plano

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0\}. \quad (13.18)$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



**Resolução:**

Notemos que o plano (13.18) contém a origem

$$O \doteq (0, 0, 0).$$

Além disso, o eixo de rotação do cilindro (13.17) é o eixo  $Oz$ , isto é, é dado pela interseção dos planos

$$x = y = 0,$$

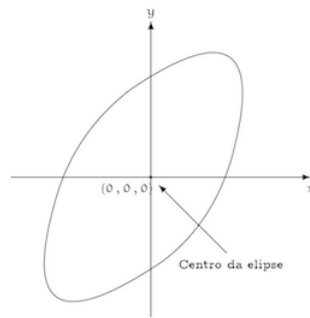
temos que o centro da elipse deverá ser a origem  $O = (0, 0, 0)$ .

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Assim, precisamos encontrar os pontos sobre a elipse que estão mais próximos e mais afastados da origem (que é o centro da elipse).

Estes pontos serão os extremos dos eixos menor e maior da elipse, respectivamente.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Logo precisaremos minimizar e maximizar a função distância à origem, que indicaremos por  $d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$d(x, y, z) \doteq d(P, P_0) \tag{13.19}$$

$$\begin{aligned} & \text{visto na disciplina de Geometria Analítica} \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ & = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{13.20}$$

restrita aos vínculos

$$B \doteq \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; g(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad h(x, y, z) = 0 \right\}, \tag{13.21}$$

onde as funções  $g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , são dadas por

$$g(x, y, z) \doteq x^2 + y^2 - 1 \tag{13.22}$$

$$\text{e} \quad h(x, y, z) \doteq x + y + z, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{13.23}$$

Agindo como na resolução do Exercício 12.1.1, basta encontrarmos os extremos (máximo e mínimo) globais da função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} f(x, y, z) & \doteq d^2(x, y, z) \\ & \stackrel{(13.20)}{=} x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{13.24}$$

(isto é, o quadrado da distância à origem) sujeita aos vínculos (13.21).

Notemos que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$  (pois é uma função polinomial) e, além disso, para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , teremos

$$\nabla f(x, y, z) \stackrel{(13.24)}{=} (2x, 2y, 2z). \quad (13.25)$$

Observemos também que as funções  $g$  e  $h$ , dadas por (13.22) e (13.23), respectivamente, são de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$  (pois são funções polinomiais).

Além disso, como o conjunto  $B$ , dado por (13.21), é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^3$ .

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, do Teorema 7.2.1, segue que a função  $f$ , quando restrita ao conjunto  $B$ , terá máximo e mínimo globais, que estarão entre os pontos encontrados pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ou seja, o Teorema 13.1.1).

Notemos que, para cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , teremos:

$$\nabla g(x, y, z) \stackrel{(13.22)}{=} (2x, 2y, 0) \quad (13.26)$$

$$\text{e } \nabla h(x, y, z) \stackrel{(13.23)}{=} (1, 1, 1). \quad (13.27)$$

Logo estes vetores são linearmente independentes, para cada  $(x, y, z) \in B$ , isto é, na intersecção das superfícies de nível zero, associadas as funções  $g$  e  $h$ .

Para mostrarmos isto, notemos que se  $(x, y, z) \in B$ , então deveremos ter

$$x^2 + y^2 = 1,$$

o que implicará em

$$x \neq 0 \quad \text{ou} \quad y \neq 0,$$

mostrando que

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 0) \neq (0, 0, 0)$$

e assim os vetores

$$\nabla g(x, y, z) \quad \text{e} \quad \nabla f(x, y, z)$$

serão linearmente independentes em cada ponto do conjunto  $B$ .

Logo, pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (isto é, o Teorema 13.1.1, segue se o ponto

$$P_o \doteq (x_o, y_o, z_o) \in B,$$

for um ponto extremo (máximo e mínimo) da função  $f$ , sujeita aos vínculos  $B$ , deverão existir

$$\lambda_o, \mu_o \in \mathbb{R},$$

tais que (utilizaremos (13.17), (13.18), (13.25) e (13.27)):

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu_0 \cdot \nabla h(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ h(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}, \\
 \text{ou seja,} & \begin{cases} (2x_0, 2y_0, 2z_0) = \lambda_0 (2x_0, 2y_0, 0) + \mu_0 (1, 1, 1) \\ x_0^2 + y_0^2 = 0 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 0 \end{cases}, \\
 \text{ou ainda,} & \begin{cases} 2x = 2\lambda_0 x + \mu_0 \\ 2y = 2\lambda_0 y + \mu_0 \\ 2z = \mu_0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \\
 \text{isto é,} & \begin{cases} 2(1 - \lambda_0)x_0 = \mu_0 \\ 2(1 - \lambda_0)y_0 = \mu_0 \\ 2z_0 = \mu_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 0 \end{cases}. \tag{13.28}
 \end{aligned}$$

Assim, das duas primeiras equações em (13.28), obteremos

$$(1 - \lambda_0)x_0 = (1 - \lambda_0)y_0. \tag{13.29}$$

Notemos que:

- se

$$\begin{aligned}
 & \lambda_0 \neq 1, \\
 \text{deveremos ter} & \quad x_0 = y_0. \tag{13.30}
 \end{aligned}$$

Com isto, das duas últimas equações do sistema (13.28), obteremos:

$$\begin{aligned}
 & z_0 = -2x_0 \\
 & \text{e} \quad 2x_0^2 = 1, \\
 \text{isto é,} & \quad x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{13.31}
 \end{aligned}$$

que resultarão nos pontos

$$P_1 \doteq \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} \right) \quad \text{e} \quad P_2 \doteq \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right); \tag{13.32}$$

- por outro lado, se

$$\lambda_0 = 1 \tag{13.33}$$

da primeira equação do sistema (13.28), segue que

$$\mu_0 = 0$$

e assim, da terceira equação do sistema (13.28), teremos

$$z_0 = 0. \quad (13.34)$$

Desta forma, as duas últimas equações do sistema (13.28) tornar-se-ão:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0 + y_0 = 0 \end{cases}, \\ \text{ou seja,} & \begin{cases} 2x_0^2 = 1 \\ y_0 = -x_0 \end{cases}, \\ \text{ou ainda,} & \begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \\ \text{ou} & \begin{cases} x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \end{aligned}$$

dando origem aos seguintes pontos

$$P_3 \doteq \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \quad \text{e} \quad P_4 \doteq \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right). \quad (13.35)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f(P_2) \stackrel{\text{Exercício 3}}{=} 3 \\ \text{e} \quad f(P_3) &= f(P_4) \stackrel{\text{Exercício 1}}{=} 1. \end{aligned}$$

Assim, o semi-eixo maior da elipse obtida da interseção do cilindro (13.17) com o plano (13.18) será dado pelo segmento

$$\overline{OP_1} \quad \text{ou o segmento} \quad \overline{OP_2}$$

e terá comprimento igual a  $\sqrt{3}$  e o semi-eixo menor será dado pelo segmento

$$\overline{OP_3} \quad \text{ou o segmento} \quad \overline{OP_4}$$

e este terá comprimento igual a  $\underline{1}$ .

Em particular, o eixo maior da elipse obtida da interseção do cilindro (13.17) com o plano (13.18) é dado pelo segmento

$$\overline{P_1P_2}$$

e o eixo menor será dado pelo segmento

$$\overline{P_3P_4}.$$

Em particular, os vértices da elipse ocorrerão nos pontos

$$P_1, P_2, P_3, P_4,$$

dados por (13.32) e (13.35), completando a resolução.

□

Deixaremos para o leitor a resolução do:

**Exercício 13.1.1** Consideremos dois planos concorrentes dados pelas equações gerais

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

e

$$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0.$$

Notemos que a condição de serem concorrentes se traduz em termos dos vetores normais aos planos, isto é, os vetores

$$\vec{n}_1 \doteq (a_1, b_1, c_1) \quad e \quad \vec{n}_2 \doteq (a_2, b_2, c_2),$$

serem linearmente independentes em  $\mathbb{R}^3$ .

Fixado um ponto

$$P_0 \doteq (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3,$$

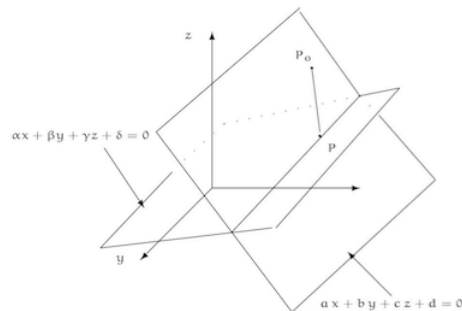
utilize o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para dois vínculos (isto é, o Teorema 13.1.1), para encontrar o ponto

$$P_1 \doteq (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$$

pertencente a intersecção dos planos dados (que será uma reta), que está mais próximo do ponto  $P_0$

Encontre também o valor da distância mínima.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.





## Apêndice A

# Técnicas de integração - frações parciais

### A.1 Outras técnicas para o cálculo de integrais indefinidas

A seguir exibiremos outras técnicas para encontrar integrais indefinidas.

#### A.1.1 Integrais indefinidas envolvendo expressões dos tipos: $a^2 - x^2$ , $a^2 + x^2$ ou $x^2 - a^2$ , para $a \neq 0$ fixado.

Nos casos acima tentaremos substituições trigonométricas ou hiperbólicas, como mostra a:

**Observação A.1.1** *Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  fixado.*

*Para tentarmos encontrar uma integral indefinida que envolvem expressões do tipo:*

$$(i) \quad a^2 - x^2, \quad (A.1)$$

$$(ii) \quad a^2 + x^2, \quad (A.2)$$

$$(iii) \quad x^2 - a^2, \quad (A.3)$$

*tentaremos uma mudança de variáveis na integral indefinida do tipo:*

(i') *Para o caso (i) (ou seja, que envolve um expressão do tipo (A.1)), tentaremos:*

$$x \doteq a \operatorname{sen}(\theta) \quad (A.4)$$

$$\text{ou} \quad x \doteq a \operatorname{tgh}(u), \quad (A.5)$$

*para  $\theta \in I$  ou  $u \in J$ , onde  $I$  ou  $J$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}$  escolhidos de modo apropriado.*

(ii') *Para o caso (ii) (ou seja, que envolve um expressão do tipo (A.2)), tentaremos:*

$$x \doteq a \operatorname{tg}(\theta) \quad (A.6)$$

$$\text{ou} \quad x \doteq a \operatorname{senh}(u), \quad (A.7)$$

*para  $\theta \in I$  ou  $u \in J$ , onde  $I$  ou  $J$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}$  escolhidos de modo apropriado.*

(iii') *Para o caso (iii) (ou seja, que envolve um expressão do tipo (A.3)), tentaremos:*

$$x \doteq a \operatorname{sec}(\theta) \quad (A.8)$$

$$\text{ou} \quad x \doteq a \operatorname{cosh}(u), \quad (A.9)$$

*para  $\theta \in I$  ou  $u \in J$ , onde  $I$  ou  $J$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}$  escolhidos de modo apropriado.*

**Observação A.1.2**

1. Observemos que  $I$  ou  $J$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}$  de modo que as respectivas funções envolvidas acima, sejam bijetoras sobre a sua imagem, diferenciáveis e suas funções inversas também deverão ser diferenciáveis, nos seus respectivos domínios.

2. Utilizamos, em geral, as seguintes identidades trigonométricas ou hiperbólicas:

Para mais informações sobre as funções hiperbólicas veja o Apêndice D.

(a) Para o caso (i'), se utilizarmos a mudança de variáveis (A.4), poderemos precisar das seguintes relações:

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \operatorname{cos}^2(\theta) = 1, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d}{d\theta}[\operatorname{sen}(\theta)] = \operatorname{cos}(\theta), \quad (\text{A.11})$$

para  $\theta \in I$ .

Se utilizarmos a mudança de variáveis (A.5), poderemos precisar das seguintes relações:

$$\operatorname{tgh}^2(u) + \operatorname{sech}^2(u) = 1, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{d}{du}[\operatorname{tgh}(u)] = \operatorname{sech}^2(u), \quad (\text{A.13})$$

para  $u \in J$ .

(b) Para o caso (ii'), se utilizarmos a mudança de variáveis (A.6), poderemos precisar das relações:

$$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \operatorname{sec}^2(\theta) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d}{d\theta}[\operatorname{tg}(\theta)] = \operatorname{sec}^2(\theta), \quad (\text{A.15})$$

para  $\theta \in I$ .

Se utilizarmos a mudança de variáveis (A.7), poderemos precisar das seguintes relações:

$$\operatorname{cosh}^2(u) - \operatorname{senh}^2(u) = 1 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{d}{du}[\operatorname{senh}(u)] = \operatorname{cosh}(u), \quad (\text{A.17})$$

para  $u \in J$ .

(c) Para o caso (iii'), se utilizarmos a mudança de variáveis (A.8), poderemos precisar das relações:

$$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \operatorname{sec}^2(\theta) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d}{d\theta}[\operatorname{sec}(\theta)] = \operatorname{sec}(\theta) \operatorname{tg}(\theta), \quad (\text{A.19})$$

para  $\theta \in I$ .

Se utilizarmos a mudança de variáveis (A.9), poderemos precisar das seguintes relações:

$$\operatorname{cosh}^2(u) - \operatorname{senh}^2(u) = 1 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{d}{du}[\operatorname{cosh}(u)] = \operatorname{senh}(u), \quad (\text{A.21})$$

para  $u \in J$ .

3. Vale observar que as substituições acima deverão, na verdade, ser mudanças de variáveis, ou seja, funções bijetoras.

Para isto teremos, em geral, que restringir os domínios das funções envolvidas, convenientemente, para este fim.

Aplicamos as ideias acima aos:

**Exemplo A.1.1** Para  $a > 0$  fixado, calcular a integral indefinida

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx, \quad (\text{A.22})$$

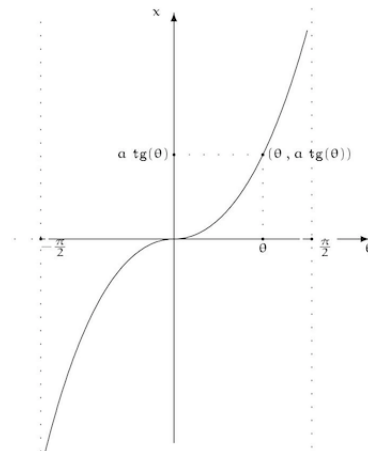
para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**

A integral indefinida (A.22) acima envolve uma expressão do tipo (ii) (veja (A.2)).

Neste caso tentaremos a mudança do tipo (A.6), isto é, consideraremos a mudança de variáveis (ou seja, uma função bijetora - veja a figura abaixo):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto x \doteq a \operatorname{tg}(\theta) \end{aligned} .$$



Com isto, pelo Teorema da substituição para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.1), teremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &\left\{ \begin{array}{l} \text{se: } x \doteq a \operatorname{tg}(\theta), \text{ para } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \text{teremos } dx = a \frac{d}{d\theta} [\operatorname{tg}(\theta)] d\theta = a \sec^2(\theta) d\theta \end{array} \right\} \int \frac{1}{[a \operatorname{tg}(\theta)]^2 + a^2} a \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\underbrace{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}_{\stackrel{(\text{A.14})}{=} \sec^2(\theta)}} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{a} \int 1 d\theta \\ &= \frac{1}{a} \theta + C \stackrel{\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{=} \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \\ \text{isto é, } \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária, completando a resolução.

□

Podemos aplicar o mesmo ao:

**Exercício A.1.1** Para  $a > 0$  fixado, calcular a integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad (\text{A.24})$$

para  $x \in (-a, a)$ .

**Resolução:**

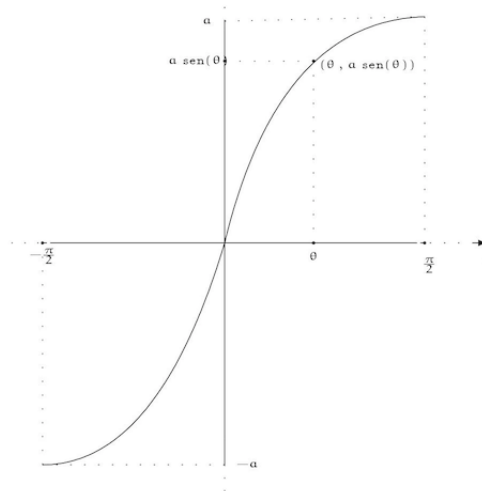
Esta integral indefinida (A.24) acima é do tipo (i) (veja (A.1)) e assim tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (A.4), isto é:

$$x = a \operatorname{sen}(\theta), \quad (\text{A.25})$$

$$\text{assim teremos: } dx = a \frac{d}{d\theta} [\operatorname{sen}(\theta)] d\theta = a \cos(\theta) d\theta. \quad (\text{A.26})$$

Observemos que na verdade a mudança de variáveis deverá ser da forma (uma função bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow (-a, a) \\ \theta &\mapsto x \doteq a \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} .$$



Com isto, pelo Teorema da substituição para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.1),

teremos:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &\stackrel{(A.25)}{=} \stackrel{(A.26)}{=} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - [a \operatorname{sen}(\theta)]^2}} a \cos(\theta) d\theta \\
 &= a \int \frac{1}{\sqrt{a^2 [1 - \operatorname{sen}^2(\theta)]}} \cos(\theta) d\theta \\
 &= a \int \frac{1}{\underbrace{\sqrt{a^2}}_{|a|} \sqrt{\cos^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\
 &\stackrel{a>0}{=} \frac{a}{a} \int \frac{1}{|\cos(\theta)|} \cos(\theta) d\theta \\
 &\stackrel{\text{como } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ teremos } \cos(t) > 0}{=} \int 1 d\theta = \theta + C \\
 &\stackrel{(A.25)}{=} \stackrel{\operatorname{arcsen}(\frac{x}{a})}{=} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \\
 \text{isto é, } \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad \text{para } x \in (-a, a), \quad (A.27)
 \end{aligned}$$

para  $x \in (-a, a)$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

A seguir temos vários exercícios resolvidos relacionados com as técnicas desenvolvidas acima.

Começaremos pelo:

**Exercício A.1.2** Para  $a > 0$  fixado, calcular a integral indefinida

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx, \quad (A.28)$$

para  $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ .

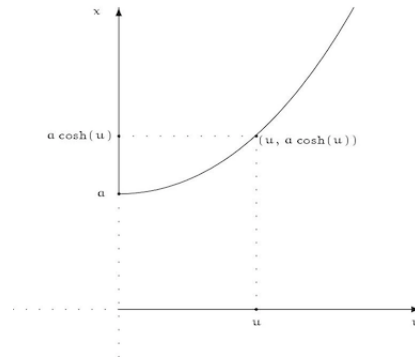
### Resolução:

Neste caso temos que a integral indefinida (A.28) acima é do tipo (iii) (veja (A.3)) e assim poderíamos tentar fazer a mudança de variáveis dada por (A.9), isto é, (será uma função bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc}
 (0, \infty) & \rightarrow & (a, \infty) \\
 u & \mapsto & x \doteq a \cosh(u)
 \end{array}$$

Deixaremos como exercício para o leitor a aplicação desta mudança de variáveis a integral definida acima e os cálculos para encontrá-la.

Um outro modo de encontrar a integral indefinida (A.28) acima, seria agir da seguinte forma



(utilizando o Teorema da substituição para integrais indefinidas, ou seja, o Teorema 3.5.1) :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2a} \left\{ \int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right\} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x-a, \text{ teremos } du = dx \\ \text{e se } v \doteq x+a \text{ teremos } dv = dx \end{array} \right\} \frac{1}{2a} \left( \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{v} dv \right) \\
 &\stackrel{(3.49)}{=} \frac{1}{2a} [\ln(|u|) - \ln(|v|)] + C \\
 &\stackrel{u=x-a \text{ e } v=x+a}{=} \frac{1}{2a} [\ln(|x-a|) - \ln(|x+a|)] + C, \\
 \text{ou seja, } \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} [\ln(|x-a|) - \ln(|x+a|)] + C, \quad \text{para } x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty), \\
 &\tag{A.29}
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

Temos a

**Observação A.1.3** A idéia de como resolver a integral indefinida (A.28) acima estará, como veremos, diretamente relacionada com o modo como resolveremos integrais indefinidas envolvendo funções racionais.

O método para encontrar a integral indefinida de funções racionais, será desenvolvido em uma seção mais adiante.

Temos também o:

**Exercício A.1.3** Para  $a > 0$  fixado, calcular a integral indefinida

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx, \tag{A.30}$$

para  $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ .

**Resolução:**

Observemos que deveremos ter

$$\begin{aligned} & x^2 - a^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 0 \\ \text{ou, equivalentemente,} & \quad |x| \geq a \quad \text{e} \quad x \neq 0, \\ \text{ou ainda,} & \quad x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \end{aligned}$$

Notemos que, como  $a > 0$ , na situação acima teremos, necessariamente, que  $x \neq 0$ .

Observemos que a integral indefinida (A.30) é do caso (iii) (veja (A.3)) e tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (A.8), isto é:

$$x = a \sec(\theta), \tag{A.31}$$

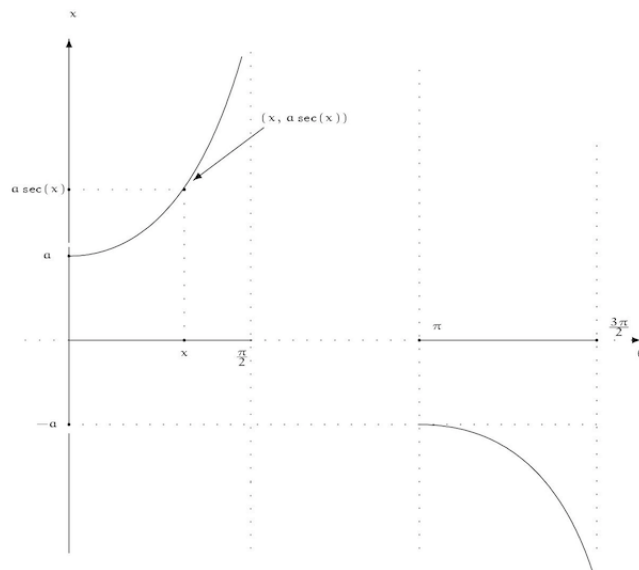
$$\text{assim teremos} \quad dx = a \frac{d}{d\theta} [\sec(\theta)] d\theta = a \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta, \tag{A.32}$$

$$\text{onde} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{se} \quad x \in [a, \infty)$$

$$\text{e} \quad \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \text{para} \quad x \in (-\infty, -a].$$

Assim a mudança de variáveis será da forma (uma função bijetora, veja figura abaixo):

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) & \rightarrow (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \\ \theta & \mapsto x \doteq a \sec(\theta) \end{aligned}$$



Com isto, pelo Teorema da substituição para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.1),

teremos:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx &\stackrel{\text{(A.31)}}{=} \stackrel{\text{(A.32)}}{=} \int \frac{\sqrt{[a \sec(\theta)]^2 - a^2}}{a \sec(\theta)} a \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta \\
 &= \int \sqrt{a^2 [\sec(\theta)]^2 - 1} \operatorname{tg}(\theta) d\theta \\
 &\stackrel{[\sec(\theta)]^2 - 1 = \operatorname{tg}^2(\theta)}{=} \int \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2(\theta)} \operatorname{tg}(\theta) d\theta \\
 &= \int \underbrace{|a|}_{a \geq 0} |\operatorname{tg}(\theta)| \operatorname{tg}(\theta) d\theta \\
 &\text{como } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}), \text{ teremos } \operatorname{tg}(\theta) > 0 \quad a \int \operatorname{tg}^2(\theta) d\theta \\
 &\stackrel{[\sec(\theta)]^2 - 1 = \operatorname{tg}^2(\theta)}{=} a \int [\sec^2(\theta) - 1] d\theta \\
 &= a \left[ \int \sec^2(\theta) d\theta - \int 1 d\theta \right] \\
 &= a [\operatorname{tg}(\theta) - \theta] + C \\
 &\text{como } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}), \text{ teremos } \operatorname{tg}(\theta) > 0 \quad a [|\operatorname{tg}(\theta)| - \theta] + C \\
 &= a \left[ \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta)} - \theta \right] + C \\
 &\stackrel{\operatorname{tg}^2(\theta) = [\sec(\theta)]^2 - 1}{=} a \left[ \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} + \theta \right] + C \\
 &\stackrel{\frac{x}{a} \stackrel{\text{(A.31)}}{=} \sec(\theta)}{=} a \left[ \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \operatorname{arcsec} \left( \frac{x}{a} \right) \right] + C \\
 &= a \left[ \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} + \operatorname{arcsec} \left( \frac{x}{a} \right) \right] + C
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$= a \left[ \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\underbrace{\sqrt{a^2}}_{=|a|}} + \operatorname{arcsec} \left( \frac{x}{a} \right) \right] + C$$

$$\stackrel{a \geq 0}{=} a \left[ \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + \operatorname{arcsec} \left( \frac{x}{a} \right) \right] + C$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} + a \operatorname{arcsec} \left( \frac{x}{a} \right) + C, \quad \text{para cada } |x| > a,$$

$$\text{isto é, } \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + a \operatorname{arcsec} \left( \frac{x}{a} \right) + C, \quad \text{para } |x| \geq a, \tag{A.34}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

Outro caso é dado pelo:



**Exercício A.1.4** *Encontrar a integral indefinida*

$$\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx, \quad (\text{A.35})$$

para  $x \in (-2, 2)$ .

**Resolução:**

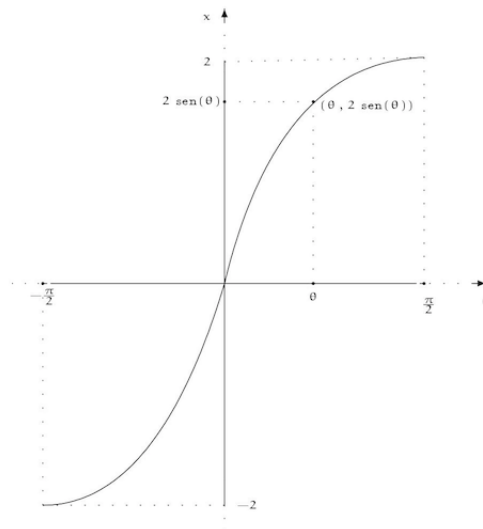
Esta integral é do tipo (i) (veja (A.1) com  $a = 2$ ) e tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (A.4), isto é:

$$x = 2 \operatorname{sen}(\theta), \quad (\text{A.36})$$

$$\text{assim teremos} \quad dx = 2 \frac{d}{d\theta} [\operatorname{sen}(\theta)] d\theta = 2 \cos(\theta) d\theta. \quad (\text{A.37})$$

Observemos que na verdade a mudança de variáveis deverá ser da forma (uma função bijetora, veja a figura abaixo) :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow (-2, 2) \\ \theta &\mapsto x \doteq 2 \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} .$$



Com isto, pelo Teorema da substituição para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.1),

teremos:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx &\stackrel{(A.36) \text{ e } (A.37)}{=} \int \frac{1}{\sqrt{\{4 - [2 \operatorname{sen}(\theta)]^2\}^3}} 2 \cos(\theta) d\theta \\
 &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{\{4 [1 - \operatorname{sen}^2(\theta)]\}^3}} \cos(\theta) d\theta \\
 &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{64} \sqrt{[\cos^2(\theta)]^3}} \cos(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{\cos^6(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{|\cos(\theta)|^3} \cos(\theta) d\theta \\
 &\text{como } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ teremos } \cos(\theta) > 0 \stackrel{=}{=} \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^3(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int \sec^2(\theta) d\theta \\
 &\text{visto na disciplina de Cálculo I } \stackrel{=}{=} \frac{1}{4} \operatorname{tg}(\theta) + C \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} + C \\
 &\text{como } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ teremos } \cos(\theta) > 0 \stackrel{=}{=} \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} + C \\
 \cos^2(\theta) &\stackrel{=}{=} 1 - \operatorname{sen}^2(\theta) \quad \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}} + C \\
 \operatorname{sen}(\theta) &\stackrel{(A.36) \times \frac{x}{2}}{=} \frac{1}{4} \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1 - [\frac{x}{2}]^2}} + C
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C, \\
 \text{ou seja, } \int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx &= \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C, \quad \text{para } x \in (-2, 2), \tag{A.39}
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.

□

Temos também o:

**Exercício A.1.5** Para  $a > 0$  fixado, calcular a integral indefinida

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx, \quad (\text{A.40})$$

para  $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ .

**Resolução:**

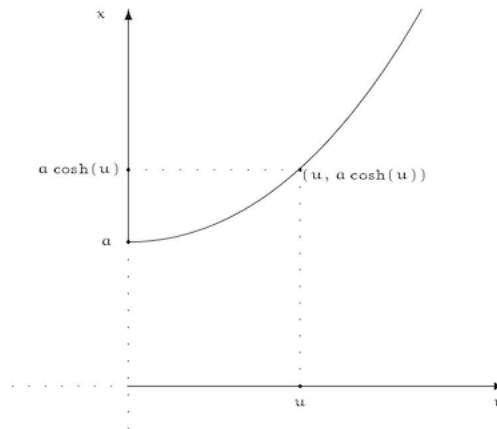
A integral indefinida (A.40) é do tipo (iii) (veja (A.3)) e assim tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (A.9), isto é:

$$x = a \cosh(u), \quad (\text{A.41})$$

$$\text{implicando que} \quad dx = a \frac{d}{du} [\cosh(u)] = a \sinh(u) \, du, \quad (\text{A.42})$$

mais especificamente, consideraremos a seguinte mudança de variáveis (uma função bijetora, veja figura abaixo):

$$\begin{aligned} (0, \infty) &\rightarrow (a, \infty) \\ u &\mapsto x \doteq a \cosh(u) \end{aligned}$$



Logo, pelo Teorema da substituição para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.1), teremos:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &\stackrel{(A.41)}{=} \stackrel{(A.42)}{=} \int \sqrt{[a \cosh(u)]^2 - a^2} \, a \sinh(u) \, du \\
 &= \int \underbrace{\sqrt{a^2}}_{=|a|} \sqrt{[\cosh^2(u)]^2 - 1} \, a \sinh(u) \, du \\
 &\text{como } a > 0 \text{ teremos } |a|=a \quad a^2 \int \sqrt{\sinh^2(u)} \, \sinh(u) \, du \\
 &= a^2 \int |\sinh(u)| \sinh(u) \, du \\
 &\text{como } u > 0, \text{ teremos } \sinh(u) > 0, \text{ assim } |\sinh(u)| = \sinh(u) \quad a^2 \int \sinh^2(u) \, du \\
 &\sinh^2(u) \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{\cosh(2u) - 1}{2} \quad a^2 \int \frac{\cosh(2u) - 1}{2} \, du \\
 &= a^2 \left[ \frac{1}{2} \int \cosh(2u) \, du - \frac{1}{2} \int du \right] \\
 &\text{se } v = 2u, \text{ teremos } dv = 2 \, du = \frac{a^2}{2} \left[ \int \cosh(v) \frac{1}{2} \, dv - \int du \right] \\
 &= \frac{a^2}{2} \left[ \frac{1}{2} \sinh(v) - u \right] + C \\
 &\stackrel{v=2u}{=} \frac{a^2}{2} \left[ \frac{1}{2} \sinh(2u) - u \right] + C \\
 &= \frac{a^2}{2} \left[ \frac{1}{2} 2 \sinh(u) \cosh(u) - u \right] + C \\
 &\text{como } u > 0, \text{ teremos } \sinh(u) > 0, \text{ assim } \sinh(u) = \sqrt{\cosh^2(u) - 1} \quad \frac{a^2}{2} \left[ \sqrt{(\cosh^2(u) - 1)} \cosh(u) - u \right] + C \\
 &\cosh(u) \stackrel{(A.41)}{=} \frac{x}{a} \quad \frac{a^2}{2} \left\{ \sqrt{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]} \frac{x}{a} - \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) \right\} + C \\
 &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \\
 \text{isto é,} \quad \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \tag{A.43}
 \end{aligned}$$

para  $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

Outro exercício resolvido é dado pelo:

**Exercício A.1.6** Para  $a > 0$  fixado, calcular a integral indefinida

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx, \tag{A.44}$$

para  $x \in (-a, a)$ .

**Resolução:**

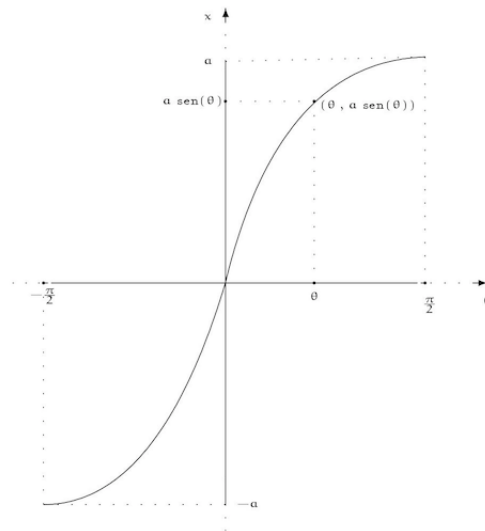
A integral indefinida (A.44) é do tipo (i) (veja (A.1)) e assim tentaremos uma mudança de variáveis do tipo (A.4), isto é:

$$x = a \operatorname{sen}(\theta), \quad (\text{A.45})$$

$$\text{implicando que } dx = a \frac{d}{d\theta}[\operatorname{sen}(\theta)] = a \cos(\theta) d\theta. \quad (\text{A.46})$$

Observemos que na verdade a mudança de variáveis deverá ser da forma (uma função bijetora, veja figura abaixo):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow (-a, a) \\ \theta &\mapsto x \doteq a \operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$



Com isto, pelo Teorema da substituição para integrais indefinidas (ou seja, o Teorema 3.5.1), teremos:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &\stackrel{(\text{A.45})}{=} \stackrel{(\text{A.46})}{=} \int \sqrt{\{a^2 - [a \operatorname{sen}(\theta)]\}^2} a \cos(\theta) d\theta \\ &= a \int \sqrt{a^2 [1 - \operatorname{sen}^2(\theta)]} \cos(\theta) d\theta \\ &= a \int \underbrace{\sqrt{a^2}}_{=|a|} \sqrt{\cos^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta \stackrel{a>0}{=} a^2 \int |\cos(\theta)| \cos(\theta) d\theta \\ &\text{como } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ teremos } \cos(\theta) > 0, \text{ assim } |\cos(\theta)| = \cos(\theta) \quad a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta \\ &= a^2 \int [1 - \operatorname{sen}^2(\theta)] d\theta \\ &= a^2 \left[ \int 1 d\theta - \int \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta \right] \\ &\stackrel{\text{Exemplo 3.5.4}}{=} a^2 \left\{ \theta - \left[ \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \right] \right\} + C \\ &\text{como } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ teremos } \cos(\theta) > 0, \text{ assim } \cos(\theta) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} \quad a^2 \left[ \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta) \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} \right] + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{sen}(\theta) \stackrel{\text{(A.45)}}{=} \frac{x}{a}}{=} a^2 \left[ \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right] + C \\ = \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2}} + C \\ \stackrel{\text{como } a > 0}{=} \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad \text{para } x \in (-a, a), \quad (\text{A.47})$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução. □

Daqui em diante, nosso objetivo principal será encontrar integrais indefinidas envolvendo funções racionais, ou seja, encontrar integrais indefinidas do tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad (\text{A.48})$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções polinomiais.

Começaremos por alguns casos particulares antes de tratar da situação geral acima.

### A.1.2 Integrais indefinidas do tipo: $\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$ .

Tratemos das integrais indefinidas do tipo:

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \quad (\text{A.49})$$

Sejam  $p, q \in \mathbb{R}$  são fixados, para os tipos de integrais indefinidas (A.49), completaremos o quadrado na função polinomial do 2.º grau que está no denominador, isto é, agiremos da seguinte forma:

Notemos que

$$x^2 + px + q \stackrel{\text{Exercício}}{=} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}. \quad (\text{A.50})$$

Se considerarmos a mudança de variáveis (uma função bijetora!)

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u \doteq x + \frac{p}{2}, \end{aligned}$$

então teremos as seguintes possibilidades:

(i) Se

$$\begin{aligned} \frac{4q - p^2}{4} = 0, \\ \text{teremos } x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = u^2, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

ou seja, a expressão (A.50) é um quadrado perfeito e assim podemos calcular a integral indefinida obtida.

Como veremos, neste caso, será fácil encontrar a integral indefinida.

(ii) Se

$$\begin{aligned} & \frac{4q - p^2}{4} > 0, \\ \text{tomando-se} \quad & a \doteq \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}, \\ \text{teremos} \quad & x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}\right)^2 \\ & = u^2 + a^2, \end{aligned} \tag{A.52}$$

e assim, podemos aplicar as técnicas da subseção A.1.1, para calcular a integral indefinida obtida.

Na verdade estaremos no caso (ii) da Observação A.1.1 (veja (A.2)).

(iii) Se

$$\begin{aligned} & \frac{4q - p^2}{4} < 0, \\ \text{tomando-se} \quad & a \doteq \sqrt{-\frac{4q - p^2}{4}}, \\ \text{teremos} \quad & x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{-\frac{4q - p^2}{4}}\right)^2 \\ & = u^2 - a^2 \end{aligned} \tag{A.53}$$

e assim, podemos aplicar as técnicas da subseção A.1.1, para calcular a integral indefinida obtida.

Na verdade estaremos no caso (iii) da Observação A.1.1 (veja (A.3)).

Resumindo teremos:

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \begin{cases} \text{se } \frac{4q - p^2}{4} = 0 \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} dx & \stackrel{u=x+\frac{p}{2}, \text{ teremos } du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2} du \\ \text{se } \frac{4q - p^2}{4} > 0, a \doteq \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}} \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx & \stackrel{u=x+\frac{p}{2}, \text{ teremos } du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2 + a^2} du, \\ \text{se } \frac{4q - p^2}{4} < 0, a \doteq \sqrt{-\frac{4q - p^2}{4}} \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - a^2} dx & \stackrel{u=x+\frac{p}{2}, \text{ teremos } du=dx}{=} \int \frac{1}{u^2 - a^2} du \end{cases} \tag{A.54}$$

e cada uma das integrais indefinidas do lado direito das igualdades acima (destacadas em vermelho), podem ser encontradas utilizando as técnicas desenvolvidas em seções anteriores.

Como aplicação das técnicas desenvolvidas acima, temos o:

**Exemplo A.1.2** Calcular a integral indefinida

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx. \tag{A.55}$$

Resolução:

Neste caso temos que o denominador da função racional em questão pode ser escrita na seguinte forma (completando quadrados):

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4, \quad (\text{A.56})$$

que corresponde ao caso (ii) acima (veja (A.52)).

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &\stackrel{(\text{A.56})}{=} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2^2} dx \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x + 1 \text{ e } a \doteq 2 \\ \text{teremos: } du = dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{u^2 + a^2} du \\ &\stackrel{\text{Exemplo A.1.1 ou (A.23)}}{=} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left( \frac{u}{a} \right) + C \\ &\stackrel{u=x+1 \text{ e } a=2}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[ \frac{x+1}{2} \right] + C, \\ \text{assim} \quad \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[ \frac{x+1}{2} \right] + C, \quad (\text{A.57}) \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.  $\square$

Podemos ter situações em que teremos que aplicar várias técnicas para obter a integral indefinida, como no:

**Exemplo A.1.3** *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) + 2 \cos(x) + 5} dx. \quad (\text{A.58})$$

**Resolução:**

Observemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) + 2 \cos(x) + 5} dx &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } y \doteq \cos(x), \\ \text{teremos: } dy = -\operatorname{sen}(x) dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{y^2 + 2y + 5} (-dy) \\ &= - \int \frac{1}{y^2 + 2y + 5} dy \\ &\stackrel{\text{Exemplo A.1.2 ou (A.57)}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{y+1}{2} \right) + C \\ &\stackrel{\text{como } y=\cos(x)}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\cos(x) + 1}{2} \right] + C, \quad (\text{A.59}) \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.  $\square$

Temos os seguinte exercícios resolvidos:

**Exercício A.1.7** *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx. \quad (\text{A.60})$$



**Resolução:**

Consideremos as seguinte mudanças de variáveis (são bijetoras!):

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow (0, \infty) \\ x &\mapsto u \doteq e^x\end{aligned}$$

que é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, temos que

$$\begin{aligned}du &= \frac{d}{dx}[e^x] dx \\ &= e^x dx \\ \text{e} \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto v \doteq u - 3\end{aligned}\tag{A.61}$$

que também é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, temos

$$\begin{aligned}dv &= \frac{d}{du}[u - 3] du \\ &= du.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq e^x, \\ \text{teremos: } \frac{du}{=} = e^x dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{u^2 - 6u + 13} du \\ &= \int \frac{1}{(u - 3)^2 + 4} du \\ &\left\{ \begin{array}{l} v \doteq u - 3, \\ \text{teremos: } \frac{dv}{=} = du \end{array} \right\} \int \frac{1}{v^2 + 2^2} dv \\ &\text{Exemplo A.1.1 ou (A.23), com } a \doteq 2 \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{v}{2}\right) + C \\ &\text{como } \frac{v}{=} = u - 3 \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{u - 3}{2}\right) + C \\ &\text{como } \frac{u}{=} = e^x \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{e^x - 3}{2}\right) + C, \\ \text{ou seja, } \int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx &= \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{e^x - 3}{2}\right) + C,\end{aligned}\tag{A.62}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

**Observação A.1.4** Podemos aplicar as mesmas ideias acima a integrais indefinidas do tipo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx.\tag{A.63}$$

Deixaremos o tratamento destas como exercício para o leitor.

Podemos aplicar as ideias da Observação A.1.4 acima ao:

**Exercício A.1.8** Calcular a integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx. \quad (\text{A.64})$$

**Resolução:**

Observemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2 \left(-x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right)}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Consideremos a seguinte mudança de variáveis (é bijetora!):

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow (0, \infty) \\ x &\mapsto u \doteq x - \frac{3}{4} \\ \text{que é diferenciável e } du &= \frac{d}{dx} \left(x - \frac{3}{4}\right) dx \\ &= dx. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx &\stackrel{(\text{A.65})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} dx \\ &\stackrel{\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x - \frac{3}{4}, \\ \text{teremos } du = dx \end{array} \right\}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - u^2}} du \\ &\stackrel{\text{Exemplo A.1.1 ou (A.27), com } a = \frac{5}{4}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsen \left(\frac{u}{\frac{5}{4}}\right) + C \\ &\stackrel{u \doteq x - \frac{3}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsen \left[\frac{4 \left(x - \frac{3}{4}\right)}{5}\right] + C, \\ \text{ou seja, } \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsen \left(\frac{4x - 3}{5}\right) + C, \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

### A.1.3 Integrais indefinidas do tipo: $\int \frac{m x + n}{a x^2 + b x + c} dx$

Sejam

$$\begin{aligned} & a, b, c, m, n \in \mathbb{R}, \\ & \text{tais que } a \neq 0 \text{ e } m^2 + n^2 \neq 0, \\ & \text{em particular, } m \neq 0 \text{ ou } n \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Para estas integrais indefinidas escreveremos a função do numerador em termos da derivada da função 2.a grau que aparece no denominador, isto é, agiremos da seguinte forma:

Suponhamos que

$$\begin{aligned} I & \rightarrow J \\ x & \mapsto u \doteq a x^2 + b x + c \end{aligned}$$

seja uma mudança de variáveis (isto é, bijetora).

Logo

$$\begin{aligned} du &= \frac{d}{dx} (a x^2 + b x + c) dx \\ &= (2 a x + b) dx. \end{aligned}$$

Deste modo podemos escrever o polinômio do 1.a grau do numerador, das integrais acima, na seguinte forma:

$$m x + n = \frac{m}{2 a} (2 a x + b) + n - \frac{b m}{2 a}. \quad (\text{A.68})$$

Assim, utilizando o Teorema da substituição para a integral indefinida (isto é, o Teorema 3.5.1 ou a Observação 3.5.2), teremos que:

$$\begin{aligned} & \int \frac{m x + n}{a x^2 + b x + c} dx \stackrel{(\text{A.68})}{=} \frac{m}{2 a} \int \frac{2 a x + b}{a x^2 + b x + c} dx + \left( n - \frac{b m}{2 a} \right) \int \frac{1}{a x^2 + b x + c} dx \\ & \left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \text{se } u \doteq a x^2 + b x + c, \\ & \text{temos } du = \frac{d}{dx} (a x^2 + b x + c) dx = (2 a x + b) dx \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \\ & = \frac{m}{2 a} \int \frac{1}{u} du + \left( n - \frac{b m}{2 a} \right) \int \frac{1}{a x^2 + b x + c} dx \\ & \stackrel{(3.49)}{=} \frac{m}{2 a} \ln(|u|) + \left( n - \frac{b m}{2 a} \right) \int \frac{1}{a x^2 + b x + c} dx \\ & \text{como } u \doteq a x^2 + b x + c \quad \frac{m}{2 a} \ln(|a x^2 + b x + c|) + \left( n - \frac{b m}{2 a} \right) \underbrace{\int \frac{1}{a x^2 + b x + c} dx}_{\doteq I}, \end{aligned}$$

e a integral indefinida  $I$ , poderá ser calculada utilizando-se as técnicas da seção A.1.2 (isto é, da seção anterior).

Apliquemos esta técnica ao:

#### Exemplo A.1.4 Calcular integral indefinida

$$\int \frac{3 x - 2}{x^2 + 2 x + 5} dx. \quad (\text{A.69})$$

**Resolução:**

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar intervalos  $I$  e  $J$  tais que a aplicação

$$\begin{aligned} I &\rightarrow J \\ x &\mapsto u \doteq x^2 + 2x + 5 \end{aligned} ,$$

seja uma mudança de variáveis (isto é, bijetora).

Logo

$$\begin{aligned} du &= \frac{d}{dx} (x^2 + 2x + 5) dx \\ &= (2x + 2) dx, \end{aligned}$$

e assim temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 2}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x + 2) - 5}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx - 5 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &\left. \begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x^2 + 2x + 5, \\ \text{teremos } du = \frac{d}{dx} (x^2 + 2x + 5) dx = (2x + 2) dx \end{array} \right\} \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} du - 5 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &\stackrel{(3.49)}{=} \frac{3}{2} \ln(|u|) - 5 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &\text{como } u \doteq x^2 + 2x + 5 \quad \frac{3}{2} \ln(|x^2 + 2x + 5|) - 5 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &\text{Exemplo A.1.2 ou (A.57)} \quad \frac{3}{2} \ln(|x^2 + 2x + 5|) - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x + 1}{2} \right) + C, \end{aligned} \right\} \\ \text{isto é, } \int \frac{3x - 2}{x^2 + 2x + 5} dx &= \frac{3}{2} \ln(|x^2 + 2x + 5|) - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x + 1}{2} \right) + C, \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

**Observação A.1.5** De modo semelhante podemos tratar da integral indefinida do tipo:

$$\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx. \quad (\text{A.71})$$

Deixaremos o tratamento destas como exercício para o leitor.

Podemos aplicar a técnica da Observação A.1.5 acima ao:

**Exercício A.1.9** Calcular integral indefinida

$$\int \frac{2x - 8}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx. \quad (\text{A.72})$$

**Resolução:**

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar intervalos  $I$  e  $J$  tais que a aplicação

$$\begin{aligned} I &\rightarrow J \\ x &\mapsto u \doteq -2x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

seja uma mudança de variáveis (isto é, bijetora).

Logo

$$\begin{aligned} du &= \frac{d}{dx} (-2x^2 + 3x + 2) dx \\ &= (-4x + 3) dx, \end{aligned}$$

e assim temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 8}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx &= \int \frac{-1}{2} \frac{(-4x + 3) - \frac{13}{2}}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx \\ &= \frac{-1}{2} \int \frac{-4x + 3}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx - \frac{13}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx \\ &\left. \begin{array}{l} \text{se } u \doteq -2x^2 + 3x + 2, \\ \text{teremos } du = (-4x + 3) dx \end{array} \right\} \frac{-1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} dx - \frac{13}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx \\ &= \frac{-1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} - \frac{13}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx \\ &\text{como } u \doteq -2x^2 + 3x + 2 \quad -\sqrt{-2x^2 + 3x + 2} - \frac{13}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx \\ &\text{Exemplo (A.1.8) ou (A.66)} \quad -\sqrt{-2x^2 + 3x + 2} - \frac{13}{2} \left[ \frac{25\sqrt{2}}{32} \arcsen \left( \frac{4x - 3}{5} \right) \right] + C, \\ \text{isto é,} \quad \int \frac{2x - 8}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} dx &= -\sqrt{-2x^2 + 3x + 2} - \frac{325\sqrt{2}}{64} \arcsen \left( \frac{4x - 3}{5} \right) + C, \end{aligned} \tag{A.73}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

## A.1.4 Integrais indefinidas envolvendo potências de funções trigonométricas

### A.1.4.1 Integrais indefinidas envolvendo potências da função seno e cosseno

Começaremos tratando de integrais indefinidas envolvendo potências ímpares das funções cosseno e seno:

**Proposição A.1.1** *Seja  $n \in \mathbb{N}$  fixado. Então*

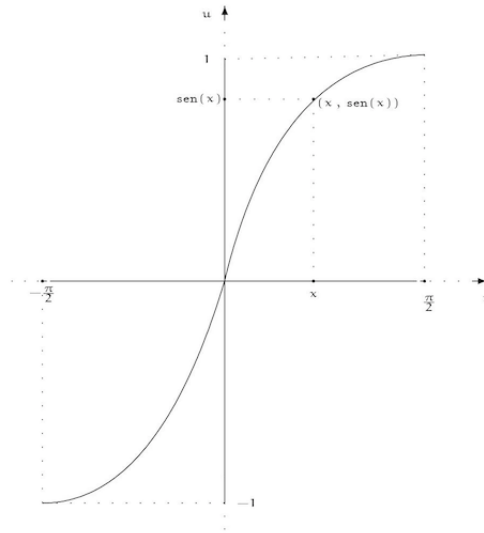
$$\int \cos^{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sin^{2k+1}(x) + C, \tag{A.74}$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:**

Consideremos a seguinte mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{l} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1) \\ x \mapsto u \doteq \sin(x) \end{array} \tag{A.75}$$



Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
 \int \cos^{2n+1}(x) dx &= \int \cos^{2n}(x) \cos(x) dx \\
 &= \int [\cos^2(x)]^n \cdot \cos(x) dx \\
 \cos^2(x) &\stackrel{=}{=} 1 - \sin^2(x) \int [1 - \sin^2(x)]^n \cos(x) dx \\
 \text{Binômio de Newton} &\int \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [-\sin^2(x)]^k 1^{n-k} \right\} \cos(x) dx \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int \sin^{2k}(x) \cos(x) dx \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int \underbrace{[\sin(x)]^{2k}}_{\doteq u} \underbrace{\cos(x) dx}_{=du} \\
 &\left. \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \sin(x), \\ \text{teremos } du = \frac{d}{dx}[\sin(x)] dx = \cos(x) dx \end{array} \right\} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int u^{2k} du \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} u^{2k+1} + C \\
 \text{como } u &\stackrel{=}{=} \sin(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1}{2k+1} \sin^{2k+1}(x) + C,
 \end{aligned}$$

completando a demonstração.

□

De modo semelhante temos a:

**Proposição A.1.2** *Seja  $n \in \mathbb{N}$  fixado. Então*

$$\int \operatorname{sen}^{2n+1}(x) \, dx = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos^{2k+1}(x) + C, \quad (\text{A.76})$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:**

Deixaremos como exercício para o leitor.

□

Para as potências pares das funções cosseno e seno temos a seguinte observação.

**Observação A.1.6**

1. No Exemplo 3.5.1 (veja (3.87)), mostramos que:

$$\int \operatorname{sen}^2(x) \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C, \quad (\text{A.77})$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

Com isto podemos encontrar a integral indefinida  $\int \cos^2(x) \, dx$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) \, dx &= \int [1 - \operatorname{sen}^2(x)] \, dx \\ &= \int 1 \, dx - \int \operatorname{sen}^2(x) \, dx \\ &\stackrel{(\text{A.77})}{=} x - \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) \right] + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C, \\ \text{isto é, } \int \cos^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C, \quad (\text{A.78}) \end{aligned}$$

para  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária.

2. Seja  $n \in \mathbb{N}$  fixado.

Para calcularmos a integral indefinida

$$\int \cos^{2n}(x) \, dx,$$

agiremos da seguinte forma:

(a) Observemos que:

$$\begin{aligned}
 \int \cos^{2n}(x) \, dx &= \int [\cos^2(x)]^n \, dx \\
 &\stackrel{\text{Exercício 1} + \cos(2x)}{=} \int \left[ \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right]^n \, dx \\
 &= \frac{1}{2^n} \int [1 + \cos(2x)]^n \, dx \\
 &\stackrel{\text{Binômio de Newton}}{=} \frac{1}{2^n} \int \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\cos(2x)]^k 1^{n-k} \right\} \, dx \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int [\cos(2x)]^k \, dx \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq 2x, \\ \text{teremos: } du = \frac{d}{dx}[2x] \, dx = 2 \, dx \end{array} \right\} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int \cos^k(u) \frac{1}{2} \, du \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int \cos^k(u) \, du, \\
 \text{ou seja, } \int \cos^{2n}(x) \, dx &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int \cos^k(u) \, du, \tag{A.79}
 \end{aligned}$$

onde, na penúltima integral indefinida, fizemos a mudança de variáveis (é bijetora!):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 x & \mapsto & u \doteq 2x
 \end{array}$$

(b) Observemos que a expressão (A.79) nos diz que para calcularmos a integral indefinida da potência par  $2n$  da função cosseno, precisamos calcular  $n+1$  integrais indefinidas de potências da função cosseno, desde a potência  $0$  até a potência  $n$ , ou seja, no máximo metade da potência inicial, que era  $2n$ .

Deste modo reduzimos o problema a calcular  $n+1$  integrais indefinidas de potências da função cosseno de ordem  $0$  até a ordem  $n$ .

(c) As parcelas que têm potências ímpares podem ser calculadas pela Proposição A.1.1 e para as parcelas que têm potências pares podemos reaplicar, se necessário, o raciocínio acima.

(d) No final, aplicando um número finito de vezes o procedimento acima, recairemos na integral indefinida da função cosseno ao quadrado que foi calculada em (A.78).

3. Seja  $n \in \mathbb{N}$  fixado.

Para calcularmos

$$\int \operatorname{sen}^{2n}(x) \, dx,$$

agiremos da seguinte forma:



Notemos que

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{2n}(x) \, dx &= \int [\operatorname{sen}^2(x)]^n \, dx \\ &= \int [1 - \cos^2(x)]^n \, dx \\ &\stackrel{\text{Binômio de Newton}}{=} \int \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [-\cos^2(x)]^k 1^{n-k} \right\} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int \cos^{2k}(x) \, dx, \end{aligned}$$

ou seja, reduzimos o problema a calcular  $n+1$  integrais indefinidas envolvendo potências pares da função cosseno.

Logo, aplicando os item 2. desta Observação, podemos encontrar a integral indefinida de potências pares da função seno.

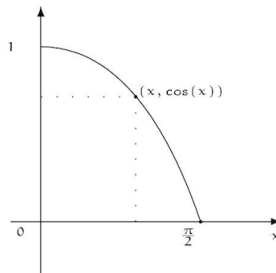
#### A.1.4.2 Integrais indefinidas envolvendo potências da função tangente e cotangente

Começaremos tratando das integrais indefinidas envolvendo potências da função tangente.

##### Observação A.1.7

1. Consideremos a mudança de variáveis (é bijetora, veja a figura abaixo):

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & \rightarrow & (0, 1) \\ x & \mapsto & u \doteq \cos(x) \end{array} .$$



Com isto teremos:

$$\int \operatorname{tg}(x) \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \, dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \text{temos } u \doteq \cos(x) > 0, \\ e \, du = \frac{d}{dx}[\cos(x)] \, dx = -\operatorname{sen}(x) \, dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{u} (-du)$$

$$\stackrel{(3.49)}{=} -\ln(|u|) + C$$

$$\text{como } u = \cos(x) \quad \stackrel{=}{=} -\ln(|\cos(x)|) + C,$$

$$\text{isto é,} \quad \int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln(|\cos(x)|) + C, \quad (\text{A.80})$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário.

2. Temos também

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2(x) \, dx &\stackrel{\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1}{=} \int [\sec^2(x) - 1] \, dx \\ &= \int \sec^2(x) \, dx - \int 1 \, dx \\ &\stackrel{\frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)] = \sec^2(x)}{=} \operatorname{tg}(x) - x + C, \end{aligned}$$

isto é,  $\int \operatorname{tg}^2(x) \, dx = \operatorname{tg}(x) - x + C,$  (A.81)

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário.

3. Seja  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$  fixado.

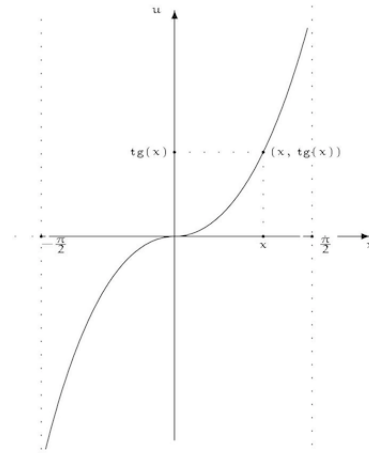
Então teremos

$$n = k + 2, \quad (\text{A.82})$$

para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Consideremos a seguinte mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u \doteq \operatorname{tg}(x). \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$



Com isto teremos:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^n(x) \, dx &\stackrel{(\text{A.82})}{=} \int \operatorname{tg}^{k+2}(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^k(x) \operatorname{tg}^2(x) \, dx = \int \operatorname{tg}^k(x) [\sec^2(x) - 1] \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^k(x) \sec^2(x) \, dx - \int \operatorname{tg}^k(x) \, dx \\ &\left. \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \operatorname{tg}(x), \\ \text{teremos } du = \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x)] = \sec^2(x) \, dx \end{array} \right\} \int u^k \, du - \int \operatorname{tg}^k(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k+1} u^{k+1} - \int \operatorname{tg}^k(x) \, dx \\
&\quad \text{como } u \doteq \operatorname{tg}(x), \\
&= \frac{1}{k+1} \operatorname{tg}^{k+1}(x) - \int \operatorname{tg}^k(x) \, dx, \\
\text{isto é, } \int \operatorname{tg}^{k+2}(x) \, dx &= \frac{1}{k+1} \operatorname{tg}^{k+1}(x) - \int \operatorname{tg}^k(x) \, dx. \tag{A.84}
\end{aligned}$$

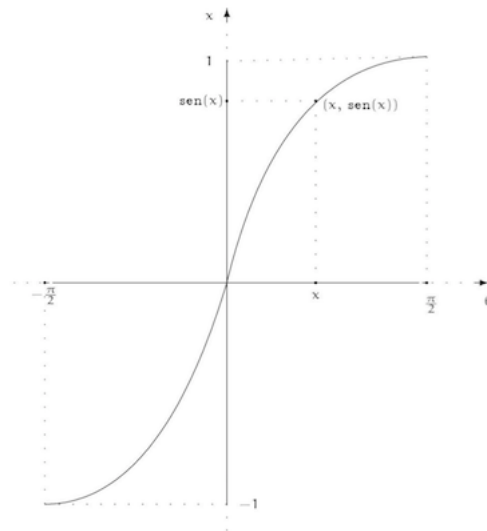
Portanto, cada vez que aplicamos a identidade (A.84) acima, reduzimos em 2 no expoente da potência da função tangente na integral indefinida a ser calculada, ou seja, aplicando-se um número finito de vezes reduziremos o problema a calcular a integral indefinida da função tangente, ou da função tangente elevada ao quadrado, que foram obtidas nos itens 1. e 2. desta Observação.

Para as potências da função cotangente agimos de modo semelhante, como mostra a:

#### Observação A.1.8

1. Consideremos a mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow (-1, 1) \\
x &\mapsto u \doteq \operatorname{sen}(x)
\end{aligned} \tag{A.85}$$



Com isto teremos:

$$\int \cotg(x) \, dx = \int \frac{\cos(x)}{\sen(x)} \, dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \text{teremos } u \doteq \sen(x), \\ \text{e } du = \frac{d}{dx}[\sen(x)] \, dx = \cos(x) \, dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{u} \, du$$

$$\stackrel{(3.49)}{=} \ln(|u|) + C$$

$$\text{como } u = \sen(x) \quad \ln(|\sen(x)|) + C,$$

$$\text{isto é, } \int \cotg(x) \, dx = \ln(|\sen(x)|) + C, \quad (\text{A.86})$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário.

2. Temos também

$$\int \cotg^2(x) \, dx \stackrel{\cotg^2(x) = \csc^2(x) - 1}{=} \int [\csc^2(x) - 1] \, dx$$

$$= \int \csc^2(x) \, dx - \int 1 \, dx$$

$$\stackrel{\frac{d}{dx}[\cotg(x)] = -\csc^2(x)}{=} -\cotg(x) - x + C,$$

$$\text{isto é, } \int \cotg^2(x) \, dx = -\cotg(x) - x + C, \quad (\text{A.87})$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário.

3. Seja  $n \in \mathbb{N}$  com  $n > 2$  fixado.

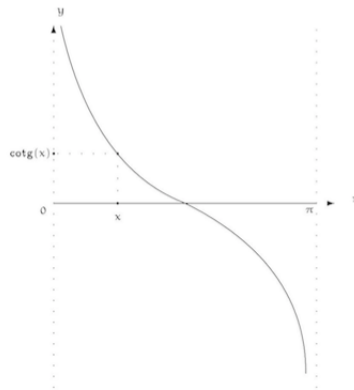
Então

$$n = k + 2, \quad (\text{A.88})$$

para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Consideremos a seguinte mudança de variáveis (é bijetora, ver figura abaixo):

$$\begin{array}{l} (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto u \doteq \cotg(x) \end{array} \quad (\text{A.89})$$



Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
 \int \cotg^n(x) \, dx &= \int \cotg^{k+2}(x) \, dx \\
 &= \int \cotg^k(x) \cotg^2(x) \, dx \\
 &\stackrel{\cotg^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1}{=} \int \cotg^k(x) [\operatorname{cosec}^2(x) - 1] \, dx \\
 &= \int \cotg^k(x) \operatorname{cosec}^2(x) \, dx - \int \cotg^k(x) \, dx \\
 &\left. \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \cotg(x), \\ \text{teremos } du = \frac{d}{dx}[\cotg(x)] \, dx = -\operatorname{cosec}^2(x) \, dx \end{array} \right\} \int u^k (-du) - \int \cotg^k(x) \, dx \\
 &= -\frac{1}{k+1} u^{k+1} - \int \cotg^k(x) \, dx \\
 &\stackrel{\text{como } u \doteq \cotg(x)}{=} -\frac{1}{k+1} \cotg^{k+1}(x) - \int \cotg^k(x) \, dx, \\
 \text{isto é, } \int \cotg^{k+2}(x) \, dx &= -\frac{1}{k+1} \cotg^{k+1}(x) - \int \cotg^k(x) \, dx, \tag{A.90}
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário.

Portanto, de modo semelhante com o que o ocorreu no caso da integral indefinida de potências da função tangente, cada vez que aplicamos a identidade (A.90) acima, reduzimos em 2 o expoente da potência da função cotangente na integral indefinida a ser calculada, ou seja, aplicando-se um número finito de vezes reduziremos o problema a calcular a integral indefinida da função cotangente, ou da função cotangente ao quadrado, que foram obtidas nos itens 1. e 2. desta Observação.

### A.1.4.3 Integrais indefinidas envolvendo potências da função secante e cossecante

Para as potências pares da função secante temos:

**Observação A.1.9** *Observemos que, para  $n \in \mathbb{N}$  fixado, temos:*

$$\begin{aligned} \int \sec^{2n}(x) dx &= \int [\sec^2(x)]^n dx \\ &\stackrel{\sec^2(x)=1+\operatorname{tg}^2(x)}{=} \int [1 + \operatorname{tg}^2(x)]^n dx, \\ &\stackrel{\text{Binômio de Newton}}{=} \int \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\operatorname{tg}^2(x)]^k 1^{n-k} \right\} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int \operatorname{tg}^{2k}(x) dx, \end{aligned} \tag{A.91}$$

e cada uma das parcelas na soma (A.91) acima (cada uma delas envolve uma potência da função tangente) foram tratadas como na Observação A.1.7.

As potências pares da função cossecante são tratadas de modo semelhante, como mostra a:

**Observação A.1.10** *Observemos que, para  $n \in \mathbb{N}$  fixado, temos:*

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}^{2n}(x) dx &= \int [\operatorname{cosec}^2(x)]^n dx \\ &\stackrel{\operatorname{cosec}^2(x)=1+\operatorname{cotg}^2(x)}{=} \int [1 + \operatorname{cotg}^2(x)]^n dx, \\ &\stackrel{\text{Binômio de Newton}}{=} \int \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\operatorname{cotg}^2(x)]^k 1^{n-k} \right\} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int \operatorname{cotg}^{2k}(x) dx, \end{aligned} \tag{A.92}$$

e cada uma das parcelas na soma (A.92) acima (cada uma delas envolve uma potência da função cotangente) foram tratadas como na Observação A.1.8.

Para as potências ímpares da função secante temos a:

**Observação A.1.11**

1. *Consideremos a mudança de variáveis (é bijetora, verifique!):*

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow (1, \infty) \\ x &\mapsto u \doteq \sec(x) + \operatorname{tg}(x) \end{aligned} .$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} \int \sec(x) dx &= \int \sec(x) \frac{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx \\ &= \left. \begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &\text{se } u \doteq \sec(x) + \operatorname{tg}(x), \\ &\text{teremos } du = \frac{d}{dx}[\sec(x) + \operatorname{tg}(x)] dx = [\sec(x) \operatorname{tg}(x) + \sec^2(x)] dx \end{aligned} \right\} \int \frac{1}{u} du \\ &\stackrel{(3.49)}{=} \ln(|u|) + C \\ &\text{como } u \stackrel{=}{=} \sec(x) + \operatorname{tg}(x) \quad \ln(|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)|) + C, \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{isto é, } \int \sec(x) dx = \ln(|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)|) + C. \tag{A.93}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário.

2. Para  $n \in \mathbb{N}$  fixado, utilizando-se o Teorema de integração por partes para integral indefinida (ou seja, o Teorema 3.5.2), teremos:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int \sec^{2n+1}(x) dx}_{\doteq I} &= \int \underbrace{\sec^{2n-1}(x)}_u \underbrace{\sec^2(x) dx}_{dv} \\
 &= \int u dv \\
 &\stackrel{(3.92)}{=} uv - \int v du \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \sec^{2n-1}(x), \\ \text{teremos } du = \frac{d}{dx} [\sec^{2n-1}(x)] dx = (2n-1) \sec^{2n-2}(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx \\ \\ \text{e se } dv = \sec^2(x) dx, \\ \text{teremos } v = \int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + C, \\ \text{em particular, se } C = 0: v = \underline{\underline{\operatorname{tg}(x)}} \end{array} \right\} \\
 &= \underbrace{\sec^{2n-1}(x)}_{=u} \underbrace{\operatorname{tg}(x)}_{=v} - \int \underbrace{\operatorname{tg}(x)}_{=v} \underbrace{[(2n-1) \sec^{2n-1}(x) \operatorname{tg}(x)]}_{=du} dx \\
 &= \sec^{2n-1}(x) \operatorname{tg}(x) - (2n-1) \int \sec^{2n-1}(x) \operatorname{tg}^2(x) dx \\
 &\stackrel{\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1}{=} \sec^{2n-1}(x) \operatorname{tg}(x) - (2n-1) \int \sec^{2n-1}(x) [\sec^2(x) - 1] dx \\
 &= \sec^{2n-1}(x) \operatorname{tg}(x) - (2n-1) \underbrace{\int \sec^{2n+1}(x) dx}_{=I} + (2n-1) \int \sec^{2n-1}(x) dx. \quad (\text{A.94})
 \end{aligned}$$

Assim, de (A.94), teremos:

$$\begin{aligned}
 [(2n-1) + 1] \int \sec^{2n+1}(x) dx &= \sec^{2n-1}(x) \operatorname{tg}(x) - (2n-1) \int \sec^{2n-1}(x) dx, \\
 \text{ou seja, } \int \sec^{2n+1}(x) dx &= \frac{1}{2n} \sec^{2n-1}(x) \operatorname{tg}(x) + \frac{2n-1}{2n} \int \sec^{2n-1}(x) dx. \quad (\text{A.95})
 \end{aligned}$$

Portanto, cada vez que aplicamos a identidade (A.95) acima, reduzimos em 2 o expoente da potência da secante as quais teremos que calcular a integral indefinida.

Logo, aplicando a identidade (A.95) acima um número finito de vezes restará calcular a integral da secante que foi obtida no item 1. desta Observação.

De modo semelhante temos as potências ímpares da função cossecante, como mostra a:

### Observação A.1.12

1. Consideremos mudança de variáveis (é bijetora, verifique!):

$$\begin{array}{l}
 \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (1, \infty) \\
 x \mapsto u \doteq \operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)
 \end{array}$$

Com isto temos que

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{cosec}(x) \, dx &= \int \operatorname{cosec}(x) \frac{\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)}{\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)} \, dx \\
 &= \int \frac{\operatorname{cosec}^2(x) + \operatorname{cosec}(x) \cdot \cotg(x)}{\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)} \, dx \\
 &\left. \begin{aligned}
 &\text{se } u \doteq \operatorname{cosec}(x) + \cotg(x), \\
 &\text{teremos } du = \frac{d}{dx} [\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)] \, dx = [-\operatorname{cosec}(x) \cotg(x) - \operatorname{cosec}^2(x)] \, dx
 \end{aligned} \right\} \\
 &= \int \frac{1}{u} (-du) \\
 &\stackrel{(3.49)}{=} -\ln(|u|) + C \\
 &\text{como } u = \operatorname{cosec}(x) + \cotg(x) \quad -\ln(|\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)|) + C, \\
 \text{isto é } \int \operatorname{cosec}(x) \, dx &= -\ln(|\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)|) + C, \tag{A.96}
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário.

2. Para  $n \in \mathbb{N}$  fixado, utilizando-se o Teorema de integração por partes para integral indefinida (ou seja, o Teorema 3.5.2), teremos:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int \operatorname{cosec}^{2n+1}(x) \, dx}_{\doteq I} &= \int \underbrace{\operatorname{cosec}^{2n-1}(x)}_u \underbrace{\operatorname{cosec}^2(x) \, dx}_{dv} \\
 &= \int u \, dv \\
 &\stackrel{(3.92)}{=} uv - \int v \, du \\
 &\left. \begin{aligned}
 &\text{se } u \doteq \operatorname{cosec}^{2n-1}(x), \\
 &\text{teremos: } du = \frac{d}{dx} [\operatorname{cosec}^{2n-1}(x)] \, dx = -(2n-1) \operatorname{cosec}^{2n-2}(x) \operatorname{cosec}(x) \cotg(x) \, dx \\
 &\text{e se, } dv = \operatorname{cosec}^2(x) \, dx, \\
 &\text{teremos: } v = \int \operatorname{cosec}^2(x) \, dx = -\cotg(x) + C \\
 &\text{em particular, se } C \doteq 0: v = -\cotg(x)
 \end{aligned} \right\} \\
 &= \underbrace{-\operatorname{cosec}^{2n-1}(x)}_{=u} \underbrace{\cotg(x)}_{=v} - \int \underbrace{[-\cotg(x)]}_{=v} \underbrace{[-(2n-1) \operatorname{cosec}^{2n-1}(x) \cotg(x)]}_{=du} \, dx \\
 &= -\operatorname{cosec}^{2n-1}(x) \cotg(x) - (2n-1) \int \operatorname{cosec}^{2n-1}(x) \cotg^2(x) \, dx \\
 &\stackrel{\cotg^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1}{=} -\operatorname{cosec}^{2n-1}(x) \cotg(x) - (2n-1) \int \operatorname{cosec}^{2n-1}(x) [\operatorname{cosec}^2(x) - 1] \, dx \\
 &= -\operatorname{cosec}^{2n-1}(x) \cotg(x) - (2n-1) \underbrace{\int \operatorname{cosec}^{2n+1}(x) \, dx}_{=I} + (2n-1) \int \operatorname{cosec}^{2n-1}(x) \, dx, \tag{A.97}
 \end{aligned}$$



Logo, de (A.97), segue que

$$\begin{aligned} [(2n-1)+1] \int \operatorname{cosec}^{2n+1}(x) dx &= -\operatorname{cosec}^{2n-1}(x) \cotg(x) - (2n-1) \int \operatorname{cosec}^{2n-1}(x) dx, \\ \text{ou seja,} \quad \int \operatorname{cosec}^{2n+1}(x) dx &= -\frac{1}{2n} \operatorname{cosec}^{2n-1}(x) \cotg(x) + \frac{2n-1}{2n} \int \operatorname{cosec}^{2n-1}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

Com isto, cada vez que aplicamos a identidade (A.93) acima, reduzimos em 2 o expoente da potência da função cossecante as quais teremos que calcular na integral indefinida.

Logo, aplicando a identidade acima um número finito de vezes restará calcular a integral da cossecante que foi dada no item 1. desta Observação.

**A.1.5** Integrais indefinidas do tipo:  $\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx$ , com  $p^2 - 4q < 0$  e  $k \in \{2, 3, \dots\}$

Trataremos a seguir de integrais do tipo

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx, \quad \text{para } k \in \{2, 3, \dots\}, \quad (\text{A.99})$$

onde o polinômio do 2.º grau

$$P(x) \doteq x^2 + px + q, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.100})$$

é um polinômio irredutível em  $\mathbb{R}$ , ou seja, não tem raízes reais, ou equivalentemente,

$$\Delta \doteq p^2 - 4q < 0. \quad (\text{A.101})$$

Para tanto temos a:

**Observação A.1.13** Observemos que podemos escrever o polinômio do 2.º grau que aparece no denominador da função racional do integrando (ou seja, o polinômio (A.100)), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}. \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

Assim, de (A.101), segue que

$$\frac{4q - p^2}{4} \stackrel{(\text{A.101})}{>} 0.$$

Logo, considerando-se

$$a \doteq \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}, \quad (\text{A.103})$$

$$\text{segue que } a^2 = \frac{4q - p^2}{4},$$

assim a identidade (A.102) acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2, \quad (\text{A.104})$$

onde  $a$  é dado por (A.103).

Logo

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx \stackrel{(\text{A.104})}{=} \int \frac{1}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right]^k} dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x + \frac{p}{2}, \\ \text{teremos: } du = 1 dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{(u^2 + a^2)^k} du \quad (\text{A.105})$$

e esta última pode ser encontrada utilizando-se as substituições dadas pela Observação A.1.1.

Na verdade ela é do tipo (ii) (veja (A.2)) e assim podemos tentar calculá-la utilizando a mudança de variáveis (veja (A.6) e (A.7)):

$$u \doteq a \operatorname{tg}(\theta),$$

ou

$$u \doteq a \operatorname{senh}(v).$$

Com isto obtemos a integral indefinida dada inicialmente, a saber (A.99).

Apliquemos a idéia acima ao:

**Exemplo A.1.5** Calcular a integral indefinida

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx. \quad (\text{A.106})$$

**Resolução:**

Observemos que a função polinomial do 2.º grau

$$P(x) \doteq x^2 + x + 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

é definida por um polinômio irreduzível em  $\mathbb{R}$  (isto é, não possui raízes reais), pois

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Com isto podemos aplicar as idéias desenvolvidas na Observação (A.1.13) acima e assim obter:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx \stackrel{(A.105)}{=} \int \frac{1}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} \\
 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x + \frac{1}{2}, \\ \text{teremos: } du = dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{\left[u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2} du \\
 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}(\theta), \\ \text{teremos: } du = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta \end{array} \right\} \int \frac{1}{\left[\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}(\theta)\right]^2 + \frac{3}{4}\right]^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta \\
 & = \int \frac{1}{\frac{9}{16} [\operatorname{tg}^2(\theta) + 1]^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta \\
 & = \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{1}{[\sec^2(\theta)]^2} \sec^2(\theta) d\theta \\
 & = \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{1}{\sec^2(\theta)} d\theta \\
 & = \frac{8\sqrt{3}}{9} \underbrace{\int \cos^2(\theta) d\theta}_{\stackrel{(A.78)}{=} \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta)}} \\
 & = \frac{8\sqrt{3}}{9} \left[ \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta) \right] + C \\
 & \quad \text{como } \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right) \quad \stackrel{=}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9} \left\{ \left[ \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left[ 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right) \right] \right\} + C, \\
 & \quad \text{como } u = \frac{2x+1}{2} \quad \stackrel{=}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9} \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \frac{2x+1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \frac{2x+1}{2} \right) \right] \right\} \right\} + C, \\
 \text{ou seja,} \quad & \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{4\sqrt{3}}{9} \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} \right] \right\} \right\} + C, \tag{A.107}
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

A seguir temos também o:

**Exercício A.1.10** Calcular a integral indefinida

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3} dx. \quad (\text{A.108})$$

**Resolução:**

Observemos que a função polinômio do 2.o grau

$$P(x) \doteq x^2 + x + 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

é definida por um polinômio irreduzível em  $\mathbb{R}$  (isto é, não possui raízes reais), pois

$$\Delta \doteq 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Com isto podemos aplicar as idéias desenvolvidas na Observação A.1.13 acima e assim obter:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3} dx &\stackrel{(\text{A.105})}{=} \int \frac{1}{\left[ \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]^3} dx \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x + \frac{1}{2}, \\ \text{teremos } du = dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{\left\{ u^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right\}^3} du \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}(\theta), \\ \text{teremos: } du = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta \end{array} \right\} \int \frac{1}{\left\{ \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}(\theta) \right]^2 + \frac{3}{4} \right\}^3} \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{1}{\frac{9}{16} [\operatorname{tg}^2(\theta) + 1]^3} \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{1}{[\sec^2(\theta)]^3} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{1}{\sec^4(\theta)} d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \cos^4(\theta) d\theta. \quad (\text{A.109}) \end{aligned}$$

Calculemos a integral indefinida da potência ímpar da função cosseno (veja o item 2a. da Ob-

servação (A.1.6)):

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4(\theta) \, d\theta &= \int [\cos^2(\theta)]^2 \, d\theta \\
 &\stackrel{\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}}{=} \int \left[ \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right]^2 \, d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int [1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)] \, d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \int 1 \, d\theta + 2 \int \cos(2\theta) \, d\theta + \int \cos^2(2\theta) \, d\theta \right\} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } v \doteq 2\theta, \\ \text{teremos: } dv = 2 \, d\theta \\ \text{ou seja, } d\theta = \frac{1}{2} \, dv \end{array} \right\} \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{2} \int \cos(v) \frac{1}{2} \, dv + \frac{1}{4} \left[ \int \cos^2(v) \frac{1}{2} \, dv \right] \\
 &\stackrel{(A.78)}{=} \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4} \text{sen}(v) + \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2} v + \frac{1}{4} \text{sen}(2v) \right] + C \\
 &= \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{16} v + \frac{1}{4} \text{sen}(v) + \frac{1}{32} \text{sen}(2v) + C \\
 &\stackrel{\text{como } v=2\theta}{=} \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{8} \theta + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) + \frac{1}{32} \text{sen}(4\theta) + C \\
 &= \frac{3}{8} \theta + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) + \frac{1}{32} \text{sen}(4\theta) + C. \tag{A.110}
 \end{aligned}$$

Logo, substituindo (A.110) em (A.109), obteremos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3} \, dx &= \frac{3}{8} \theta + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) + \frac{1}{32} \text{sen}(4\theta) + C \\
 &\stackrel{\text{como } \theta = \text{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)}{=} \frac{3}{8} \text{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right) + \frac{1}{4} \text{sen}\left[2 \text{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)\right] \\
 &\quad + \frac{1}{32} \text{sen}\left[4 \text{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)\right] + C \\
 &\stackrel{\text{como } u = x + \frac{1}{2}}{=} \frac{3}{8} \text{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{4} \text{sen}\left\{2 \text{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} \\
 &\quad + \frac{1}{32} \text{sen}\left\{4 \text{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} + C,
 \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3} \, dx &= \frac{3}{8} \text{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{4} \text{sen}\left\{2 \text{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} \\
 &\quad + \frac{1}{32} \text{sen}\left\{4 \text{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} + C, \tag{A.111}
 \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução.

□

**A.1.6** Integrais indefinidas do tipo:  $\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k} dx$ , com  $p^2 - 4q < 0$ ,  $k \in \{2, 3, \dots\}$

Para

$$k \in \{2, 3, \dots\}$$

fixado, trataremos a seguir de integrais do tipo:

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k} dx, \quad (\text{A.112})$$

onde a função polinomial do 2.º grau

$$p(x) \doteq x^2 + px + q, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

é definida por um polinômio irredutível em  $\mathbb{R}$ , ou seja, não tem raízes reais ou, equivalentemente,

$$\Delta = p^2 - 4q < 0.$$

Para tanto temos a:

**Observação A.1.14** *O que faremos para encontrar a integral indefinida (A.112) é escrever o numerador da função racional do integrando, em termos da derivada da função denominador da mesma.*

Observemos que

$$\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k} \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{\frac{a}{2}(2x + p) + b - \frac{ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k}. \quad (\text{A.113})$$

Com isto, agiremos da seguinte forma para cálculo da integral indefinida (A.112):

$$\begin{aligned} \int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k} dx &\stackrel{(\text{A.113})}{=} \int \frac{\frac{a}{2}(2x + p) + b - \frac{ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k} dx \\ &= \frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x^2 + px + q, \\ \text{teremos: } du \stackrel{=}{=} (2x + p) dx \end{array} \right\} \frac{a}{2} \int \frac{1}{u^k} du + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx \\ &\stackrel{k \in \{2, 3, \dots\}}{=} \frac{a}{2(k+1)} u^{-k+1} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx \\ &\stackrel{\text{como } u = x^2 + px + q}{=} \frac{a}{2(k+1)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \underbrace{\left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx}_{\doteq [I]} \end{aligned}$$

e para calcularmos a integral indefinida  $[I]$  utilizamos as técnicas desenvolvidas na subseção A.1.5. anterior.

Apliquemos a técnica acima ao :

**Exemplo A.1.6** *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{3x+3}{(x^2+x+1)^2} dx. \quad (\text{A.114})$$

**Resolução:** Sabemos que a função polinomial do 2.o grau

$$p(x) \doteq x^2 + x + 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

é definida por um polinômio irredutível em  $\mathbb{R}$ , pois

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Logo podemos aplicar a decomposição acima e obter (como na Observação A.1.14):

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+3}{(x^2+x+1)^2} dx &\stackrel{(\text{A.113})}{=} \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{3}{2}}{(x^2+x+1)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \\ &\left. \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x^2 + x + 1, \\ \text{teremos: } du = (2x+1) dx \end{array} \right\} \frac{3}{2} \int \frac{1}{u^2} du + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \frac{-1}{u} + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \\ &\text{como } u \stackrel{=}{=} x^2+x+1 \quad -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Exemplo A.1.5, ou ainda (A.107)} &\stackrel{=}{=} -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{4\sqrt{3}}{9} \left\{ \arctg \left[ \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left\{ 2 \arctg \left[ \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} \right] \right\} \right\} \right\} + C, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+3}{(x^2+x+1)^2} dx &= -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ \arctg \left[ \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left\{ 2 \arctg \left[ \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} \right] \right\} \right\} + C, \quad (\text{A.115}) \end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrário, completando a resolução. □

## A.2 Integrais de funções racionais

Nesta seção desenvolveremos técnicas para o cálculo de integrais indefinidas do tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx, \quad (\text{A.116})$$

onde as  $p, q$  são funções polinomiais, ou seja, calcular integrais indefinidas de funções racionais.

Para isto utilizaremos, entre outras, as técnicas desenvolvidas nas seções anteriores.

Lembremos que uma função polinomial,

$$p = p(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

definida por um polinômio de grau  $n$  pode ser colocada na seguinte forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.117})$$

onde  $a_i \in \mathbb{R}$ , para  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  e  $a_n \neq 0$ .

Começaremos pelo seguinte resultado, cuja demonstração será omitida:

**Teorema A.2.1 (fundamental da Álgebra)** *Um polinômio de grau  $n$  pode ser decomposto, como produto de um número finito de fatores, onde cada um desses fatores é um polinômio do 1. grau ou do 2.o grau, sendo este último, irredutível em  $\mathbb{R}$  (isto é, não têm raízes reais).*

### Observação A.2.1

1. Se

$$p = p(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

é uma função polinomial, cujo polinômio que a define tem grau  $n$  então, do Teorema fundamental da Álgebra (ou seja, o Teorema A.2.1), segue que a função polinomial  $p$  pode ser colocada na seguinte forma:

$$p(x) = a \underbrace{(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_k)^{m_k}}_{\text{fatores do 1.o grau}} \underbrace{\left(x^2 + a_1 x + b_1\right)^{n_1} \cdots \left(x^2 + a_j x + b_j\right)^{n_j}}_{\text{fatores do 2. grau, irredutíveis em } \mathbb{R}}, \quad (\text{A.118})$$

onde cada um dos polinômios do 2.o grau na decomposição acima, **não** têm raízes reais, isto é,

$$a_r^2 - 4 b_r < 0, \quad \text{para cada } r \in \{1, 2, \dots, j\}.$$

2. Notemos que, de (A.118), segue que

$$m_1 + \cdots + m_k + 2 n_1 + \cdots + 2 n_j = n.$$

3. Na situação acima diremos que, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , a raiz (real)

$$x = x_i$$

será uma raiz de multiplicidade  $m_i$  do monômio  $(x - x_i)^{m_i}$ .

Consideremos o:



**Exemplo A.2.1** Aplique o Teorema fundamental da Álgebra (ou seja, o Teorema A.2.1) a função polinomial  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.119})$$

**Resolução:**

Observemos que

$$\begin{aligned} p(1) &\stackrel{(\text{A.119})}{=} \stackrel{\text{com } x=1}{=} 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 0, \\ \text{ou seja, } x_1 &\doteq 1, \\ \text{é uma raiz real do polinômio } &x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1, \end{aligned} \quad (\text{A.120})$$

ou ainda, a função polinomial  $p = p(x)$ , dada por (A.119), será divisível pela função polinomial

$$r(x) \doteq x - 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

isto é, existe uma função polinomial

$$q = q(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

tal que

$$p(x) = q(x)(x - 1), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar a função polinomial  $q = q(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , aplicaremos o Algoritmo de Briot-Ruffini:

$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	$x - 1$
$-(x^4 - x^3)$ $= -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	$x^3 - x^2 + x - 1$
$-(-x^3 + x^2)$ $= x^2 - 2x + 1$	
$-(x^2 - x)$ $= -x + 1$	
$-(-x + 1)$ $= 0$	

Logo se considerarmos a função polinomial  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$q(x) \doteq x^3 - x^2 + x - 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.121})$$

teremos que

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ &= (x - 1)q(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

Observemos que

$$\begin{aligned} q(1) &\stackrel{(\text{A.121})}{=} \stackrel{\text{com } x=1}{=} 1^3 - 1^2 + 1 - 1 \\ &= 0, \\ \text{ou seja, } x_2 &\doteq 1, \\ \text{é um raiz real do polinômio } &x^3 - x^2 + x - 1, \end{aligned}$$

ou ainda, a função polinomial  $q = q(x)$ , dada por (A.121), será divível pela função polinomial

$$r_1(x) \doteq x - 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

isto é, existe uma função polinomial  $q_1 = q_1(x)$  tal que

$$q(x) = q_1(x)(x - 1), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando-se, novamente, o Algoritmo de Briot-Ruffini, podemos encontrar a função  $q_1 = q_1(x)$ :

$x^3 - x^2 + x - 1$	$x - 1$
$-(x^3 - x^2)$ $= x - 1$	$x^2 + 1$
$-(x - 1)$ $= 0$	

Logo se considerarmos a função polinomial  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$q_1(x) \doteq x^2 + 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.123})$$

teremos que

$$\begin{aligned} q(x) &\stackrel{(\text{A.121})}{=} x^3 - x^2 + x - 1 \\ &= (x - 1)q_1(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

Observemos que o polinômio

$$x^2 + 1$$

não possui raízes reais (isto é, é um polinômio irredutível do 2.º grau em  $\mathbb{R}$ ).

Logo, de (A.122), (A.124) e (A.123), segue que

$$\begin{aligned} p(x) &\stackrel{\text{(A.119)}}{=} x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ &= \underbrace{(x-1)^2}_{\text{(fator do 1.º grau)}} \underbrace{(x^2+1)}_{\text{(fator do 2.º grau irredutível em } \mathbb{R})} \end{aligned} \quad (\text{A.125})$$

e assim temos a decomposição garantida pelo Teorema fundamental da Álgebra, completando a resolução.  $\square$

**Observação A.2.2** *No Exemplo A.2.1, temos que*

$$x \doteq 1$$

*é uma raiz de multiplicidade 2 do polinômio*

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

Passaremos agora a tratar do cálculo da integral indefinida de uma função racional, isto é, do cálculo da integral indefinida:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx, \quad (\text{A.126})$$

onde  $p$  e  $q$  são funções polinomiais dadas.

Consideraremos, primeiramente, o seguinte caso:

### A.2.1 Caso que $\text{grau}(p) < \text{grau}(q)$

Trataremos nesta subseção do caso em que o grau do polinômio do numerador da integral indefinida da função racional (ou seja, (A.126)), é menor que o grau do polinômio do denominador, isto é,

$$\text{grau}(p) < \text{grau}(q). \quad (\text{A.127})$$

Iniciaremos aplicando o Teorema fundamental da Álgebra (ou seja, o Teorema A.2.1) a função polinomial  $q = q(x)$  (ou seja, ao polinômio do denominador), para obter uma decomposição do tipo:

$$q(x) = \alpha \underbrace{(x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_k)^{m_k}}_{\text{fatores do 1.º grau}} \underbrace{(x^2+a_1x+b_1)^{n_1} \cdots (x^2+a_jx+b_j)^{n_j}}_{\text{fatores do 2.º grau irredutíveis em } \mathbb{R}}. \quad (\text{A.128})$$

Nosso objetivo é decompor a função racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{\alpha (x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_k)^{m_k} (x^2+a_1x+b_1)^{n_1} \cdots (x^2+a_jx+b_j)^{n_j}},$$

em uma soma finita de funções racionais, onde em cada uma das parcelas dessa decomposição terá **no denominador, somente**, uma expressão do tipo

$$(x-x_i)^{l_i}, \quad \text{para } l_i \in \{1, 2, \dots, m_i\} \quad (\text{A.129})$$

para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , ou do tipo

$$(x^2 + a_r x + b_r)^{s_r}, \quad \text{para } s_r \in \{1, 2, \dots, n_r\} \quad (\text{A.130})$$

para cada  $r \in \{1, 2, \dots, j\}$ , e no numerador aparecerá uma função polinomial cujo grau será igual a zero ou igual a 1, que dependerá da parcela da decomposição que estaremos considerando.

Tal decomposição será denominada decomposição da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$  em **frações parciais**.

A seguir descreveremos, de modo mais explícito, como são as parcelas associadas ao fator do denominador (A.129) e ao fator (A.130).

1. Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  seja

$$(x - x_i)^{m_i}$$

um dos fatores (do 1.o grau) na decomposição do denominador da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , isto é, de (A.128) (ou seja, da função polinomial  $q = q(x)$ , dada pelo Teorema fundamental da Álgebra).

Na decomposição da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$  em frações parciais, associado ao termo do denominador  $(x - x_i)^{m_i}$ , teremos as seguintes parcelas:

$$\frac{A_{i,1}}{x - x_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - x_i)^2} + \frac{A_{i,3}}{(x - x_i)^3} + \dots + \frac{A_{i,m_i}}{(x - x_i)^{m_i}}. \quad (\text{A.131})$$

2. Para cada,  $r \in \{1, 2, \dots, j\}$  seja

$$(x^2 + a_r x + b_r)^{n_r}$$

um dos fatores (do 2.o grau irredutível) da decomposição (A.128) (ou seja, da função polinomial  $q = q(x)$ , dada pelo Teorema Fundamental da Álgebra).

Na decomposição da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$  em frações parciais, associado ao termo do denominador  $(x^2 + a_r x + b_r)^{n_r}$ , teremos as seguintes parcelas:

$$\frac{B_{r,1}x + C_{r,1}}{x^2 + a_r x + b_r} + \frac{B_{r,2}x + C_{r,2}}{(x^2 + a_r x + b_r)^2} + \frac{B_{r,3}x + C_{r,3}}{(x^2 + a_r x + b_r)^3} + \dots + \frac{B_{r,n_r}x + C_{r,n_r}}{(x^2 + a_r x + b_r)^{n_r}}. \quad (\text{A.132})$$

Deste modo obtemos uma decomposição da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$  em frações parciais, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{1}{a} \left\{ \left[ \frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} \right] + \dots + \left[ \frac{A_{k,1}}{x - x_k} + \dots + \frac{A_{k,m_k}}{(x - x_k)^{m_k}} \right] \right. \\ & \left. + \left[ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + a_1 x + b_1} + \dots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{n_1}} \right] + \dots + \left[ \frac{B_{j,1}x + C_{j,1}}{x^2 + a_j x + b_j} + \dots + \frac{B_{j,n_j}x + C_{j,n_j}}{(x^2 + a_j x + b_j)^{n_j}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.133})$$

Para finalizar observemos, pelas seções anteriores, sabemos encontrar as integrais indefinidas de cada uma das parcelas da decomposição da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$  em frações parciais (dada por (A.133)), ou seja, podemos encontrar a integral indefinida  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ .

De modo mais preciso, transformamos o problema de encontrar a integral indefinida de uma função racional, isto é, de encontrar a integral indefinida

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

em calcular a soma de integrais indefinidas dos seguintes tipos:

1.  $\int \frac{1}{x-a} dx$  ;
2.  $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx$ , para cada  $k \in \{2, 3, \dots\}$  ;
3.  $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$  ;
4.  $\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k} dx$ , para cada  $k \in \{2, 3, \dots\}$ ,

que foram tratadas nas seções anteriores.

**Observação A.2.3** Podemos mostrar que a decomposição da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$  em frações parciais, (dada por (A.133)), é única.

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Apliquemos o processo acima a algumas situações:

**Exemplo A.2.2** Encontre a decomposição da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$  em frações parciais, onde  $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são dadas por:

$$p(x) \doteq 4 - 2x, \tag{A.134}$$

$$q(x) \doteq x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1, \text{ para } x \in \mathbb{R}. \tag{A.135}$$

### Resolução:

Notemos que

$$\text{grau}(p) = 1 < 4 = \text{grau}(q).$$

Primeiramente devemos aplicar o Teorema fundamental da Álgebra (ou seja, o Teorema A.2.1) a função polinomial  $q = q(x)$  (a função polinomial que aparece no denominador da função racional).

Isto foi feito no Exemplo A.2.1, onde obtivemos

$$q(x) \stackrel{(A.125)}{=} (x-1)^2(x^2+1), \text{ para } x \in \mathbb{R}. \tag{A.136}$$

Portanto

$$\frac{4-2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{4-2x}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Pelo item 1. do procedimento acima, associado ao fator  $(x-1)^2$ , do denominador da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , deveremos ter a seguinte soma:

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}. \tag{A.137}$$

Por outro lado, associado ao fator irredutível  $x^2 + 1$ , do denominador da função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , deveremos ter a seguinte expressão:

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + 1}. \quad (\text{A.138})$$

Com isto deveremos ter:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &\stackrel{(\text{A.134}) \text{ e } (\text{A.135})}{=} \frac{4 - 2x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} \\ &\stackrel{\alpha=1, (\text{A.137}), (\text{A.138})}{=} \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + 1}. \end{aligned} \quad (\text{A.139})$$

Assim, nosso problema passa a ser encontrar

$$A_1, A_2, B_1, C_1 \in \mathbb{R},$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} \frac{4 - 2x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{A_1(x-1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (B_1 x + C_1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{(A_1 + B_1)x^3 + (-A_1 + A_2 - 2B_1 + C_1)x^2 + (A_1 + B_1 - 2C_1)x + (-A_1 + A_2 + C_1)}{(x-1)^2(x^2+1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.140})$$

Comparando o polinômio do lado direito com o polinômio do lado esquerdo da identidade (A.140) acima (ou seja, coeficientes de termos de mesmo grau devem ser iguais), obteremos o seguinte sistema linear de equações do 1. grau, nas variáveis

$$A_1, A_2, B_1, C_1 \in \mathbb{R},$$

a saber :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ -A_1 + A_2 - 2B_1 + C_1 = 0 \\ A_1 + B_1 - 2C_1 = -2 \\ -A_1 + A_2 + C_1 = 4 \end{cases},$$

cuja solução será (Exercício):

$$\begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = 1 \\ B_1 = 2 \\ C_1 = 1 \end{cases}. \quad (\text{A.141})$$

Portanto a decomposição da função racional  $\frac{p}{q}$ , será dada por:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{4 - 2x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} \\ &= \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}, \end{aligned} \quad (\text{A.142})$$

completando a resolução. □

Com isto podemos resolver o:

**Exemplo A.2.3** *Encontrar a integral indefinida*

$$\int \frac{4 - 2x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx. \quad (\text{A.143})$$

**Resolução:**

Do Exemplo A.2.2 acima (veja (A.142)), temos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{4 - 2x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx &\stackrel{(\text{A.142})}{=} \int \left[ \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1} \right] dx \\ &= -2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.144})$$

Mas

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1} dx &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x-1, \\ \text{teremos } du = dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{u} du \\ &\stackrel{(3.49)}{=} \ln(|u|) + C \\ &\text{como } u \doteq x-1 \quad \ln(|x-1|) + C, \end{aligned} \quad (\text{A.145})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x-1, \\ \text{teremos } du = dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{u^2} du \\ &= \frac{-1}{u} + C \\ &\text{como } u \doteq x-1 \quad -\frac{1}{x-1} + C, \end{aligned} \quad (\text{A.146})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx &= \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u = x^2+1, \\ \text{teremos } du = 2x dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{u} du + \arctg(x) \\ &\stackrel{(3.49)}{=} \ln(|u|) + \arctg(x) + C \\ &\text{como } u \doteq x^2+1 \quad \ln \left( \underbrace{|x^2+1|}_{=x^2+1} \right) + \arctg(x) + C. \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

Logo, substituindo (A.145), (A.146) e (A.147) em (A.144), obteremos:

$$\int \frac{4 - 2x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = -2 \ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1} + \ln(x^2+1) + \arctg(x) + C, \quad (\text{A.148})$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução. □

**Observação A.2.4**

1. Como ilustra o Exemplo A.2.3 acima, o método das frações parciais é uma ferramenta muito importante na obtenção de integrais indefinidas do tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

onde as funções  $p, q$  são funções polinomiais, sendo que o grau do polinômio  $p$  menor que grau do polinômio  $q$ , isto é,

$$\text{grau}(p) < \text{grau}(q). \quad (\text{A.149})$$

2. Quando na integral indefinida

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

o grau do polinômio de  $p$  (o polinômio do numerador) é maior ou igual ao grau do polinômio  $q$  (ou seja, do polinômio do denominador), ou seja,

$$\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q), \quad (\text{A.150})$$

aplicando-se o Algoritmo de Briot-Ruffini, podemos encontrar funções polinomiais

$$r = r(x) \quad \text{e} \quad s = s(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}$$

(o polinômio  $r = r(x)$  será resto da divisão do polinômio  $p = p(x)$  pelo polinômio  $q = q(x)$ ) tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; q(x) = 0\}, \quad (\text{A.151})$$

onde o grau do polinômio de  $r$  é menor que o grau do polinômio de  $q$ , ou seja,

$$\text{grau}(r) < \text{grau}(q).$$

Deste modo teremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{q(x)} dx &\stackrel{(\text{A.151})}{=} \int \left[ s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right] dx \\ &= \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx, \end{aligned} \quad (\text{A.152})$$

onde a primeira parcela é a integral indefinida de uma função polinomial (simples de calcular) e a segunda parcela é a integral de uma função racional, onde

$$\text{grau}(r) < \text{grau}(q) \quad (\text{A.153})$$

e assim podemos aplicar o método das frações parciais para encontrar sua integral indefinida.

Apliquemos essas ideias ao:

**Exemplo A.2.4** Calcular a integral indefinida

$$\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx. \quad (\text{A.154})$$



**Resolução:**

Observemos que na função racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\},$$

o grau do polinômio do numerador (isto é, o polinômio  $x^3 - 1$ , que tem grau é 3) é igual ao grau do polinômio do denominador (isto é, o polinômio  $4x^3 - x$ , que tem grau é 3).

Logo precisamos realizar a divisão dos dois polinômios para podermos prosseguir, como visto no item 2. da Observação A.2.4.

Aplicando-se o Algoritmo de Briot-Ruffini, obteremos:

$x^3 - 1$	$4x^3 - x$
$-\left(x^3 - \frac{1}{4}x\right)$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}x - 1$	

Assim teremos:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} &= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}x - 1}{4x^3 - x} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{x - 4}{4x^3 - x}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.155})$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx &\stackrel{(\text{A.155})}{=} \int \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{x - 4}{4x^3 - x} \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \frac{x - 4}{4x^3 - x} dx \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \int \frac{x - 4}{4x^3 - x} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.156})$$

Logo, basta calcularmos a integral indefinida

$$\int \frac{x - 4}{4x^3 - x} dx. \quad (\text{A.157})$$

Para isto aplicaremos o método das frações parciais.

Observemos que a decomposição em fatores do 1.o grau e fatores irredutíveis do 2.o grau em  $\mathbb{R}$  da função polinomial do denominador em (A.157), será dada por:

$$\begin{aligned} 4x^3 - x &= 4x \left( x^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 4x \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.158})$$

Logo aplicando o método das frações parciais obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{4x^3-x} &\stackrel{a=4}{=} \frac{1}{4} \left[ \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+\frac{1}{2}} + \frac{A_3}{x-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{A_1 \left(x+\frac{1}{2}\right) \left(x-\frac{1}{2}\right) + A_2 x \left(x-\frac{1}{2}\right) + A_3 x \left(x+\frac{1}{2}\right)}{x \left(x+\frac{1}{2}\right) \left(x-\frac{1}{2}\right)} \right] \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{4} \left[ \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^2 - \frac{1}{2}(A_2 - A_3)x - \frac{1}{4}A_1}{x \left(x+\frac{1}{2}\right) \left(x-\frac{1}{2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.159})$$

$$\begin{aligned} &\text{ou seja,} \quad \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}(A_2 - A_3) = 1 \\ -\frac{1}{4}A_1 = -4 \end{cases}, \\ &\text{cuja solução será (Exercício):} \quad \begin{cases} A_1 = 16 \\ A_2 = -9 \\ A_3 = -7 \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{A.160})$$

Assim, substituindo (A.160) em (A.159), obteremos:

$$\frac{x-4}{4x^3-x} = \frac{1}{4} \left[ \frac{16}{x} + \frac{-9}{x+\frac{1}{2}} + \frac{-7}{x-\frac{1}{2}} \right]. \quad (\text{A.161})$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{x-4}{4x^3-x} dx &\stackrel{(\text{A.161})}{=} \int \frac{1}{4} \left[ \frac{16}{x} - \frac{9}{x+\frac{1}{2}} - \frac{7}{x-\frac{1}{2}} \right] dx \\ &= 4 \int \frac{1}{x} dx - \frac{9}{4} \int \frac{1}{x+\frac{1}{2}} dx - \frac{7}{4} \int \frac{1}{x-\frac{1}{2}} dx \\ &\left. \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x + \frac{1}{2}, v \doteq x - \frac{1}{2}, \\ \text{teremos: } du = dx, dv = dx \end{array} \right\} 4 \int \frac{1}{x} dx - \frac{9}{4} \int \frac{1}{u} du - \frac{7}{4} \int \frac{1}{v} dv \\ &\stackrel{(3.49)}{=} 4 \ln(|x|) - \frac{9}{4} \ln(|u|) - \frac{7}{4} \ln(|v|) + C \\ &\stackrel{\text{como } u \doteq x + \frac{1}{2} \text{ e } v \doteq x - \frac{1}{2}}{=} 4 \ln(|x|) + \frac{9}{4} \ln \left( \left| x + \frac{1}{2} \right| \right) - \frac{7}{4} \ln \left( \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) + C. \end{aligned} \quad (\text{A.162})$$

Substituindo (A.160), (A.161) e (A.162) em (A.156), obteremos

$$\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx = \frac{1}{4}x + \ln(|x|) - \frac{9}{4} \ln \left( \left| x + \frac{1}{2} \right| \right) - \frac{7}{4} \ln \left( \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) + C, \quad (\text{A.163})$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução. □

Temos também o:

**Exercício A.2.1** *Calcular a integral indefinida*

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 2x + 2} dx. \quad (\text{A.164})$$

**Resolução:**

Observemos que na função racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 2x + 2}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

o grau do polinômio do numerador (isto é, o polinômio  $x^3 - x^2 + 3$ , que tem grau é 3) é maior que o grau do polinômio do denominador (isto é, o polinômio  $x^2 - 2x + 2$ , que tem grau é 2).

Logo precisamos realizar a divisão dos dois polinômios para podermos prosseguir, como visto no item 2. da Observação A.2.4.

Aplicando-se o Algoritmo de Briot-Ruffini, obteremos:

$x^3 - x^2 + 3$	$x^2 - 2x + 2$
$-(x^3 - 2x^2 + 2x)$	$x + 1$
$x^2 - 2x + 3$	
$-(-x^2 - 2x + 2)$	
$1$	

Logo teremos:

$$\frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 2x + 2} = (x + 1) + \frac{1}{x^2 - 2x + 2}. \quad (\text{A.165})$$

Assim:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 2x + 2} dx &\stackrel{(\text{A.165})}{=} \int \left[ (x + 1) + \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \right] dx \\ &= \int (x + 1) dx + \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.166})$$

Logo basta encontrar a integral indefinida

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

Observemos que o polinômio

$$x^2 - 2x + 2$$

é um polinômio do 2.o grau irredutível sobre  $\mathbb{R}$ , pois

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0.$$

Assim, utilizando as ideias da subseção A.1.2 (veja o item (ii)), teremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx \\ &\left. \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x-1, \\ \text{teremos } du = dx \end{array} \right\} \int \frac{1}{u^2 + 1} dx \\ &= \operatorname{arctg}(u) + C \\ &\stackrel{\text{como } u=x-1}{=} \operatorname{arctg}(x-1) + C. \end{aligned} \tag{A.167}$$

Substituindo-se (A.167) em (A.166), obteremos

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{x^2}{2} + x + \operatorname{arctg}(x-1) + C, \tag{A.168}$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é arbitrária, completando a resolução. □

Temos também o:

**Exercício A.2.2** Mostre que a função  $f: [0, \sqrt[6]{5}] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \frac{x^2}{5 + x^6}, \quad \text{para } x \in [0, \sqrt[6]{5}] \tag{A.169}$$

é integrável em  $[0, \sqrt[6]{5}]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_0^{\sqrt[6]{5}} \frac{x^2}{5 + x^6} dx. \tag{A.170}$$

### Resolução:

Observemos que a função  $f$  é contínua em  $[0, \sqrt[6]{5}]$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, pelo Teorema 2.3.1, será uma função integrável em  $[0, \sqrt[6]{5}]$ .

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função  $f$  (ou a integral indefinida da função  $f$ ) e depois aplicar o Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2).

Para tanto aplicaremos o Teorema da substituição para integrais indefinidas (como visto na disciplina de Cálculo 1), a saber:

$$\begin{aligned}
 \int f(x) \, dx &\stackrel{\text{(A.169)}}{=} \int \frac{x^2}{5+x^6} \, dx \\
 &= \int \frac{x^2}{5+(x^3)^2} \, dx \\
 &\left\langle \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x^3, \\ \text{teremos: } du = 3x^2 \, dx \end{array} \right\rangle \int \frac{\frac{1}{3}}{5+u^2} \, du \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{5 \left\{ 1 + \left[ \frac{u}{\sqrt{5}} \right]^2 \right\}} \, du \\
 &\left\langle \begin{array}{l} \text{se } v \doteq \frac{u}{\sqrt{5}}, \\ \text{teremos: } dv = \frac{1}{\sqrt{5}} \, du \end{array} \right\rangle \frac{\sqrt{5}}{15} \int \frac{1}{1+v^2} \, dv \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg}(v) + C \\
 &\stackrel{\text{como } v = \frac{u}{\sqrt{5}}}{=} \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg} \left( \frac{u}{\sqrt{5}} \right) + C \\
 &\stackrel{\text{como } u = x^3}{=} \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg} \left( \frac{x^3}{\sqrt{5}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

Em particular, a função  $F: [0, \sqrt[6]{5}] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg} \left( \frac{x^3}{\sqrt{5}} \right), \quad \text{para } x \in [0, \sqrt[6]{5}], \quad (\text{A.171})$$

será uma primitiva da função  $f$  em  $[0, \sqrt[6]{5}]$ .

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), teremos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\sqrt[6]{5}} \frac{x^2}{5+x^6} dx &\stackrel{(A.169)}{=} \int_0^{\sqrt[6]{5}} f(x) dx \\
 &\stackrel{(2.97)}{=} \left[ F(x) \right]_{x=0}^{x=\sqrt[6]{5}} \\
 &\stackrel{(A.171)}{=} \left[ \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg} \left( \frac{x^3}{\sqrt{5}} \right) \right]_{x=0}^{x=\sqrt[6]{5}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{15} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{[\sqrt[6]{5}]^3}{\sqrt{5}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{0^3}{\sqrt{5}} \right) \right] \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{15} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) - 0 \right] \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arctg}(1) \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{15} \frac{\pi}{4}, \tag{A.172}
 \end{aligned}$$

completando a resolução. □

**Observação A.2.5** Como a função  $f$  do Exemplo A.2.2 acima, é não negativa em  $[0, \sqrt[6]{5}]$ , ou seja,

$$f(x) \stackrel{(A.169)}{\geq} 0, \quad \text{para } x \in [0, \sqrt[6]{5}]$$

e integrável em  $[0, \sqrt[6]{5}]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da área, que denotaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x=0$ ,  $x=\sqrt[6]{5}$  e do eixo  $Ox$  será dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &\stackrel{(2.44)}{=} \int_a^b f(x) dx \\
 &\stackrel{(A.169)}{=} \int_0^{\sqrt[6]{5}} \frac{x^2}{5+x^6} dx \\
 &\stackrel{(A.172)}{=} \frac{\sqrt{5}\pi}{60} \text{ u.a.},
 \end{aligned}$$

isto é, o valor da integral definida (A.170).

Podemos aplicar as mesmas ideias ao:

**Exercício A.2.3** Mostre que a função  $f: \left[ \left( \frac{\pi}{4} \right)^2, \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \right] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) \doteq \frac{\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad \text{para } x \in \left[ \left( \frac{\pi}{4} \right)^2, \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \right] \tag{A.173}$$

é integrável em  $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \frac{\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx. \quad (\text{A.174})$$

### Resolução:

Observemos que a função  $f$  é contínua em  $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ .

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, pelo Teorema (2.3.1), será uma função integrável em  $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ .

Para calcularmos a integral definida acima precisamos encontrar uma primitiva da função  $f$  (ou a integral indefinida da função  $f$ ) e depois aplicar o Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2).

Para tanto aplicaremos o Teorema da substituição para integrais indefinidas (como visto na disciplina de Cálculo 1), a saber:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{(\text{A.173})}{=} \int \frac{\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \\ &\left\langle \begin{array}{l} \text{se } u \doteq \sqrt{x}, \\ \text{teremos: } du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array} \right\rangle \int \operatorname{cosec}^2(u) 2 du \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} -2 \cotg(u) + C \\ &\stackrel{\text{como } u=\sqrt{x}}{=} -2 \cotg(\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

Em particular, a função  $F: \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq -2 \cotg(\sqrt{x}), \quad \text{para } x \in \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \quad (\text{A.175})$$

será uma primitiva da função  $f$  em  $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ .

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \frac{\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &\stackrel{(\text{A.173})}{=} \int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} f(x) dx \\ &\stackrel{(2.97)}{=} \left[ F(x) \right]_{x=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \\ &\stackrel{(\text{A.175})}{=} [-2 \cotg(\sqrt{x})]_{x=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \\ &= -2 \left[ \cotg\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) - \cotg\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\right) \right] \\ &= -2 \left[ \cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cotg\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= -2[0 - 1] \\ &= 2, \end{aligned} \quad (\text{A.176})$$

completando a resolução. □

**Observação A.2.6** Como a função  $f$  do Exemplo A.2.3 acima, é não negativa em  $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ , ou seja,

$$f(x) \stackrel{(A.173)}{\geq} 0, \quad \text{para } x \in \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$$

e integrável em  $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da área, que denotaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\mathbb{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$ ,  $x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$  e do eixo  $Ox$ , será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\stackrel{(2.44)}{=} \int_a^b f(x) \, dx \\ &\stackrel{(A.173)}{=} \int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \frac{\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx \\ &\stackrel{(A.176)}{=} 2 \text{ u.a.}, \end{aligned}$$

isto é, o valor da integral definida (A.174).

**Exercício A.2.4** Mostre que a função  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq x^2 \sqrt{1+x}, \quad \text{para } x \in [0, 1], \quad (A.177)$$

é integrável em  $[0, 1]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x} \, dx. \quad (A.178)$$

### Resolução:

Observemos que a função  $f$  é contínua em  $[0, 1]$  e portanto, do Teorema 2.3.1, que a função será integrável em  $[0, 1]$ .

Além disso, considerando-se a função  $g: [0, 1] \rightarrow [1, \sqrt{2}]$ , dada por

$$g(x) \doteq \sqrt{1+x}, \quad \text{para } x \in [0, 1], \quad (A.179)$$

segue que

$$u \doteq g(x), \quad \text{para } x \in [0, 1],$$

será uma mudança de variáveis (isto é, bijetora) diferenciável em  $[0, 1]$ .

Neste caso, pelo Teorema da substituição para a integral definida (na verdade, pela Observação



2.7.1) temos

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x} \, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq g(x) \stackrel{\text{(A.179)}}{=} \sqrt{x+1}, \text{ para } x \in [0, 1] \\ \text{teremos: } u^2 = x+1, \text{ logo } 2u \, du = dx \\ \text{se } x=0, \text{ segue que } u=1 \\ \text{se } x=1, \text{ segue que } u=\sqrt{2} \end{array} \right\} \int_1^{\sqrt{2}} (u^2-1)^2 u \, 2u \, du$$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} 2u^6 - 4u^4 + 2u^2 \, du$$

$$\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo}}{=} \left[ \frac{2}{7} u^7 - \frac{4}{5} u^5 + \frac{2}{3} u^3 \right] \Big|_{u=1}^{u=\sqrt{2}}$$

$$= \left\{ \frac{2}{7} [\sqrt{2}]^7 - \frac{4}{5} [\sqrt{2}]^5 + \frac{2}{3} [\sqrt{2}]^3 \right\} - \left\{ \frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right\}$$

$$= \frac{16}{7} \sqrt{2} - \frac{8}{5} \sqrt{2} + \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{56}{105}$$

$$= \frac{72}{35} \sqrt{2} - \frac{56}{105}, \quad (\text{A.180})$$

completando a resolução. □

**Observação A.2.7** Como a função  $f$  do Exemplo A.2.4 acima, é não negativa em  $[0, 1]$ , ou seja,

$$f(x) \stackrel{\text{(A.177)}}{\geq} 0, \quad \text{para } x \in [0, 1]$$

e integrável em  $[0, 1]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da integral definida acima, será o valor da área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x=0$ ,  $x=1$  e do eixo  $Ox$ , ou ainda,

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{(2.44)}}{=} \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\stackrel{\text{(A.177)}}{=} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x} \, dx$$

$$\stackrel{\text{(A.180)}}{=} \frac{72}{35} \sqrt{2} - \frac{56}{105} \text{ u.a..}$$

Consideremos agora o:

**Exemplo A.2.5** Mostre que a função  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq x^2 \sqrt{x^3+1}, \quad \text{para } x \in [1, 2], \quad (\text{A.181})$$

é integrável em  $[1, 2]$  e encontre o valor da integral definida

$$\int_1^2 x^2 \sqrt{x^3+1} \, dx. \quad (\text{A.182})$$

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$ , dada por (A.181), é contínua em  $[1, 2]$ .

A verificação deste fato será deixado como exercício para o leitor.

Logo, do Teorema 2.3.1, segue que a função  $f$  será integrável em  $[1, 2]$ .

Para calcularmos a integral definida acima, pelo Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), precisamos encontrar uma primitiva qualquer da função  $f$ , ou ainda, sua integral indefinida, em  $[1, 2]$ .

Para isto aplicaremos o Teorema da substituição para integrais indefinidas (visto na disciplina de Cálculo 1), mais precisamente:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx &= \frac{1}{3} \int \underbrace{\sqrt{x^3 + 1}}_{\doteq u} \underbrace{3x^2 \, dx}_{\doteq du} \\ &\left\langle \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x^3 + 1, \\ \text{teremos: } du = 3x^2 \, dx \end{array} \right\rangle \frac{1}{3} \int \underbrace{\sqrt{u}}_{=u^{\frac{1}{2}}} \, du \\ &\text{visto na disciplina de Cálculo 1 } \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} u^{\frac{1}{2} + 1} + C \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + C \right] \\ &\text{como } u \doteq x^3 + 1 \quad \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + C, \end{aligned}$$

para  $x \in [-1, \infty)$ .

Em particular, a função  $F : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) \doteq \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{para } x \in [1, 2], \quad (\text{A.183})$$

será uma primitiva da função  $f$ , dada por (A.181), em  $[1, 2]$ .

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo (isto é, o Teorema 2.5.2), teremos:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx &\stackrel{(\text{A.181})}{=} \int_1^2 f(x) \, dx \\ &\stackrel{(2.97)}{=} F(x) \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &\stackrel{(\text{A.183})}{=} \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{2}{9} [\sqrt{8} - 1], \end{aligned} \quad (\text{A.184})$$

completando a resolução. □

**Observação A.2.8** Como a função  $f$  do Exemplo A.2.5 acima, é não negativa em  $[1, 2]$ , ou seja,

$$f(x) \stackrel{(\text{A.181})}{\geq} 0, \quad \text{para } x \in [1, 2]$$

e integrável em  $[1, 2]$ , do item 5. da Observação 2.3.3, segue que o valor da área, que denotaremos por  $\underline{A}$ , da região limitada, que chamaremos de  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas

representações geométricas gráfico da função  $f$ , das retas  $x = 1$ ,  $x = 2$  e do eixo  $Ox$  será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\stackrel{(2.44)}{=} \int_a^b f(x) \, dx \\ &\stackrel{(A.181)}{=} \int_1^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \\ &\stackrel{(A.184)}{=} \frac{2}{9} [\sqrt{8} - 1] \text{ u.a.}, \end{aligned}$$

isto é, será o valor da integral definida calculada em (A.182).



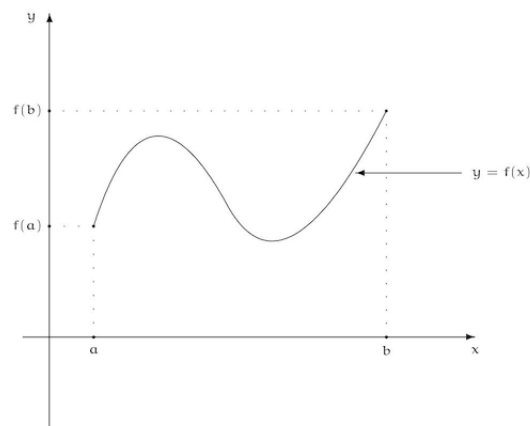
## Apêndice B

# Outras aplicações de integral definida

### B.1 Comprimento de curvas dadas pelo gráfico de uma função, a valores reais, de uma variável real

Consideremos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

Nosso objetivo é encontrar uma expressão para o valor do comprimento, que indicaremos por  $l$ , da curva determinada pela representação geométrica do gráfico da função  $f$  (veja a figura abaixo).



A idéia central do resultado a seguir é, "aproximar" a curva por uma poligonal, as quais sabemos calcular o valor do seu comprimento.

Para isto temos o:

**Teorema B.1.1** (do comprimento de uma curva que é gráfico de uma função) *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável em  $[a, b]$ .*

*Então o valor do comprimento  $l$ , da curva determinada pela representação geométrica do gráfico da função  $f$  será dado por:*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \text{ u.c.}, \quad (\text{B.1})$$

onde u.c. denotará a unidade de comprimento.

Demonstração:

Para tanto, consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

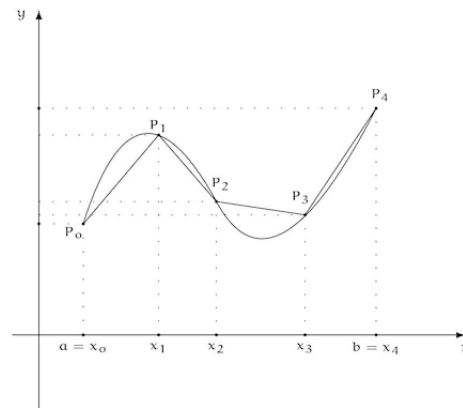
uma partição do intervalo  $[a, b]$ .

Consideremos, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o ponto

$$P_i \doteq (x_i, f(x_i))$$

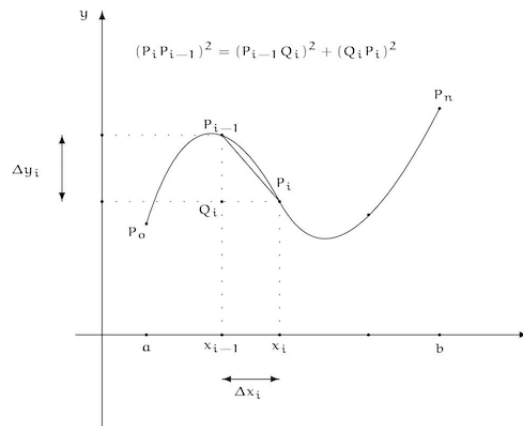
que pertence ao gráfico da função  $f$ , e o respectivo segmento de reta (veja a figura abaixo)

$$\overline{P_{i-1}, P_i},$$



Observemos que o comprimento do segmento  $\overline{P_{i-1}P_i}$  é dado por (pelo Teorema de Pitágoras - veja a figura abaixo)

$$\begin{aligned} \overline{P_{i-1}P_i} &\stackrel{\text{Teorema de Pitágoras}}{=} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$



Como a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$  (pois a função  $f$  é continuamente diferenciável em  $[a, b]$ ), para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , do Teorema do valor médio (como

visto na disciplina de Cálculo 1), segue que podemos encontrar  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , de modo que

$$\begin{aligned} f'(\xi_i) &\stackrel{\text{Teorema do valor médio}}{=} \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \\ &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}, \end{aligned}$$

ou seja,  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \Delta x_i$ . (B.3)

Substituindo (B.3) em (B.2), obteremos

$$\begin{aligned} P_{i-1}P_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\xi_i) \Delta x_i]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$
(B.4)

Logo

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i \\ &\stackrel{(B.4)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i \\ &\stackrel{\text{definição da integral de Riemann (veja (2.43))}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Aplicamos as ideias acima ao:

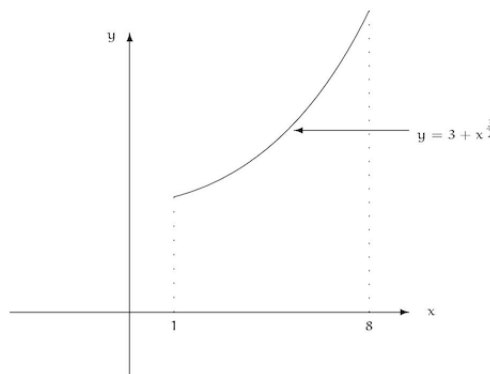
**Exemplo B.1.1** *Seja  $f: [1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por*

$$f(x) \doteq 3 + x^{\frac{3}{2}}, \quad \text{para } x \in [1, 8].$$
(B.5)

*Encontrar o valor do comprimento  $l$  da curva que é a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .*

**Resolução:**

A representação geométrica do gráfico da função  $f$  é dada pela figura abaixo.



Observemos que a função  $f$  é diferenciável em  $[1, 8]$  e, além disso, teremos

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{\text{(B.5)}}{=} \frac{d}{dx} [3 + x^{\frac{3}{2}}] \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para } x \in [1, 8], \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

que é uma função contínua em  $[1, 8]$ , ou seja, a função  $f$  é continuamente diferenciável em  $[1, 8]$ .

Logo, do Teorema do comprimento de uma curva (ou seja, o Teorema B.1.1), segue que:

$$l \stackrel{\text{(B.1)}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\stackrel{\text{(B.6)}}{=} \int_1^8 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right]^2} dx$$

como  $x \geq 1 > 0$ , teremos  $(\sqrt{x})^2 = |x| = x$   $\int_1^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{apliquemos o Teorema de substituição na integral definida (ou ainda, a Observação 2.7.1):} \\ \text{se } u \doteq 1 + \frac{9}{4}x, \text{ teremos: } du = \frac{9}{4} dx \\ \text{se } x = 1, \text{ teremos: } u = \frac{13}{4} \\ \text{se } x = 8, \text{ teremos: } u = \frac{76}{4} = 19 \end{array} \right\}$$

$$\int_{\frac{13}{4}}^{19} \sqrt{u} \frac{4}{9} dx$$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{27} [152\sqrt{19} - 13\sqrt{13}] \text{ u.c.,}$$

ou seja,

$$l = \frac{1}{27} [152\sqrt{19} - 13\sqrt{13}] \text{ u.c.,}$$

completando a resolução. □

Podemos também aplicar as ideias acima ao:

**Exercício B.1.1** Seja  $f: [1, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) \doteq \ln(x), \quad \text{para } x \in [1, \sqrt{3}]. \quad (\text{B.7})$$

Encontrar o valor do comprimento  $l$  da curva que é a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

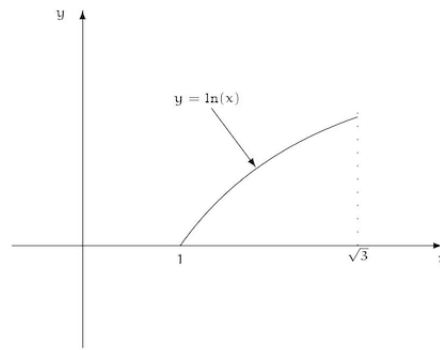
### Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função  $f$  é dada pela figura abaixo.

Observemos que a função  $f$  é continuamente diferenciável em  $[1, \sqrt{3}]$  e, além disso, teremos

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{\text{(B.7)}}{=} \frac{d}{dx} [\ln(x)] \\ &= \frac{1}{x}, \quad \text{para } x \in [1, \sqrt{3}]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$





Logo, do Teorema do comprimento de uma curva (ou seja, o Teorema B.1.1), segue que:

$$\begin{aligned}
 l &\stackrel{\text{(B.1)}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \\
 &\stackrel{\text{(B.8)}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{x}\right]^2} \, dx \\
 &= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \, dx \\
 &\text{como } x \geq 1 > 0, \text{ temos } \sqrt{x^2} = x \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \, dx \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 2 - \sqrt{2} + \ln \left[ 2 \left( \sqrt{2} + 1 \right) \sqrt{3} \right] \text{ u.c.},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$l = 2 - \sqrt{2} + \ln \left[ 2 \left( \sqrt{2} + 1 \right) \sqrt{3} \right] \text{ u.c.},$$

completando a resolução. □

Para finalizar temos o:

**Exercício B.1.2** Encontrar o valor do comprimento  $l$  da curva que é a representação geométrica do gráfico da função  $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

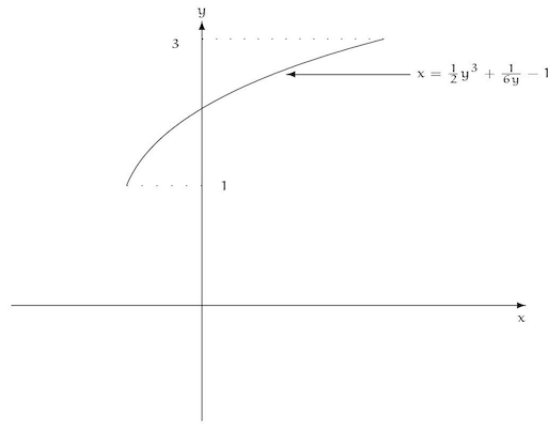
$$f(y) = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{6y} - 1, \quad \text{para } x \in [1, 3]. \quad (\text{B.9})$$

**Resolução:**

A representação geométrica do gráfico da função  $f$  é dada pela figura abaixo.

Observemos que a função  $f$  é continuamente diferenciável em  $[1, 3]$  e, além disso, temos

$$\begin{aligned}
 f'(y) &\stackrel{\text{(B.9)}}{=} \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{6y} - 1 \right] \\
 &= \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2}, \quad \text{para } y \in [1, 3].
 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$



Logo, do Teorema do comprimento de uma curva (ou seja, o Teorema B.1.1), segue que:

$$\begin{aligned}
 l &\stackrel{\text{(B.1)}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + [f'(y)]^2} \, dy \\
 &\stackrel{\text{(B.10)}}{=} \int_1^3 \sqrt{1 + \left[ \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2} \right]^2} \, dy \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \int_1^3 \left( \frac{9}{6}y^2 + \frac{1}{6y^2} \right) \, dy \\
 &= \left[ \frac{9}{18}y^3 - \frac{1}{6y} \right] \Big|_{y=1}^{y=3} \\
 &= \frac{118}{4} \text{ u.c.},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$l = \frac{118}{4} \text{ u.c.},$$

completando a resolução. □

## B.2 Área de uma superfície de revolução

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não negativa em  $[a, b]$ , ou seja,

$$f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in [a, b].$$

Nosso objetivo é encontrar a área, que indicaremos por  $\mathcal{A}$ , da superfície de revolução, que chamaremos de  $\mathcal{S}$ , obtida da rotação da curva dada pela representação geométrica do gráfico da função  $f$  em torno do eixo  $Ox$  (veja a figura abaixo).

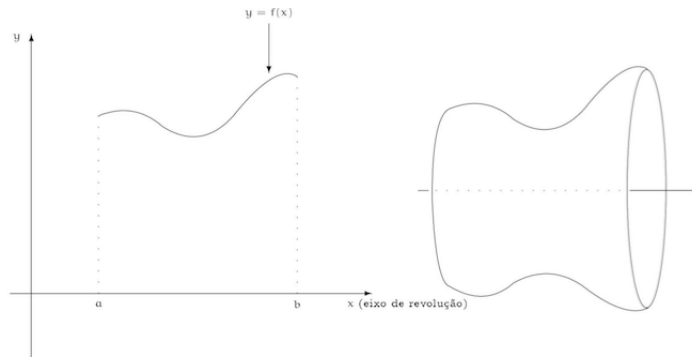
Com a notação acima temos o:

**Teorema B.2.1 (da área de uma superfície de revolução)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável e não negativa em  $[a, b]$ .*

Então

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \text{ u.a.}, \quad (\text{B.11})$$

onde u.a. denota unidades de área.



**Demonstração:**

Consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$$

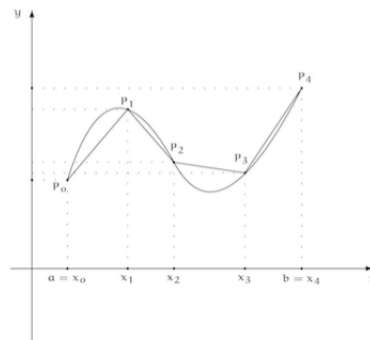
uma partição do intervalo  $[a, b]$ .

Consideremos, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o ponto do gráfico da função  $f$ , que denotaremos por

$$P_i \doteq (x_i, f(x_i))$$

e o respectivo segmento de reta (veja a figura abaixo)

$$\overline{P_{i-1}, P_i}.$$



Quando o segmento  $\overline{P_{i-1}P_i}$  é rotacionado em torno do eixo  $Ox$ , obteremos a superfície lateral de um tronco de cone, que indicaremos por  $S_i$  (veja a figura abaixo), cujos raios da base e do topo são

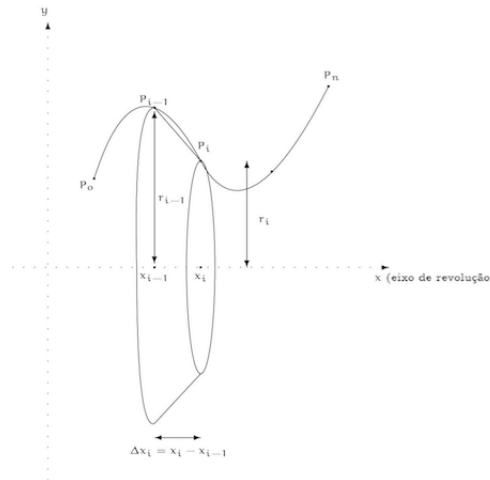
$$r_{i-1} \doteq f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad r_i \doteq f(x_i), \tag{B.12}$$

respectivamente.

Observemos que a geratriz deste tronco de cone acima é o segmento  $\overline{P_{i-1}P_i}$  que, como vimos na seção anterior, tem comprimento dado por

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i \tag{B.13}$$

onde  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  (veja (B.4)).



Assim, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a área lateral do tronco de cone  $S_i$ , que indicaremos por  $\mathcal{A}_i$ , será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &\stackrel{\text{veja a Observação B.2.1}}{=} \pi (r_i + r_{i-1}) (P_{i-1}P_i) \\ &\stackrel{\text{veja a figura acima e (B.13)}}{=} \pi [f(x_i) + f(x_{i-1})] \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Logo

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \pi [f(x_i) + f(x_{i-1})] \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i \right\} \\ &\stackrel{\text{Def. Integral de Riemann}}{=} 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \text{ u.a.,} \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

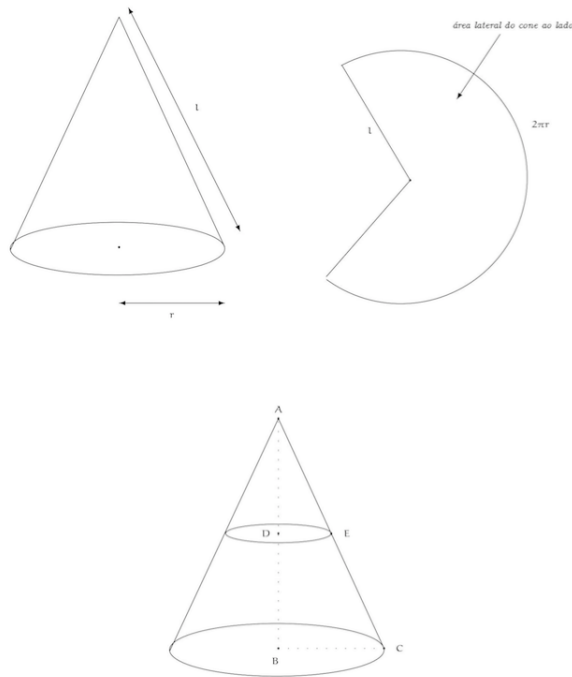
**Observação B.2.1** A identidade utilizada na demonstração acima, pode ser mostrada da seguinte forma:

Se  $\mathcal{A}_c$  indica o valor da área lateral de um cone, que tem como raio da base  $r$  e geratriz medindo  $l$ , então temos que (veja a figura abaixo):

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_c}{\pi l^2} &= \frac{2\pi r}{2\pi l} \\ \text{ou seja,} \quad \mathcal{A}_c &= \pi r l. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Com isto, como veremos a seguir, podemos obter a área lateral de um tronco de cone  $\mathcal{A}_T$  (veja a figura abaixo), onde

$$AC = l_1, \quad AE = l_2, \quad BC = r_1 \quad \text{e} \quad DE = r_2. \quad (\text{B.16})$$



Para tanto, observemos que os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta ADE$  são semelhantes (caso AAA - figura abaixo) logo

$$\begin{aligned}
 & \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}, \\
 \text{de (B.16), teremos:} & \frac{r_2}{l_2} = \frac{r_1}{l_1} \\
 \text{ou seja,} & r_2 l_1 = r_1 l_2. \tag{B.17}
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 A_T & \stackrel{\text{(B.15)}}{=} \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2 \\
 & \stackrel{\text{(B.17)}}{=} \pi (r_1 + r_2) (l_1 - l_2) \text{ u.a.}, \tag{B.18}
 \end{aligned}$$

que foi a identidade utilizada na demonstração do Teorema B.2.1 acima.

Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo B.2.1** Seja  $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) \doteq \text{sen}(x), \quad \text{para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{B.19}$$

Encontre a área, que indicaremos por  $\underline{A}$ , da superfície de revolução  $\underline{S}$ , obtida quando rotacionamos a representação geométrica do gráfico da função  $\underline{f}$  em torno do eixo  $Ox$ .

**Resolução:**

Como a função  $f$  é continuamente diferenciável em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  e, além disso, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{\text{(B.19)}}{=} \frac{d}{dx} [\text{sen}(x)] \\ &= \cos(x), \quad \text{para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Logo, do Teorema da área de uma superfície de revolução (ou seja, o Teorema B.2.1), segue que

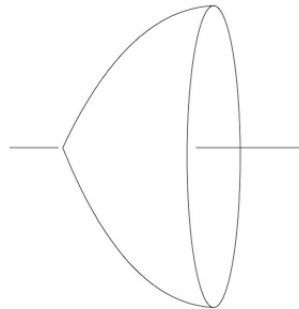
$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{(B.11)}}{=} 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &\stackrel{\text{(B.18)}}{=} \stackrel{\text{(B.19)}}{=} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) \sqrt{1 + [\cos(x)]^2} dx \\ &\left. \begin{array}{l} \text{aplicando o Teorema da substituição para a integral definida (ou ainda, a Observação 2.7.1)} \\ \text{se } u \doteq \cos(x), \text{ teremos: } du = -\text{sen}(x) dx \\ \text{se } x = 0, \text{ teremos: } u = 1 \\ \text{se } x = \frac{\pi}{2}, \text{ teremos: } u = 0 \end{array} \right\} \\ &= \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} (-du) \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \pi \left[ \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right] \text{ u.a.,} \end{aligned}$$

ou seja,

$$A = \pi \left[ \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right] \text{ u.a.,}$$

completando a resolução.

A superfície  $\mathcal{S}$  tem sua representação geométrica dada pela figura abaixo:



□

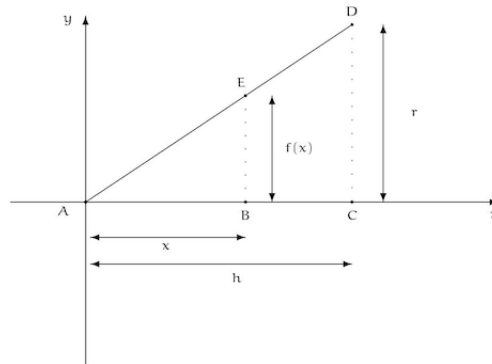
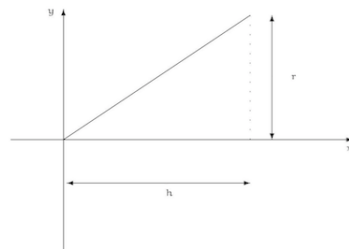
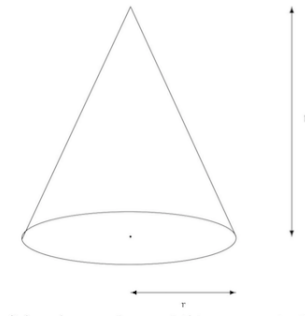
Temos os seguinte exercícios resolvidos:

**Exercício B.2.1** Calcular a área lateral de um cone circular reto cujo raio da base mede  $r > 0$  e a altura mede  $h > 0$ .

### Resolução:

Geometricamente temos:

Observemos que a superfície acima pode ser obtida como rotação do gráfico da geratriz do cone (veja a figura abaixo) em torno do eixo  $Ox$ .



Podemos descrever a geratriz como gráfico de uma função de  $x$ , para  $x \in [0, h]$ , da seguinte forma: Na figura abaixo os triângulos  $\triangle ABE$  e  $\triangle ACD$  são semelhantes (caso AAA).

Logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{h}{r}, \tag{B.21}$$

ou seja, a função  $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f(x) \doteq \frac{r}{h} x, \quad \text{para } x \in [0, h]. \tag{B.22}$$

Notemos que a função  $f$  é continuamente diferenciável em  $[0, h]$  e, além disso, temos,

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{\text{(B.22)}}{=} \frac{d}{dx} \left[ \frac{r}{h} x \right] \\ &= \frac{r}{h}, \quad \text{para } x \in [0, h]. \end{aligned} \tag{B.23}$$

Logo, pelo Teorema da área de uma superfície de revolução (ou seja, o Teorema B.2.1), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\stackrel{\text{(B.11)}}{=} 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &\stackrel{\text{(B.22)} \text{ e } \text{(B.23)}}{=} 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \left[\frac{r}{h}\right]^2} dx \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \pi r l \text{ u.a.}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A = \pi r l \text{ u.a.},$$

completando a resolução. □

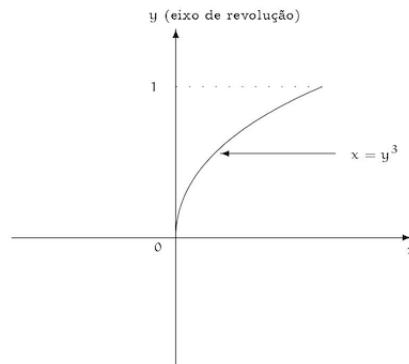
Para finalizar temos o:

**Exercício B.2.2** Calcular a área da superfície de revolução  $\underline{S}$ , obtida da rotação da representação geométrica do gráfico da função  $\underline{f}$  em torno do eixo  $Oy$ , onde a função  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(y) \doteq y^3, \quad \text{para } y \in [0, 1]. \quad (\text{B.24})$$

**Resolução:**

A representação geométrica do gráfico da função  $\underline{f}$  é dada pela figura abaixo.



Notemos que a função  $\underline{f}$  é continuamente diferenciável em  $[0, 1]$  e, além disso, temos,

$$\begin{aligned} f'(y) &\stackrel{\text{(B.23)}}{=} \frac{d}{dy} [y^3] \\ &= 3y^2, \quad \text{para } x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Logo, pelo Teorema da área de uma superfície de revolução (ou seja, o Teorema B.2.1), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\stackrel{\text{(B.11)}}{=} 2\pi \int_a^b f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy \\ &\stackrel{\text{(B.24)} \text{ e } \text{(B.25)}}{=} 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + [3y^2]^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + 9y^4} dx \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ u.a.}, \end{aligned}$$

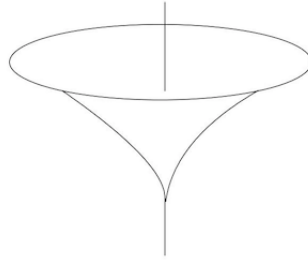


ou seja,

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ u.a.},$$

completando a resolução.

A superfície revolução  $\underline{S}$  tem sua representação geométrica dada pela figura abaixo:



□



## Apêndice C

# Diferencial funções a valores reais, de uma variável real

### C.1 Definições e aplicações de diferenciais de uma função

**Observação C.1.1** *Sejam  $A$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in A$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $x = a$ .*

*Logo existe o limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  e, além disso, teremos*

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (\text{C.1})$$

*Portanto, para  $\delta > 0$ , suficientemente pequeno, temos que a função  $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$\varphi(h) \doteq \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), & \text{para } h \neq 0 \\ 0, & \text{para } h = 0 \end{cases}, \quad (\text{C.2})$$

*está bem definida e, além disso, é um infinitésimo em  $h = 0$ .*

*De fato, pois*

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) &\stackrel{h \neq 0 \text{ e (C.2)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\stackrel{(\text{C.1})}{=} f'(a)} - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Logo, da definição de diferenciabilidade (ou seja, da existência da derivada - visto na disciplina de Cálculo I), dado  $\varepsilon > 0$ , poderemos encontrar  $\delta > 0$ , tal que*

$$\begin{aligned} \text{para } |h| < \delta, \\ \text{teremos: } \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| &\stackrel{(\text{C.2})}{=} |\varphi(h)| \\ &< \varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

ou ainda, se diminuirmos  $\delta > 0$  acima obtido, para que

$$0 < \delta \leq 1, \quad (\text{C.4})$$

teremos

$$\begin{aligned} \text{para } |h| < \delta & \quad (\text{C.5}) \\ \text{segue que } |f(a+h) - f(a) - f'(a)h| & \stackrel{(\text{C.2})}{=} |\varphi(h)h| \\ & = |\varphi(h)||h| \\ & \stackrel{(\text{C.3})}{<} \varepsilon|h| \\ & \stackrel{\text{C.5}}{<} \varepsilon \cdot \delta \\ & \stackrel{(\text{C.4})}{<} \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Definindo-se, para  $h \neq 0$  suficientemente pequeno (ou seja, satisfazendo (C.5)),

$$\Delta f(a) \doteq f(a+h) - f(a), \quad (\text{C.7})$$

teremos

$$\begin{aligned} \text{para } h \sim 0, \\ \text{de (C.6), teremos: } \Delta f(a) - f'(a)h & \sim 0, \\ \text{ou, equivalentemente } \Delta f(a) & \sim f'(a)h, \\ \text{ou ainda, } f(a+h) & \sim f(a) + f'(a)h. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Com isto, para  $h$  suficientemente pequeno, podemos utilizar a expressão

$$f(a) + f'(a)h, \quad (\text{C.9})$$

para encontrar um valor aproximado de  $f(a+h)$ , isto é, o valor da função  $f$  em  $a+h$ .

Devido a este fato, introduziremos a:

**Definição C.1.1** Na situação acima, diremos que a expressão

$$f'(a)h$$

é a diferencial da função  $f$  no ponto  $a$ , calculada para o acréscimo  $h$  e será denotada por  $df(a)$ , ou seja,

$$df(a) \doteq f'(a)h. \quad (\text{C.10})$$

**Observação C.1.2**

1. Logo, da Definição (C.1.1) acima, a expressão (C.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f(a+h) \sim f(a) + df(a), \quad \text{para } h \sim 0. \quad (\text{C.11})$$

2. Observemos que se a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(x) \doteq x, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (\text{C.12})$$

então a função  $f$  será diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, teremos

$$f'(x) = 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (\text{C.13})$$

$$\text{assim, } df(x) \stackrel{(\text{C.10})}{=} f'(x) h \\ \stackrel{(\text{C.13})}{=} 1 \cdot h$$

$$= h. \quad (\text{C.14})$$

Logo, como  $f(x) = x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ,  
segue, de (C.14), que  $dx = df(x)$ ,

$$\text{ou ainda, } dx = h, \quad (\text{C.15})$$

ou seja, acréscimo  $h$  pode ser substituído por  $dx$ .

Assim a expressão (C.10) poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$df(a) \doteq f'(a) h \\ \stackrel{(\text{C.15})}{=} f'(a) dx, \quad (\text{C.16})$$

e portanto teremos a seguinte equivalência:

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a), \\ \text{se, e somente se, } df(a) = f'(a) dx. \quad (\text{C.17})$$

3. Se a função

$$y = f(x)$$

é diferenciável no conjunto  $\underline{A}$ , poderemos denotar a diferencial da função  $f$  no ponto  $\underline{x}$  (calculada para o acréscimo  $dx$ ) como

$$dy = f'(x) dx. \quad (\text{C.18})$$

Lembremos que uma outra notação para a derivada  $f'(x)$  é  $\frac{dy}{dx}$ , assim teremos

$$dy = \frac{dy}{dx} dx. \quad (\text{C.19})$$

Temos as seguintes propriedades básicas para as diferenciais de funções diferenciáveis:

**Proposição C.1.1** *Sejam  $\underline{A}$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in A$  e  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis em  $x = a$ .*

*Então*

1. se

$$f(x) \doteq c, \quad \text{para } x \in A, \quad (\text{C.20})$$

$$\text{então } df(a) = 0; \quad (\text{C.21})$$

2. a diferencial da soma será igual a soma das diferenciais, isto é,

$$d(f + g)(a) = df(a) + dg(a); \quad (\text{C.22})$$

3. a diferencial da diferença de duas funções será igual a diferença das diferenciais das respectivas funções, isto é,

$$d(f - g)(a) = df(a) - dg(a); \quad (\text{C.23})$$

4. temos que a diferencial do produto de duas funções será dada pela seguinte expressão:

$$d(f \cdot g)(a) = df(a) g(a) + f(a) dg(a). \quad (\text{C.24})$$

Em particular, de (C.24) e (C.21), segue que

$$d(cf)(a) = c df(a). \quad (\text{C.25})$$

5. se  $g(a) \neq 0$ , então a diferencial do quociente da função  $f$  pela função  $g$ , será dada pela seguinte expressão:

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{df(a) g(a) - f(a) dg(a)}{g^2(a)}; \quad (\text{C.26})$$

6. para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  fixado, temos que

$$dx^n = n x^{n-1} dx. \quad (\text{C.27})$$

### Demonstração:

Do item 1.:

Como

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[c] \\ &= 0, \quad \text{para } x \in A, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

segue que

$$\begin{aligned} df(a) &\stackrel{(\text{C.16})}{=} f'(a) dx \\ &\stackrel{(\text{C.28})}{=} 0 dx = 0, \end{aligned}$$

como afirmamos.

Do item 2.:

Como as funções  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $a \in A$ , segue que a função  $f + g$  será diferenciável em  $x = a$ .

Além disso temos:

$$\begin{aligned} d(f + g)(a) &\stackrel{(\text{C.16})}{=} (f + g)'(a) dx \\ &\stackrel{\text{propriedade da derivada}}{=} [f'(a) + g'(a)] dx \\ &= f'(a) dx + g'(a) dx \\ &= df(a) + dg(a), \end{aligned}$$

como afirmamos.

Do item 3.:

Como as funções  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $a \in A$ , segue que a função  $f - g$  será diferenciável em  $x = a$ .

Além disso temos:

$$\begin{aligned} d(f - g)(a) &\stackrel{(C.16)}{=} (f - g)'(a) dx \\ &\stackrel{\text{propriedade da derivada}}{=} [f'(a) - g'(a)] dx \\ &= f'(a) dx - g'(a) dx \\ &= df(a) - dg(a), \end{aligned}$$

como afirmamos.

Do item 4.:

Como as funções  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $a \in A$ , segue que a função  $f \cdot g$  será diferenciável em  $x = a$ .

Além disso temos:

$$\begin{aligned} d(f \cdot g)(a) &\stackrel{(C.16)}{=} (f \cdot g)'(a) dx \\ &\stackrel{\text{propriedade da derivada}}{=} [f'(a)g(a) - f(a)g'(a)] dx \\ &= g(a)f'(a) dx - f(a)g'(a) dx \\ &= g(a)df(a) - f(a)dg(a), \end{aligned}$$

como afirmamos.

Do item 5.:

Como as funções  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $a \in A$  e  $g(a) \neq 0$ , segue que a função  $\frac{f}{g}$  será diferenciável em  $x = a$ .

Além disso temos:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right)(a) &\stackrel{(C.16)}{=} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) dx \\ &\stackrel{\text{propriedade da derivada}}{=} \left[\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\right] dx \\ &= \frac{g(a)f'(a) dx - f(a)g'(a) dx}{g^2(a)} \\ &= \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}, \end{aligned}$$

como afirmamos.

Do item 6.:

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função dada por

$$f(x) \doteq x^n, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad (C.29)$$

então ela será diferenciável em  $x \in \mathbb{R}$  (pois é uma função polinomial) e temos:

$$\begin{aligned} dx^n &\stackrel{\text{(C.29)}}{=} df(x) \\ &\stackrel{\text{(C.16)}}{=} f'(x) dx \\ &\stackrel{\text{(C.29)}}{=} \frac{d}{dx} [x^n] dx \\ &= n x^{n-1} dx, \end{aligned}$$

como afirmamos, completando a demonstração do resultado. □

Temos agora o:

**Exercício C.1.1** Consideremos a função  $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{3x - 2}, \quad \text{para } x \in (1, \infty). \quad (\text{C.30})$$

Encontre a diferencial da função  $f$ , para cada  $x \in (1, \infty)$ .

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$  é diferenciável em  $(1, \infty)$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{\text{(C.30)}}{=} \frac{\frac{d}{dx} [\sqrt{x^3 - 1}] [3x - 2] - [\sqrt{x^3 - 1}] \frac{d}{dx} [3x - 2]}{(3x - 2)^2} \\ &= \frac{\left[ \frac{1}{2} (x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}} 3x^2 \right] [3x - 2] - [\sqrt{x^3 - 1}] [3]}{(3x - 2)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2} x^2 (3x - 2) - 3 (x^3 - 1)}{\sqrt{x^3 - 1} (3x - 2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Logo, para cada  $x \in (1, \infty)$  teremos:

$$\begin{aligned} df(x) &\stackrel{\text{(C.29)}}{=} f'(x) dx \\ &\stackrel{\text{(C.31)}}{=} \frac{\frac{3}{2} x^2 (3x - 2) - 3 (x^3 - 1)}{\sqrt{x^3 - 1} (3x - 2)^2} dx, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

O próximo exercício nos dá uma aplicação interessante de diferenciais de uma função, a saber:

**Exercício C.1.2** Encontre um valor aproximado de

$$\sqrt[3]{28},$$

utilizando a diferenciais de uma função.



**Resolução:**

Consideremos a função  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$f(x) \doteq \sqrt[3]{x}, \quad \text{para } x \in (0, \infty). \quad (\text{C.32})$$

Observemos que a função  $f$  é diferenciável em  $(0, \infty)$  e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[ x^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, \quad \text{para } x \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Assim a diferencial da função  $f$ , para cada  $x \in (0, \infty)$ , será dada por:

$$\begin{aligned} df(x) &\stackrel{(\text{C.29})}{=} f'(x) dx \\ &\stackrel{(\text{C.33})}{=} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Observemos que, do item 1. da Observação (C.1.2), segue que

$$\begin{aligned} &\text{para } a > 0, \text{ com } a \sim 0, \\ \text{teremos: } &f(a+h) \sim f(a) + df(a) = f(a) + f'(a) dx. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Consideremos

$$a \doteq 27 \quad \text{e} \quad dx \doteq 1. \quad (\text{C.36})$$

Da expressão (C.35) acima, levando em conta (C.36), teremos:

$$\begin{aligned} f(28) &= f(27+1) \\ &\stackrel{(\text{C.35})}{\sim} f(27) + f'(27) \cdot 1 \\ &= \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} \\ &= 3 + \frac{1}{3} \frac{1}{\left[\sqrt[3]{27}\right]^2} \\ &= 3 + \frac{1}{27}, \\ \text{ou seja, } &\sqrt[3]{28} \sim 3 + \frac{1}{27}, \end{aligned}$$

completando a resolução.

□



# Apêndice D

## Funções hiperbólicas e propriedades

Tendo-se a função exponencial, podemos definir novas as funções, assim denominadas funções hiperbólicas, o que será feito na seção a seguir:

### D.1 Definições e propriedades

#### 17.1 A função cosseno-hiperbólico

**Definição D.1.1** Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , definimos o cosseno-hiperbólico do número real  $x$ , que será indicado por  $\cosh(x)$ , como sendo:

$$\cosh(x) \doteq \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (\text{D.1})$$

Assim podemos definir a função, denominada função cosseno-hiperbólico, da seguinte forma:  $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\cosh(x) \doteq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.2})$$

A função cosseno-hiperbólico tem as seguintes propriedades:

#### Propriedades D.1.1

(a) temos que

$$\cosh(x) = 1 \quad \text{se, e somente se, } x = 0; \quad (\text{D.3})$$

(b) temos também que

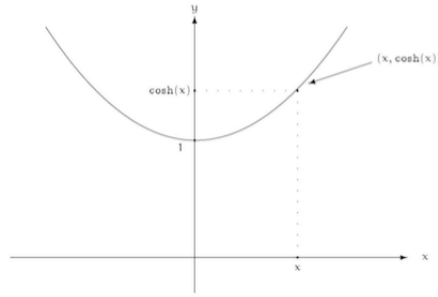
$$\cosh(x) \geq 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; \quad (\text{D.4})$$

(c) o conjunto imagem da função cosseno-hiperbólico é  $[1, \infty)$ , isto é,

$$\cosh(\mathbb{R}) = [1, \infty); \quad (\text{D.5})$$

(d) a função cosseno-hiperbólico é uma função par, isto é,

$$\cosh(-x) = \cosh(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.6})$$



### Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função cosseno-hiperbólico é dada pela figura abaixo. Será mostrado mais adiante que a representação geométrica do gráfico da função  $\cosh$ , dada por (D.1), é dada pela figura acima.

## 17.2 A função seno-hiperbólico

**Definição D.1.2** Para cada  $x \in \mathbb{R}$  definimos o seno-hiperbólico do número real  $x$ , que será indicado por  $\sinh(x)$ , como sendo:

$$\sinh(x) \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (\text{D.7})$$

Com isto podemos definir uma função, denominada função seno-hiperbólico, da seguinte forma:  $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\sinh(x) \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.8})$$

A função seno-hiperbólico tem as seguintes propriedades:

### Propriedades D.1.2

(a) temos que

$$\sinh(x) = 0 \quad \text{se, e somente se, } x = 0; \quad (\text{D.9})$$

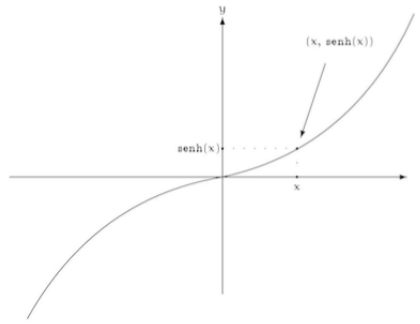
(b) o conjunto imagem da função seno-hiperbólico é  $\mathbb{R}$ , isto é,

$$\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}; \quad (\text{D.10})$$

(c) a função seno-hiperbólico é uma função ímpar, isto é,

$$\sinh(-x) = -\sinh(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; \quad (\text{D.11})$$

(d) a função seno-hiperbólico é uma estritamente crescente.

**Demonstração:**

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor. □

A representação geométrica do gráfico da função seno-hiperbólico é dada pela figura abaixo. Será mostrado mais adiante que a representação geométrica do gráfico da função sinh, dada por (D.8), é dada pela figura acima.

**17.3 A função tangente-hiperbólica**

**Definição D.1.3** Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , definimos a tangente-hiperbólica do número real  $x$ , que será indicado por tgh(x), como sendo:

$$\begin{aligned} \text{tgh}(x) &\doteq \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ &\stackrel{(D.1),(D.7)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned} \quad (D.12)$$

Com isto podemos definir uma função, denominada função tangente-hiperbólica, da seguinte forma:  $\text{tgh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} \text{tgh}(x) &\doteq \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ &\stackrel{(D.1),(D.7)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (D.13)$$

A função tangente-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

**Propriedades D.1.3**

(a) temos que:

$$\text{tgh}(x) = 0 \quad \text{se, e somente se, } x = 0; \quad (D.14)$$

(b) o conjunto imagem da função tangente-hiperbólica é  $(-1, 1)$ , isto é,

$$\text{tgh}(\mathbb{R}) = (-1, 1); \quad (D.15)$$

(c) a função tangente-hiperbólica é uma função ímpar, isto é,

$$\text{tgh}(-x) = -\text{tgh}(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (D.16)$$

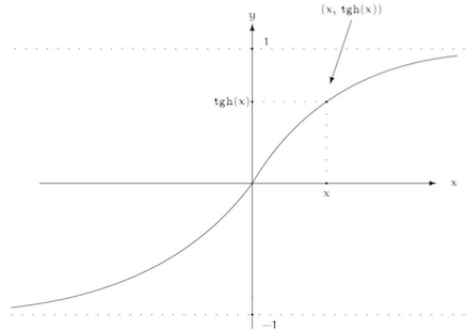
(d) a função tangente-hiperbólica é estritamente crescente.

### Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função tangente-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado mais adiante que a representação geométrica do gráfico da função tgh é dada pela figura acima.

## 17.4 A função cotangente-hiperbólica

**Definição D.1.4** Para cada  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definimos a cotangente-hiperbólica do número real  $x$ , que será indicado por cotgh(x), como sendo:

$$\begin{aligned} \cotgh(x) &\doteq \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \\ &\stackrel{(D.7), (D.1)}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned} \quad (D.17)$$

Com isto podemos definir uma função, denominada função cotangente-hiperbólica, da seguinte forma:  $\cotgh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} \cotgh(x) &\doteq \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \\ &\stackrel{(D.7), (D.1)}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (D.18)$$

A função cotangente-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

### Propriedades D.1.4

(a) temos que

$$|\cotgh(x)| \geq 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad (D.19)$$

(b) o conjunto imagem da função cotangente-hiperbólica é  $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ , isto é,

$$\operatorname{cotgh}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]; \quad (\text{D.20})$$

(c) a função cotangente-hiperbólica é uma função ímpar, isto é,

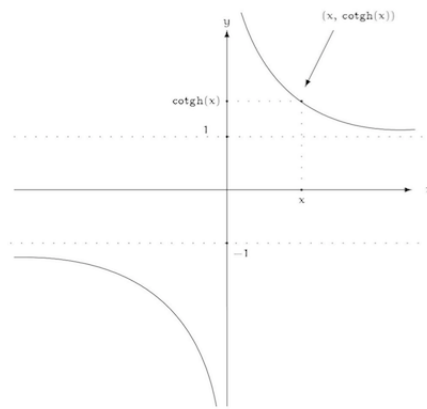
$$\operatorname{cotgh}(-x) = -\operatorname{cotgh}(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{D.21})$$

### Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função cotangente-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado mais adiante que a representação geométrica do gráfico da função cotgh, dada por (D.18), é dada pela figura acima.

## 17.5 A função secante-hiperbólica

**Definição D.1.5** Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , definimos a secante-hiperbólica do número real  $x$ , que será indicado por sech( $x$ ), como sendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}(x) &\doteq \frac{1}{\operatorname{cosh}(x)} \\ &\stackrel{(\text{D.1})}{=} \frac{2}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Com isto podemos definir uma função, denominada função secante-hiperbólica, da seguinte forma:  $\operatorname{sech} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\operatorname{cosh}(x)} \\ &\stackrel{(\text{D.1})}{=} \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

A função secante-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

**Propriedades D.1.5**

(a) temos que

$$\operatorname{sech}(x) = 1 \quad \text{se, e somente se, } x = 0; \quad (\text{D.24})$$

(b) o conjunto imagem da função secante-hiperbólica é  $(0, 1]$ , isto é,

$$\operatorname{sech}(\mathbb{R}) = (0, 1]; \quad (\text{D.25})$$

(c) a função secante-hiperbólica é uma função par, isto é,

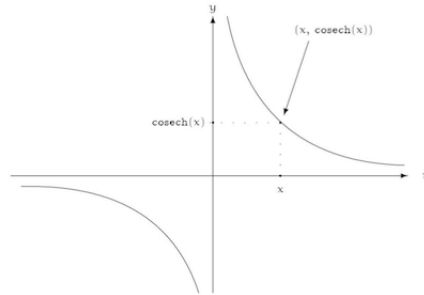
$$\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech}(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.26})$$

**Demonstração:**

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função secante-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado mais adiante que a representação geométrica do gráfico da função sech, dada por (D.23), é dada pela figura acima.

**17.6 A função cossecante-hiperbólica**

**Definição D.1.6** Para cada  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definimos a cossecante-hiperbólica do número real  $x$ , que será indicado por cosech( $x$ ), como sendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosech}(x) &\doteq \frac{1}{\operatorname{sinh}(x)} \\ &\stackrel{(\text{D.7})}{=} \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Com isto podemos definir uma função, denominada função cossecante-hiperbólica, da seguinte forma:  $\operatorname{cosech} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{cosech}(x) &\doteq \frac{1}{\operatorname{sinh}(x)} \\ &\stackrel{(\text{D.7})}{=} \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$



A função cossecante-hiperbólica tem as seguintes propriedades:

### Propriedades D.1.6

(a) temos que

$$\operatorname{cosech}(x) \neq 0, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad (\text{D.29})$$

(b) o conjunto imagem da função cossecante-hiperbólica é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , isto é,

$$\operatorname{cosech}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{D.30})$$

(c) a função cossecante-hiperbólica é uma função ímpar, isto é,

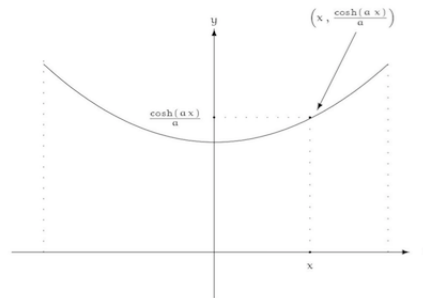
$$\operatorname{cosech}(-x) = -\operatorname{cosech}(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.31})$$

### Demonstração:

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercício para o leitor.

□

A representação geométrica do gráfico da função cossecante-hiperbólica é dada pela figura abaixo.



Será mostrado mais adiante que a representação geométrica do gráfico da função cosech, dada por (D.28), é dada pela figura acima.

Temos as seguintes propriedades básicas das funções hiperbólicas, definidas acima:

### Propriedades D.1.7

1. Temos que

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; \quad (\text{D.32})$$

2. temos também que

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; \quad (\text{D.33})$$

3. temos

$$\operatorname{tgh}^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; \quad (\text{D.34})$$

4. e

$$\operatorname{cotgh}^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) = 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{D.35})$$

**Demonstração:**

Faremos a demonstração do item 1. .

As demonstrações dos outros itens serão deixados como exercício para o leitor.

Observemos que, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &\stackrel{(D.1), (D.7)}{=} \left[ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]^2 - \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]^2 \\ &= \frac{[e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}] - [e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}]}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1, \end{aligned}$$

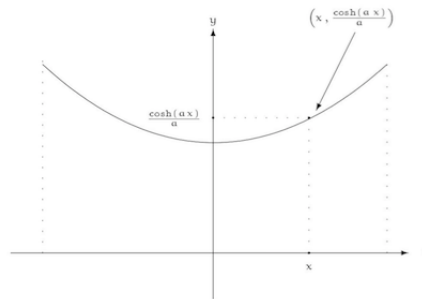
mostrando a validade da identidade (D.32) e completando a demonstração do item (a). □

**Observação D.1.1** *Pode-se mostrar que, dado  $a > 0$ , a representação geométrica do gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$f(x) \doteq \frac{\cosh(ax)}{a}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

*descreve a posição de equilíbrio de um fio homogêneo, cujas extremidades estão presas a uma mesma altura, deixado sob a ação da força da gravidade.*

*Tal curva é denominada de **catenária**.*



## Apêndice E

# Integrais impróprias de funções reais, de uma variável real, de 2.a espécie

### E.1 Integrais impróprias de funções reais, de uma variável real, de 2.a espécie

Trataremos agora da questão associada a integral de uma função não limitada em um intervalo limitado.

Para isto temos a:

**Definição E.1.1** *Sejam  $A$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in A$  e  $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.*

*Diremos que a função  $f$  tem um descontinuidade infinita em  $x = a$ , se uma das seguintes situações ocorrer:*

1.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad (\text{E.1})$$

2. ou

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad (\text{E.2})$$

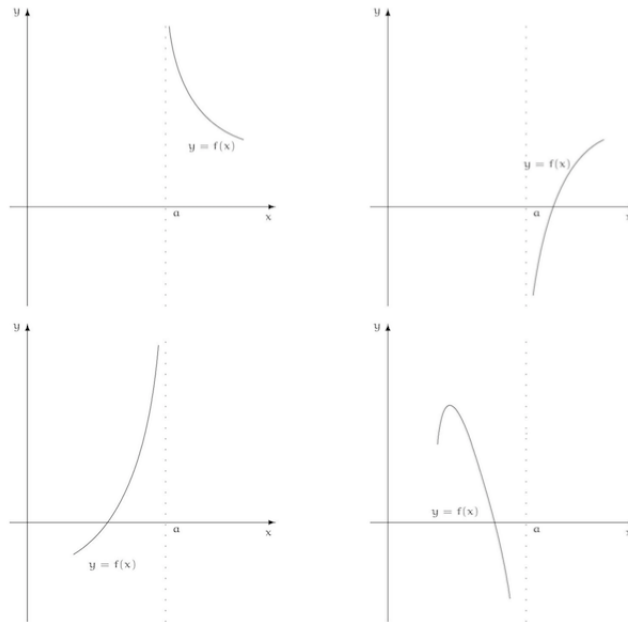
3. ou

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \quad (\text{E.3})$$

4. ou

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty. \quad (\text{E.4})$$

**Observação E.1.1** *Geometricamente, podemos ter as seguintes situações para a representação geométrica do gráfico de uma função que possua um descontinuidade infinita em  $x = a$ :*

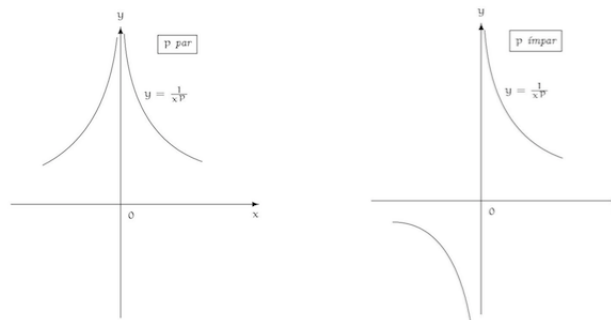


Para ilustrar temos o:

**Exemplo E.1.1** *Sejam  $p \in (0, \infty)$  fixado e  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por*

$$f(x) \doteq \frac{1}{x^p}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{E.5})$$

*Então a função  $f$  tem uma descontinuidade infinita em  $a = 0$ .*



### Resolução:

De fato, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{(\text{E.5})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^p}$$

como  $\stackrel{p > 0}{=} \infty$ ,

logo, da Definição (E.1.1) (vale (E.2)), segue que a função  $f$  tem uma descontinuidade infinita em  $x = 0$ .

Observemos também que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &\stackrel{\text{(E.5)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^p} \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{se } p \in (0, \infty) \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } p \in (0, \infty) \text{ é ímpar} \end{cases}, \end{aligned}$$

completando a resolução. □

Com a Definição (E.1.1) acima, podemos introduzir a:

**Definição E.1.2** *Seja  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que tem uma descontinuidade infinita em*

$$x = a$$

*e é integrável em  $[c, b]$ , para cada  $c \in (a, b]$  fixado.*

*Definiremos a integral imprópria, de 2.a espécie, da função  $f$  em  $(a, b]$ , denotada por*

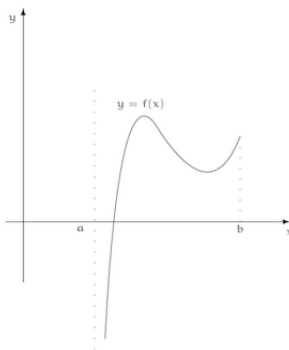
$$\int_a^b f(x) dx, \text{ como sendo}$$

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx. \quad (\text{E.6})$$

*Na situação acima, diremos que a integral imprópria, de 2.a espécie (do tipo (E.6)),  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente, se o limite acima existir e for finito.*

*Caso contrário, diremos que integral imprópria, de 2.a espécie (do tipo (E.6)),  $\int_a^b f(x) dx$  é divergente.*

*A figura abaixo ilustra uma possível representação geométrica do gráfico da função  $f$  (seria o caso (E.2)).*



De modo análogo temos a

**Definição E.1.3** *Seja  $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que tem uma descontinuidade infinita em*

$$x = b$$

*e é integrável em  $[a, c]$ , para cada  $c \in [a, b)$  fixado.*

Definiremos a integral imprópria, de 2.a espécie, da função  $g$  em  $[a, b)$ , denotada por

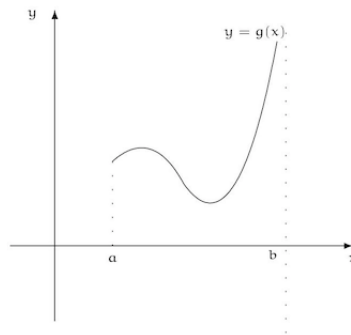
$\int_a^b g(x) dx$ , como sendo

$$\int_a^b g(x) dx \doteq \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx. \quad (\text{E.7})$$

Na situação acima, diremos que a integral imprópria, de 2.a espécie (do tipo (E.7)),  $\int_a^b g(x) dx$  é convergente, se o limite acima existir e for finito.

Caso contrário, diremos que integral imprópria, de 2.a espécie (do tipo (E.7)),  $\int_a^b g(x) dx$  é divergente.

A figura abaixo ilustra uma possível representação geométrica do gráfico da função  $g$  (seria o caso (E.3), com  $f \doteq g$  e  $a \doteq b$ ).



Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo E.1.2** Estudar a convergência da integral imprópria de 2.a espécie

$$\int_0^3 \frac{1}{x} dx. \quad (\text{E.8})$$

**Resolução:**

Observemos que a função  $f : (0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{x}, \quad \text{para } x \in (0, 3], \quad (\text{E.9})$$

tem uma descontinuidade infinita em  $x = 0$ .

De fato, pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &\stackrel{(\text{E.9})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

logo, pela Definição (E.1.1) (veja (E.1)), temos a comprovação da afirmação acima.

Notemos também que a função  $f$ , dada por (E.9), é contínua em  $(0, 3]$  e, assim, do Teorema (2.3.1), ela será uma função integrável em  $[c, 3]$ , para cada  $c \in (0, 3]$  fixado.

Portanto, pela Definição (E.1.2), temos que a integral

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{(\text{E.9})}{=} \int_a^b \frac{1}{x} dx$$

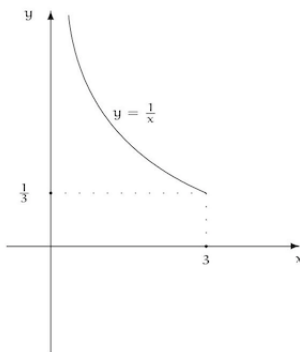
é uma integral imprópria de 2.a espécie em  $(0, 3]$  (ou seja, do tipo (E.6)).

Além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{x} dx &\stackrel{\text{(E.6)}}{=} \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^3 \frac{1}{x} dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo em } [c, 3]}{=} \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[ \ln(x) \right]_{x=c}^{x=3} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} [\ln(3) - \ln(c)] \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \infty, \end{aligned} \tag{E.10}$$

mostrando, pela Definição (E.1.2), que a integral imprópria, de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_0^3 \frac{1}{x} dx$  é divergente, completando a resolução.

A representação geométrica do gráfico da função  $f$  é dado pela figura abaixo.



□

**Observação E.1.2** Notemos que função  $f$ , dada por (E.9), é não negativa, ou seja,

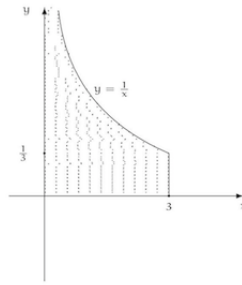
$$f(x) \stackrel{\text{(E.9)}}{=} \frac{1}{x} \geq 0, \quad \text{para } x \in (0, 3].$$

Logo a área, cujo valor denotaremos por  $\mathcal{A}$ , da região  $\mathcal{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = 0$ ,  $x = 3$  e do eixo  $Ox$ , será dada pela integral imprópria, de 2.a espécie (do tipo (E.6)), ou seja, por, (E.8), ou ainda:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^3 f(x) dx \\ &\stackrel{\text{(E.9)}}{=} \int_0^3 \frac{1}{x} dx \\ &\stackrel{\text{(E.10)}}{=} \infty. \end{aligned}$$

A figura abaixo nos dá a representação geométrica da região  $\mathcal{R}$  descrita acima.

Podemos ter outros tipos de integrais impróprias, a saber:



**Definição E.1.4** Seja  $f: [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua  $[a, b] \setminus \{c\}$  e que tem uma descontinuidade infinita em

$$x = c.$$

Definiremos a integral imprópria, de 2.a espécie, da função  $f$  em  $[a, b] \setminus \{c\}$ , denotada por

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ como sendo}$$

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{\text{int. imprópria de 2.a espécie do tipo (E.7)}} + \underbrace{\int_c^b f(x) dx}_{\text{int. imprópria de 2.a espécie do tipo (E.6)}}. \quad (\text{E.11})$$

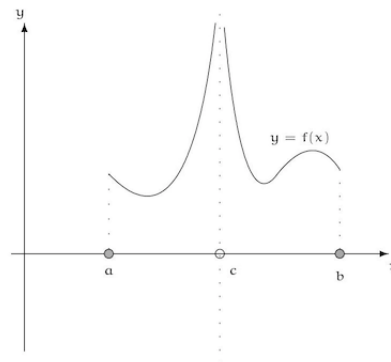
Diremos que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.11))  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente, se as integrais impróprias de 2.a espécie (do tipo (E.7) e do tipo (E.6)), respectivamente)

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx$$

forem convergentes.

Caso contrário, diremos que integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.11))  $\int_a^b f(x) dx$  é divergente.

A figura abaixo ilustra a representação geométrica do gráfico de uma função  $f$  que está na situação acima.





Podemos aplicar as ideias acima ao:

**Exemplo E.1.3** *Estudar a convergência da integral imprópria*

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx. \quad (\text{E.12})$$

**Resolução:**

Observemos que a função  $f: [0, 2] \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{para } x \in [0, 2] \setminus \{1\}, \quad (\text{E.13})$$

tem uma descontinuidade infinita em  $x = 1 \in [0, 2]$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Notemos também que a função  $f$  é contínua em  $[0, 3] \setminus \{1\}$ .

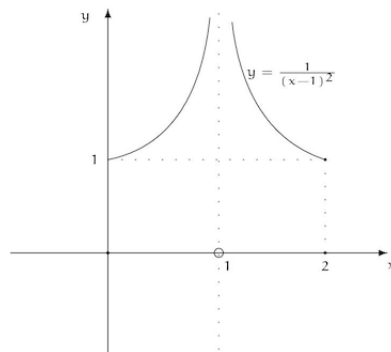
Logo destes fatos, e da Definição (E.1.4), segue que a integral (E.13) é uma integral imprópria de 2.a espécie em  $[0, 2] \setminus \{1\}$  (ou seja, do tipo (E.11)).

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx &\stackrel{(\text{E.11})}{=} \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx \\ &\stackrel{(\text{E.7}) \text{ e } (\text{E.6})}{=} \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental do Cálculo em } [0, t] \text{ e } [t, 1]}{=} \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[ (x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_{x=0}^{x=t} + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[ (x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_{x=t}^{x=2} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 1 + 1 \\ &= 2, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

mostrando, pela Definição (E.1.4), que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.11))  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx$  é convergente, completando a resolução.

A figura abaixo nos dá a representação geométrica do gráfico da função  $f$ :



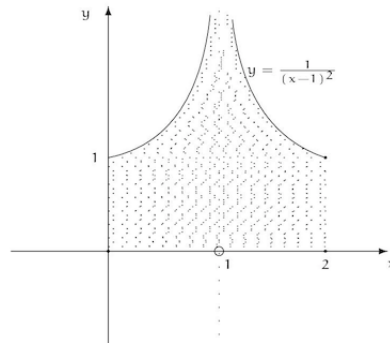
**Observação E.1.3** *Notemos que a função  $f$ , dada por (E.13), é não negativa, ou seja,*

$$f(x) \stackrel{(\text{E.13})}{=} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \geq 0, \quad \text{para } x \in [0, 2] \setminus \{1\}.$$

Deste modo, a área, cujo valor denotaremos por  $\mathcal{A}$ , da região  $\underline{R}$ , contida no plano  $xOy$ , delimitada pelas representações geométricas do gráfico da função  $f$ , das retas  $x = 0$ ,  $x = 2$  e do eixo  $Ox$ , será dada pela integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.11)), ou seja, por (E.12), ou ainda:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 f(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{(E.13)}}{=} \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \, dx \\ &\stackrel{\text{(E.14)}}{=} 2 \text{ u.a..} \end{aligned}$$

A figura abaixo nos dá a representação geométrica da região  $\underline{R}$  descrita acima.

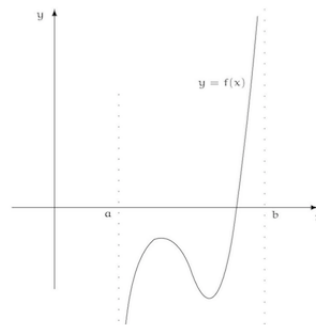


**Observação E.1.4** Podemos ter outros tipos de integrais impróprias de 2.a espécie, como por exemplo:

1. Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função é contínua em  $(a, b)$ , que tem descontinuidades infinitas em

$$x = a \quad \text{e} \quad x = b.$$

A figura abaixo ilustra a representação geométrica do gráfico de uma função  $f$  na situação descrita acima.



Neste caso definiremos a integral imprópria, de 2.a espécie, da função  $f$  em  $(a, b)$ , indi-

cada por  $\int_a^b f(x) dx$ , como sendo

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{\text{int. imprópria de 2.a espécie do tipo (E.6)}} + \underbrace{\int_c^b f(x) dx}_{\text{int. imprópria 2.a espécie do tipo (E.7)}}, \quad (\text{E.15})$$

onde  $c \in (a, b)$  está fixado.

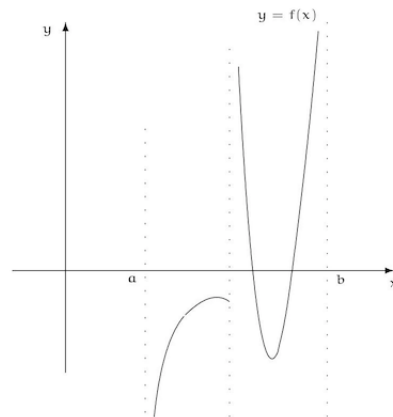
A integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.15))  $\int_a^b f(x) dx$  será dita convergente, se as integrais impróprias de 2.a espécie (do tipo (E.6) e (E.7), respectivamente)  $\int_a^c f(x) dx$  e  $\int_c^b f(x) dx$  forem convergentes.

Caso contrário, a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.15))  $\int_a^b f(x) dx$  será dita divergente.

2. Sejam  $c \in (a, b)$  está ficado e  $f: (a, b) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função é contínua em  $(a, b) \setminus \{c\}$  que tem descontinuidades infinitas em

$$x = a, \quad x = b \quad \text{e} \quad x = c.$$

A figura abaixo ilustra a representação geométrica do gráfico de uma função  $f$  que está na situação.



Neste caso definimos a integral imprópria, de 2.a espécie, da função  $f$  em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , indicada por  $\int_a^b f(x) dx$ , como sendo

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{\text{int. impr. de 2.a espécie do tipo (E.15)}} + \underbrace{\int_c^b f(x) dx}_{\text{int. impr. de 2.a espécie do tipo (E.15)}}. \quad (\text{E.16})$$

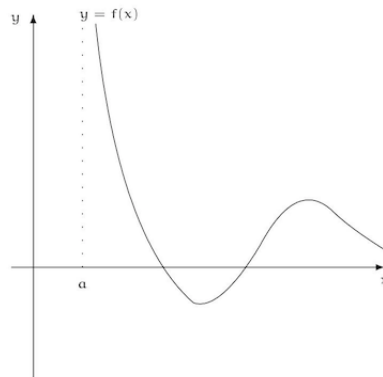
A integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.16))  $\int_a^b f(x) dx$  será dita convergente se as integrais impróprias de 2.a espécies (do tipo (E.15))  $\int_a^c f(x) dx$  e  $\int_c^b f(x) dx$ , forem convergentes.

Caso contrário, a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.16))  $\int_a^b f(x) dx$  será dita divergente.

3. Seja  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função é contínua em  $(a, \infty)$ , que tem uma descontinuidade infinita em

$$x = a.$$

A figura abaixo ilustra a representação geométrica do gráfico de uma função  $f$  que está na situação.



Neste caso definimos a integral imprópria, de 1.a e 2.a espécies, da função  $f$  em  $(a, \infty)$ , indicada por  $\int_a^\infty f(x) dx$ , como sendo

$$\int_a^\infty f(x) dx \doteq \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{2.a \text{ espécie}} + \underbrace{\int_c^\infty f(x) dx}_{1.a \text{ espécie}}, \quad (\text{E.17})$$

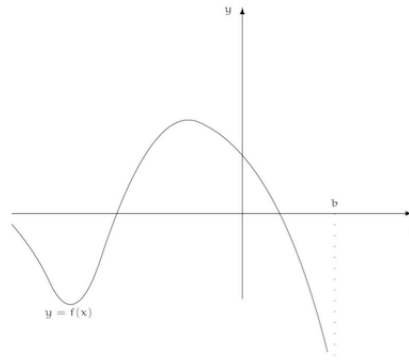
onde  $c \in (a, \infty)$  está fixado.

A integral imprópria  $\int_a^\infty f(x) dx$  será dita convergente se as integrais impróprias  $\int_a^c f(x) dx$  (esta é de 2.a espécie) e  $\int_c^\infty f(x) dx$  (esta é de 1.a espécie) forem convergentes.

Caso contrário, diremos que a integral imprópria  $\int_a^\infty f(x) dx$  será dita divergente.

4. Seja  $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função é contínua em  $(-\infty, b)$ , que tem uma descontinuidade infinita em

$$x = b.$$



A figura abaixo ilustra a representação geométrica do gráfico de uma função  $f$  que está na situação.

Neste caso definimos a integral imprópria de 1.a e 2.a espécies, da função  $f$  em  $(-\infty, b)$ ,

indicada por  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ , como sendo

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \doteq \underbrace{\int_{-\infty}^c f(x) dx}_{\text{int. imprópria 1.a espécie do tipo (E.2)}} + \underbrace{\int_c^b f(x) dx}_{\text{int. imprópria 2.a espécie do tipo (E.7)}}, \quad (\text{E.18})$$

onde  $c \in (-\infty, b)$  está fixado.

A integral imprópria de 1.a e 2.a espécies  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  será dita convergente, se as integrais impróprias  $\int_{-\infty}^c f(x) dx$  (esta é de 1.a espécie do tipo (E.1)) e  $\int_c^b f(x) dx$  (esta é de 2.a espécie do tipo (E.7)) forem convergentes.

Caso contrário, a integral imprópria de 1.a e 2.a espécies  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  será dita divergente.

5. Seja  $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  mas tem uma descontinuidade infinita em

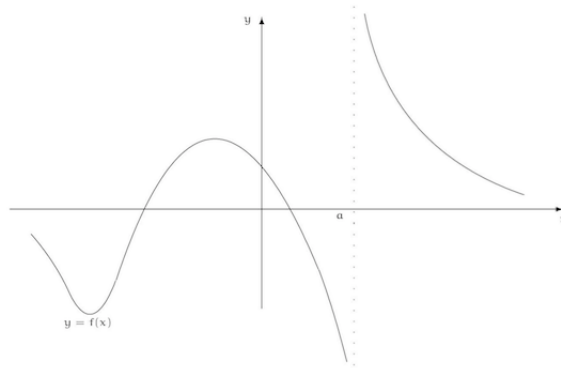
$$x = a.$$

A figura abaixo ilustra a representação geométrica do gráfico de uma função  $f$  que está na situação.

Neste caso definimos a integral imprópria, de 1.a e 2.a espécie, da função  $f$  em  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ,

indicada por  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , como sendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \doteq \underbrace{\int_{-\infty}^a f(x) dx}_{\text{int. impr. de 1.a e 2.a esp. do tipo (E.18)}} + \underbrace{\int_a^{\infty} f(x) dx}_{\text{int. impr. de 1.a e 2.a esp. do tipo (E.17)}}, \quad (\text{E.19})$$



A integral imprópria de 1.a e 2.a espécie  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  será dita convergente se as integrais impróprias de 1.a e 2.a espécies  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  e  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  (dos tipos (E.18) e (E.17), respectivamente) forem convergentes.

Caso contrário a integral imprópria de 1.a e 2.a espécie  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  será dita divergente.

6. Podemos ter outros tipos de integrais impróprias que podem ser estudadas suas convergências seguindo as idéias acima.

Aplicamos as ideias acima ao

**Proposição E.1.1** *Sejam  $a < c$  e  $p \in (0, \infty)$  fixados.*

*A integral imprópria de 2.a espécie*

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p} dx, \quad \text{será convergente}$$

se, e somente, se  $p \in (0, 1)$ . (E.20)

### Demonstração:

Observemos que se a função  $f : [a, c) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{(x-c)^p}, \quad \text{para cada } x \in [a, c), \quad \text{(E.21)}$$

então a função  $f$  será contínua em  $[a, c)$ .

Logo, do Teorema (2.3.1), será integrável em  $[a, b]$ , para cada  $b \in [a, c)$  fixado.

Além disso, terá a função  $f$  terá uma descontinuidade infinita em  $x = c$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo a integral

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p} dx$$

é uma integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.7)).

Notemos que se

$$p = 1, \quad \text{(E.22)}$$

teremos:

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p} \stackrel{(E.22)}{=} \int_a^c \frac{1}{x-c}$$

$$\stackrel{(E.7)}{=} \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t \frac{1}{x-c} dx$$

Teorema fundamental do Cálculo em  $[a, t]$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} \lim_{t \rightarrow c^-} \lim_{t \rightarrow c^-} [\ln|t-c| - \ln|a-c|]$$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} -\infty.$$

Logo, da Definição (E.1.3), segue que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.7)) (E.21) será divergente para (E.22).

Se

$$p \neq 1, \tag{E.23}$$

teremos:

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p} \stackrel{(E.7)}{=} \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t \frac{1}{(x-c)^p} dx$$

Teorema fundamental do Cálculo em  $[a, t]$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} \lim_{t \rightarrow c^-} \left[ \frac{1}{1-p} (x-c)^{1-p} \right]_{x=a}^{x=t}$$

$$\tag{E.24}$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow c^-} [(t-c)^{1-p} - (a-c)^{1-p}]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1} (a-c)^{1-p}, & \text{se } p \in (0, 1), \\ \infty, & \text{se } p \in (1, \infty) \end{cases}.$$

Conclusão: a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.7))

$$\int_a^c \frac{1}{(x-c)^p} = \begin{cases} \text{é convergente, se } p \in (0, 1), \\ \text{é divergente, se } p \in [1, \infty) \end{cases},$$

completando a resolução.

□

Temos as seguinte propriedades para integrais impróprias de 2.a espécie:

**Proposição E.1.2** *Sejam  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[a, c]$ , para cada  $c \in (a, b)$  fixados, com descontinuidade infinita em  $x = a$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

1. *Se a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente então, para cada  $c \in (a, b)$ , temos que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_c^b f(x) dx$  será convergente.*

Além disso,

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{\text{integral definida em } [a, c]} + \underbrace{\int_c^b f(x) dx}_{\text{integral imprópria de 2.a espécie do tipo (E.6)}}. \tag{E.25}$$

2. Se a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente, então a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b (\lambda f)(x) dx$  também será convergente.

Além disso,

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{E.26})$$

3. Se as integrais impróprias de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_a^b g(x) dx$  são convergentes, então as integrais impróprias de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b (f + g)(x) dx$ ,  $\int_a^b (f - g)(x) dx$ , também serão convergentes.

Além disso,

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad (\text{E.27})$$

$$\int_a^b (f - g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \quad (\text{E.28})$$

4. Se,  $\lambda \neq 0$ , a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente e a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b g(x) dx$  é divergente então as integrais impróprias de 2.a espécie (do tipo (E.6))

$$\int_a^b (f + g)(x) dx, \quad \int_a^b (f - g)(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b (\lambda g)(x) dx$$

serão divergentes.

### Demonstração:

As demonstrações seguem das propriedades básicas de limites no infinito e serão deixadas como exercício para o leitor. □

**Observação E.1.5** Vale um resultado análogo para cada uma das outras integrais impróprias introduzidas na Observação (E.1.4).

Deixaremos a cargo do leitor os enunciados e as respectivas demonstrações dos mesmos.

Temos o seguinte resultado importante para o estudo de integrais impróprias de 2.a espécie:

**Teorema E.1.1** (da comparação para integrais impróprias de 2.a espécie) *Sejam  $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $(a, b]$ , com descontinuidades infinitas em  $x = a$  e satisfazendo*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{para } x \in (a, b]. \quad (\text{E.29})$$

Então:



1. se a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b g(x) dx$  for convergente, teremos que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b f(x) dx$  também será convergente.

Além disso, teremos

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx; \quad (\text{E.30})$$

2. se a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b f(x) dx$  for divergente, teremos que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_a^b g(x) dx$  também será divergente .

### Demonstração:

A demonstração deste resultado é semelhante a do Teorema da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie (ou seja, o Teorema (5.2.1)).

Devido a este fato deixaremos como exercício para o leitor a sua demonstração. □

**Observação E.1.6** Valem os resultados análogos ao Teorema (E.1.1) acima para cada uma das integrais impróprias introduzidas na Observação (E.1.4).

Deixaremos como exercício para o leitor enunciá-los e demonstrá-los.

Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo E.1.4** Estudar a convergência da integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))

$$\int_3^6 \frac{\ln(x)}{(x-3)^4} dx. \quad (\text{E.31})$$

### Resolução:

Observemos que a função  $g : (3, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x) \doteq \frac{\ln(x)}{(x-3)^4}, \quad \text{para } x \in (3, 6], \quad (\text{E.32})$$

é contínua em  $(3, 6]$ .

Logo, do Teorema (2.3.1), será uma função integrável em  $[c, 6]$ , para cada  $c \in (3, 6]$  fixado.

Além disso, tem uma descontinuidade infinita em  $c = 3$ .

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Se considerarmos a função  $f : (3, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) \doteq \frac{1}{(x-3)^4}, \quad \text{para } x \in (3, 6], \quad (\text{E.33})$$

então ela será contínua em  $(3, 6]$ , logo integrável em  $[c, 6]$  e também terá uma descontinuidade infinita em  $c = 3$ .

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Além disso, teremos

$$0 \leq f(x) \stackrel{\text{(E.33)}}{=} \frac{1}{(x-3)^4}$$

$$\stackrel{\text{como } 3 \leq x, \text{ teremos: } 1 \leq \ln(3) \leq \ln(x)}{\leq} \frac{\ln(x)}{(x-3)^4}$$

$$\stackrel{\text{(E.32)}}{=} g(x), \quad \text{para } x \in (3, 6]. \quad (\text{E.34})$$

Além disso, pela Proposição (E.1.1) (com  $p \doteq 4 > 1$ ), temos que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))

$$\int_3^6 f(x) dx \stackrel{\text{(E.33)}}{=} \int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4} dx$$

é divergente.

Logo, do item 2 do Teorema da comparação para integrais impróprias de 2.a espécie (ou seja, do item 2. do Teorema (E.1.1)), segue que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))

$$\int_3^6 \frac{\ln(x)}{(x-3)^4} dx$$

será divergente, completando a resolução. □

Para finalizar temos a:

**Proposição E.1.3** Para cada  $t \in (0, \infty)$  fixado, consideremos a integral imprópria de 1.a e 2.a espécie

$$\Gamma(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad (\text{E.35})$$

que é denominada **função Gama**.

Então

1. a integral imprópria de 1.a e 2.a espécie (E.35) é convergente, para cada  $t \in (0, \infty)$  fixado;
2. para  $t \in (1, \infty)$ , temos

$$\Gamma(t) = (t-1) \Gamma(t-1); \quad (\text{E.36})$$

3. em particular, se  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (\text{E.37})$$

**Demonstração:**

Do item 1.:

Para cada  $t \in (0, \infty)$ , consideremos a função  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) \doteq e^{-x} x^{t-1}, \quad \text{para } x \in (0, \infty). \quad (\text{E.38})$$

Observemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx}_{\text{II}}. \quad (\text{E.39})$$

Começaremos analisando I:

(i) Notemos que, para

$$t \in [1, \infty) \quad (\text{E.40})$$

fixado, temos que a integral  $\boxed{\text{I}}$  será uma integral definida em  $[0, 1]$ , pois a função

$$x \mapsto e^{-x} x^{\overbrace{t-1}^{(\text{E.40}) \geq 0}}$$

é uma função contínua em  $[0, 1]$ .

(ii) Por outro lado,

$$t \in (0, 1), \quad (\text{E.41})$$

temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) \\ &\stackrel{(\text{E.38})}{=} e^{-x} x^{t-1} \\ &e^{-x} \leq 1, \text{ para } x \in (0, \infty) \\ &\leq x^{t-1} \\ &= \frac{1}{x^{1-t}}, \text{ para } x \in (0, 1]. \end{aligned}$$

De (E.41), temos que

$$1 - t \in (0, 1).$$

Logo, da Proposição (E.1.1), segue que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))

$$\int_0^1 x^{t-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-t}} dx \quad \text{será convergente.} \quad (\text{E.42})$$

Logo, de (E.39), (E.41) e do item 1. do Teorema da comparação para integrais impróprias de 2.a espécie (o tipo (E.6)) (ou seja, do item 1. do Teorema (E.1.1)), segue que a integral imprópria de 2.a espécie (do tipo (E.6))  $\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx$  também será convergente.

Portanto, dos itens (i) e (ii) acima, segue que  $\boxed{\text{I}}$  é um número real, para cada  $t \in (0, \infty)$  fixado.

Analisemos  $\boxed{\text{II}}$ :

Notemos agora que, para cada  $t \in (0, \infty)$ ,  $\boxed{\text{II}}$  é uma integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)) (pois o integrando é uma função contínua em  $[1, \infty)$ ).

Observemos ainda, que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{-x} x^{t-1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} x^{t+1}) \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 0 \doteq A. \end{aligned}$$

Assim, do item 1. do Teorema (5.2.2) (com  $p \doteq 2$  e  $A = 0$ ), segue a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1))  $\int_1^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$  será convergente.

Logo, para cada  $t \in (0, \infty)$  fixado,  $\boxed{\text{I}}$  e  $\boxed{\text{II}}$  são números reais, de (E.39), segue que a integral imprópria de 1.a e 2.a espécie  $\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$  é convergente, isto é, a função  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (E.35), está bem definida.

Do item 2.:

Para cada  $t \in (1, \infty)$  temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &\stackrel{\text{(E.35)}}{=} \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-x} x^{t-1} dx. \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

Mas, pelo Teorema de integração por partes para a integral definida (ou seja, o Teorema (2.6.1)), teremos:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-x} x^{t-1} dx &= \int_a^b \underbrace{x^{t-1}}_{=u} \underbrace{e^{-x}}_{=dv} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \doteq x^{t-1}, \text{ teremos: } du = (t-1)x^{t-2} dx \\ \text{se } dv \doteq e^{-x} dx, \text{ teremos: } v = -e^{-x} + C \\ \text{tomando-se } C = 0, \text{ segue que: } v = -e^{-x} \end{array} \right\} \\ &= \left[ uv \Big|_{x=a}^{x=b} \right] - \int_a^b v du \\ &= \left[ x^{t-1} (-e^{-x}) \right] \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b (-e^{-x}) (t-1) x^{t-2} dx \\ &= \left[ -b^{t-1} e^{-b} + a^{t-1} e^{-a} \right] + (t-1) \int_a^b e^{-x} x^{t-2} dx. \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

Substituindo (E.44) em (E.43), obteremos:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \underbrace{-b^{t-1} e^{-b}}_{\rightarrow 0, \text{ quando } b \rightarrow \infty} + \underbrace{a^{t-1} e^{-a}}_{\rightarrow 0, \text{ quando } a \rightarrow 0^+} \right] + (t-1) \int_a^b e^{-x} x^{t-2} dx \right\} \\ &= (t-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{[(t-1)-1]} dx \\ &\stackrel{\text{(E.35)}}{=} \text{com } t \doteq t-1 \quad (t-1) \Gamma(t-1), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Do item 3.:

Notemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &\stackrel{\text{(E.35)}}{=} \text{com } t \doteq 1 \int_0^\infty e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx \\ &\stackrel{\text{Exercício 1.}}{=} 1. \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

Logo, do item 2. acima, segue que

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &\stackrel{\text{(E.36)}}{=} \text{com } t \doteq 2 (2-1)\Gamma(1) \\ &\stackrel{\text{(E.45)}}{=} 1 \\ &= 1!\end{aligned}\tag{E.46}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(3) &\stackrel{\text{(E.36)}}{=} \text{com } t \doteq 3 (3-1)\Gamma(2) \\ &\stackrel{\text{(E.46)}}{=} 2 \cdot 1 \\ &= 2!\end{aligned}\tag{E.47}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(4) &\stackrel{\text{(E.36)}}{=} \text{com } t \doteq 4 (4-1)\Gamma(3) \\ &\stackrel{\text{(E.47)}}{=} 3 \cdot 2! \\ &= 3!\end{aligned}$$

e assim, por indução sobre  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se mostrar validade da identidade (E.37), completando a demonstração do resultado. □

Podemos aplicar estas ideias ao:

**Exercício E.1.1** *Estudar a convergência da integral imprópria de 1.a espécie*

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^3 dx.\tag{E.48}$$

**Resolução:**

Observemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-x} x^3 dx &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{(4-1)} dx \\ &\stackrel{\text{(E.36)}}{=} \text{com } t \doteq 3 \Gamma(3) \\ &\stackrel{\text{(E.37)}}{=} \text{com } n \doteq 3 3! \\ &= 6,\end{aligned}$$

mostrando que a integral imprópria de 1.a espécie (do tipo (5.1)),  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^3 dx$  será convergente e seu valor será igual a 6. □



# Apêndice F

## O espaço $\mathbb{R}^n$

Nosso objetivo neste capítulo será apresentar o espaço euclidiano  $n$ -dimensional, que será denotado por  $\mathbb{R}^n$ , introduzir uma noção de distância entre dois pontos neste espaço e algumas de suas conseqüências.

Na disciplina de Cálculo I estudamos algumas propriedades do conjunto formado pelos números reais, que será indicado por  $\mathbb{R}$ .

No curso de Geometria Analítica foram introduzidos o conjunto dos vetores do plano, que será indicado por  $V^2$ , e dos vetores do espaço, que será indicado por  $V^3$ , bem como uma série de propriedades dos mesmos.

Foi visto, por exemplo, que  $V^2$  e  $V^3$  podem ser identificados com

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\doteq \{ \text{pares ordenados formados por números reais} \} \\ &= \{ \vec{x} \doteq (x_1, x_2) ; \text{ onde } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \\ \text{e } \mathbb{R}^3 &\doteq \{ \text{ternas ordenadas formadas por números reais} \} \\ &= \{ \vec{x} \doteq (x_1, x_2, x_3) ; \text{ onde } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}\end{aligned}$$

desde que fixemos um sistema de coordenadas ortogonais em  $V^2$  ou  $V^3$ , respectivamente, ou seja,

$$\Sigma \doteq (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2),$$

onde  $O$  denota um ponto do plano e

$$\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$$

é uma base ortonormal de  $V^2$ , ou

$$\Sigma \doteq (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3),$$

onde  $O$  denota um ponto do espaço e

$$\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$$

é uma base ortonormal de  $V^3$ .

Seguindo estas idéias podemos definir, de modo análogo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  fixado, o seguinte conjunto:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\doteq \{ n\text{-uplas ordenadas formada por números reais} \} \\ &= \{ \vec{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) ; \text{ onde } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}.\end{aligned}\tag{F.1}$$

Um elemento de  $\mathbb{R}^n$ , isto é, uma  $n$ -upla formada por números reais, será denominada de **vetor de  $\mathbb{R}^n$** .

Estes conjuntos serão os lugares onde desenvolveremos nosso estudo ao longo deste e dos próximos capítulos.

## F.1 Os espaços euclidianos $n$ -dimensionais

A seguir introduziremos duas operações em  $\mathbb{R}^n$  (uma de adição entre elementos de  $\mathbb{R}^n$  e outra de multiplicação de elementos de  $\mathbb{R}^n$  por número real), a saber:

**Definição F.1.1** *Dados*

$$\vec{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \vec{y} \doteq (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad (\text{F.2})$$

e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definimos:

- a adição dos elementos  $\vec{x}, \vec{y}$  em  $\mathbb{R}^n$ , indicada por  $\vec{x} + \vec{y}$ , como sendo o vetor do  $\mathbb{R}^n$ , definido por:

$$\vec{x} + \vec{y} \doteq (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (\text{F.3})$$

- (ii) a multiplicação de um elemento  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  por  $\alpha \in \mathbb{R}$  (denominado escalar), indicada por  $\alpha \cdot \vec{x}$ , como sendo o vetor do  $\mathbb{R}^n$ , definido por:

$$\alpha \cdot \vec{x} \doteq (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \quad (\text{F.4})$$

Deste modo teremos:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Com isto temos a:

**Proposição F.1.1** *O conjunto  $\mathbb{R}^n$ , munido das operações de adição, dada por (F.3), e multiplicação por escalar, dada por (F.4), satisfaz as seguintes propriedades:*

**(A1) Fechamento da adição de vetores do  $\mathbb{R}^n$ :**

$$(\vec{x} + \vec{y}) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{para todo} \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{A1})$$

**(A2) Comutativa da adição de vetores do  $\mathbb{R}^n$ :**

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \quad \text{para todo} \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{A2})$$

**(A3) Associativa da adição de vetores do  $\mathbb{R}^n$ :**

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}), \quad \text{para todo} \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{A3})$$

**(A4) Elemento neutro da adição de vetores do  $\mathbb{R}^n$ : existe  $\vec{O} \in \mathbb{R}^n$ , tal que**

$$\vec{x} + \vec{O} = \vec{x}, \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A4})$$

**(A5) Elemento oposto da adição de vetores do  $\mathbb{R}^n$ : dado  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , existe  $-\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , tal que**

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{O}. \quad (\text{A5})$$

**(M1) Fechamento da multiplicação de escalar por vetores do  $\mathbb{R}^n$ :**

$$(\alpha \cdot \vec{x}) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{M1})$$



(M2) Associativa da multiplicação de escalar por vetores do  $\mathbb{R}^n$ :

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}, \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \vec{x} \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{M2})$$

(M3) Elemento neutro da multiplicação de escalar por vetores do  $\mathbb{R}^n$ :

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \quad \text{para todo } \vec{x} \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{M3})$$

(MA) Distributiva da multiplicação de escalar pela adição de vetores do  $\mathbb{R}^n$ :

$$\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{MA-1})$$

(AM) Distributiva da adição de escalares pela multiplicação por vetor do  $\mathbb{R}^n$ :

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}, \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{MA-2})$$

### Demonstração:

As demonstrações das propriedades acima foram ou serão mostradas na disciplina de Álgebra Linear e serão deixadas como exercício para o leitor.

São semelhantes as demonstrações das respectivas propriedades para  $V^2$  e  $V^3$ , vistas na disciplina de Geometria Analítica.

□

### Observação F.1.1

1. Notemos que

$$\vec{0} \doteq (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{O})$$

2. Notemos que, se  $\vec{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , então

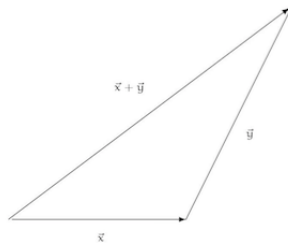
$$-\vec{x} \doteq (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{F.5})$$

3. Como será visto na disciplina de Álgebra Linear, isto pode ser resumido dizendo-se que

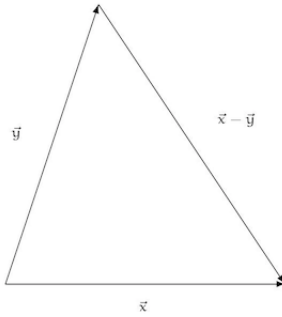
$$(\mathbb{R}^n, +, \cdot),$$

onde  $\pm$  e  $\cdot$  são as operações de adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar definidas acima, é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

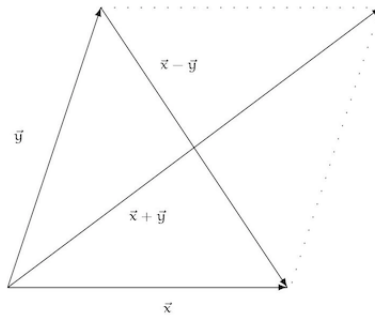
4. Geometricamente, a adição de elementos de  $\mathbb{R}^n$ , dada por (F.4), pode ser vista como:



5. Geometricamente, a subtração de vetores de  $\mathbb{R}^n$  pode ser vista como:



6. Dos itens 4. e 5. acima, concluímos que a adição e a subtração de elementos de  $\mathbb{R}^n$ , podem ser vistas como as diagonais de um paralelogramo, cujos lados são determinados pelos vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  do  $V^n$ .



Estas propriedades são semelhantes às respectivas de  $V^2$  e  $V^3$ , que foram estudadas na disciplina de Geometria Analítica.

## F.2 Produto interno

No espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , podemos definir uma multiplicação entre elementos do próprio espaço que resultará em um número real, a saber:

**Definição F.2.1** *Dados*

$$\vec{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} \doteq (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definimos o produto interno (ou escalar) do vetor  $\vec{x}$  pelo vetor  $\vec{y}$ , indicado por  $\vec{x} \bullet \vec{y}$ , como sendo o número real dado por:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} \doteq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}, \quad (\text{F.6})$$

isto é,  $\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Observação F.2.1** Em alguns livros podemos encontrar outras notações para o produto interno introduzido acima (ou seja, dado por (F.6)) como, por exemplo,  $(\cdot, \cdot)$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , isto é,

$$\begin{aligned}(\vec{x}, \vec{y}) &\doteq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &\doteq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.\end{aligned}$$

Com isto temos a:

**Proposição F.2.1** Temos que:

(PI1) O produto interno de vetores de  $\mathbb{R}^n$  é comutativo, isto é,

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{y} \bullet \vec{x}, \quad \text{para } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{PI1})$$

(PI2) O produto interno de vetores de  $\mathbb{R}^n$  é distributivo em relação a adição de vetores, isto é,

$$(\vec{x} + \vec{y}) \bullet \vec{z} = \vec{x} \bullet \vec{z} + \vec{y} \bullet \vec{z}, \quad \text{para } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{PI2})$$

(PI3) O produto interno de vetores de  $\mathbb{R}^n$  é associativo (do produto de vetor por escalar pelo produto interno de vetores), isto é,

$$(\alpha \cdot \vec{x}) \bullet \vec{y} = \alpha (\vec{x} \bullet \vec{y}), \quad \text{para } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{PI-3})$$

(PI4) O produto interno de  $\mathbb{R}^n$  é positivo definido, isto é,

$$\vec{x} \bullet \vec{x} \geq 0, \quad \text{para todo } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\vec{x} \bullet \vec{x} = 0, \quad \text{se, e somente se, } \vec{x} = \vec{O}. \quad (\text{PI4})$$

### Demonstração:

As demonstrações das propriedades acima foram, ou serão, mostradas na disciplina de Álgebra Linear e serão deixadas como exercício para o leitor.

São semelhantes as demonstrações das respectivas propriedades para  $V^2$  e  $V^3$ , vistas na disciplina de Geometria Analítica.

□

### Observação F.2.2

1. As propriedades (PI1), (PI2) e (PI-3) implicam em

$$\vec{x} \bullet (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \bullet \vec{y} + \vec{x} \bullet \vec{z}, \quad \text{para todo } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{PI5})$$

$$\vec{x} \bullet (\alpha \cdot \vec{y}) = \alpha (\vec{x} \bullet \vec{y}), \quad \text{para todo } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{PI6})$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

2. As propriedades (PI1), (PI2), (PI-3) e (PI4), na Proposição F.2.1 nos dizem que o produto interno, no espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , é uma **forma bilinear simétrica definida positiva**.

Este tipo de funções foram, ou serão, estudadas na disciplina de Álgebra Linear.

### F.3 Norma de um vetor

#### Observação F.3.1

1. No espaço vetorial real  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ , temos como associar uma medida para o comprimento de um elemento  $x \in \mathbb{R}$ , denominado valor absoluto ou módulo de  $x$  e indicado por  $|x|$ , dado por:

$$|x| \doteq \sqrt{x^2}. \quad (\text{F.7})$$

Tal valor determina o quanto este elemento  $x$  está distante do elemento  $0 \in \mathbb{R}$  (a origem de  $\mathbb{R}$ ).

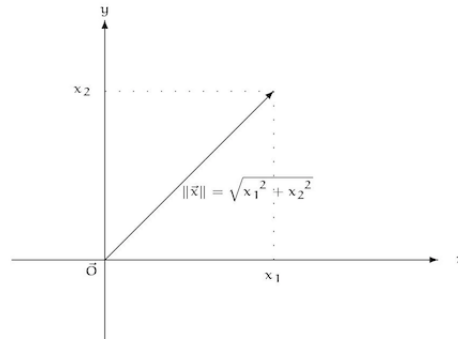
2. De modo semelhante, no espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ , definimos o comprimento do vetor

$$\vec{x} \doteq (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

denominado norma do vetor  $\vec{x}$ , indicado por  $\|\vec{x}\|$ , como sendo

$$\|\vec{x}\| \doteq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (\text{F.8})$$

Tal valor determina a distância deste elemento  $\vec{x}$  à origem  $\vec{O} \doteq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  (veja figura abaixo).



3. De modo similar, vimos na disciplina de Geometria Analítica, que no espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ , temos definido o comprimento de um vetor

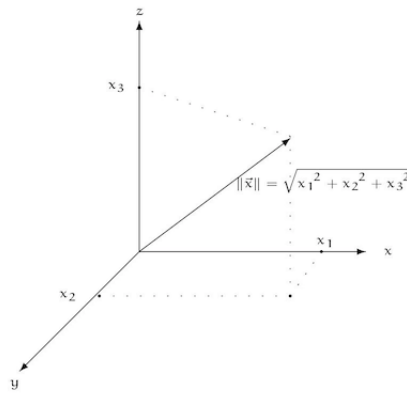
$$\vec{x} \doteq (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

denominado norma do vetor  $\vec{x}$ , indicado por  $\|\vec{x}\|$ , como sendo

$$\|\vec{x}\| \doteq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (\text{F.9})$$

Tal valor determina a distância deste elemento  $\vec{x}$  à origem  $\vec{O} \doteq (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  (veja figura abaixo).

De modo geral temos a:



**Definição F.3.1** Consideremos o espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ .

Se

$$\vec{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{F.10})$$

definimos a **norma do vetor**  $\vec{x}$ , denotada por  $\|\vec{x}\|$ , como sendo o número real

$$\|\vec{x}\| \doteq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (\text{F.11})$$

**Observação F.3.2**

1. Com isto temos definida a função  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\|\vec{x}\| \doteq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad (\text{F.12})$$

onde  $\vec{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

2. Observemos que a norma de um vetor de  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , determina a distância deste elemento  $\vec{x}$  à origem  $\vec{O} \doteq (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

Em particular, se

$$\vec{x} \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \vec{y} \doteq (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{F.13})$$

então a **distância** entre os pontos

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

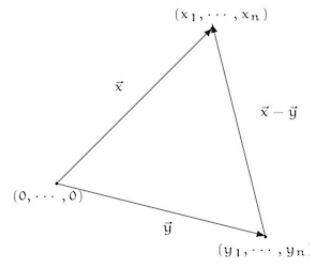
que será indicada por  $d(\vec{x}, \vec{y})$ , será dada por:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \doteq \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad (\text{F.14})$$

ou seja, o comprimento (ou, a norma) do vetor  $\vec{x} - \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  (veja a figura abaixo).

3. Além disso, da definição de produto interno (ou seja, a Definição F.2.1), no espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , se  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &\stackrel{(\text{F.12})}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &\stackrel{(\text{F.6})}{=} \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}. \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$



Com isto temos a:

**Lema F.3.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** *Sejam  $\vec{x}, \vec{y}$  são dois vetores do espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ . Então teremos*

$$|\vec{x} \bullet \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|. \quad (\text{F.16})$$

**Demonstração:**

Notemos que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , teremos:

$$\begin{aligned}
 0 & \stackrel{\text{de (PI4) da Proposição F.2.1}}{\leq} \|\vec{x} + t \cdot \vec{y}\|^2 \\
 & \stackrel{\text{do item 3. da Observação F.3.2}}{=} (\vec{x} + t \cdot \vec{y}) \bullet (\vec{x} + t \cdot \vec{y}) \\
 & \stackrel{\text{de (PI2) da Proposição F.2.1}}{=} \vec{x} \bullet \vec{x} + \vec{x} \bullet (t \cdot \vec{y}) + (t \cdot \vec{y}) \bullet \vec{x} + (t \cdot \vec{y}) \bullet (t \cdot \vec{y}) \\
 & \stackrel{\text{de (PI-3) da Proposição F.2.1}}{=} \vec{x} \bullet \vec{x} + 2t(\vec{x} \bullet \vec{y}) + t^2(\vec{y} \bullet \vec{y}), \\
 \text{isto é,} \quad & \underbrace{\vec{x} \bullet \vec{x}}_{\stackrel{\text{(F.15)}}{=} \|\vec{x}\|^2} + 2t(\vec{x} \bullet \vec{y}) + t^2 \underbrace{\vec{y} \bullet \vec{y}}_{\stackrel{\text{(F.15)}}{=} \|\vec{y}\|^2} \geq 0. \quad (\text{F.17})
 \end{aligned}$$

Logo, do item 3. da Observação F.3.2, segue que

$$\underbrace{\|\vec{y}\|^2}_{\doteq a} t^2 + 2 \underbrace{(\vec{x} \bullet \vec{y})}_{\doteq b} t + \underbrace{\|\vec{x}\|^2}_{\doteq c} \geq 0, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Observemos que esta inequação do segundo grau na variável  $t$ , garante que o discriminante da equação do 2.º grau associada a mesma, **não** poderá ser positivo, isto é,

$$\begin{aligned}
 0 & \geq \Delta \\
 & = b^2 - 4ac \\
 & = 4(\vec{x} \bullet \vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2, \\
 \text{ou seja,} \quad & (\vec{x} \bullet \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2, \\
 \text{isto é,} \quad & |\vec{x} \bullet \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|,
 \end{aligned}$$

mostrando a validade da desigualdade (F.16), completando a demonstração do resultado.  $\square$

Com isto temos as seguintes propriedades para a norma de um vetor:

**Proposição F.3.1** *Sejam  $\vec{x}, \vec{y}$  são dois vetores do espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então,*

(N1) temos

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}; \quad (\text{N1})$$

(N2)  $\|\vec{x}\| \geq 0$ , para todo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  e

$$\|\vec{x}\| = 0, \quad \text{se, e somente se,} \quad \vec{x} = \vec{O}; \quad (\text{N2})$$

(N3) temos

$$\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|; \quad (\text{N3})$$

(N4) (desigualdade triangular)

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \quad (\text{N4})$$

**Demonstração:**

A demonstração da propriedade (N1) foi feita no item 3. da Observação F.3.2.

As demonstrações da validade de (N2) e (N3) serão deixadas como exercício para o leitor.

Faremos a demonstração da validade de (N4).

Para isto observemos que:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &\stackrel{(\text{N1})}{=} (\vec{x} + \vec{y}) \bullet (\vec{x} + \vec{y}) \\ &\stackrel{\text{de (PI2) da Proposição F.2.1}}{=} \underbrace{\vec{x} \bullet \vec{x}}_{\text{de (PI2) da Proposição F.2.1}} + \underbrace{\vec{x} \bullet \vec{y}}_{\vec{x} \bullet \vec{y}} + \underbrace{\vec{y} \bullet \vec{x}}_{\vec{y} \bullet \vec{x}} + \underbrace{\vec{y} \bullet \vec{y}}_{\vec{y} \bullet \vec{y}} \\ &= \vec{x} \bullet \vec{x} + 2(\vec{x} \bullet \vec{y}) + \vec{y} \bullet \vec{y} \\ &\stackrel{(\text{N1})}{=} \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x} \bullet \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2|\vec{x} \bullet \vec{y}| + \|\vec{y}\|^2 \\ &\stackrel{(\text{F.16})}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2, \\ \text{isto é, } \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \end{aligned}$$

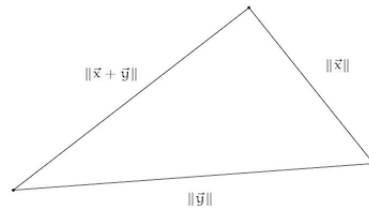
mostrando a validade de (N4) e completando a demonstração. □

**Observação F.3.3** A desigualdade triangular, isto é, (N4) nos diz, geometricamente, que o comprimento de um lado de um triângulo é sempre menor (eventualmente igual, se o triângulo for um segmento de reta) que a soma da medida dos comprimentos dos outros dois lados do mesmo (veja a figura abaixo).

Como conseqüência da desigualdade triangular (isto é, de (N4)), temos o:

**Corolário F.3.1** Sejam  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ . Então

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right|. \quad (\text{F.18})$$

**Demonstração:**

Faremos a demonstração para o caso que

$$\begin{aligned} & \|\vec{x}\| \geq \|\vec{y}\|, \\ \text{ou seja,} & \quad 0 \leq \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|. \end{aligned} \tag{F.19}$$

A prova do caso que

$$\|\vec{y}\| \geq \|\vec{x}\|$$

é, essencialmente, igual a que faremos e será deixada como exercício para o leitor.

Da desigualdade triangular (isto é, de (N4)), temos:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &= \|\underbrace{(\vec{x} - \vec{y})}_{\doteq \vec{x}} + \underbrace{\vec{y}}_{\doteq \vec{y}}\| \\ &\stackrel{(N4)}{\leq} \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \\ &= \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y}\|, \\ \text{isto é,} & \quad \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|. \end{aligned} \tag{F.20}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo,} & \quad |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \stackrel{(F.19)}{=} \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \\ & \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|, \end{aligned} \tag{F.20}$$

$$\text{ou ainda,} \quad |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|,$$

mostrando a validade de (F.18) e completando a demonstração .

□

**Observação F.3.4** *Suponhamos que os vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , são dois vetores não nulos, do espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  ou, equivalentemente,*

$$\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\| \neq 0.$$

*Então, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, isto é, de (F.16), segue que*

$$|\vec{x} \bullet \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

*Como*

$$\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\| \neq 0,$$

*isto será equivalente a:*

$$-1 \leq \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1.$$

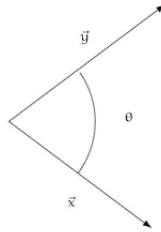


Deste modo, existe um único  $\theta \in [0, \pi)$ , de modo que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}. \quad (\text{F.21})$$

Com isto podemos introduzir a:

**Definição F.3.2** *Dados os vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , não nulos, do espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , definiremos o ângulo entre os vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , como sendo o valor  $\theta$  obtido acima (veja a figura abaixo).*



**Observação F.3.5** De (F.21) segue que:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta). \quad (\text{F.22})$$

Tendo a noção de ângulo entre vetores do espaço vetorial com produto interno  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , podemos introduzir a noção de "ortogonalidade" entre vetores de  $\mathbb{R}^n$ , a saber:

**Definição F.3.3** *Dados os vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , não nulos, do espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , diremos que o vetor  $\vec{x}$  é ortogonal ao vetor  $\vec{y}$ , indicando por  $\vec{x} \perp \vec{y}$ , se*

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = 0. \quad (\text{F.23})$$

**Observação F.3.6**

1. *Observemos que se os vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  são vetores não nulos, do espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , então,*

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \text{se, e somente se,} \quad \text{o ângulo entre eles for igual a } \frac{\pi}{2}. \quad (\text{F.24})$$

*De fato, pois*

$$\begin{aligned} \vec{x} \perp \vec{y} \\ \text{se, e somente se,} \quad 0 = \vec{x} \bullet \vec{y} \\ \stackrel{(\text{F.21})}{=} \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta). \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

*Como*

$$\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \neq 0,$$

teos que (F.25) será equivalente a

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= 0, \\ \text{ou seja, } \theta &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

como afirmamos.

2. Outras propriedades relacionadas com a ortogonalidade de vetores no espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  serão estudadas ao longo destas notas.

No espaço vetorial real com produto interno  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  vale o:

**Teorema F.3.1 (de Pitágoras)** *Sejam  $\vec{x}, \vec{y}$  vetores do espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ . Então, o vetor  $\vec{x}$  é ortogonal ao vetor  $\vec{y}$  se, e somente se, vale a seguinte identidade*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2, \quad (\text{F.26})$$

conhecida como identidade de Pitágoras.

#### Demonstração:

Do item 1. da Observação F.3.6 acima, segue que

$$\begin{aligned} & \vec{x} \perp \vec{y} \\ \text{se, e somente se, } & \vec{x} \bullet \vec{y} = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

Mas

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 & \stackrel{(\text{N1})}{=} (\vec{x} + \vec{y}) \bullet (\vec{x} + \vec{y}) \\ & \stackrel{\text{item (PI2) da Proposição F.2.1}}{=} \vec{x} \bullet \vec{x} + \vec{x} \bullet \vec{y} + \underbrace{\vec{y} \bullet \vec{x}}_{\substack{\text{item (PI1) da Proposição F.2.1} \\ = \vec{x} \bullet \vec{y}}} + \vec{y} \bullet \vec{y} \\ & \stackrel{\text{item 3. da Observação F.3.2}}{=} \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x} \bullet \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2. \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

Logo, de (F.27) e (F.28), segue que

$$\begin{aligned} & \vec{x} \bullet \vec{y} = 0 \\ \text{se, e somente se, } & \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado. □

## F.4 Conjuntos abertos, fechados e compactos em $\mathbb{R}^n$

Para estudarmos o comportamento de funções a valores reais, de várias variáveis reais, precisaremos de algumas definições e propriedades que estarão contidas nesta seção.

Para o que segue vamos considerar o espaço vetorial real  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , munido das operações de adição, multiplicação por escalar, produto interno, norma, definidas na seção anterior.

Começaremos pela:

**Definição F.4.1** *Sejam*

$$\vec{x}_0 \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

e  $r > 0$ .

*Definimos a bola aberta de centro em  $\vec{x}_0$  e raio  $r$ , indicada por  $B_r(\vec{x}_0)$ , como sendo o seguinte subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ :*

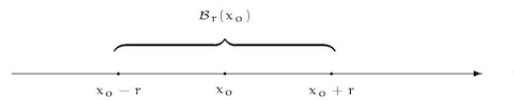
$$B_r(\vec{x}_0) \doteq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}. \tag{BA}$$

**Observação F.4.1** *Uma bola aberta de centro em  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e raio  $r > 0$  é o conjunto formado por todos os elementos de  $\mathbb{R}^n$ , que distam menos que  $r$ , do vetor  $\vec{x}_0$ .*

**Exemplo F.4.1** *Em  $\mathbb{R}$ , isto é, para  $n = 1$ , temos que*

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &\doteq \{x \in \mathbb{R} ; \underbrace{|x - x_0|}_{-r < x - x_0 < r} < r\} \\ &= (x_0 - r, x_0 + r), \end{aligned} \tag{F.29}$$

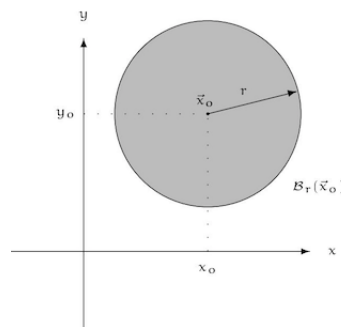
*isto é, é o intervalo aberto de comprimento  $2r$ , cujo ponto médio é o ponto  $x_0$  (veja a figura abaixo).*



**Exemplo F.4.2** *Em  $\mathbb{R}^2$ , isto é, para  $n = 2$ , temos que*

$$\begin{aligned} B_r(\vec{x}_0) &= \{\vec{x} \doteq (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}_{\stackrel{(F.8)}{=} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}, \end{aligned} \tag{F.30}$$

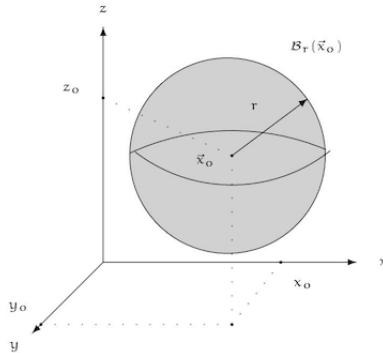
*isto é, é o conjunto formado por todos pontos pertencentes ao "interior" da circunferência de centro em  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e raio  $r > 0$  (veja a figura abaixo).*



**Exemplo F.4.3** Em  $\mathbb{R}^3$ , isto é, para  $n = 3$ , temos que

$$\begin{aligned} B_r(\vec{x}_0) &= \{\vec{x} \doteq (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}_{\stackrel{\text{(F.9)}}{=} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} < r\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

isto é, é o conjunto formado por todos os pontos pertencentes ao "interior" da superfície esférica de centro em  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  e raio  $r > 0$  (veja a figura abaixo).



A partir da definição de bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  (ou seja, da Definição F.4.1), podemos introduzir as seguintes noções:

**Definição F.4.2** Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto não vazio.

1. Diremos que  $\vec{x}_0 \in A$  é um **ponto interior do conjunto  $A$** , se existir uma bola aberta de centro em  $\vec{x}_0$ , inteiramente contida no conjunto  $A$ , ou seja, podemos encontrar  $r > 0$ , de modo que

$$B_r(\vec{x}_0) \subseteq A. \quad (\text{PI})$$

2. Diremos que  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  é um **ponto de fronteira do conjunto  $A$** , se toda bola aberta de centro em  $\vec{x}_0$ , intercepta o conjunto  $A$  e seu complementar  $A^c$ , isto é, para cada  $r > 0$ , temos que

$$B_r(\vec{x}_0) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_r(\vec{x}_0) \cap A^c \neq \emptyset, \quad (\text{PF})$$

onde  $A^c$  denota o conjunto complementar do conjunto  $A$ , em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,

$$A^c \doteq \mathbb{R}^n \setminus A.$$

3. Diremos que  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  é um **ponto exterior do conjunto  $A$** , se ele for ponto interior do conjunto  $A^c$ .
4. Diremos que  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  é um **ponto do conjunto acumulação do conjunto  $A$** , se toda bola aberta de centro em  $\vec{x}_0$ , intercepta o conjunto  $A$  em, pelo menos, um ponto diferente do ponto  $\vec{x}_0$ , isto é, para cada  $r > 0$ , temos que

$$[B_r(\vec{x}_0) \cap A] \setminus \{\vec{x}_0\} \neq \emptyset. \quad (\text{PA})$$

5. Diremos que  $\vec{x}_0 \in A$  é um ponto isolado do conjunto  $\underline{A}$ , se o ponto  $\vec{x}_0$  não é um ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ .

Aplicaremos os conceitos acima ao:

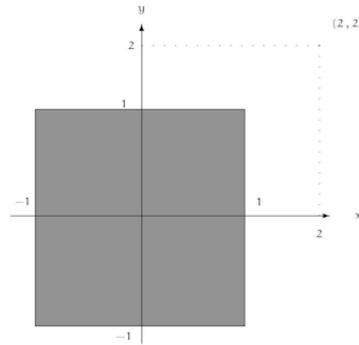
**Exemplo F.4.4** *Seja*

$$\begin{aligned} A &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(2, 2)\} \\ &= [-1, 1] \times [-1, 1] \cup \{(2, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

*Encontrar todos os pontos interiores, de fronteira, de acumulação e isolados do conjunto  $\underline{A}$ .*

**Resolução:**

Notemos que o conjunto  $\underline{A}$ , dado por (F.32), é formado pelos pontos que estão sobre e dentro do quadrado do  $\mathbb{R}^2$ , dado por  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , reunido com conjunto formado pelo ponto  $(2, 2)$  (veja a figura abaixo).



Observemos que todos os pontos do conjunto

$$\begin{aligned} B &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1 \text{ e } -1 < y < 1\} \\ &= (-1, 1) \times (-1, 1) \end{aligned}$$

são pontos interiores do conjunto  $\underline{A}$ .

De fato pois, para cada  $\vec{x}_0 \in B$ , podemos encontrar um raio  $r = r(\vec{x}_0) > 0$ , de modo que

$$B_r(\vec{x}_0) \subseteq B.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

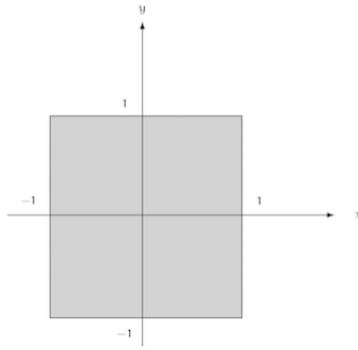
Por outro lado, os pontos do conjunto

$$\begin{aligned} C &\doteq \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1\} \\ &\cup \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(2, 2)\}, \end{aligned}$$

são todos os pontos de fronteira do conjunto  $\underline{A}$ .

De fato pois, para cada  $\vec{x}_0 \in C$  e  $r > 0$ , segue que

$$B_r(\vec{x}_0) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_r(\vec{x}_0) \cap A^c \neq \emptyset.$$



Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Temos também que os pontos do conjunto

$$\begin{aligned} D &\doteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \right\} \\ &= [-1, 1] \times [-1, 1] \end{aligned}$$

são pontos de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ .

De fato pois, para cada  $\vec{x}_0 \in D$  e  $r > 0$ , segue que

$$[\mathcal{B}_r(\vec{x}_0) \cap A] \setminus \{\vec{x}_0\} \neq \emptyset.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Os pontos do conjunto

$$A^c \doteq \mathbb{R}^2 \setminus A,$$

são pontos exteriores do conjunto  $\underline{A}$ .

De fato pois, para cada  $\vec{x}_0 \in A^c$  podemos encontrar  $r > 0$  de modo que

$$\mathcal{B}_r(\vec{x}_0) \subseteq A^c.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

O ponto

$$(2, 2) \in \mathbb{R}^2$$

não é um ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ .

De fato, pois, por exemplo, a bola de centro no ponto  $(2, 2)$  e raio  $r = 1$ , não contém nenhum ponto do conjunto  $\underline{A}$  diferente, do ponto  $(2, 2)$ .

Portanto o ponto

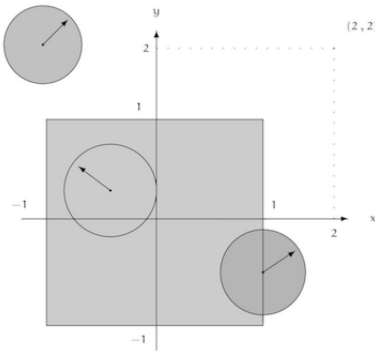
$$(2, 2) \in \mathbb{R}^2$$

será um ponto isolado do conjunto  $\underline{A}$ .

Resumindo, na figura abaixo temos que todo ponto do conjunto  $\underline{C}$  é um ponto de fronteira do conjunto  $\underline{A}$ , todo ponto do conjunto  $\underline{B}$  é ponto interior do conjunto  $\underline{A}$ , todo ponto do conjunto  $\underline{D}$  é ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$  e todo ponto do conjunto  $A^c \cup \{(2, 2)\}$  é ponto exterior do conjunto  $\underline{A}$ .

□

Em geral temos a:



**Proposição F.4.1** *Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

*Se  $\vec{x}_0$  é ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ , então temos somente duas possibilidades, a saber:*

1. *ou  $\vec{x}_0$  é ponto interior do conjunto  $\underline{A}$ ;*
2. *ou  $\vec{x}_0$  é ponto de fronteira do conjunto  $\underline{A}$ .*

**Demonstração:**

Como, por hipótese,  $\vec{x}_0$  é ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ , toda bola  $\mathcal{B}_r(\vec{x}_0)$  intercepta o conjunto  $\underline{A}$  em um ponto, diferente de  $\vec{x}_0$ , isto é,

$$[\mathcal{B}_r(\vec{x}_0)] \setminus \{\vec{x}_0\} \neq \emptyset.$$

Suponhamos que  $\vec{x}_0$  **não** é um ponto interior do conjunto  $\underline{A}$ , isto é, que existe  $r_0 > 0$ , de modo que  $\mathcal{B}_{r_0}(\vec{x}_0)$  não está contida no conjunto  $\underline{A}$ , ou ainda, para cada  $s \in (0, r_0]$ , temos que a bola  $\mathcal{B}_s(\vec{x}_0)$  não está contida no conjunto  $\underline{A}$ , ou seja,

$$\mathcal{B}_s(\vec{x}_0) \cap A^c \neq \emptyset \quad \text{para cada } s \in (0, r_0).$$

Com isto, para cada  $s \in (0, r_0]$ , segue que a bola  $\mathcal{B}_s(\vec{x}_0)$  contém pontos do conjunto  $\underline{A}$  (pois  $\vec{x}_0$  é ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ ) e pontos que estão no conjunto  $\underline{A}^c$  (pois deverá conter pontos que não pertencem ao conjunto  $\underline{A}$ ), ou seja,  $\vec{x}_0$  é um ponto de fronteira do conjunto  $\underline{A}$ , completando a demonstração do resultado. □

Temos também a:

**Definição F.4.3** *Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  não vazio.*

- (i) *Diremos que o conjunto  $\underline{A}$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ , se todo ponto do conjunto  $\underline{A}$  for um ponto interior do conjunto  $\underline{A}$ .*
- (ii) *Diremos que o conjunto  $\underline{A}$  é um subconjunto fechado em  $\mathbb{R}^n$  se seu conjunto complementar em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, o conjunto  $\underline{A}^c$ , for um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ .*

Deixaremos a resolução dos seguintes exercícios para o leitor.

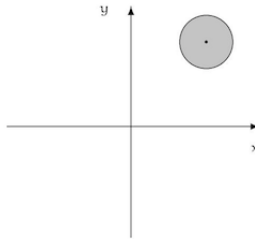
**Exercício F.4.1** *O conjunto*

$$A \doteq \mathbb{R}^2$$

é um conjunto aberto e fechado em  $\mathbb{R}^2$  (veja a figura abaixo).

**Resolução:**

De fato, pois todo ponto de  $\mathbb{R}^2$  é um ponto interior de  $\mathbb{R}^2$  e o complementar de  $\mathbb{R}^2$ , em  $\mathbb{R}^2$ , é o conjunto vazio, que é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ .



□

**Exercício F.4.2** *O conjunto*

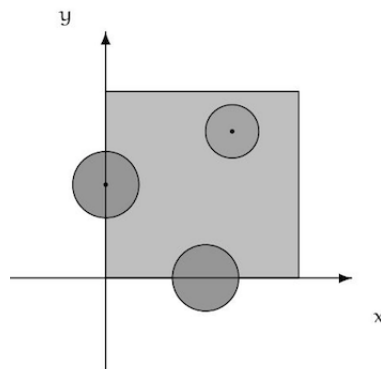
$$\begin{aligned} A &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\} \\ &= [0, \infty) \times [0, \infty), \end{aligned}$$

é um subconjunto fechado em  $\mathbb{R}^2$  (veja a figura abaixo).

**Resolução:**

De fato, pois o seu conjunto complementar, em  $\mathbb{R}^2$ , é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ .

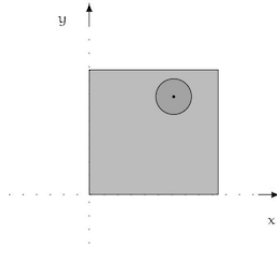
Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

**Exercício F.4.3** *O conjunto*

$$\begin{aligned} A &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0 \text{ e } y > 0\} \\ &= (0, \infty) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$  (veja a figura abaixo).



**Resolução:**

De fato, pois todo ponto do conjunto  $\underline{A}$  é um ponto interior do conjunto  $\underline{A}$ .  
Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

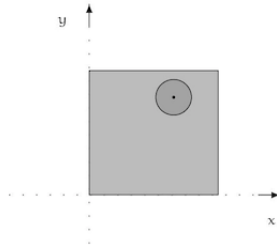
□

**Exercício F.4.4** *Toda bola aberta  $B_r(\vec{x}_0)$  de  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Resolução:**

De fato, pois todo ponto do conjunto  $B_r(\vec{x}_0)$  é um ponto interior do conjunto  $B_r(\vec{x}_0)$  (veja a figura abaixo).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.



□

Deixaremos para o leitor o:

**Exercício F.4.5** *Dê exemplos de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  que não são subconjunto abertos e nem fechados em  $\mathbb{R}^2$ .*

Podemos agora introduzir os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ :

**Definição F.4.4** *Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

1. *Definimos o **fecho do conjunto  $A$**  em  $\mathbb{R}^n$ , indicado por  $\overline{A}$ , como sendo o conjunto formado por todos os pontos do conjunto  $\underline{A}$ , juntamente com os pontos de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ , em  $\mathbb{R}^n$ .*
2. *Definimos a **fronteira do conjunto  $A$**  em  $\mathbb{R}^n$ , indicada por  $\partial A$ , como o conjunto formado por todos os pontos de  $\mathbb{R}^n$  que são pontos de fronteira do conjunto  $\underline{A}$ , em  $\mathbb{R}^n$ .*
3. *Definimos a **interior do conjunto  $A$**  em  $\mathbb{R}^n$ , indicado por  $\overset{\circ}{A}$ , como o conjunto formado por todos do conjunto  $\underline{A}$  que são pontos interiores do conjunto  $\underline{A}$ , em  $\mathbb{R}^n$ .*

Deixaremos para o leitor a resolução do:

**Exercício F.4.6** *Encontre o interior, o fecho e a fronteira de cada um conjuntos dos Exercício F.4.1 até o Exercício F.4.4.*

Temos agora a:

**Proposição F.4.2** *Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  então:*

1. o conjunto  $\bar{A}$  é um subconjunto fechado em  $\mathbb{R}^n$ ;
2. o conjunto  $\overset{\circ}{A}$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ ;
3. o conjunto  $\partial A$  é um subconjunto fechado em  $\mathbb{R}^n$ ;
4. Temos que

$$\bar{A} = A \cup \partial A \quad e \quad \overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset.$$

**Demonstração:**

A demonstração dessas propriedades serão deixadas como exercícios para o leitor. □

Uma caracterização dos subconjuntos fechados em  $\mathbb{R}^n$  é dada pela:

**Proposição F.4.3** *O conjunto  $A$  é um subconjunto fechado em  $\mathbb{R}^n$  se, e somente, se*

$$A = \bar{A}.$$

**Demonstração:**

De fato, o conjunto  $A$  é um subconjunto fechado em  $\mathbb{R}^n$  se, e somente se, o conjunto  $A^c$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ .

Mas, o conjunto  $A^c$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  se, e somente se, todo ponto do conjunto  $A^c$  é um ponto exterior do conjunto  $A$ , isto é, se, e somente se, todo ponto de acumulação do conjunto  $A$  pertence ao conjunto  $A$ , ou seja, se e somente se,  $A = \bar{A}$ , completando a demonstração do resultado. □

Finalizando, temos as seguintes definições:

**Definição F.4.5** *Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

*Se podemos encontrar  $r > 0$ , de modo que*

$$A \subseteq B_r(\vec{0}), \tag{CL}$$

*diremos que o conjunto  $A$  é um subconjunto limitado em  $\mathbb{R}^n$ .*

*Se o conjunto  $A$  é um subconjunto fechado e limitado em  $\mathbb{R}^n$ , ele será denominado subconjunto compacto em  $\mathbb{R}^n$ .*

Deixaremos a cargo do leitor o:

**Exercício F.4.7** *Mostre que o conjunto  $A$  do Exemplo F.4.4, é um subconjunto compacto em  $\mathbb{R}^n$ .*

Para finalizar este capítulo temos o:

**Teorema F.4.1 (de Bolzano-Weierstrass)** *Todo subconjunto limitado do  $\mathbb{R}^n$ , que possui infinitos elementos tem, pelo menos, um ponto de acumulação.*

**Demonstração:**

A demonstração deste resultado será omitida e pode ser encontrada em livros de Análise Matemática (veja, por exemplo, Teorema 2.37, página 38 de *W. Rudin - Principles of Mathematical Analysis*).

□



## Apêndice G

# Funções a valores vetoriais - curvas parametrizadas

### G.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de uma classe importante de funções, a saber, as funções, de uma variável real, a valores vetoriais e as curvas parametrizadas.

Denotaremos a base canônica do espaço vetorial  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  por

$$\beta \doteq \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\},$$

onde

$$\vec{e}_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-ésima posição}}, 0, \dots, 0, 0) \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{G.1})$$

#### Observação G.1.1

1. No caso  $n = 2$ , podemos também indicar o vetor  $\vec{e}_1$  por  $\vec{i}$  e o vetor  $\vec{e}_2$  por  $\vec{j}$ , isto é

$$\vec{i} = \vec{e}_1 \doteq (1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{j} = \vec{e}_2 \doteq (0, 1).$$

2. No caso  $n = 3$ , podemos também indicar o vetor  $\vec{e}_1$  por  $\vec{i}$ , o vetor  $\vec{e}_2$  por  $\vec{j}$  e o vetor  $\vec{e}_3$  por  $\vec{k}$ , onde

$$\vec{i} = \vec{e}_1 \doteq (1, 0, 0), \quad \vec{j} = \vec{e}_2 \doteq (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = \vec{e}_3 \doteq (0, 0, 1).$$

3. Notemos que todo elemento de  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto  $\beta$ , dado por (G.1).

Começaremos pela:

### G.2 Funções de uma variável real a valores vetoriais

**Definição G.2.1** Sejam  $A$  um subconjunto aberto  $\mathbb{R}$  e  $F_1, F_2, \dots, F_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  funções.

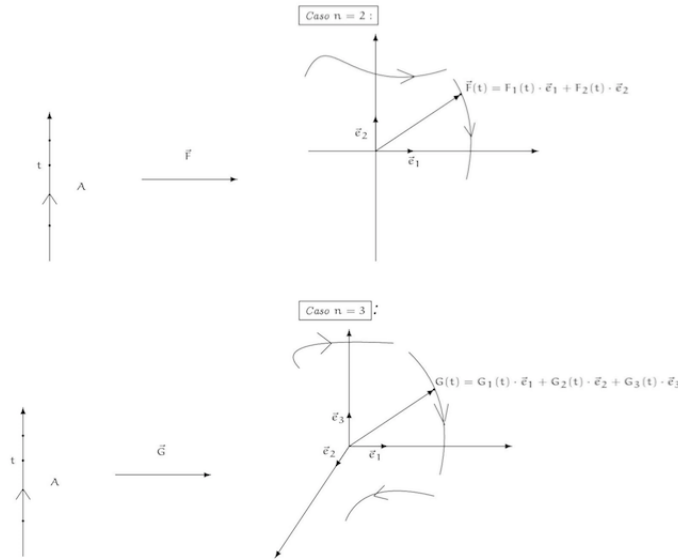
Podemos definir uma função  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  (ou  $\vec{F} : A \rightarrow V^n$ ) dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &\doteq (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)) \\ &\doteq F_1(t) \cdot \vec{e}_1 + F_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \dots + F_n(t) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para cada } t \in A. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Tal função será dita função, de uma variável real, a valores vetoriais ou, simplesmente, função vetorial.

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a função  $F_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  será denominada  $i$ -ésima função coordenada (ou componente) associada à função vetorial  $\vec{F}$ .

**Observação G.2.1** As figuras abaixo dizem respeito a uma função vetorial  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  (caso  $n = 2$ ) e a uma função vetorial  $\vec{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  (caso  $n = 3$ ).



Podemos operar com funções vetoriais operando com suas funções componentes, ou seja:

**Definição G.2.2** Sejam  $A$  subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$  e  $\vec{F}, \vec{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções vetoriais tais que

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &\doteq (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)) \\ &\doteq F_1(t) \cdot \vec{e}_1 + F_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \dots + F_n(t) \cdot \vec{e}_n \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

$$\begin{aligned} \vec{G}(t) &\doteq (G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)) \\ &\doteq G_1(t) \cdot \vec{e}_1 + G_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \dots + G_n(t) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para cada } t \in A. \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

1. Definimos a função vetorial  $(\vec{F} + \vec{G}) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo

$$\begin{aligned} (\vec{F} + \vec{G})(t) &\doteq \vec{F}(t) + \vec{G}(t) = (F_1(t) + G_1(t), F_2(t) + G_2(t), \dots, F_n(t) + G_n(t)) \\ &= [F_1(t) + G_1(t)] \cdot \vec{e}_1 + [F_2(t) + G_2(t)] \cdot \vec{e}_2 + \dots + [F_n(t) + G_n(t)] \cdot \vec{e}_n, \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

para cada,  $t \in A$ , que será dita função vetorial soma, da função vetorial  $\vec{F}$  com a função vetorial  $\vec{G}$ .

2. De modo semelhante definimos a função vetorial  $(\vec{F} - \vec{G}) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo

$$\begin{aligned} (\vec{F} - \vec{G})(t) &\doteq \vec{F}(t) - \vec{G}(t) = (F_1(t) - G_1(t), F_2(t) - G_2(t), \dots, F_n(t) - G_n(t)) \\ &= [F_1(t) - G_1(t)] \cdot \vec{e}_1 + [F_2(t) - G_2(t)] \cdot \vec{e}_2 + \dots + [F_n(t) - G_n(t)] \cdot \vec{e}_n, \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

para cada,  $t \in A$ , que será dita função vetorial, diferença da função vetorial  $\vec{F}$  pela função vetorial  $\vec{G}$ .

3. Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  definimos a função  $(\alpha \cdot \vec{F}) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \vec{F})(t) &\doteq \alpha \cdot \vec{F}(t) = (\alpha F_1(t), \alpha F_2(t), \dots, \alpha F_n(t)) \\ &= [\alpha F_1(t)] \cdot \vec{e}_1 + [\alpha F_2(t)] \cdot \vec{e}_2 + \dots + [\alpha F_n(t)] \cdot \vec{e}_n, \end{aligned} \quad (G.7)$$

para cada  $t \in A$ , que será dita função vetorial, produto da função vetorial  $\vec{F}$  pelo número real  $\alpha$ .

4. Além disso, podemos definir a função  $(\vec{F} \bullet \vec{G}) : A \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo

$$\begin{aligned} (\vec{F} \bullet \vec{G})(t) &\doteq \vec{F}(t) \bullet \vec{G}(t) \\ &= F_1(t) G_1(t) + F_2(t) G_2(t) + \dots + F_n(t) G_n(t), \end{aligned} \quad (G.8)$$

para cada  $t \in A$ , que será dita função produto escalar, da função vetorial  $\vec{F}$  pela função vetorial  $\vec{G}$ .

5. Se  $n = 3$  podemos definir a função  $(\vec{F} \times \vec{G}) : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  como sendo

$$\begin{aligned} (\vec{F} \times \vec{G})(t) &\doteq \vec{F}(t) \times \vec{G}(t) \\ &= (F_1(t), F_2(t), F_3(t)) \times (G_1(t), G_2(t), G_3(t)) \\ &= (F_2(t) G_3(t) - F_3(t) G_2(t), -(F_1(t) G_3(t) - F_3(t) G_1(t)), F_1(t) G_2(t) - F_2(t) G_1(t)) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (G.9)$$

para cada  $t \in A$ , que será dita função produto vetorial, da função vetorial  $\vec{F}$  pela função vetorial  $\vec{G}$ .

Podemos estudar limites de funções introduzidas acima, estudando o limite de suas funções componentes, a saber, temos a:

**Definição G.2.3** Sejam  $\underline{A}$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$  e  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  função vetorial, tal que

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &\doteq (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)) \\ &\doteq F_1(t) \cdot \vec{e}_1 + F_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \dots + F_n(t) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para cada } t \in A \end{aligned} \quad (G.10)$$

e  $t_0 \in \mathbb{R}$  ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ , em  $\mathbb{R}^n$ .

Diremos que existe limite de  $\vec{F}(t)$  quando  $t$  tende a  $t_0$  e dá

$$L \doteq (L_1, L_2, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (G.11)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F_i(t) = L_i, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (G.12)$$

Neste caso escreveremos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) &\doteq L = (L_1, L_2, \dots, L_n) \\ &= L_1 \cdot \vec{e}_1 + L_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + L_n \cdot \vec{e}_n. \end{aligned} \quad (G.13)$$

**Observação G.2.2**

1. A Definição G.2.3 acima nos diz que, caso exista o limite  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t)$ , deveremos ter:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) &= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} F_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} F_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} F_n(t) \right), \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} F_1(t) \right) \cdot \vec{e}_1 + \left( \lim_{t \rightarrow t_0} F_2(t) \right) \cdot \vec{e}_2 + \dots + \left( \lim_{t \rightarrow t_0} F_n(t) \right) \cdot \vec{e}_n. \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

ou seja, para estudarmos limites de funções vetoriais, em um ponto  $t_0$  (um ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ ), basta sabermos estudar os limites de suas funções coordenadas

$$F_i : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

no ponto  $t_0$ , isto é, de funções a valores reais, de uma variável real, no ponto  $t_0$  (estudadas no Cálculo 1).

2. Rigorosamente, a definição de limites para funções vetoriais **NÃO** é a que exibimos acima. A Definição G.2.3 acima é, na verdade, uma conseqüência da definição original, que é a seguinte:

Diremos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = L \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{G.15})$$

se, e somente se, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar

$$\delta > 0,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \text{se } 0 < |t - t_0| < \delta, \\ \text{teremos: } \quad \left\| \vec{F}(t) - L \right\| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

onde  $|\cdot|$  e  $\|\cdot\|$  denotam, o módulo de números reais e a norma usual em  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que a definição que demos anteriormente é equivalente a essa introduzida agora.

Como conseqüência da Definição G.2.3 e das propriedades de limites de funções a valores reais, de uma variável real (estudadas no Cálculo 1) temos a:

**Proposição G.2.1** *Sejam  $\vec{F}, \vec{G} : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções vetoriais,  $t_0 \in \mathbb{R}$  ponto de acumulação do conjunto  $\underline{A}$ , em  $\mathbb{R}$ , e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

*Suponhamos que existam os limites:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = L \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) = M. \quad (\text{G.17})$$

*Então:*

1. *existem  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \pm \vec{G})(t)$  e, além disso, teremos*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \pm \vec{G})(t) &= L \pm M, \\ \text{isto é, } \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \pm \vec{G})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t). \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$



2. existe  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha \cdot \vec{F})(t)$  e, além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha \cdot \vec{F})(t) &= \alpha \cdot L, \\ \text{isto é, } \lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha \cdot \vec{F})(t) &= \alpha \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t). \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

3. existe  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \bullet \vec{G})(t)$  e, além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \bullet \vec{G})(t) &= L \bullet M, \\ \text{isto é, } \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \bullet \vec{G})(t) &= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \right) \bullet \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) \right). \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

4. para o caso  $n = 3$ , existe  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \times \vec{G})(t)$  e, além disso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \times \vec{G})(t) &= L \times M, \\ \text{isto é, } \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{F} \times \vec{G})(t) &= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \right) \times \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) \right). \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

### Demonstração:

As demonstrações dos itens acima são conseqüências da Definição G.2.3 e das propriedades elementares de limites para funções a valores reais, de uma variável real (estudadas no Cálculo 1).

Os detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

□

Apliquemos os resultados acima ao:

**Exemplo G.2.1** *Sejam  $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  funções vetoriais dadas por:*

$$\vec{F}(t) \doteq \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + (t^2 + 1) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3, \quad (\text{G.22})$$

$$\vec{G}(t) \doteq \text{cos}(t) \cdot \vec{e}_1 + (t + 1) \cdot \vec{e}_2 + t^3 \cdot \vec{e}_3, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{G.23})$$

Calcule, se existir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} + \vec{G})(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} - \vec{G})(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} (2 \cdot \vec{F})(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} \bullet \vec{G})(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} \times \vec{G})(t).$$

### Resolução:

Notemos que, neste caso, temos que as respectivas funções componentes  $F_1, F_2, F_3, G_1, G_2, G_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , serão dadas por:

$$F_1(t) \doteq \text{sen}(t), \quad F_2(t) \doteq t^2 + 1, \quad F_3(t) \doteq t, \quad (\text{G.24})$$

$$G_1(t) \doteq \text{cos}(t), \quad G_2(t) \doteq t + 1, \quad G_3(t) \doteq t^3, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{G.25})$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) &\stackrel{(G.22)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + (t^2 + 1) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3 \right] \\
 &\stackrel{\text{Definição G.2.3 (veja (G.13))}}{=} \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \text{sen}(t) \right] \cdot \vec{e}_1 + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 1) \right] \cdot \vec{e}_2 + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} t \right] \cdot \vec{e}_3 \\
 &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\
 &= \vec{e}_2,
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) &\stackrel{(G.22)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \text{sen}(t), t^2 + 1, t \right) \\
 &\stackrel{\text{Definição G.2.3 (veja (G.13))}}{=} \left( \lim_{t \rightarrow 0} \text{sen}(t), \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 1), \lim_{t \rightarrow 0} t \right) \\
 &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} (0, 1, 0). \tag{G.26}
 \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \vec{G}(t) &\stackrel{(F.23)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \cos(t) \cdot \vec{e}_1 + (t + 1) \cdot \vec{e}_2 + t^3 \cdot \vec{e}_3 \right] \\
 &\stackrel{\text{Definição G.2.3 (veja (G.13))}}{=} \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) \right] \cdot \vec{e}_1 + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} (t + 1) \right] \cdot \vec{e}_2 + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} t^3 \right] \cdot \vec{e}_3 \\
 &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\
 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2,
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \vec{G}(t) &\stackrel{(F.23)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \cos(t), t + 1, t^3 \right) \\
 &\stackrel{\text{Definição G.2.3 (veja (G.13))}}{=} \left( \lim_{t \rightarrow 0} \cos(t), \lim_{t \rightarrow 0} (t + 1), \lim_{t \rightarrow 0} t^3 \right) \\
 &\stackrel{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} (1, 1, 0). \tag{G.27}
 \end{aligned}$$

Logo, dos itens 1., 2., 3. e 4. da Proposição G.2.1, segue que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} + \vec{G})(t) &\stackrel{(G.18)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) + \lim_{t \rightarrow 0} \vec{G}(t) \\
 &\stackrel{(G.26) \text{ e } (G.27)}{=} (0, 1, 0) + (1, 1, 0) \\
 &= (1, 2, 0), \\
 \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} - \vec{G})(t) &\stackrel{(G.18)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) - \lim_{t \rightarrow 0} \vec{G}(t) \\
 &\stackrel{(G.26) \text{ e } (G.27)}{=} (0, 1, 0) - (1, 1, 0) \\
 &= (-1, 0, 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} (2 \cdot \vec{F})(t) &\stackrel{(G.19)}{=} 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) \\
&\stackrel{(G.26)}{=} 2 \cdot (0, 1, 0) \\
&= (0, 2, 0), \\
\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} \bullet \vec{G})(t) &\stackrel{(G.20)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) \bullet \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) \\
&\stackrel{(G.26) \text{ e } (G.27)}{=} (0, 1, 0) \bullet (1, 1, 0) \\
&= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\
&= 1, \\
\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} \times \vec{G})(t) &\stackrel{(G.21)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) \\
&\stackrel{(G.26) \text{ e } (G.27)}{=} (0, 1, 0) \times (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) \cdot \vec{e}_1 - (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) \cdot \vec{e}_2 + (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \cdot \vec{e}_3 \\
&= (-1) \cdot \vec{e}_3 \\
&= (0, 0, -1),
\end{aligned}$$

completando a resolução.

□

Tendo a noção de limites para funções de uma variável real a valores vetoriais podemos introduzir o conceito de continuidade para tais funções, mais precisamente:

**Definição G.2.4** *Sejam  $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  função vetorial e  $t_0 \in A$ , um ponto de acumulação do conjunto  $A$ , em  $\mathbb{R}$ .*

1. Diremos que a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $t_0$ , se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0). \quad (G.28)$$

2. Diremos que a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua no conjunto  $A$  se ela for contínua em cada um dos pontos do conjunto  $A$  (que forem de acumulação do conjunto  $A$ ).

### Observação G.2.3

1. Na situação da Definição G.2.4 acima, temos que uma função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $t_0$  se, e somente, se:

(a) a função vetorial  $\vec{F}$  está definida em  $t_0$ ;

(b) existe o limite  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t)$ ;

(c) vale a identidade (G.28), ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0).$$

2. Segue das Definições G.2.3 e G.2.4 que, uma função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $t_0 \in A$  (ponto de acumulação do conjunto  $A$ ) se, e somente se, suas funções coordenadas, isto é, as funções  $F_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , forem funções contínuas em  $t_0$ , isto é, a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $t_0 \in A$  se, e somente se,

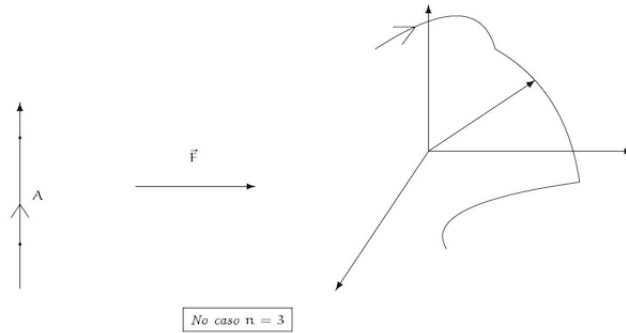
$$\lim_{t \rightarrow t_0} F_i(t) = F_i(t_0), \quad (\text{G.29})$$

para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

3. Geometricamente, uma função vetorial  $\vec{F}$  será contínua em  $t_0$  se, e somente se, a representação geométrica do conjunto

$$\{\vec{F}(t) ; t \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

é uma curva sem "saltos", ou seja, uma curva cuja representação geométrica do conjunto acima pode ser obtido por meio de um único traço, sem que haja necessidade de se tirar o lápis do papel (veja a figura abaixo, para o caso  $n = 3$ ).



Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo G.2.2** Seja  $\vec{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função vetorial dada por

$$\vec{F}(t) \doteq \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + (t^2 + 1) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{G.30})$$

Mostre que a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

### Resolução:

De fato, notemos que as funções coordenadas associadas à função vetorial  $\vec{F}$ , a saber, as funções  $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$F_1(t) \doteq \text{sen}(t), \quad F_2(t) \doteq t^2 + 1, \quad F_3(t) \doteq t, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{G.31})$$

são funções a valores reais, de uma variável real, que são contínuas em  $\mathbb{R}$  (visto no Cálculo 1).

Logo, do item 2. da Observação G.2.3, segue que a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , completando a resolução. □

Como consequência da Proposição G.2.1 temos o:

**Corolário G.2.1** *Sejam  $\vec{F}, \vec{G} : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções vetoriais contínuas em  $t_0 \in A$ ,  $t_0$  um ponto de acumulação do conjunto  $A$ , em  $\mathbb{R}$ , e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

*Então as funções vetoriais  $(\vec{F} \pm \vec{G})$ ,  $(\alpha \cdot \vec{F})$ ,  $(\vec{F} \bullet \vec{G})$  e, no caso  $n = 3$ , a função vetorial  $(\vec{F} \times \vec{G})$ , são funções vetoriais contínuas em  $t_0$ .*

**Demonstração:**

A demonstração segue do item 2. da Observação G.2.3 e das propriedades básicas de continuidade de funções a valores reais, de uma variável real (estudadas na disciplina de Cálculo I).

Os detalhes da mesma serão deixados como exercício para o leitor. □

Além disso temos a:

**Proposição G.2.2** *Sejam  $B$  um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}$ ,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $s_0 \in B$ , de modo que o conjunto  $f(B)$  é um subconjunto de  $A$ , que é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}$ , e  $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  função vetorial contínua em  $t_0 = f(s_0)$ .*

*Então a função vetorial  $(\vec{F} \circ f) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde*

$$(\vec{F} \circ f)(s) \doteq \vec{F}[f(s)], \quad \text{para cada } s \in B,$$

*será contínua em  $s_0$ .*

**Demonstração:**

De fato, suponhamos que

$$\vec{F}(t) \doteq (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)), \quad \text{para } t \in A. \quad (\text{G.32})$$

Então

$$\begin{aligned} (\vec{F} \circ f)(s) &= \vec{F}(f(s)) \\ &= (F_1(f(s)), F_2(f(s)), \dots, F_n(f(s))) \\ &= ((F_1 \circ f)(s), (F_2 \circ f)(s), \dots, (F_n \circ f)(s)), \quad \text{para } s \in B. \end{aligned}$$

Como a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $t_0 = f(s_0)$  segue, do item 2. da Observação G.2.3, que as funções componentes  $F_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , serão contínuas em  $t_0$ .

Assim, do Cálculo 1, sabemos que a função  $(F_i \circ f)$  será uma função contínua em  $s_0 \in B$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Portanto, da 2. da Observação G.2.3), segue que a função vetorial  $(\vec{F} \circ f)$  será contínua em  $s_0$ , completando a demonstração do resultado. □

Podemos tratar também da diferenciabilidade de funções vetoriais, a saber:

**Definição G.2.5** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}$  aberto,  $t_0 \in A$  e  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  função vetorial dada por*

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &\doteq (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)) \\ &= F_1(t) \cdot \vec{e}_1 + F_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \dots + F_n(t) \cdot \vec{e}_n, \end{aligned} \quad (\text{G.33})$$

*para cada  $t \in A$ .*

1. Diremos que a função vetorial  $\vec{F}$  é diferenciável em  $t_0$ , se existir o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t_0 + h) - \vec{F}(t_0)}{h}.$$

Neste caso o limite acima será denominado derivada da função vetorial  $\vec{F}$  em  $t_0$  e indicado por  $\vec{F}'(t_0)$ , isto é,

$$\vec{F}'(t_0) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t_0 + h) - \vec{F}(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{G.34})$$

2. Diremos que a função vetorial  $\vec{F}$  é diferenciável em  $\underline{A}$ , se a função vetorial  $\vec{F}$ , for diferenciável em cada um dos pontos do conjunto  $\underline{A}$ .

**Observação G.2.4** Seja  $\vec{F}: A \xrightarrow{\text{aberto}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função vetorial dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &\doteq F_1(t) \cdot \vec{e}_1 + F_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \cdots + F_n(t) \cdot \vec{e}_n \\ &= (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)), \end{aligned} \quad (\text{G.35})$$

para cada  $t \in A$ .

Notemos que do item 1. da Observação G.2.2, segue que a função vetorial  $\vec{F}$  é diferenciável em  $t_0 \in A$  se, e somente se, as funções coordenadas associadas à função vetorial  $\vec{F}$ , isto é, as funções  $F_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , forem funções a valores reais, de uma variável real, diferenciáveis em  $t_0$  (estudadas no Cálculo I).

Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} \vec{F}'(t_0) &= F_1'(t_0) \cdot \vec{e}_1 + F_2'(t_0) \cdot \vec{e}_2 + \cdots + F_n'(t_0) \cdot \vec{e}_n \\ &= (F_1'(t_0), F_2'(t_0), \dots, F_n'(t_0)), \end{aligned} \quad (\text{G.36})$$

isto é, para estudarmos a diferenciabilidade de funções vetoriais, basta estudarmos a diferenciabilidade de funções a valores reais, de uma variável real (visto no Cálculo I).

Aplicamos as ideias acima ao:

**Exemplo G.2.3** Seja  $\vec{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função vetorial dada por

$$\vec{F}(t) \doteq \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + (t^2 + 1) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{G.37})$$

Mostre que a função vetorial  $\vec{F}$  é uma função diferenciável em  $\mathbb{R}$  e encontre  $\vec{F}'(t)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Notemos que, neste caso, temos que as funções coordenadas associadas à função vetorial  $\vec{F}$  serão dadas por:

$$F_1(t) \doteq \text{sen}(t), \quad F_2(t) \doteq t^2 + 1, \quad F_3(t) \doteq t, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{G.38})$$

Observemos que, do Cálculo I, sabemos que a função  $F_i$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
 F_1'(t) &\stackrel{\text{(G.38)}}{=} \frac{d}{dt}[\text{sen}(t)] \\
 &= \cos(t), \\
 F_2'(t) &\stackrel{\text{(G.38)}}{=} \frac{d}{dt}[t^2 + 1] \\
 &= 2t, \\
 F_3'(t) &\stackrel{\text{(G.38)}}{=} \frac{d}{dt}[t] \\
 &= 1,
 \end{aligned} \tag{G.39}$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

Logo da Observação G.2.4 acima, segue que a função vetorial  $\vec{F}$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, além disso, teremos

$$\begin{aligned}
 \vec{F}'(t) &\stackrel{\text{(G.36)}}{=} (F_1'(t), F_2'(t), F_3'(t)) \\
 &\stackrel{\text{(G.39)}}{=} (\cos(t), 2t, 1),
 \end{aligned}$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$ , completando a resolução. □

Como consequência da Proposição G.2.1, temos a:

**Proposição G.2.3** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}$  aberto,  $t_0 \in A$ ,  $\vec{F}, \vec{G} : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções vetoriais diferenciáveis em  $t_0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

*Então:*

1. as funções vetoriais  $(\vec{F} \pm \vec{G})$  são diferenciáveis em  $t_0$  e, além disso,

$$(\vec{F} \pm \vec{G})'(t_0) = \vec{F}'(t_0) \pm \vec{G}'(t_0). \tag{G.40}$$

2. a função vetorial  $\alpha \cdot \vec{F}$  é diferenciável em  $t_0$  e, além disso,

$$(\alpha \cdot \vec{F})'(t_0) = \alpha \cdot \vec{F}'(t_0). \tag{G.41}$$

3. a função  $\vec{F} \bullet \vec{G}$  é diferenciável em  $t_0$  e, além disso,

$$(\vec{F} \bullet \vec{G})'(t_0) = \vec{F}'(t_0) \bullet \vec{G}(t_0) + \vec{F}(t_0) \bullet \vec{G}'(t_0). \tag{G.42}$$

4. se  $n = 3$ , a função vetorial  $(\vec{F} \times \vec{G})$  é diferenciável em  $t_0$  e, além disso,

$$(\vec{F} \times \vec{G})'(t_0) = \vec{F}'(t_0) \times \vec{G}(t_0) + \vec{F}(t_0) \times \vec{G}'(t_0). \tag{G.43}$$

### Demonstração:

Exibiremos a demonstração do item 3. .

A demonstração dos outros itens são consequências da Observação G.2.4 e das propriedades elementares de derivação para funções a valores reais, de uma variável real (estudadas na disciplina de Cálculo 1) e serão deixados como exercício para o leitor.

Observemos que

$$\begin{aligned}
 (\vec{F} \bullet \vec{G})'(t_0) &\stackrel{(G.8)}{=} (F_1 G_1 + F_2 G_2 + \cdots + F_n G_n)'(t_0) \\
 &\stackrel{\text{Cálculo 1}}{=} (F_1 G_1)'(t_0) + (F_2 G_2)'(t_0) + \cdots + (F_n G_n)'(t_0) \\
 &\stackrel{\text{Cálculo 1}}{=} [F_1'(t_0) G_1(t_0) + F_1(t_0) G_1'(t_0)] + [F_2'(t_0) G_2(t_0) + F_2(t_0) G_2'(t_0)] \\
 &\quad + \cdots + [F_n'(t_0) G_n(t_0) + F_n(t_0) G_n'(t_0)] \\
 &= \underbrace{[F_1'(t_0) G_1(t_0) + F_2'(t_0) G_2(t_0) + \cdots + F_n'(t_0) G_n(t_0)]}_{\stackrel{(G.8)}{=} \vec{F}'(t_0) \bullet \vec{G}(t_0)} \\
 &\quad + \underbrace{[F_1(t_0) G_1'(t_0) + F_2(t_0) G_2'(t_0) + \cdots + F_n(t_0) G_n'(t_0)]}_{\stackrel{(G.8)}{=} \vec{F}(t_0) \bullet \vec{G}'(t_0)} \\
 &= \vec{F}'(t_0) \bullet \vec{G}(t_0) + \vec{F}(t_0) \bullet \vec{G}'(t_0),
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Temos o seguinte resultado que relaciona as noções de continuidade e diferenciabilidade de funções vetoriais:

**Teorema G.2.1** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}$  aberto,  $t_0 \in A$ ,  $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função vetorial que é diferenciável em  $t_0$ .*

*Então a função vetorial  $\vec{F}$  será contínua em  $t_0$ .*

**Demonstração:**

Segue da Observação G.2.4 que a função vetorial  $\vec{F}$  será diferenciável em  $t_0$  se, e somente se, cada uma das suas funções coordenadas, isto é, as funções  $F_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , forem diferenciáveis em  $t_0$ .

Logo, do Cálculo I, segue que as funções coordenadas, isto é, as funções  $F_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , serão contínuas em  $t_0$ .

Assim, do item 2. da Observação G.2.3, segue que a função vetorial  $\vec{F}$  será uma contínua em  $t_0$ , como queríamos demonstrar. □

**Observação G.2.5** Não vale a recíproca do resultado acima, isto é, existem funções vetoriais contínuas em um ponto que não são diferenciáveis nesse ponto.

Por exemplo, a função vetorial  $\vec{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\vec{F}(t) \doteq (t, |t|), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \tag{G.44}$$

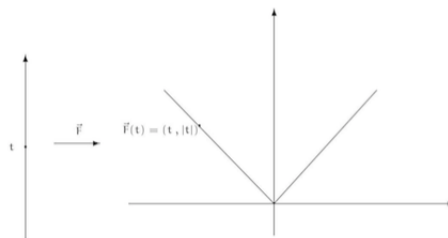
é contínua em  $t = 0$ , mas não é diferenciável em  $t = 0$  (veja a figura abaixo).

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Temos um resultado que nos dá condições suficientes para que a composta de uma função vetorial com uma função a valores reais, de uma variável real, seja uma função vetorial diferenciável, a saber:

**Proposição G.2.4** *Sejam  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  subconjunto abertos em  $\mathbb{R}$ ,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $s_0 \in B$ , tal que  $f(B) \subseteq A$  e  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função vetorial diferenciável em  $t_0 = f(s_0)$ .*





Então a função vetorial  $(\vec{F} \circ f) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde

$$(\vec{F} \circ f)(s) \doteq \vec{F}[f(s)], \quad \text{para } s \in J, \quad (\text{G.45})$$

será uma função diferenciável em  $s_0$ .

Além disso, temos que

$$(\vec{F} \circ f)'(s_0) = \vec{F}'[f(s_0)] f'(s_0). \quad (\text{G.46})$$

### Demonstração:

A demonstração deste resultado, segue da Observação G.2.4 e da regra da cadeia para funções a valores reais, de uma variável real (visto na disciplina de Cálculo I).

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor. □

Podemos integrar funções vetoriais, como diz a:

**Definição G.2.6** Seja  $\vec{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função vetorial, tal que

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)) \\ &= F_1(t) \cdot \vec{e}_1 + F_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \dots + F_n(t) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para } t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (\text{G.47})$$

Diremos que a **função vetorial  $\vec{F}$  é integrável em  $[a, b]$**  se, e somente se, cada uma das suas funções componentes, isto é, as funções  $F_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , for uma função integrável em  $[a, b]$ .

Neste caso definiremos a **integral definida da função vetorial  $\vec{F}$  em  $[a, b]$** , que será indicada por  $\int_a^b \vec{F}(t) dt$ , como sendo:

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{F}(t) dt &\doteq \left( \int_a^b F_1(t) dt, \int_a^b F_2(t) dt, \dots, \int_a^b F_n(t) dt \right) \\ &= \left[ \int_a^b F_1(t) dt \right] \cdot \vec{e}_1 + \left[ \int_a^b F_2(t) dt \right] \cdot \vec{e}_2 + \dots + \left[ \int_a^b F_n(t) dt \right] \cdot \vec{e}_n. \end{aligned} \quad (\text{G.48})$$

**Observação G.2.6** A definição de integral definida, para funções vetoriais que exibimos acima, não é a definição original.

Na verdade a Definição G.2.6 acima é uma consequência da definição original.

A definição original é semelhante a definição de integral definida, para funções a valores reais, de uma variável real (que utiliza soma de Riemann), a saber:

Diremos que a função vetorial  $\vec{F}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , limitada em  $[a, b]$ , é integrável em  $[a, b]$ , se existir  $L \in \mathbb{R}^n$  tal que, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$ , de modo que, para toda partição, que indicaremos por  $\mathcal{P}$ , do intervalo  $[a, b]$ ,

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\},$$

onde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,

que satisfaz

$$\|\mathcal{P}\| < \delta,$$

deveremos ter

$$\left\| \sum_{i=1}^n \vec{F}(c_i) \cdot \Delta x_i - L \right\| < \varepsilon,$$

para qualquer escolha de

$$c_i \in (x_{i-1}, x_i), \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

onde

$$\|\mathcal{P}\| \doteq \max \{ \Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1} ; i \in \{1, 2, \dots, n\} \},$$

que é denominada norma da partição  $\mathcal{P}$ .

Na situação acima,  $L \in \mathbb{R}^n$  será denominado integral da função vetorial  $\vec{F}$  em  $[a, b]$  e indicado por  $\int_a^b \vec{F}(t) dt$ , ou seja,

$$\int_a^b \vec{F}(t) dt \doteq L.$$

Uma condição suficiente para que uma função vetorial seja integrável em um intervalo  $[a, b]$  é dado pela:

**Proposição G.2.5** *Seja  $\vec{F}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função vetorial.*

*Se a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $[a, b]$ , então a função vetorial  $\vec{F}$  será uma função integrável em  $[a, b]$ .*

#### Demonstração:

Como a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $[a, b]$  então, do item 2. da Observação G.2.3, segue que as funções componentes  $F_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  serão contínua em  $[a, b]$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Mas, do Cálculo I, sabemos que, sendo uma função contínua em  $[a, b]$ , a função  $F_i$  será integrável em  $[a, b]$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Logo, da Definição G.2.6, segue que a função vetorial  $\vec{F}$ , será uma função integrável em  $[a, b]$ , completando a demonstração. □

Valem as propriedades básicas para a integral definida de funções vetoriais, a saber:

**Proposição G.2.6** *Sejam  $\vec{F}, \vec{G}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções vetoriais, que são integráveis em  $[a, b]$ .*

*Então:*

1. a função vetorial  $\vec{F} \pm \vec{G}$  é integrável em  $[a, b]$  e, além disso, teremos

$$\int_a^b (\vec{F} \pm \vec{G})(t) dt = \int_a^b \vec{F}(t) dt \pm \int_a^b \vec{G}(t) dt. \quad (\text{G.49})$$

2. a função vetorial  $\alpha \cdot \vec{F}$  é integrável em  $[a, b]$  e, além disso, teremos

$$\int_a^b (\alpha \cdot \vec{F})(t) dt = \alpha \cdot \int_a^b \vec{F}(t) dt. \quad (\text{G.50})$$

### Demonstração:

As demonstrações dos itens acima seguem da Definição G.2.6 e das propriedades básicas de integrais definidas de funções a valores reais, de uma variável real (visto em Cálculo I).

Deixaremos os detalhes da mesma como exercício para o leitor. □

Apliquemos as ideias acima ao:

**Exemplo G.2.4** Consideremos a função vetorial  $\vec{F}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &\doteq \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + (t^2 + 1) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3 \\ &= (\text{sen}(t), (t^2 + 1), t), \quad \text{para } t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (\text{G.51})$$

Calcule, se existir,  $\int_0^1 \vec{F}(t) dt$ .

### Resolução:

Observemos que a função vetorial  $\vec{F}$  é contínua em  $[0, 1]$  (pois, com visto no Cálculo 1, as suas funções componentes são funções contínuas em  $[0, 1]$ ).

Logo, da Proposição G.2.6 acima, segue que a função vetorial  $\vec{F}$  será uma função vetorial integrável em  $[0, 1]$ .

Além disso, da mesma Proposição, segue que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \vec{F}(t) dt &\stackrel{(\text{G.51}) \text{ e } (\text{G.49})}{=} \left( \int_0^1 \text{sen}(t) dt \right) \cdot \vec{e}_1 + \left( \int_0^1 (t^2 + 1) dt \right) \cdot \vec{e}_2 + \left( \int_0^1 t dt \right) \cdot \vec{e}_3 \\ &\stackrel{\text{Teorema fundamental Cálculo}}{=} \left[ -\cos(t) \Big|_{t=0}^{t=1} \right] \cdot \vec{e}_1 + \left[ \left( \frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_{t=0}^{t=1} \right] \cdot \vec{e}_2 + \left[ \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^{t=1} \right] \cdot \vec{e}_3 \\ &= [1 - \cos(1)] \cdot \vec{e}_1 + \frac{4}{3} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_3 \\ &= \left( 1 - \cos(1), \frac{4}{3}, \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

completando a resolução. □

## G.3 Curvas Parametrizadas

Iniciaremos esta seção com a:

**Definição G.3.1** Seja  $I \doteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo fechado e limitado de  $\mathbb{R}$ .

1. Uma função vetorial  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que é contínua em  $[a, b]$  será denominada curva para metrizada em  $\mathbb{R}^n$ .

Suponhamos que

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \\ &= \gamma_1(t) \cdot \vec{e}_1 + \gamma_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \dots + \gamma_n(t) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para } t \in [a, b],\end{aligned}\quad (\text{G.52})$$

onde  $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  (a saber, as funções coordenadas associadas a função vetorial  $\gamma$ ).

Então as equações

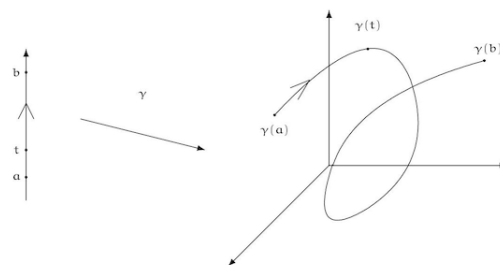
$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ x_2 = \gamma_2(t) \\ \dots \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases}, \quad \text{para cada } t \in [a, b], \quad (\text{G.53})$$

serão ditas equações paramétricas associadas à curva parametrizada  $\gamma$ .

A imagem do conjunto  $[a, b]$  pela função vetorial  $\gamma$ , isto é,

$$\gamma([a, b]) \doteq \{\gamma(t) ; t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

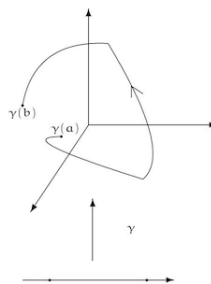
será dito traço da curva  $\gamma$  (veja a figura abaixo).



2. Diremos que a curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva parametrizada simples se

$$\gamma(t) \neq \gamma(s), \quad \text{para } t, s \in [a, b], \quad \text{com } t \neq s. \quad (\text{G.54})$$

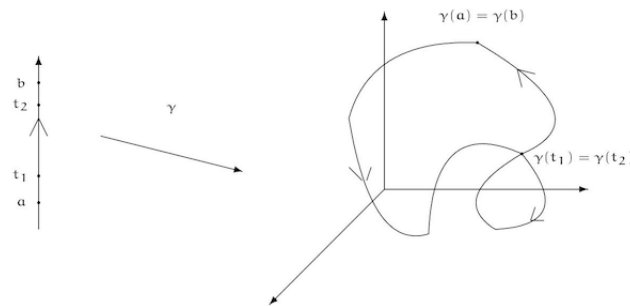
Em particular, o traço de uma curva parametrizada simples, não possui auto-intersecções (veja a figura abaixo).



3. Diremos que a curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é curva parametrizada fechada, se

$$\gamma(a) = \gamma(b), \quad (\text{G.55})$$

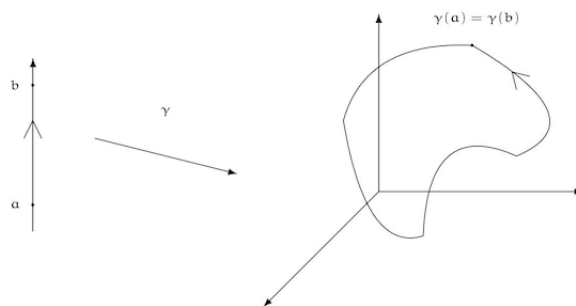
isto é, se o seu "ponto inicial" coincide com o seu "ponto final" (veja a figura abaixo).



4. Diremos que a curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é curva parametrizada fechada e simples, se

$$\gamma(a) = \gamma(b) \quad \text{e} \quad \gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \text{para} \quad t, s \in (a, b), \quad \text{com} \quad t \neq s. \quad (\text{G.56})$$

Em particular, o traço de uma curva parametrizada fechada e simples, é uma curva fechada e sem auto-intersecções (retirando-se o "ponto inicial" que é igual ao "ponto final" - veja a figura abaixo).



Com isto temos a:

### Observação G.3.1

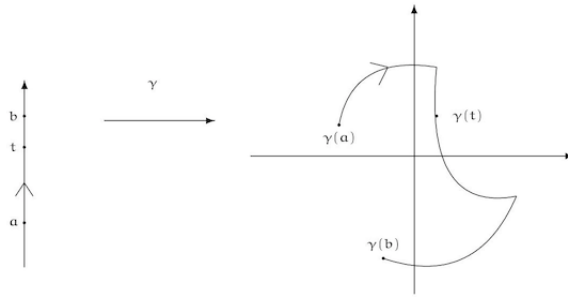
1. Quando  $n = 1$ , uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}$ , será uma função  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que é contínua em  $[a, b]$ , ou seja, uma função a valores reais, de uma variável real, que é contínua em  $[a, b]$ .
2. Se  $n = 2$ , temos que uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^2$ , será uma função vetorial  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que é contínua em  $[a, b]$ .

Neste caso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ &= \gamma_1(t) \cdot \vec{e}_1 + \gamma_2(t) \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para} \quad t \in [a, b], \end{aligned} \quad (\text{G.57})$$

onde as funções componentes  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas em  $[a, b]$ .

Notemos que, neste caso, a representação geométrica do traço da curva parametrizada  $\underline{\gamma}$  será uma curva no plano  $xOy$ , por isto ela será denominada curva no plano (ou curva plana) - veja a figura abaixo).



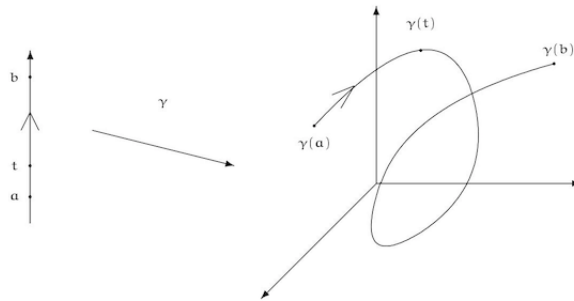
3. Se  $n = 3$ , temos que uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^3$ , será uma função vetorial  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  contínua em  $[a, b]$  e a representação geométrica do seu traço será uma curva em  $\mathbb{R}^3$ .

Neste caso podemos escrever

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \\ &= \gamma_1(t) \cdot \vec{e}_1 + \gamma_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \gamma_3(t) \cdot \vec{e}_3, \quad \text{para } t \in [a, b], \end{aligned} \quad (\text{G.58})$$

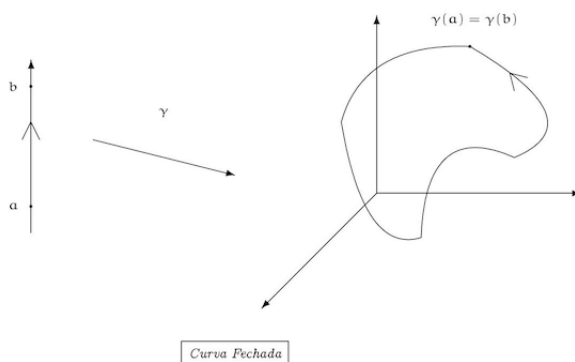
onde as funções componentes  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , são funções contínuas em  $[a, b]$ .

Neste caso, a representação geométrica do traço da curva parametrizada  $\underline{\gamma}$  será denominada curva no espaço (ou curva espacial) - veja a figura abaixo).

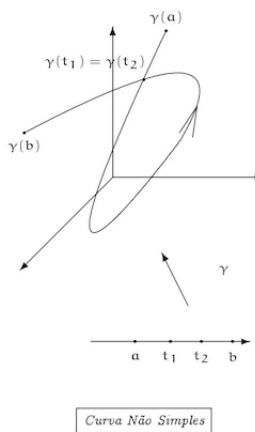
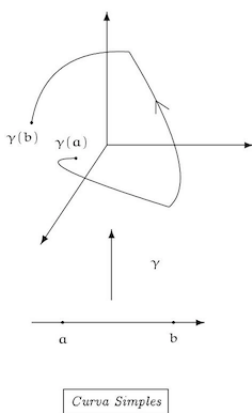


4. Uma curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem um sentido de percurso, definido pela função vetorial  $\underline{\gamma}$ , ou seja, quando  $t$  varia de  $a$  para  $b$ , em  $[a, b]$ , o traço da curva parametrizada  $\underline{\gamma}$ , é percorrido no sentido do ponto  $\underline{\gamma(a)}$  para o ponto  $\underline{\gamma(b)}$  (veja a figura acima).
5. Ao longo destas notas, as curvas parametrizadas consideradas terão, em geral, a representação geométrica do seu traço contidas em um plano (caso  $n = 2$ ) ou contidas no espaço (caso  $n = 3$ ), ou seja, serão curvas planas ou curvas espaciais.

6. Uma curva parametrizada é fechada se, e somente se, o "ponto final" do seu traço, coincide com o "ponto inicial" do mesmo (veja a figura abaixo).



7. Se a curva parametrizada é simples, então seu traço não possui pontos de autointersecção (retirando-se, eventualmente, o "ponto inicial" e o "ponto final" da mesma, se os mesmos coincidirem - veja as figuras abaixo).



Aplicamos as ideias acima aos:

**Exemplo G.3.1** Consideremos a função vetorial  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\doteq (\cos(t), \text{sen}(t)) \\ &= \cos(t) \cdot \vec{e}_1 + \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (\text{G.59})$$

Mostre que  $\underline{\gamma}$  é uma curva parametrizada (plana) e a representação geométrica do seu traço é a circunferência de centro na origem, a saber,  $O \doteq (0, 0)$ , e raio igual a 1, no  $\mathbb{R}^2$ , que é percorrida no sentido anti-horário.

**Resolução:**

De fato, notemos que definindo-se as funções  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dadas por

$$\gamma_1(t) \doteq \cos(t), \quad \gamma_2(t) \doteq \text{sen}(t), \quad \text{para } t \in [0, 2\pi], \quad (\text{G.60})$$

segue que as funções  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  serão funções contínuas em  $[0, 2\pi]$ .

Notemos que estas serão as funções componentes da função vetorial  $\underline{\gamma}$ , dada por (G.59).

Logo, a função vetorial  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma função vetorial contínua em  $[0, 2\pi]$ , em particular, pelo item 1. da Definição G.3.1, segue que  $\underline{\gamma}$ , dada por (G.59), será uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}^2$ .

Notemos também que

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\| &\stackrel{(F.8)}{=} \sqrt{[\gamma_1(t)]^2 + [\gamma_2(t)]^2} \\ &\stackrel{(G.60)}{=} \sqrt{\underbrace{[\cos(t)]^2 + [\text{sen}(t)]^2}_{=1}} \\ &= 1, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

ou seja, para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , temos que

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\in S^1, \\ \text{onde } S^1 &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}, \end{aligned} \tag{G.61}$$

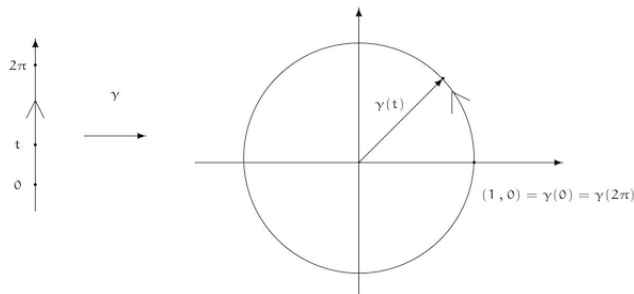
ou seja,  $S^1$  denota a circunferência de centro na origem  $O \doteq (0, 0)$  e raio igual a  $\underline{1}$ , do  $\mathbb{R}^2$ .

Finalmente, podemos verificar que a curva plana

$$\gamma([a, b]) = S^1$$

é percorrida no sentido anti-horário pela curva parametrizada  $\gamma$  (veja a figura abaixo).

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.



□

**Observação G.3.2** Observemos também que, no Exemplo G.3.1 acima, temos

$$\gamma(0) \stackrel{(G.59)}{\underset{=}{{\text{com } t=0}}}} (1, 0) \stackrel{(G.59)}{\underset{=}{{\text{com } t=2\pi}}}} \gamma(2\pi)$$

e estes são os únicos pontos onde isto ocorre, isto é,

$$\text{se } t, s \in (0, 2\pi), \text{ com } t \neq s, \text{ teremos } \gamma(t) \neq \gamma(s),$$

ou seja, da Definição G.3.1, a curva parametrizada  $\underline{\gamma}$  é uma curva parametrizada fechada, simples e plana.

Observemos também que, neste caso, as equações paramétricas associadas à curva parametrizada  $\underline{\gamma}$ , serão dadas por :

$$\begin{cases} x(t) \doteq \cos(t) \\ y(t) \doteq \text{sen}(t) \end{cases}, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi].$$



Temos também o:

**Exemplo G.3.2** Consideremos a função vetorial  $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned}\beta(t) &\doteq (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)) \\ &= \cos(2t) \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{sen}(2t) \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para } t \in [0, \pi].\end{aligned}\tag{G.62}$$

Então  $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva parametrizada, fechada e simples, cuja representação geométrica do seu traço é a circunferência  $S^1$ , de centro na origem  $O \doteq (0, 0)$  e raio igual a  $\underline{1}$ , contida em  $\underline{\mathbb{R}^2}$ , percorrida no sentido anti-horário.

**Resolução:**

Segue do Cálculo I, que as funções coordenadas associada a função vetorial  $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , a saber, as funções  $\beta_1, \beta_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dadas por

$$\beta_1(t) \doteq \cos(2t) \quad \text{e} \quad \beta_2(t) \doteq \operatorname{sen}(2t), \quad \text{para } t \in [0, \pi],\tag{G.63}$$

são funções contínuas em  $[0, \pi]$ , ou seja, pela Definição G.3.1, a função vetorial  $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva parametrizada.

Notemos que

$$\beta(0) \stackrel{\text{(G.62)}}{=} \underset{\text{com } t=0}{=} (1, 0) \stackrel{\text{(G.62)}}{=} \underset{\text{com } t=\pi}{=} \beta(\pi),$$

isto é, a curva parametrizada  $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é fechada e

$$\beta(t) \neq \beta(s), \quad \text{se } s, t \in [0, \pi], \quad \text{com } t \neq s,$$

ou seja, pela Definição G.3.1, a curva parametrizada  $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é simples.

Logo, pela Definição G.3.1,  $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva parametrizada fechada, simples e plana.

Além disso, teremos

$$\begin{aligned}\|\beta(t)\| &\stackrel{\text{(F.8)}}{=} \sqrt{[\beta_1(t)]^2 + [\beta_2(t)]^2} \\ &\stackrel{\text{(G.63)}}{=} \sqrt{[\cos(2t)]^2 + [\operatorname{sen}(2t)]^2} \\ &= 1, \quad \text{para } t \in [0, \pi],\end{aligned}$$

ou seja, a representação geométrica do seu traço está contido na circunferência  $\underline{S}^1$ , de centro na origem  $O \doteq (0, 0)$  e raio igual a  $\underline{1}$ , contida em  $\underline{\mathbb{R}^2}$ , percorrida no sentido anti-horário.

Na verdade, temos que (veja a figura abaixo)

$$\beta([0, \pi]) = S^1.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Neste caso as equações paramétricas associadas à curva parametrizada  $\beta$  serão dadas por:

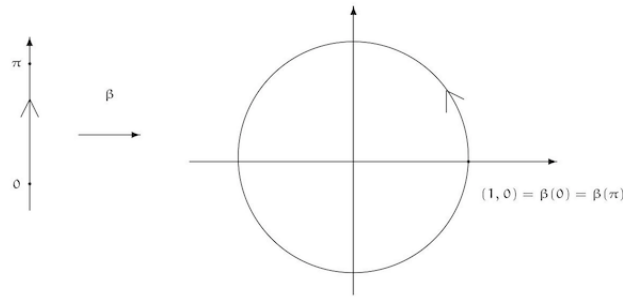
$$\begin{cases} x(t) \doteq \cos(2t) \\ y(t) \doteq \operatorname{sen}(2t) \end{cases}, \quad \text{para cada } t \in [0, \pi].$$

□

**Observação G.3.3** Vale observar que as curvas parametrizadas dos Exemplos G.3.1 e G.3.2 são diferentes, mas têm o mesmo traço, ou seja,

$$\gamma([0, 2\pi]) = S^1 = \beta([0, \pi]).$$

Os respectivos traços são percorridos no mesmo sentido, mas com velocidades diferentes.



Temos também o:

**Exemplo G.3.3** Seja  $\delta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned} \delta(t) &\doteq (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)) \\ &= \cos(2t) \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{sen}(2t) \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (\text{G.64})$$

é uma curva parametrizada e seu traço é a circunferência  $S^1$ , de centro na origem  $O \doteq (0, 0)$  e raio igual a  $\underline{1}$ , contida no  $\underline{\mathbb{R}^2}$  percorrida, duas vezes, no sentido anti-horário.

**Resolução:**

De fato, pois neste caso as funções componentes associadas à função vetorial  $\underline{\gamma}$ , dada por (G.64), serão dadas por

$$\delta_1(t) \doteq \cos(2t), \quad \delta_2(t) \doteq \operatorname{sen}(2t), \quad \text{para } t \in [0, 2\pi], \quad (\text{G.65})$$

que são funções contínuas em  $[0, 2\pi]$  (visto na disciplina de Cálculo I).

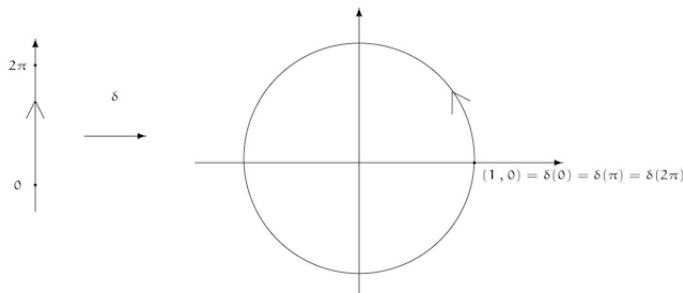
Logo, pela Definição (G.3.1), a função vetorial  $\underline{\gamma}$  é uma curva parametrizada plana.

Assim

$$\begin{aligned} \|\delta(t)\| &= \sqrt{[\delta_1(t)]^2 + [\delta_2(t)]^2} \\ &\stackrel{(\text{G.65})}{=} \sqrt{[\cos(2t)]^2 + [\operatorname{sen}(2t)]^2} = 1, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

ou seja, seu traço está contido na circunferência  $S^1$ , de centro na origem  $O \doteq (0, 0)$  e raio igual a  $\underline{1}$ , em  $\underline{\mathbb{R}^2}$ .

Notemos que esta curva parametrizada percorre duas vezes a circunferência  $S^1$ , de centro na origem  $O \doteq (0, 0)$  e raio igual a  $\underline{1}$ , no sentido anti-horário (veja a figura abaixo).



□

Observemos também que

$$\begin{aligned}
 (1, 0) &= (\cos(2 \cdot 0), \operatorname{sen}(2 \cdot 0)) \\
 &\stackrel{\text{(G.64)}}{=} \delta(0) \\
 &= (\cos(2 \cdot \pi), \operatorname{sen}(2 \cdot \pi)) \\
 &\stackrel{\text{(G.64)}}{=} \delta(\pi) \\
 &= (\cos(2 \cdot 2 \cdot \pi), \operatorname{sen}(2 \cdot 2 \cdot \pi)) \\
 &\stackrel{\text{(G.64)}}{=} \delta(2\pi).
 \end{aligned}$$

Logo a função vetorial  $\underline{\delta}$  é uma curva parametrizada é fechada, mas não é simples.

Neste caso as equações paramétricas associadas à curva parametrizada  $\underline{\delta}$ , serão dadas por:

$$\begin{cases} x(t) \doteq \cos(2t) \\ y(t) \doteq \operatorname{sen}(2t) \end{cases}, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi].$$

□

**Observação G.3.4** Vale observar que as curvas parametrizadas dos Exemplos G.3.1, G.3.2 e G.3.3 acima, são diferentes e têm o mesmo traço, ou seja,

$$\gamma([0, 2\pi] = \beta([0, \pi]) = \delta([0, 2, \pi]).$$

Notemos que seus traços são percorridos no mesmo sentido, mas com velocidades diferentes.

Para finalizar, temos o:

**Exemplo G.3.4** Consideremos a função vetorial  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\gamma(t) \doteq (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t), \quad \text{para } t \in [0, 2\pi]. \quad (\text{G.66})$$

Então  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva parametrizada no espaço, cuja representação geométrica do seu traço está contido no cilindro circular reto, que tem como base a circunferência de centro na origem  $O \doteq (0, 0, 0)$  e tem raio igual a  $\underline{1}$ , do plano  $xOy$ .

**Resolução:**

Segue, da disciplina de Cálculo I, que suas funções coordenadas associadas a função vetorial  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , isto é, as funções

$$\gamma_1(t) \doteq \cos(t), \quad \gamma_2(t) \doteq \operatorname{sen}(t), \quad \gamma_3(t) \doteq t, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi], \quad (\text{G.67})$$

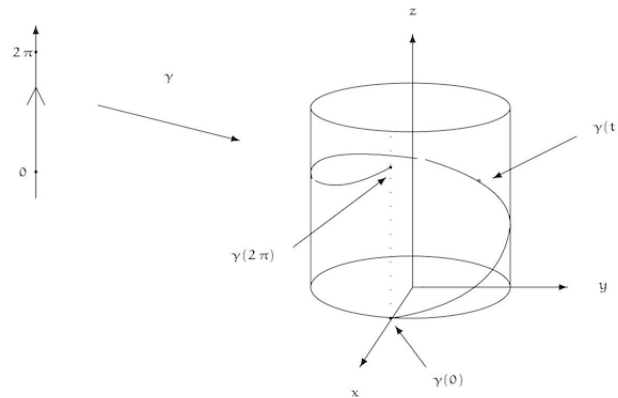
são funções contínuas em  $[0, 2\pi]$ .

Logo, pela Definição G.3.1, a função vetorial  $\underline{\gamma}$  é uma curva parametrizada espacial.

Notemos que,

$$\begin{aligned}
 \|\gamma(t)\| &= \sqrt{[\gamma_1(t)]^2 + [\gamma_2(t)]^2} \\
 &\stackrel{\text{(G.67)}}{=} \sqrt{[\cos(t)]^2 + [\operatorname{sen}(t)]^2} \\
 &= 1, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi],
 \end{aligned}$$

isto é, a representação geométrica do traço da curva parametrizada  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  está contido no cilindro circular reto, que tem como base a circunferência de centro na origem  $O \doteq (0, 0, 0)$  e tem raio igual a  $\underline{1}$ , do plano  $xOy$  (veja a figura abaixo).



Observemos também que

$$\gamma(t) \neq \gamma(s), \quad \text{para } t, s \in [0, 2\pi], \text{ com } t \neq s.$$

Logo, pela Definição G.3.1,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva parametrizada simples no espaço.  $\square$

### Observação G.3.5

1. A curva acima é conhecida como hélice.
2. Observemos que as equações paramétricas associadas à curva parametrizada  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  do Exemplo G.3.4 acima, serão dadas por:

$$\begin{cases} x(t) \doteq \cos(t) \\ y(t) \doteq \sin(t) \\ z(t) \doteq t \end{cases}, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi].$$

Podemos agora introduzir a:

**Definição G.3.2** Diremos que a curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $t_0 \in [a, b]$ , se a função vetorial  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  for uma função vetorial diferenciável em  $t_0$ .

Diremos que a curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $[a, b]$ , se ela for uma função vetorial diferenciável em cada ponto do intervalo  $[a, b]$ .

### Observação G.3.6

1. Notemos que a diferenciabilidade nos extremos  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$ , do intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ , devem ser vistas como sendo a diferenciabilidade à direita e à esquerda dos pontos  $\underline{a}$  e de  $\underline{b}$ , respectivamente, ou seja, deverão existir

$$\begin{aligned} \gamma_+'(a) &\doteq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} \\ \text{e } \gamma_-'(b) &\doteq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\gamma(b+h) - \gamma(b)}{h}, \end{aligned}$$

denominadas derivada da função vetorial  $\gamma$ , à direita, de  $t = a$  e derivada da função vetorial  $\gamma$ , à esquerda, de  $t = b$ , respectivamente.

2. Como vimos na Observação G.2.4, uma função vetorial  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $t_0 \in [a, b]$  se, e somente se, cada uma de suas funções componentes forem diferenciáveis em  $t_0$ , isto é, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a função

$$\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{para cada } t \in [a, b]$$

for uma função diferenciável em  $t_0 \in [a, b]$ , onde

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \\ &= \gamma_1(t) \cdot \vec{e}_1 + \gamma_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \dots + \gamma_n(t) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Em particular, uma curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  será diferenciável em  $[a, b]$  se, e somente se, cada uma de suas componentes for diferenciável em  $[a, b]$ , ou seja, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a função

$$\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

for uma função diferenciável em  $[a, b]$ .

3. Lembremos da disciplina de Cálculo I a seguinte notação:

Se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua em  $[a, b]$ , diremos que a função  $f$  pertence a classe  $C^0$  em  $[a, b]$ .

Neste caso escrevemos

$$f \in C^0([a, b]; \mathbb{R}). \quad (\text{G.68})$$

Se  $k \in \mathbb{N}$ , diremos que uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pertence a classe  $C^k$  em  $[a, b]$ , se, e somente se, as funções

$$f, f', \dots, f^k$$

forem contínuas em  $[a, b]$ .

Neste caso escrevemos

$$f \in C^k([a, b]; \mathbb{R}). \quad (\text{G.69})$$

Finalmente, se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivada de qualquer ordem em  $[a, b]$ , diremos que pertence a classe  $C^\infty$  em  $[a, b]$ .

Neste caso escrevemos

$$f \in C^\infty([a, b]; \mathbb{R}). \quad (\text{G.70})$$

Com isto temos a

### Definição G.3.3

1. Se  $k \in \mathbb{N}$ , diremos que uma curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  pertence a classe  $C^k$  em  $[a, b]$  se, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a função coordenada  $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pertencem a classe  $C^k$  em  $[a, b]$ , ou seja,

$$\gamma_i \in C^k([a, b]; \mathbb{R}), \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (\text{G.71})$$

Neste caso escreveremos

$$\gamma \in C^k([a, b]; \mathbb{R}^n). \quad (\text{G.72})$$

2. Se para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  pertence a classe  $C^k$  em  $[a, b]$ , diremos que ela pertence a classe  $C^\infty$  em  $[a, b]$ .

Neste caso escreveremos

$$\gamma \in C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^n). \quad (\text{G.73})$$

Temos a:

### Observação G.3.7

1. Se a curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $t_0 \in [a, b]$ , podemos dar uma interpretação geométrica para o vetor  $\underline{\gamma'(t_0)}$ .

Para isto lembremos, da Definição G.2.5, que

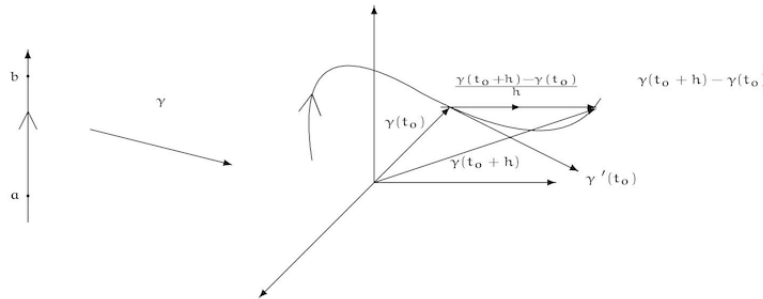
$$\underline{\gamma'(t_0)} \stackrel{(\text{G.34})}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h},$$

isto é, quando  $h$  aproxima-se de 0, o vetor  $\frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$  aproximar-se-á do vetor  $\underline{\gamma'(t_0)}$ , ou seja, geometricamente (veja a figura abaixo) o vetor

$$\frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

aproxima-se da direção tangente ao traço da curva parametrizada  $\underline{\gamma}$ , no ponto  $\underline{\gamma(t_0)}$ .

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



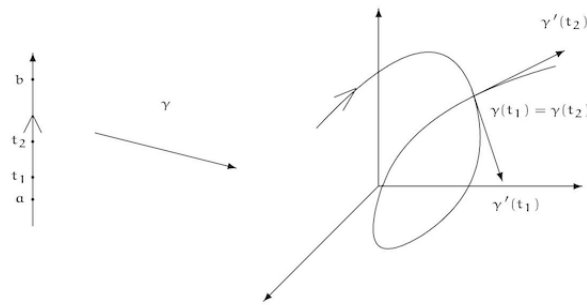
Devido a este fato, o vetor  $\underline{\gamma'(t_0)}$  será denominado vetor tangente à curva parametrizada  $\underline{\gamma}$  em  $\underline{t_0}$ .

2. Vale observar que, o vetor acima será dito vetor tangente à curva parametrizada  $\underline{\gamma}$  em  $\underline{t_0}$  e NÃO vetor tangente, ao traço da curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , no ponto  $\underline{\gamma(t_0)}$ .

Isto ocorre para evitarmos situações em que a curva tem auto-intersecção, isto é, se a curva parametrizada NÃO for uma curva parametrizada diferenciável e simples.

Notemos que, no caso da curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  NÃO ser uma curva parametrizada simples, o vetor tangente ao traço da curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  em um ponto de auto-intersecção, NÃO ficaria bem definido.

Porém, pensando em vetor tangente ao traço da curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  no instante  $\underline{t_0}$ , este está bem definido (veja a figura abaixo).



3. Na figura acima, existem os vetores  $\underline{\gamma}'(t_1)$  e  $\underline{\gamma}'(t_2)$ , eles são vetores tangentes ao traço da curva parametrizada  $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , mas **NÃO** fica bem definido o vetor tangente ao traço da curva parametrizada  $\underline{\gamma}$  no ponto  $\underline{\gamma}(t_1)$ , pois a curva tem auto-intersecção nesse ponto, já que

$$\underline{\gamma}(t_1) = \underline{\gamma}(t_2).$$

4. Observemos também que se a curva parametrizada  $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $\underline{t}_0$ , então o vetor  $\underline{\gamma}'(\underline{t}_0)$  será um vetor tangente ao traço da curva parametrizada  $\underline{\gamma}$ , no ponto  $\underline{\gamma}(\underline{t}_0)$ , se a curva parametrizada  $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  for uma curva parametrizada e simples.

Consideremos o:

**Exemplo G.3.5** Consideremos a função vetorial  $\underline{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}(t) &\doteq (\cos(t), \text{sen}(t)) \\ &= \cos(t) \cdot \vec{e}_1 + \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (\text{G.74})$$

Então  $\underline{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva parametrizada que pertence a classe  $C^\infty$  em  $[0, 2\pi]$ , isto é,

$$\underline{\gamma} \in C^\infty([0, 2\pi]; \mathbb{R}^2). \quad (\text{G.75})$$

**Resolução:**

De fato, pois suas funções coordenadas, a saber, as funções  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$\gamma_1(t) \doteq \cos(t) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) \doteq \text{sen}(t), \quad \text{para } t \in [0, 2\pi], \quad (\text{G.76})$$

são funções que pertencem a classe  $C^\infty$  em  $[0, 2\pi]$ .

Observemos também, que

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}'(t) &= (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \\ &\stackrel{(\text{G.76})}{=} (-\text{sen}(t), \cos(t)), \quad \text{para } t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (\text{G.77})$$

Logo

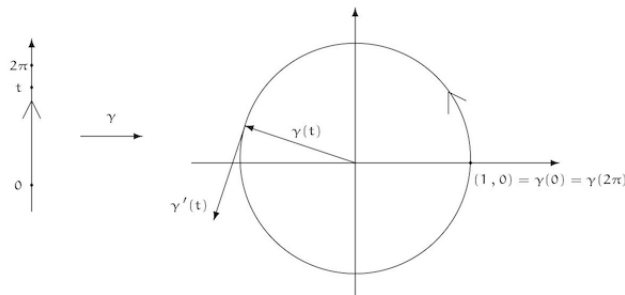
$$\begin{aligned} \|\underline{\gamma}'(t)\| &= \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + [\gamma_2'(t)]^2} \\ &\stackrel{(\text{G.77})}{=} \sqrt{[\cos(t)]^2 + [\text{sen}(t)]^2} \\ &= 1, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (\text{G.78})$$

ou seja, os vetores tangentes à curva parametrizada  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , são vetores unitários.

Além disso, para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , notemos que

$$\begin{aligned} \gamma(t) \bullet \gamma'(t) &\stackrel{(G.76) \text{ e } (G.77)}{=} (\cos(t), \text{sen}(t)) \bullet (-\text{sen}(t), \cos(t)) \\ &= \cos(t)[- \text{sen}(t)] + \text{sen}(t) \cos(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é, os vetores  $\underline{\gamma(t)}$  e  $\underline{\gamma'(t)}$  são ortogonais em  $\mathbb{R}^2$ , para cada  $t \in [0, 2\pi]$  fixado (veja a figura abaixo).



□

Outra situação interessante é dada pelo:

**Exemplo G.3.6** A curva parametrizada  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\doteq (\cos(t), \text{sen}(t), t) \\ &= \cos(t) \cdot \vec{e}_1 + \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (G.79)$$

pertence a classe  $C^\infty([0, 2\pi]; \mathbb{R}^3)$ .

Além disso, o vetor tangente à mesma em qualquer instante, faz ângulo constante com o vetor  $\underline{\vec{e}_3}$ .

**Resolução:**

Notemos que  $\gamma \in C^\infty([0, 2\pi]; \mathbb{R}^3)$ , pois suas funções componentes, isto é, as funções  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dadas por

$$\gamma_1(t) \doteq \cos(t), \quad \gamma_2(t) \doteq \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad \gamma_3(t) \doteq t, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi] \quad (G.80)$$

pertencem a  $C^\infty([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ .



Além disso

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) \\ &\stackrel{(G.80)}{=} (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1) \\ &\neq \vec{0}, \text{ para } t \in [0, 2\pi],\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &\stackrel{(G.80)}{=} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + (\gamma_3'(t))^2} \\ &\stackrel{(G.80)}{=} \sqrt{\underbrace{[-\operatorname{sen}(t)]^2 + [\cos(t)]^2}_{=1} + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \\ &\neq 0, \text{ para } t \in [0, 2\pi].\end{aligned}\tag{G.81}$$

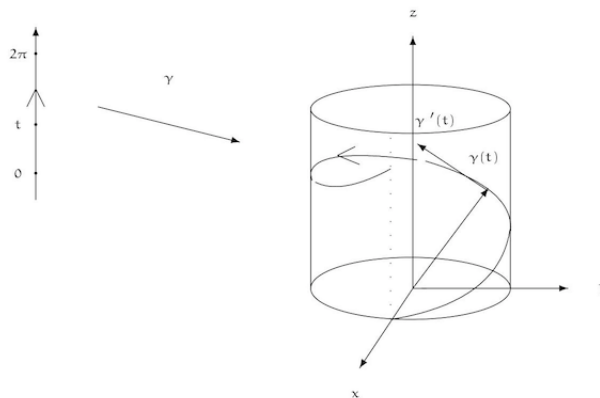
Observemos também que

$$\begin{aligned}\gamma'(t) \cdot \vec{e}_3 &= (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) \cdot (0, 0, 1) \\ &\stackrel{(G.80)}{=} (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1) \cdot (0, 0, 1) \\ &= 1, \text{ para } t \in [0, 2\pi].\end{aligned}\tag{G.82}$$

Portanto, para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , o ângulo, que indicaremos  $\theta(t)$ , entre os vetores  $\underline{\gamma'(t)}$  e  $\vec{e}_3 \doteq (0, 0, 1)$ , será dado por:

$$\begin{aligned}\cos[\theta(t)] &= \frac{\gamma'(t) \cdot (0, 0, 1)}{\underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\stackrel{(G.81)}{=} \sqrt{2}} \underbrace{\|(0, 0, 1)\|}_{=1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \text{isto é, } \theta(t) &\doteq \frac{\pi}{4}, \text{ para } t \in [0, 2\pi],\end{aligned}\tag{G.83}$$

ou seja, o ângulo será constante (veja a figura abaixo).



□

Entre as curvas parametrizadas diferenciáveis destacaremos uma classe que será importante no decorrer destas notas, a saber:

**Definição G.3.4** *A curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  será dita regular (ou suave) em  $[a, b]$ , se a função vetorial  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  pertence a classe  $C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$  e se*

$$\gamma'(t) \neq \vec{0}, \quad \text{para } t \in [a, b]. \quad (\text{G.84})$$

*A curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  será dita regular (ou suave) por partes em  $[a, b]$  se existir uma partição, que indicaremos por*

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 \doteq a, x_1, x_2, \dots, x_n \doteq b\}, \quad (\text{G.85})$$

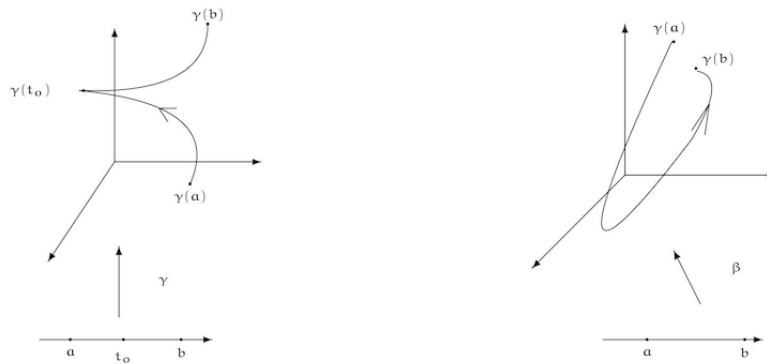
*do intervalo  $[a, b]$ , de modo que a restrição da função vetorial  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  a cada um dos subintervalos da partição, isto é, aos intervalos abertos  $(x_{i-1}, x_i)$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , for uma curva parametrizada regular, ou seja, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a curva parametrizada diferenciável*

$$\gamma : (x_{i-1}, x_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*é uma curva regular em  $(x_{i-1}, x_i)$ .*

### Observação G.3.8

1. *Uma curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é regular em  $[a, b]$  se, e somente se, o vetor tangente à curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  em cada instante, não é o vetor nulo (veja (G.84)).*
2. *Pode-se mostrar que se uma curva parametrizada diferenciável é regular, então seu traço não poderá ter "bicos", ou seja, **NÃO** haverá mudanças "bruscas" na direção do vetor tangente, ao longo do traço da curva parametrizada, em cada instante.*
3. *Na figura abaixo do lado direito, a curva parametrizada diferenciável  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva parametrizada regular em  $[a, b]$ , enquanto do lado esquerdo, a curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  não é uma curva parametrizada regular em  $[a, b]$ , mas é uma curva parametrizada regular por partes em  $[a, b]$ .*



Deixaremos para o leitor verificar os:

**Exercício G.3.1** No Exemplo G.3.5, temos que a curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é curva parametrizada fechada, simples, plana e também é regular em  $[0, 2\pi]$ .

**Exercício G.3.2** No Exemplo G.3.6, temos que a curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é curva parametrizada simples e regular em  $[0, 2\pi]$ .

Temos também o:

**Exemplo G.3.7** A curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\begin{aligned}\gamma(t) &\doteq (t^3, t^2) \\ &= t^3 \cdot \vec{e}_1 + t^2 \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para } t \in [-1, 1]\end{aligned}\tag{G.86}$$

não é uma curva parametrizada regular em  $[-1, 1]$ .

**Resolução:**

De fato, notemos que ela pertence a classe

$$C^\infty([-1, 1]; \mathbb{R}^2),$$

pois suas funções componentes têm essa propriedade.

Em particular, ela pertencerá a classe  $C^1([-1, 1]; \mathbb{R}^2)$ , mas

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &\stackrel{\text{(G.86)}}{=} (3t^2, 2t) \\ &= 3t^2 \cdot \vec{e}_1 + 2t \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para } t \in [-1, 1]\end{aligned}$$

e este vetor é igual ao vetor nulo (isto é, igual  $\vec{0} \doteq (0, 0)$ ) quando  $t = 0$ .

Portanto a curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  não é uma curva parametrizada regular em  $[-1, 1]$ . □

**Observação G.3.9** Vale observar que no Exemplo G.3.7 acima, o vetor tangente à curva parametrizada  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  no instante  $t$ , isto é, o vetor  $\underline{\gamma'(t)}$ , só será o vetor nulo quando  $t = 0$ .

Assim a curva parametrizada  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva parametrizada regular por partes em  $[-1, 1]$ .

Para mostrar isto, basta considerarmos a partição  $\mathcal{P}$  do intervalo  $[-1, 1]$  formada, por exemplo, pelos pontos (veja a figura abaixo)

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 \doteq -1, x_1 \doteq 0, x_2 \doteq 1\}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

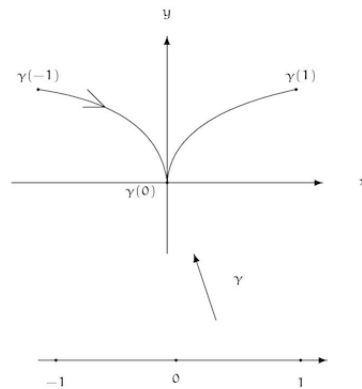
Temos também o:

**Exemplo G.3.8** Seja  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , de modo que  $-2, 2 \in [a, b]$ .

A curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned}\gamma(t) &\doteq (t^3 - 4t, t^2 - 4) \\ &= (t^3 - 4t) \cdot \vec{e}_1 + (t^2 - 4) \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para } t \in [a, b]\end{aligned}\tag{G.87}$$

é uma curva parametrizada regular em  $[a, b]$ , que não é simples.

**Resolução:**

De fato, ela pertence a classe

$$C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^2),$$

pois suas funções componentes têm essa propriedade.

Em particular, ela pertencerá a classe  $C^1([a, b]; \mathbb{R}^2)$  e

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &\stackrel{\text{(G.87)}}{=} (3t^2 - 4, 2t) \\ &= (3t^2 - 4) \cdot \vec{e}_1 + 2t \cdot \vec{e}_2 \\ &\neq (0, 0), \text{ para } t \in [a, b]. \end{aligned} \tag{G.88}$$

Portanto  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva parametrizada regular.

Observemos que

$$\begin{aligned} \gamma(-2) &\stackrel{\text{(G.87)}}{=} \text{com } t=-2 \left( (-2)^3 - 4 \cdot (-2), (-2)^2 - 4 \right) \\ &= (0, 0) \\ \gamma(2) &\stackrel{\text{(G.87)}}{=} \text{com } t=2 \left( 2^3 - 4 \cdot 2, 2^2 - 4 \right) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Logo a curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  **não** será uma curva parametrizada simples.

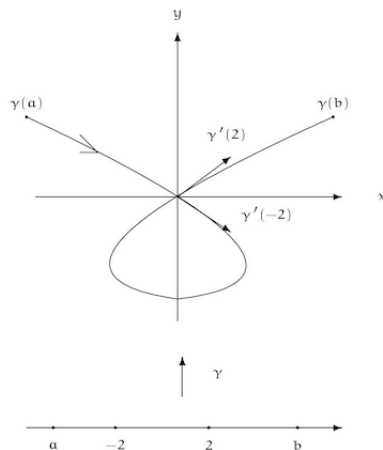
Notemos também que (veja a figura abaixo),

$$\begin{aligned} \gamma'(-2) &\stackrel{\text{(G.88)}}{=} \text{com } t=-2 (8, -4) \\ &= 8 \cdot \vec{e}_1 - 4 \cdot \vec{e}_2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma'(2) &\stackrel{\text{(G.88)}}{=} \text{com } t=2 (8, 4) \\ &= 8 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Um exemplo geral, é dado pelo:



**Exemplo G.3.9** A representação geométrica do gráfico de uma função continuamente diferenciável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , pode ser obtida como a representação geométrica do traço de uma curva parametrizada diferenciável regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Resolução:**

De fato, consideremos a função vetorial  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{aligned}\gamma(t) &\doteq (t, f(t)) \\ &= t \cdot \vec{e}_1 + f(t) \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para } t \in [a, b].\end{aligned}\tag{G.89}$$

Como a função  $f$  é uma função continuamente diferenciável em  $[a, b]$  (isto é, pertence a  $C^1([a, b]; \mathbb{R}^2)$ ) segue que a função vetorial  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  será curva parametrizada que pertence a  $C^1([a, b]; \mathbb{R}^2)$ .

Notemos também que

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &\stackrel{(G.89)}{=} (1, f'(t)) \\ &= 1 \cdot \vec{e}_1 + f'(t) \cdot \vec{e}_2 \\ &\neq (0, 0), \quad \text{para } t \in [a, b],\end{aligned}$$

assim, pela Definição G.3.4, a curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  será uma curva parametrizada regular em  $[a, b]$ .

Notemos também que a representação geométrica do traço da curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  coincide com a representação geométrica do gráfico da função  $f$ .

Lembremos que o gráfico da função  $f$ , que será indicado por  $\underline{G}(f)$ , é dado pelo conjunto

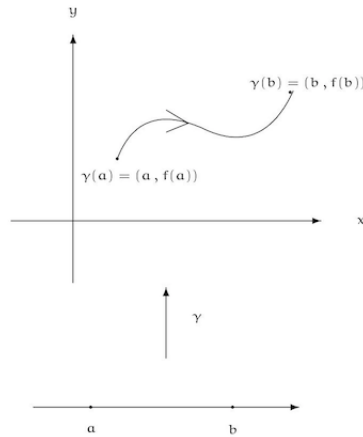
$$\underline{G}(f) \doteq \{(x, f(x)); x \in [a, b]\}.\tag{G.90}$$

Com isto teremos (veja a figura abaixo)

$$\gamma([a, b]) = \underline{G}(f).\tag{G.91}$$

□

Para finalizar temos a:



**Definição G.3.5** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva parametrizada regular (ou regular por partes) em  $[a, b]$ .

Definimos o **comprimento da curva parametrizada regular (ou regular por partes)  $\gamma$** , que indicaremos por  $l_\gamma$ , como sendo:

$$\begin{aligned} l_\gamma &\doteq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + [\gamma_2'(t)]^2 + \cdots + [\gamma_n'(t)]^2} dt \quad \text{u.c.}, \end{aligned} \quad (\text{G.92})$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\doteq (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \\ &= \gamma_1(t) \cdot \vec{e}_1 + \gamma_2(t) \cdot \vec{e}_2 + \cdots + \gamma_n(t) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para cada } t \in [a, b] \end{aligned}$$

e u.c. denota, unidades de comprimento.

**Observação G.3.10** Para obter uma motivação para a fórmula (G.92) acima, vamos considerar o caso em que a curva parametrizada regular (ou regular por partes) é uma curva plana (isto é,  $n = 2$ ).

Suponhamos que a curva parametrizada regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\doteq (x(t), y(t)) \\ &= x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para cada } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

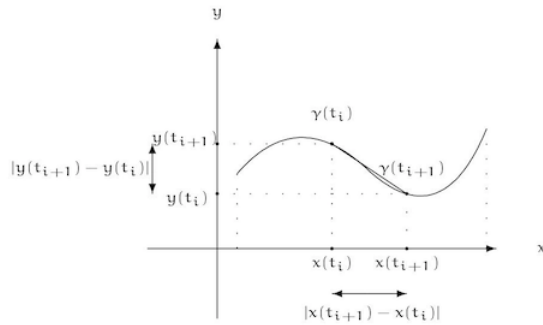
Consideremos uma partição

$$\mathcal{P} \doteq \{t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$$

do intervalo  $[a, b]$ , ou seja,

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , o comprimento do  $i$ -ésimo arco da curva parametrizada regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que une o ponto  $\gamma(t_i)$  ao ponto  $\gamma(t_{i+1})$ , pode ser aproximado pelo comprimento do segmento de reta que une o ponto  $\gamma(t_i)$  ao ponto  $\gamma(t_{i+1})$  (veja a figura abaixo).



O comprimento deste segmento é dado por

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \stackrel{\text{Teorema de Pitágoras}}{=} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2}. \quad (\text{G.93})$$

Do Teorema do valor médio (visto na disciplina de Cálculo I), aplicado as funções  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , no intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ , segue que existem  $\xi_i, \eta_i \in (t_i, t_{i+1})$  de modo que

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \quad \text{e} \quad y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i). \quad (\text{G.94})$$

Deste modo temos que:

$$\begin{aligned} l_\gamma &\sim \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \\ &\stackrel{(\text{G.93}) \text{ e } (\text{G.94})}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)]^2 + [y'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i)]^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{>0} \\ &\stackrel{\Delta t_i \doteq t_{i+1} - t_i}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2} \Delta t_i. \end{aligned}$$

Observemos que o lado direito da expressão acima é a soma de Riemann associada a função

$$t \mapsto \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2},$$

à partição  $\underline{P}$  e aos pontos  $\xi_i, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Logo fazendo a norma da partição  $\underline{P}$  tender para zero, isto é,

$$|\Delta t_i| \rightarrow 0, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

teremos que a soma acima tenderá à

$$\begin{aligned} &\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \\ \text{ou seja: } l_\gamma &= \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \text{u.c.,} \end{aligned}$$

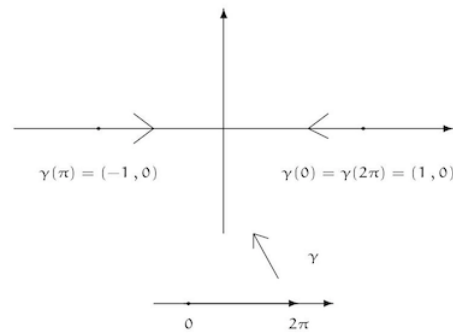
como introduzimos na Definição G.3.5 acima.

Como aplicação do resultado acima temos o:

**Exemplo G.3.10** Calcule o comprimento da curva parametrizada regular por partes  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma(t) \doteq (\cos(t), 0), \quad \text{para cada } t \in [0, 2\pi].$$

A figura abaixo a situação descrita acima.



### Resolução:

Observamos que a função vetorial  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é curva parametrizada diferenciável em  $[0, 2\pi]$ , pois suas funções componentes, a saber,  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dadas por

$$\gamma_1(t) \doteq \cos(t) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) \doteq 0, \quad \text{para cada } t \in [0, 2\pi], \quad (\text{G.95})$$

são funções que pertencem a  $C^\infty([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ , em particular pertencem a  $C^1([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ .

Notemos também que

$$\gamma'(t) \stackrel{(\text{G.95})}{=} (-\sin(t), 0), \quad \text{para cada } t \in [0, 2\pi]. \quad (\text{G.96})$$

Logo o vetor  $\underline{\gamma'(t)}$  só é vetor nulo, quando  $t \in \{0, \pi, 2\pi\}$

Assim a curva parametrizada diferenciável  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , será uma curva parametrizada regular em  $[0, 2\pi]$ , quando restrita aos intervalos  $(0, \pi)$  e a  $(\pi, 2\pi)$ , ou seja, será uma curva parametrizada regular por partes em  $[0, 2\pi]$ .

Podemos ver que o comprimento da curva parametrizada regular por partes  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é igual 4 u.c. (duas vezes o comprimento do intervalo  $[-1, 1]$ ).



Pela Definição G.3.5, podemos calcular seu comprimento, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 l_\gamma &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \\
 &\stackrel{\text{(G.96)}}{=} \int_0^{2\pi} \|(-\text{sen}(t), 0)\| dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-\text{sen}(t)]^2 + 0^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} |\text{sen}(t)| dt \\
 &= 2 \int_0^\pi \text{sen}(t) dt \\
 &\stackrel{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} [2 - \cos(t)] \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\
 &= 4 \text{ u.c. .}
 \end{aligned}$$

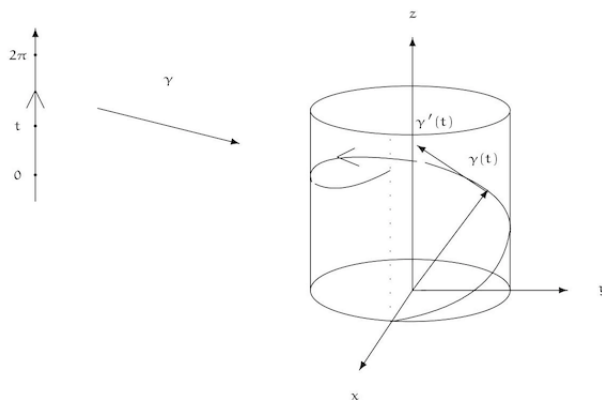
□

Finalizaremos este capítulo com o seguinte exercício resolvido:

**Exercício G.3.3** Calcule o comprimento da curva parametrizada regular  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$\begin{aligned}
 \gamma(t) &\doteq (\cos(t), \text{sen}(t), t) \\
 &= \cos(t) \cdot \vec{e}_1 + \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3, \quad \text{para cada } t \in [0, 2\pi], \quad (\text{G.97})
 \end{aligned}$$

ou seja, da hélice circular (veja a figura abaixo).



### Resolução:

Temos que a função vetorial  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva parametrizada regular em  $[0, 2\pi]$ , pois a função vetorial  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é continuamente diferenciável em  $[0, 2\pi]$  (na verdade pertence a  $C^\infty([0, 2\pi]; \mathbb{R}^3)$ ) e

$$\begin{aligned}
 \gamma'(t) &\stackrel{\text{(G.97)}}{=} (-\text{sen}(t), \cos(t), 1) \\
 &= -\text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + \cos(t) \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \neq \vec{O}, \quad (\text{G.98})
 \end{aligned}$$

para cada  $t \in [0, 2\pi]$ .

Logo, pela Definição G.3.5, teremos que seu comprimento será dado por:

$$\begin{aligned} l_\gamma &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \\ &\stackrel{\text{(G.98)}}{=} \int_0^{2\pi} \|(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{[-\operatorname{sen}(t)]^2 + [\cos(t)]^2}_{=1} + 1^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\sqrt{2}\pi \text{ u.c.}, \end{aligned}$$

completando a resolução.

□

## Apêndice H

# Diferenciabilidade para funções a valores reais, de várias variáveis reais

### H.1 Motivação

Vimos na disciplina de Cálculo I que para funções a valores reais, de uma variável real, diferenciabilidade de uma função implicará na continuidade da mesma, ou seja, para que uma função seja diferenciável em um ponto é necessário (mas não suficiente), em primeiro lugar, que ela seja contínua naquele ponto.

O conceito de derivadas parciais introduzido no capítulo precedente, não apresenta esta propriedade, ou seja, é possível que uma função a valores reais, de várias variáveis reais, tenha todas as derivadas parciais em um ponto, mas não seja contínua nesse ponto.

O exemplo a seguir ilustra este fato.

**Exercício H.1.1** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (\text{H.1})$$

Então a função  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

Além disso, a função  $f$  tem derivadas parciais de primeira ordem em  $(0, 0)$ .

#### Resolução:

De fato, a função  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ , pois o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  não existe, já que o limite, quando  $t \rightarrow 0$ , sobre a curva parametrizada  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{H.2})$$

nos fornecerá:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_1(t)] &\stackrel{(\text{H.2})}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t, 0)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e } (\text{H.1})}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se considerarmos a curva parametrizada  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma_2(t) \doteq (t, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{H.3})$$

teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_2(t)] &\stackrel{\text{(H.3)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e (H.1)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t t}{t^2 + t^2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, do Teorema 7.1.1, segue que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  não existe, logo a função  $f$  **não** é contínua em  $(0, 0)$ .

No entanto, as derivadas parciais de 1.ª ordem associadas à função  $f$  existem em  $(0, 0)$  e, além disso,

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

De fato, pois se considerarmos as funções  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$g(x) \doteq \begin{cases} f(x, 0) \stackrel{x \neq 0 \text{ e (H.1)}}{=} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0, & \text{para } x \neq 0 \\ f(0, 0) = 0, & \text{para } x = 0 \end{cases} = 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

$$h(y) \doteq \begin{cases} f(0, y) \stackrel{y \neq 0 \text{ e (H.1)}}{=} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0, & \text{para } y \neq 0 \\ f(0, 0) = 0, & \text{se } y = 0 \end{cases} = 0, \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R},$$

segue que as funções  $g$  e  $h$  serão diferenciáveis em  $x = 0$  e  $y = 0$  (visto no Cálculo 1), respectivamente (são constante e iguais a zero) e assim segue que existem as derivadas parciais de primeira ordem associadas à função  $f$  em  $(0, 0)$  e, além disso, teremos:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= g'(0) = 0, \\ f_y(0, 0) &= h'(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto a função  $f$  tem as derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $(0, 0)$ , mas **não** é diferenciável nesse ponto. □

### Observação H.1.1

1. Logo, na definição de diferenciabilidade que daremos mais adiante (veja Definição H.2.1), não será **suficiente** considerarmos somente a existência das derivadas parciais da função em questão, no ponto estudado.
2. Procuraremos um conceito de diferenciabilidade para funções a valores reais, de várias variáveis reais, que implique, em particular, que a representação geométrica do gráfico da função não possua "bicos" e, em particular, que não possua "saltos" (ou seja, que a função seja contínua nesse ponto).
3. Vimos, na disciplina de Cálculo 1, que uma função a valores reais, de uma variável real,  $f : I \xrightarrow{\text{intervalo aberto}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é diferenciável em  $x_0 \in I$ , se, e somente se,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{H.4}$$

existir.

Aquela definição no entanto, **não** se adapta, imediatamente, para funções a valores reais, de várias variáveis reais, já que, neste último caso, o acréscimo  $\underline{h}$  será um vetor do  $\mathbb{R}^n$  e o quociente acima (denominado, razão incremental) não fará sentido no último caso (dividir um número real por um vetor  $\underline{h}$  do  $\mathbb{R}^n$  ?).

4. Uma outra maneira de interpretar (H.4) é verificarmos que para uma função a valores reais, de uma variável real, temos que a função  $\underline{f}$  é diferenciável em  $\underline{x}_0$  se, e somente se, existe  $a \in \mathbb{R}$  (que é denotado por  $\underline{f}'(\underline{x}_0)$ ) tal que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= a, \\ \text{ou seja, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} &= 0, \\ \text{isto é, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \bullet h}{|h|} &= 0. \end{aligned}$$

Observemos agora que, a última identidade à direita faz sentido se  $\underline{h}$  pertence a  $\mathbb{R}^n$ , pois poderemos trocar  $|h|$ , por  $\|\vec{h}\|$ , e este último será um número real.

## H.2 Definição de diferenciabilidade

Deste modo, agora estamos em condições de introduzir a noção diferenciabilidade para funções a valores reais, de várias variáveis reais.

**Definição H.2.1** Sejam  $\underline{A}$  um subconjunto, não vazio, aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \underline{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\vec{x}_0 \doteq (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \underline{A}$ .

Diremos que a função  $\underline{f}$  é diferenciável em  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ , se existir

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

tal que

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(x_{01} + h_1, \dots, x_{0n} + h_n) - f(x_{01}, \dots, x_{0n}) - (a_1, \dots, a_n) \bullet (h_1, \dots, h_n)}{\|(h_1, \dots, h_n)\|} = 0, \quad (\text{H.5})$$

onde  $\bullet$  denota o produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ .

Diremos que a função  $\underline{f}$  é diferenciável em  $\underline{B} \subseteq \underline{A}$ , se a função  $\underline{f}$  for diferenciável em cada ponto do conjunto  $\underline{B}$ .

Diremos, por simplicidade, que a função  $\underline{f}$  diferenciável, se a função  $\underline{f}$  é diferenciável em cada o ponto do seu domínio, a saber, o conjunto  $\underline{A}$ .

### Observação H.2.1

1. Se definirmos

$$\vec{a} \doteq (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{x}_0 \doteq (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \quad \text{e} \quad \vec{h} \doteq (h_1, h_2, \dots, h_n),$$

então a expressão (H.5) será equivalente a:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \vec{a} \bullet \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0, \quad (\text{H.6})$$

$$\text{ou seja,} \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow (0,0)} \frac{E(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0, \quad (\text{H.7})$$

$$\text{onde} \quad E(\vec{h}) \doteq f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \vec{a} \bullet \vec{h}, \quad (\text{H.8})$$

para  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ .

2. Para  $n = 2$ , podemos reescrever a Definição H.2.1 acima, do seguinte modo: a função  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$ , onde  $A$  é um subconjunto aberto, não vazio, em  $\mathbb{R}^2$ , se, e somente se, podemos encontrar um vetor

$$\begin{aligned} \vec{a} &\doteq (a, b) \in \mathbb{R}^2, \\ \text{de modo que} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (a, b) \bullet (h, k)}{\|(h, k)\|} &= 0, \\ \text{ou seja,} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Definindo-se o numerador da expressão (H.9) acima por

$$E(h, k) \doteq f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk, \quad \text{para} \quad (h, k) \in B_\delta((0, 0)), \quad (\text{H.10})$$

podemos reescrever a identidade (H.9) como:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \quad (\text{H.11})$$

O próximo resultado, nos mostra que a diferenciabilidade de uma função em um ponto implicará na continuidade da mesma nesse ponto, a saber:

**Teorema H.2.1** Na situação da Definição H.2.1, se a função  $f$  é diferenciável no ponto

$$\vec{x}_0 \doteq (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A,$$

então a função  $f$  será uma função contínua no ponto

$$\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}).$$

### Demonstração:

De fato, consideremos

$$\begin{aligned} \vec{h} &\doteq (h_1, h_2, \dots, h_n), \\ E(\vec{h}) &= E(h_1, h_2, \dots, h_n) \\ &\doteq f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2, \dots, x_{0n} + h_n) - f(x_{01}, \dots, x_{0n}) \\ &\quad - (a_1, a_2, \dots, a_n) \bullet (h_1, h_2, \dots, h_n). \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

Com a notação acima, a função  $f$  será diferenciável em  $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A$  se, e somente se,

$$\lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} \frac{E(h_1, h_2, \dots, h_n)}{\|(h_1, h_2, \dots, h_n)\|} = 0. \quad (\text{H.13})$$

Logo, de (H.12), segue que

$$f(x_{01} + h_1, \dots, x_{0n} + h_n) = f(x_{01}, \dots, x_{0n}) + (a_1, \dots, a_n) \bullet (h_1, \dots, h_n) + E(h_1, \dots, h_n). \quad (\text{H.14})$$

Observemos que

$$\lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} (a_1, a_2, \dots, a_n) \bullet (h_1, h_2, \dots, h_n) = 0, \quad (\text{H.15})$$

pois, como vimos anteriormente, a função o produto interno é uma função contínua no seu domínio.

Portanto passando o limite na expressão (H.14), quando

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0),$$

obteremos:

$$\begin{aligned} & \lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2, \dots, x_{0n} + h_n) \stackrel{(\text{H.14})}{=} \lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} \{f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \\ & \quad + (a_1, a_2, \dots, a_n) \bullet (h_1, h_2, \dots, h_n) + E(h_1, h_2, \dots, h_n)\} \\ & \stackrel{(\text{H.15})}{=} f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) + 0 + \lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} E(h_1, h_2, \dots, h_n) \\ & = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) + \lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} \left\{ \frac{E(h_1, h_2, \dots, h_n)}{\|(h_1, h_2, \dots, h_n)\|} \|(h_1, h_2, \dots, h_n)\| \right\} \\ & \stackrel{(\text{H.13})}{=} f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}), \end{aligned}$$

mostrando que a função  $f$  é contínua em  $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Observação H.2.2** O resultado a seguir garante que se a função  $f$  é diferenciável em

$$\vec{x}_0 \doteq (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}),$$

então a função  $f$  terá todas as derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  e, além disso, podemos encontrá-las utilizando o limite (H.5).

**Proposição H.2.1** Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$  e  $\vec{x}_0 \doteq (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A$ .

Suponhamos que a função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ .

Então a função  $f$  terá todas as derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  e, além disso,, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) &= a_1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) &= a_2, \\ &\vdots, \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) &= a_n, \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

onde o vetor

$$\vec{a} \doteq (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{H.17})$$

é dado pela Definição H.2.1.

**Demonstração:**

Observemos que se o limite (H.5) existe, segue que o mesmo existirá sobre, por exemplo, a curva parametrizada  $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &\doteq (t, 0, \dots, 0) \\ &= t \cdot \vec{e}_1, \quad \text{para cada } t \in I,\end{aligned}\tag{H.18}$$

onde,  $0 \in I$  e  $I$  é uma intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ .

Notemos que, na parametrização (H.17) acima, consideremos

$$h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$$

em (H.5), e assim, a representação geométrica do traço da curva parametrizada  $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  está contido no eixo  $Ox_1$ , isto é, no hiperplano:

$$x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0.$$

Assim, de (H.5), obteremos:

$$\begin{aligned}0 &\stackrel{(H.5)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\stackrel{(H.18)}{=}(\underbrace{x_{o1}+t, x_{o2}, \dots, x_{on}}_{\vec{x}_o + \gamma_1(t)}) - f(\stackrel{(H.18)}{=}(\underbrace{x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}}_{\vec{x}_o})) - \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{\vec{a}} \cdot \underbrace{(t, 0, \dots, 0)}_{\gamma_1(t)}}{\|\underbrace{\gamma_1(t)}_{\stackrel{(H.18)}{=} (t, 0, \dots, 0)}\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{o1} + t, x_{o2}, \dots, x_{on}) - f(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}) - a_1 t}{\sqrt{t^2 + 0^2 + \dots + 0^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{o1} + t, x_{o2}, \dots, x_{on}) - f(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}) - a_1 t}{|t|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_{o1} + t, x_{o2}, \dots, x_{on}) - f(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}) - a_1 t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(x_{o1} + t, x_{o2}, \dots, x_{on}) - f(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on})}{t} - \frac{a_1 t}{t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_{o1} + t, x_{o2}, \dots, x_{on}) - f(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on})}{t} - \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{a_1 t}{t},\end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{o1} + t, x_{o2}, \dots, x_{on}) - f(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on})}{t} = a_1.\tag{H.19}$$

Mas, o lado esquerdo da identidade (H.19) acima, nos diz que existe  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on})$  e, além disso, de (H.19), teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}) = a_1.$$

Portanto a função  $f$  possui derivada parcial de primeira ordem em relação a  $x_1$ , no ponto  $\vec{x}_o = (x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on})$  e, além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}) = a_1.$$

A existência das outras derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$  no ponto

$$\vec{x}_o = (x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on})$$



podem ser obtidas de forma completamente análoga a esta que apresentamos acima.

Para tanto basta, para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , considerar o limite (H.5) sobre a curva parametrizada (cujo traço está contido em uma reta do  $\mathbb{R}^n$ ), que indicaremos por  $\gamma_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &\doteq (0, 0, \dots, \underbrace{t}_{k\text{-ésima posição}}, \dots, 0) \\ &= t \cdot \vec{e}_k, \quad \text{para cada } t \in I, \end{aligned} \tag{H.20}$$

onde,  $0 \in I$  e  $I$  é intervalo aberto  $\mathbb{R}$ .

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Deste modo, completamos a demonstração do resultado. □

A seguir exibiremos algumas propriedades gerais de diferenciabilidade, mais precisamente:

**Proposição H.2.2** *Sejam  $A$  um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis em  $\vec{x}_0 \in A$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

*Então as funções  $(f + g)$ ,  $(f - g)$ ,  $(\alpha f)$  serão funções diferenciáveis no ponto  $\vec{x}_0$ .*

*Se  $g(\vec{x}_0) \neq 0$ , então a função  $\left(\frac{f}{g}\right)$  será uma função diferenciável no ponto  $\vec{x}_0$ .*

**Demonstração:**

As demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor. □

Agora vamos introduzir a:

**Definição H.2.2** *Sejam  $A$  um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função é diferenciável em  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$ .*

*A expressão*

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad \text{para cada } (x, y) \in A,$$

daremos o nome de diferencial da função  $f$  no ponto  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ , relativamente aos acréscimos  $\Delta x \doteq x - x_0$  e  $\Delta y \doteq y - y_0$  e será indicada por  $df(x_0, y_0)$ , isto é,

$$df(x_0, y_0) \doteq f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y. \tag{H.21}$$

**Observação H.2.3**

1. *Definindo-se*

$$\Delta f \doteq f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \tag{H.22}$$

*a condição (H.9) para a diferenciabilidade da função  $f$  no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$  pode ser reescrita da seguinte forma: a função*

$$\begin{aligned} &\underline{f \text{ é diferenciável em } (x_0, y_0)} \\ \text{se, e somente se,} \quad &\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - df(x_0, y_0)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0. \end{aligned} \tag{H.23}$$

2. *Notemos que*

$$\begin{aligned} \Delta f &= df(x_0, y_0) + \alpha \eta, \\ \text{onde} \quad \eta &\doteq \frac{\Delta f - df(x_0, y_0)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \quad \text{e} \quad \alpha \doteq \|(\Delta x, \Delta y)\|. \end{aligned} \tag{H.24}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } f(x, y) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), \\ \text{então teremos: } f(x, y) &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \alpha \eta. \end{aligned} \quad (\text{H.25})$$

Logo, se o número real positivo  $\alpha$  for "pequeno" (isto é, se os números reais positivos,  $\Delta x$  e  $\Delta y$  estão "próximos" de zero) teremos que o valor  $df(x_0, y_0)$  estará "próximo" do valor  $\Delta f$ , ou ainda, o número real  $f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$  estará "próximo" do número real  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , ou seja,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \sim f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0), \quad \text{se } \|(\Delta x, \Delta y)\| \sim 0. \quad (\text{H.26})$$

Deste modo, podemos utilizar a diferencial de uma função em um ponto, para obter valores próximos de um valor conhecido da função (no caso  $f(x_0, y_0)$ ), como foi feito na disciplina de Cálculo 1, para o caso de funções a valores reais, de uma variável real, utilizando-se diferenciais.

3. Podemos definir, de modo semelhante, a diferencial para funções a valores reais, de três, quatro ou, em geral,  $n$  variáveis reais.

A formulação destes casos será deixada como exercício para o leitor.

Na verdade a diferencial de uma função é uma transformação linear que, de uma certa forma, é a melhor aproximação linear da função dada, perto do ponto considerado.

A noção de transformação linear será estudada na disciplina de Álgebra Linear.

Para finalizar temos o:

**Exercício H.2.1** Consideremos uma caixa que tem a forma de um cilindro circular reto, cujo raio da base é  $3 \text{ m}$  e sua altura, relativa à base circular, é de  $8 \text{ m}$ , com um possível erro na aferição das medidas de  $\pm 0,05 \text{ m}$ .

Use diferenciais para estimar o volume do sólido em questão, devido ao erro cometido acima.

### Resolução:

Lembremos que o volume, que denotaremos por  $V$ , de um cilindro circular reto é

$$V = \pi r^2 h, \quad (\text{H.27})$$

onde  $r$  é o raio da base do cilindro (que é um círculo) e  $h$  sua altura, relativa à base circular.

Como a função  $V = V(r, h)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , temos que

$$\begin{aligned} dV(r_0, h_0) &\stackrel{(\text{H.21})}{=} \frac{\partial V}{\partial r}(r_0, h_0) \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}(r_0, h_0) \Delta h \\ &\stackrel{(\text{H.27})}{=} 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h. \end{aligned} \quad (\text{H.28})$$

Tomando-se, na expressão acima,

$$r_0 = 3, \quad h_0 = 8 \quad \text{e} \quad \Delta r = \Delta h = \pm 0,05,$$

obteremos

$$\begin{aligned} dV(r_0, h_0) &= dV(3, 8) \\ &\stackrel{(\text{H.28})}{=} (48\pi + 9\pi) (\pm 0,05) \\ &= 57\pi (\pm 0,05). \end{aligned} \quad (\text{H.29})$$

Assim

$$\begin{aligned} V(3 \pm 0,05, 8 \pm 0,05) &\sim V(3, 8) + dV(3, 8) \\ &\stackrel{\text{(H.27)} \text{ e } \text{(H.29)}}{=} 72\pi + 57\pi(\pm 0,05) \\ &= (72 \pm 2,85)\pi. \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido obtido, devido aos erros cometidos, será de :

$$(72 \pm 2,85)\pi \text{ m}^3.$$

### H.3 Critério para o estudo da diferenciabilidade

A seguir estudaremos alguns exemplos do ponto de vista da diferenciabilidade.

Antes porém daremos um resultado que poderá ser muito útil no estudo da diferenciabilidade de funções a valores reais, de várias variáveis reais.

No que segue, vamos nos restringir ao caso  $n = 2$ .

A generalização para  $n \geq 3$ , é simples e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

Começaremos por sintetizar o que devemos verificar para concluir que uma função a valores reais, de duas variáveis reais, seja diferenciável em um ponto dado do seu domínio, a saber:

**Corolário H.3.1** *Sejam  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em um subconjunto  $A$  aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^2$  e  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$ .*

*Então a função  $f$  é diferenciável em  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$  se, e somente se:*

1. a função  $f$  tem derivadas parciais de primeira ordem em  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$  ;
- 2.

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0, \quad \text{(H.30)}$$

onde

$$E(h,k) \doteq f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k, \quad \text{(H.31)}$$

para  $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ , de modo que  $(x_0 + h, y_0 + k) \in B_\delta((x_0, y_0)) \subseteq A$ , sendo  $\delta > 0$ .

#### Demonstração:

A demonstração desse resultado é uma consequência imediata da Definição H.2.1, de diferenciabilidade.

□

**Observação H.3.1** *Como consequência do Teorema H.2.1, da Proposição H.2.1 e do Corolário H.3.1 acima, temos que:*

1. Se a função  $f$  **não** é uma função contínua no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$ , então a função  $f$  **não** será diferenciável no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$ .
2. Se a função  $f$  é contínua no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$  e, uma das suas derivadas parciais de primeira ordem, **não** existir no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$ , então a função  $f$  **não** será diferenciável no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$ .

3. Se a função  $f$  é contínua no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$  e, ambas as derivadas parciais de primeira ordem, existirem no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$ , mas o limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

não existe, ou não for igual a zero, então a função  $f$  não será diferenciável no ponto  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0)$ .

4. Vale os respectivos análogos das observações acima para funções a valores reais, de  $n$  variáveis reais, com  $n \geq 3$ .

Podemos agora tratar do:

**Exemplo H.3.1** Mostre que a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x^2 y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{H.32})$$

é uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

**Resolução:**

Primeiramente notamos que a função  $f$  é contínua em todo ponto de  $\mathbb{R}^2$  (pois é uma função polinomial, nas variáveis  $x$  e  $y$ ).

Em seguida, notamos que as derivadas parciais da função  $f$ , relativamente a  $x$  e a  $y$ , existem em cada ponto de  $\mathbb{R}^2$  e que no ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , valem

$$f_x(x_0, y_0) = 2x_0 y_0 \quad (\text{H.33})$$

$$\text{e } f_y(x_0, y_0) = x_0^2. \quad (\text{H.34})$$

Em seguida, verificaremos que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Para isto observemos que

$$\begin{aligned} E(h, k) &\stackrel{(\text{H.31})}{=} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) h - f_y(x_0, y_0) k \\ &\stackrel{(\text{H.32}) \text{ e } (\text{H.33})}{=} (x_0 + h)^2 (y_0 + k) - x_0^2 y_0 - 2x_0 y_0 h - x_0^2 k \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} h^2 y_0 + 2x_0 h k + h^2 k. \end{aligned} \quad (\text{H.35})$$

Logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|E(h, k)|}{\|(h, k)\|} \\ &\stackrel{(\text{H.35})}{=} \frac{|h^2 y_0 + 2x_0 h k + h^2 k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq \frac{|h^2 y_0| + |2x_0 h k| + |h^2 k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{h^2 |y_0|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{2|x_0| |h| |k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{h^2 |k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq |y_0| |h| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + 2|x_0| |h| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |h| |k| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq \begin{cases} |h| = \sqrt{h^2} \\ |k| = \sqrt{k^2} \end{cases} \leq \sqrt{h^2 + k^2} \\ &\leq |y_0| |h| \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} + 2|x_0| |h| \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |h| |k| \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

$$= |y_0| |h| + 2 |x_0| |h| + |h| |k|. \quad (\text{H.36})$$

Notemos que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [|y_0| |h| + 2 |x_0| |h| + |h| |k|] \stackrel{\text{Exercício}}{=} 0. \quad (\text{H.37})$$

Logo, de (H.36), (H.37) e do Teorema do sanduiche (ou seja, do item 7. do Teorema 7.1.1), concluímos que

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|E(h,k)|}{\|(h,k)\|} = 0, \\ \text{que é equivalente a: } & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0. \end{aligned} \quad (\text{H.38})$$

Portanto, de (H.38) e da Definição H.2.1 (para o caso  $n = 2$ ), segue que a função  $f$  é diferenciável em  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , completando a resolução. □

Deixaremos para o leitor a resolução do seguinte exercício:

### Exercício H.3.1

1. Dado  $C \in \mathbb{R}$ , mostre que a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq C, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{H.39})$$

é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e, além disso,

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0, \quad (\text{H.40})$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

2. Mostre que a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{H.41})$$

é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e, além disso,

$$f_x(x, y) = 1 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 0, \quad (\text{H.42})$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

3. Mostre que a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{H.43})$$

é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e, além disso,

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 1, \quad (\text{H.44})$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

4. Mostre que, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a função  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\pi_i(\vec{x}) \doteq x_i, \quad (\text{H.45})$$

onde

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

e diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  e, além disso,

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{para } j = i \\ 0, & \text{para } j \neq i \end{cases}, \quad (\text{H.46})$$

para cada  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Como consequência dos itens 1., 2. e 3. do Exercício H.3.1 e da Proposição H.2.2, podemos demonstrar o:

**Corolário H.3.2** *Toda função polinomial, de  $n$  variáveis, é diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  e toda função racional, de  $n$  variáveis, é diferenciável no seu domínio.*

**Demonstração:**

A demonstração será deixada como exercício para o leitor. □

**Observação H.3.2** *Chamamos a atenção para o fato que a verificação se uma função é diferenciável em um ponto não é, em geral, tarefa fácil, mesmo nos casos mais elementares (como, por exemplo, nos Exemplos acima).*

*Isto nos faz pensar que deveríamos procurar uma forma mais simples de tentar verificar a diferenciabilidade de funções a valores reais, de várias variáveis reais.*

Para ilustrar consideremos o:

**Exemplo H.3.2** *Mostre que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{H.47})$$

não é diferenciável no ponto  $(0, 0)$ .

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$  não é contínua no ponto  $(0, 0)$ , pois o limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \quad (\text{H.48})$$

não existe.

De fato, para mostrar isto, calculemos o limite acima, sobre a curva parametrizada  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{H.49})$$

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_1(t)] &\stackrel{\text{(H.49)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t, 0)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e (H.47)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cdot 0^2}{t^2 + 0^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calculemos agora, o limite (H.48) acima, sobre a curva parametrizada  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma_2(t) \doteq (t^2, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{H.50})$$

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f[\gamma_2(t)] &\stackrel{\text{(H.50)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f[(t^2, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e (H.47)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 \cdot t^2}{(t^2)^2 + t^4} \\ &= 1, \end{aligned}$$

mostrando que não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Portanto a função  $f$  **não** é contínua no ponto  $(0, 0)$  e, como consequência do Teorema H.2.1, não será uma função diferenciável no ponto  $(0, 0)$ , como pedido. □

Consideremos agora o:

**Exemplo H.3.3** Mostre que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{H.51})$$

**não** é diferenciável no ponto  $(0, 0)$ , embora seja uma função contínua no ponto  $(0, 0)$  e tenha todas as derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $(0, 0)$ .

Verifique que as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$ , em relação a  $x$  e a  $y$ , **não** são funções contínuas no ponto  $(0, 0)$ .

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$  é contínua no ponto  $(0, 0)$ , pois:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &\stackrel{(x,y) \neq (0,0) \text{ e (H.51)}}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &\stackrel{\text{infinitésimo } x \text{ limitada (veja (H.53))}}{=} 0 \\ &\stackrel{\text{(H.51)}}{=} f(0, 0), \end{aligned} \quad (\text{H.52})$$

pois,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0 \\
 \text{e} \quad & \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \stackrel{x^2 \leq x^2 + y^2}{\leq} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \\
 & = 1,
 \end{aligned} \tag{H.53}$$

para  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Existem as derivadas parciais da função  $f$  no ponto  $(0, 0)$ , pois:

$$\begin{aligned}
 f_x(0, 0) & \stackrel{(8.4) \text{ com } x_0=y_0=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
 & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
 & \stackrel{h \neq 0 \text{ e (H.51)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2 + 0^2} - 0 \\
 & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} \\
 & \stackrel{h \neq 0}{=} 1
 \end{aligned} \tag{H.54}$$

e

$$\begin{aligned}
 f_y(0, 0) & \stackrel{(8.8) \text{ com } x_0=y_0=0}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} \\
 & = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} \\
 & \stackrel{k \neq 0 \text{ e (H.51)}}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0^3}{0^2 + k^2} - 0 \\
 & = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^3} \\
 & \stackrel{k \neq 0}{=} 0.
 \end{aligned} \tag{H.55}$$

Portanto, de (H.52), (H.54) e (H.55), a função  $f$  é contínua no ponto  $(0, 0)$  e tem derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $(0, 0)$ .

Vamos agora analisar a diferenciabilidade da função  $f$  no ponto  $(0, 0)$ .

Para isso devemos analisar se o limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|}$$

existe e dá igual a zero.



Para isto observemos que, para  $(h, k) \neq (0, 0)$ , teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} &\stackrel{\text{(H.31)}}{=} \frac{f(0+h, 0+k) - \overbrace{f(0, 0)}^{(\text{H.51})_0} - \overbrace{f_x(0, 0)h}^{(\text{H.54})_1} - \overbrace{f_y(0, 0)k}^{(\text{H.55})_0}}{\|(h, k)\|} \\
 &\stackrel{(\text{h,k}) \neq (0,0) \text{ e (H.51)}}{=} \frac{\overbrace{f(h, k)} - 1 \cdot h - 0 \cdot k}{\underbrace{\|(h, k)\|}_{=\sqrt{h^2+k^2}}} \\
 &= \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{-k^2 h}{(\sqrt{h^2+k^2})^3}. \tag{H.56}
 \end{aligned}$$

Notemos que, sobre a curva parametrizada  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \tag{H.57}$$

o limite acima não existe em  $\mathbb{R}$ , pois

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[\gamma_1(t)]}{\|\gamma_1(t)\|} &\stackrel{\text{(H.57)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(t, t)}{\|(t, t)\|} \\
 &\stackrel{t \neq 0 \text{ e (H.56)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2 t}{(\sqrt{t^2+t^2})^3} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{2^{\frac{3}{2}} (\sqrt{t^2})^3} \\
 &= -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{|t|^3} \\
 &= -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t}{|t|^2 |t|} \\
 &\stackrel{t \neq 0}{=} -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|t|},
 \end{aligned}$$

que não existe em  $\mathbb{R}$ .

De fato, como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{|t|} &\stackrel{t < 0, \log_{\text{do}} |t| = -t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{-t} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{t} \\ &\stackrel{t \neq 0}{=} -1 \end{aligned} \quad (\text{H.58})$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|t|} &\stackrel{t > 0, \log_{\text{do}} |t| = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} \\ &\stackrel{t \neq 0}{=} 1 \\ &\neq -1 \stackrel{(\text{H.58})}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t^3}{|t|^3}. \end{aligned} \quad (\text{H.59})$$

Logo, de (H.58) e (H.59), segue que não existe o limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{|t|^3}$ .

Portanto, deste fato e (H.56), teremos que não existirá o limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[\gamma_1(t)]}{\|\gamma_1(t)\|}$ .

Portanto, o limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

não existirá.

Portanto, da Definição H.2.1, a função  $f$  não é diferenciável no ponto  $(0,0)$ .

Observemos que as funções  $f_x, f_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  **não** são contínuas no ponto  $(0,0)$ .

De fato, das regras de derivação básicas, de (H.54) e (H.55), segue que:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{para } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{para } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (\text{H.60})$$

e

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{para } (x,y) = (0,0) \end{cases}. \quad (\text{H.61})$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Estudemos os limites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x,y).$$

Notemos que, sobre a curva parametrizada  $\beta_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\beta_1(t) \doteq (0, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{H.62})$$

temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f_x[\beta_1(t)] &\stackrel{\text{(H.62)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f_x[(0, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e (H.60)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{3 \cdot 0^2}{0^2 + t^2} - \frac{2 \cdot 0^4}{(0^2 + t^2)^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{H.63}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f_y[\beta_1(t)] &\stackrel{\text{(H.62)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f_y[(0, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e (H.61)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{2t \cdot 0^3}{(0^2 + t^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{H.64}$$

Porém, sobre a curva parametrizada  $\beta_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\beta_2(t) \doteq (t, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \tag{H.65}$$

temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f_x[\beta_2(t)] &\stackrel{\text{(H.65)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f_x[(t, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e (H.60)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{3t^2}{t^2 + t^2} - \frac{2t^4}{(t^2 + t^2)^2} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right] \\ &= 1, \end{aligned} \tag{H.66}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f_y[\beta_2(t)] &\stackrel{\text{(H.65)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f_y[(t, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e (H.61)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{2tt^3}{(t^2 + t^2)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{2t^4}{4t^4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{H.67}$$

e portanto, de (H.63), (H.66) e (H.64), (H.67), respectivamente, segue que não existem os limites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y),$$

mostrando, pela Definição 7.2.1, que as funções  $f_x$  e  $f_y$  não são contínuas no ponto  $(0, 0)$ . □

O resultado a seguir nos dá uma condição suficiente para que uma função a valores reais, de duas variáveis,  $f$  seja uma função diferenciável em um ponto  $(x_0, y_0)$ .

A importância deste resultado se deve a facilidade na verificação de suas hipóteses.

**Teorema H.3.1** *Sejam  $A$  um conjunto aberto, não vazio de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$ .*

*Suponhamos que a função  $f$  seja contínua no ponto  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$  e suas derivadas parciais de primeira ordem, em relação a  $x$  e  $y$ , existem no conjunto  $A$  e são contínuas no ponto  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ .*

*Então a função  $f$  será diferenciável no ponto  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ .*

**Demonstração:**

Como o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $\vec{x}_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$ , podemos escolher números reais positivos  $h_0$  e  $k_0$ , suficientemente pequenos, de forma que o retângulo

$$\begin{aligned} Q &\doteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x_0 \leq x \leq x_0 + h, y_0 \leq y \leq y_0 + k \right\} \\ &= [x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + k], \end{aligned}$$

esteja contido no conjunto  $A$ , para cada  $(h, k)$ , de modo que

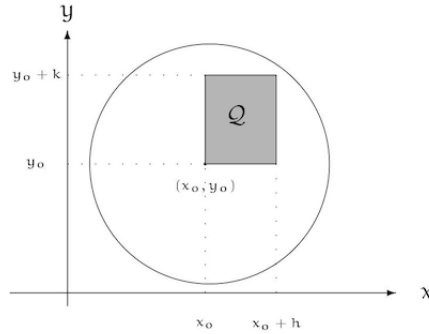
$$|h| \leq h_0 \quad \text{e} \quad |k| \leq k_0.$$

Consideraremos o caso que

$$0 < h \leq h_0 \quad \text{e} \quad 0 < k \leq k_0,$$

cuja figura abaixo ilustra a situação.

Os outros casos podem ser tratados de modo semelhante e serão deixados como exercício para o leitor.



Notemos que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - \underbrace{f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k)}_{=0} - f(x_0, y_0). \quad (\text{H.68})$$

Definamos as funções  $G : [x_0, x_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$G(x) \doteq f(x, y_0 + k), \quad \text{para cada } x \in [x_0, x_0 + h], \quad (\text{H.69})$$

e  $H : [y_0, y_0 + k] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$H(y) \doteq f(x_0, y), \quad \text{para cada } y \in [y_0, y_0 + k]. \quad (\text{H.70})$$

Assim, utilizando-se (H.69) e (H.70), segue que (H.68) tornar-se-á

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = G(x_0 + h) - G(x_0) + H(y_0 + k) - H(y_0). \quad (\text{H.71})$$

Como as funções  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  são contínuas  $[x_0, x_0 + h]$ ,  $[y_0, y_0 + k]$ , respectivamente (pois a função  $\underline{f}$  é contínua em  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ ) e diferenciáveis em  $(x_0, x_0 + h)$ ,  $(y_0, y_0 + k)$ , respectivamente (pois a função  $\underline{f}$  tem derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ ) segue, do Teorema do valor médio (vista na disciplina de Cálculo 1), que existem

$$\bar{x} \in (x_0, x_0 + h) \quad \text{e} \quad \bar{y} \in (y_0, y_0 + k), \quad (\text{H.72})$$

de modo que,

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(\bar{x}) h \quad (\text{H.73})$$

$$H(y_0 + k) - H(y_0) = H'(\bar{y}) k. \quad (\text{H.74})$$

Mas

$$\begin{aligned} G'(\bar{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(\bar{x} + h) - G(\bar{x})}{h} \\ &\stackrel{(\text{H.69})}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h, y_0 + k) - f(\bar{x}, y_0 + k)}{h} \\ &\stackrel{(\text{8.4}), \text{ com } x_0 \doteq \bar{x}, y_0 \doteq y_0 + k}{=} f_x(\bar{x}, y_0 + k). \end{aligned} \quad (\text{H.75})$$

De modo análogo, podemos mostrar que

$$H'(\bar{y}) = f_y(x_0, \bar{y}). \quad (\text{H.76})$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Assim, de (H.71), (H.73) e (H.74), segue que

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &\stackrel{(\text{H.71})}{=} G(x_0 + h) - G(x_0) + H(y_0 + k) - H(y_0) \\ &\stackrel{(\text{H.73}) \text{ e } (\text{H.74})}{=} G'(\bar{x}) h + H'(\bar{y}) k \\ &\stackrel{(\text{H.75}) \text{ e } (\text{H.76})}{=} f_x(\bar{x}, y_0 + k) h + f_y(x_0, \bar{y}) k. \end{aligned} \quad (\text{H.77})$$

Logo, se  $(h, k) \neq (0, 0)$ , é tal que  $(x_0 + h, y_0 + k) \in \mathcal{Q}$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} &\stackrel{(\text{H.31})}{=} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) h - f_y(x_0, y_0) k}{\|(h, k)\|} \\ &\stackrel{(\text{H.77})}{=} \frac{[f_x(\bar{x}, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)] h}{\|(h, k)\|} + \frac{[f_y(x_0, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)] k}{\|(h, k)\|} \end{aligned} \quad (\text{H.78})$$

Observemos que se  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , de (H.72), deveremos ter

$$(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x_0, y_0) \quad \text{e} \quad y_0 + k \rightarrow y_0.$$

Logo, da continuidade das derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  no ponto  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$  (veja a Definição 7.2.1), segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} f_x(\bar{x}, y_0 + k) &= \lim_{(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x_0, y_0)} f_x(\bar{x}, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0) \\ &\text{e} \\ \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} f_y(x_0, \bar{y}) &= \lim_{(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x_0, y_0)} f_y(x_0, \bar{y}) \\ &= f_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [f_x(\bar{x}, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)] &= 0 \\ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [f_y(x_0, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)] &= 0.\end{aligned}\tag{H.79}$$

Por fim, notemos que

$$\begin{aligned}\left| \frac{h}{\|(h, k)\|} \right| &= \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\stackrel{|h| = \sqrt{h^2} \leq \sqrt{h^2 + k^2}}{\leq} \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= 1\end{aligned}\tag{H.80}$$

e, de modo semelhante, teremos:

$$\left| \frac{k}{\|(h, k)\|} \right| \leq 1.\tag{H.81}$$

A verificação desta última desigualdade será deixada como exercício para o leitor.

Portanto passando o limite, quando

$$(h, k) \rightarrow (0, 0),$$

em (H.78), segue de (H.79), (H.80) e (H.81) que (utilizando-se que infinitésimo vezes limitada no ponto também será um infinitésimo no ponto, ou seja, do item 3. da Proposição 7.1.1):

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0,$$

que, pela Definição H.2.1, a função  $f$  é diferenciável no ponto  $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ , como queríamos demonstrar. □

**Observação H.3.3** *Vale o resultado análogo para funções a valores reais, de  $n$  variáveis reais. O enunciado e a demonstração do mesmo serão deixados como exercício para o leitor.*

Como consequência imediata temos o:

**Corolário H.3.3** *Sejam  $A$  um subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  função. Se a função  $f$  é de classe  $C^1$  em  $A$ , então a função  $f$  é uma função diferenciável em  $A$ .*

#### Demonstração:

De fato, se a função  $f$  é de classe  $C^1$  em  $A$ , então ela e suas derivadas parciais de primeira ordem serão contínuas no conjunto  $A$ .

Assim, do Teorema H.3.1, segue que ela será uma função diferenciável em  $A$ , completando a demonstração. □

Com isto fica fácil tratar o:

**Exemplo H.3.4** *Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x, y) \doteq \text{sen}(x^2 + y^2), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2.\tag{H.82}$$

*Mostre que a função  $f$  é uma função diferenciável no  $\mathbb{R}^2$ .*

**Resolução:**

De fato, notemos que as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$  são dadas por

$$f_x(x, y) \stackrel{\text{(H.82)}}{=} \frac{\partial}{\partial x} [\text{sen}(x^2 + y^2)]$$

$$\stackrel{\text{Execício}}{=} 2x \cos(x^2 + y^2) \quad (\text{H.83})$$

e

$$f_y(x, y) \stackrel{\text{(H.82)}}{=} \frac{\partial}{\partial y} [\text{sen}(x^2 + y^2)]$$

$$\stackrel{\text{(H.82)}}{=} 2y \cos(x^2 + y^2), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{H.84})$$

Logo, pode-se verificar que, de (H.82), (H.83) e (H.84), a função  $f$  e suas derivadas parciais de primeira ordem são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Logo, do Teorema H.3.1, segue que a função  $f$  será uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ . □

**Observação H.3.4** Embora o Teorema H.3.1 acima, nos leve a achar que resolvemos todos os problemas, no que se refere a mostrar que uma função a valores reais, de várias variáveis reais, é diferenciável em um ponto, há casos em que ele não se aplica porém a função tratada é diferenciável no referido ponto, ou seja, existem funções a valores reais, de várias variáveis reais, que são diferenciáveis em um ponto e cujas derivadas parciais não são contínuas neste ponto.

Isto é o que mostra o exemplo a seguir.

Neste caso, a verificação da diferenciabilidade deve ser feita pela Definição H.2.1.

Para ilustrar a situação acima temos o:

**Exemplo H.3.5** Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} y^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (\text{H.85})$$

Pede-se:

1. a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ ;
2. determinar as funções  $f_x$  e  $f_y$ , onde elas existirem;
3. mostrar que as funções  $f_x$  e  $f_y$  não são contínuas no ponto  $(0, 0)$ ;
4. mostrar que a função  $f$  é diferenciável no ponto  $(0, 0)$  (na verdade, em todo  $\mathbb{R}^2$ ).

**Resolução:****De 1.:**

Notemos que a dificuldade de estudar a continuidade da função  $f$ , dada por (H.85), é estudar a continuidade da função  $f$  no ponto em  $(0, 0)$ .

Deixaremos a verificação da continuidade da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , como exercício para o leitor.

No caso da continuidade da função  $f$  em  $(0, 0)$ , o limite em questão, é do tipo infinitésimo vezes limitada no ponto  $(0, 0)$ .

A verificação do mesmo será deixada como exercício para o leitor.

**De 2.:**

Observemos que a função  $f$  tem derivadas parciais de primeira ordem em todo ponto  $(x, y) \neq (0, 0)$  e, além disso, teremos:

$$f_x(x, y) \stackrel{(H.85)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left[ y^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \right] - \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right), \quad (H.86)$$

$$f_y(x, y) \stackrel{(H.85)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \right] \stackrel{(H.85)}{=} 2y \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right). \quad (H.87)$$

Notemos também que, existem as derivadas parciais da função  $f$  de primeira ordem no ponto  $(0, 0)$ . De fato, pois

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &\stackrel{(8.4) \text{ com } x_0=y_0=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - \overbrace{f(0, 0)}^{(H.85)_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} \\ &\stackrel{h \neq 0 \text{ e } (H.85)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{h^2 + 0^2} \right)}{h} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (H.88)$$

$$\begin{aligned} f_y(0, 0) &\stackrel{(8.4) \text{ com } x_0=y_0=0}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+k) - \overbrace{f(0, 0)}^{(H.85)_0}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k)}{k} \\ &\stackrel{k \neq 0 \text{ e } (H.85)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{0^2 + k^2} \right)}{k} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ k \operatorname{sen} \left( \frac{1}{k^2} \right) \right] \\ &\stackrel{\text{infinitésimo } \times \text{ limitada}}{=} 0, \end{aligned} \quad (H.89)$$

ou seja, de (H.86), (H.88) e (H.87), (H.89), segue que as funções  $f_x, f_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , serão dadas por:

$$f_x(x, y) = \begin{cases} -\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right), & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (H.90)$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right), & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \quad (H.91)$$



**De 3.:**

Notemos que as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  não são funções contínuas no ponto  $(0, 0)$ .

De fato, sobre a curva parametrizada  $\gamma_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma_1(t) \doteq (t, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{H.92})$$

teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f_x[\gamma_1(t)] &\stackrel{(\text{H.92})}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f_x[(t, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e } (\text{H.90})}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ -\frac{2 \cdot t \cdot t^2}{(t^2 + t^2)^2} \cos\left(\frac{1}{t^2 + t^2}\right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{2t} \cos\left(\frac{1}{2t^2}\right) \right], \end{aligned}$$

que não existe.

A justificativa deste fato será deixada como exercício para o leitor.

De modo semelhante, teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f_y[\gamma_1(t)] &\stackrel{(\text{H.92})}{=} \lim_{t \rightarrow 0} f_y[(t, t)] \\ &\stackrel{t \neq 0 \text{ e } (\text{H.91})}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ 2t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t^2 + t^2}\right) - \frac{2t^3}{(t^2 + t^2)^2} \cos\left(\frac{1}{t^2 + t^2}\right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ 2t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2t^2}\right) - \frac{1}{2t} \cos\left(\frac{1}{2t^2}\right) \right], \end{aligned}$$

que também não existe.

A justificativa deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto as funções  $f_x$  e  $f_y$  não são funções contínuas no ponto  $(0, 0)$ .

**De 4.:**

Verifiquemos que a função  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

Para isto observemos que, para  $(h, k) \neq (0, 0)$ , teremos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|E(h, k)|}{\|(h, k)\|} \\ &= \frac{|E(h, k)|}{\|(h, k)\|} \\ &\stackrel{(\text{H.31})}{=} \frac{|f(0+h, 0+k) - \overbrace{f(0,0)}^{(\text{H.85})_0} - \overbrace{f_x(0,0)h}^{(\text{H.90})_0} - \overbrace{f_y(0,0)k}^{(\text{H.91})_0}|}{\|(h, k)\|} \\ &= \frac{|f(h, k)|}{\|(h, k)\|} \\ &\stackrel{(h, k) \neq (0,0) \text{ e } (\text{H.85})}{=} \frac{k^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2 + k^2}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\stackrel{k^2 \leq h^2 + k^2}{\leq} \frac{(h^2 + k^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2 + k^2}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{h^2 + k^2} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{h^2 + k^2} \right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} \right| \\ &\leq \sqrt{h^2 + k^2} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{h^2 + k^2} \right), \quad \text{para cada } (h, k) \neq (0, 0). \end{aligned} \quad (\text{H.93})$$

Notemos que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \left[ \sqrt{h^2 + k^2} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{h^2 + k^2} \right) \right] = 0 \quad (\text{H.94})$$

pois o limite acima é do tipo infinitésimo vezes limitada no ponto  $(0, 0)$ .

Deixaremos a verificação da afirmação acima como exercício para o leitor.

Logo, de (H.93), (H.94) e do Teorema do sanduiche (ou seja, o item 7. do Teorema 7.1.1), segue que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0,$$

mostrando que a função  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ , completando a resolução. □

**Observação H.3.5** Para finalizar esta seção vale observarmos que tudo o que tratamos até agora esteve relacionado com funções **a valores reais**, de  $n$  variáveis reais, isto é, funções do tipo

$$f : A \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Funções do tipo

$$f : A \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

(com  $m \geq 2$ ) são tratadas no Apêndice J.

Porém, vale chamar a atenção que podemos tratar da diferenciabilidade deste tipo de funções, bastando, para tanto, olhar as funções coordenadas que a definem.

Veremos mais adiante que se

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})), \quad \text{para cada } \vec{x} \in A,$$

então a função  $f$  será diferenciável em  $\vec{x}_0 \in A$  se, e somente se, cada uma das suas funções componentes, isto é, as funções  $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , forem funções diferenciáveis em  $\vec{x}_0$ .

# Apêndice I

## Fórmula de Taylor para funções a valores reais, de várias variáveis reais

### I.1 Fórmula e polinômio de Taylor para funções a valores reais, de uma variável real

Nesta seção recordaremos a fórmula de Taylor para funções a valores reais, de uma variável real, vista na disciplina de Cálculo I, a saber o:

**Teorema I.1.1 (de Taylor)** *Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^n$  em  $[a, b]$  tal que  $g^{(n)}$  é diferenciável em  $(a, b)$ .*

*Então existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \quad (\text{I.1})$$

Com isto temos a:

**Definição I.1.1** *Dada uma função  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida num intervalo  $I$  que seja  $n$ -vezes derivável no ponto  $a \in I$ , o polinômio de Taylor de ordem  $n$ , associado à função  $g$  no ponto  $x = a$ , indicado por  $p_n$ , é definido por:*

$$p_n(x) \doteq g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (\text{I.2})$$

#### Observação I.1.1

1. *Observemos que nas condições do Teorema I.1.1 acima, se considerarmos*

$$h \doteq b - a, \quad (\text{I.3})$$

*teremos que (I.1), tornar-se-á:*

$$g(a+h) = p_n(a+h) + R_{n+1}(h) \quad (\text{I.4})$$

$$\text{onde } R_{n+1}(h) \doteq \frac{g^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\text{I.5})$$

$$\text{satisfaz } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0. \quad (\text{I.6})$$

2. Se

$$a \doteq 0 \quad e \quad b \doteq 1$$

em (I.1), então teremos:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad (\text{I.7})$$

para algum  $c \in (0, 1)$ .

Temos também a:

**Definição I.1.2** O número real  $R_{n+1}(h)$ , dado por (I.5), será denominado resto de Taylor de ordem  $n$ , associado à função  $g$ , no ponto  $x = a$ , isto é,

$$R_{n+1}(h) \doteq \frac{g^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (\text{I.8})$$

**Observação I.1.2** Na disciplina de Cálculo 1, uma aplicação importante do Teorema de Taylor, pode ser estudar os pontos críticos de uma função a valores reais, de uma variável real, isto é, determinar os pontos de máximo, mínimo locais (ou relativos) de uma função  $g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Lembremos que do Teste da derivada segunda (visto na disciplina de Cálculo 1) diz o seguinte: Suponhamos que a função  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é duas vezes diferenciável em  $I$  e tem um ponto crítico em  $x_0 \in I$ , isto é,

$$g'(x_0) = 0,$$

então:

1. se

$$g''(x_0) > 0,$$

teremos que a função  $g$  tem um mínimo local (ou relativo) no ponto  $x_0$ ;

2. se

$$g''(x_0) < 0,$$

teremos que a função  $g$  tem um máximo local (ou relativo) no ponto  $x_0$ .

Um modo de lembrar (e de demonstrar o resultado acima) é utilizar a Fórmula de Taylor (I.1).

De fato, suponhamos, para facilitar, que a função  $g$  seja de classe  $C^\infty$  em  $I$  e  $x_0 = 0$ .

Logo do Teorema de Taylor (ou seja, o Teorema I.1.1, com  $b \doteq x$  e  $x_0 \doteq 0$ ), segue que existe  $c \in I$ , tal que:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(c)}{3!}x^3 \\ &\stackrel{g'(0)=0}{=} g(0) + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(c)}{3!}x^3. \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Logo, para

$$x \sim x_0 = 0$$

temos, da expressão (I.9) acima, que

$$g(x) \sim g(0) + \frac{g''(0)}{2!}x^2.$$

Observemos que, a parábola

$$y = g(0) + \frac{g''(0)}{2!} x^2 \quad (\text{I.10})$$

tem concavidade voltada para cima se

$$g''(0) > 0.$$

Neste caso a função  $g$  teria um mínimo local (ou relativo) em

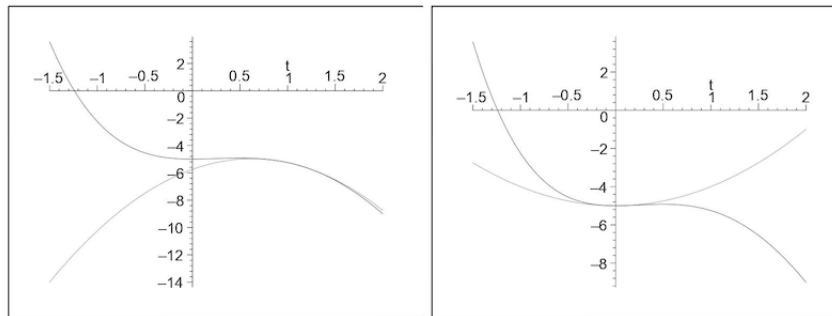
$$x_0 = 0.$$

Por outro lado, a parábola de equação (I.10), terá concavidade voltada para baixo se

$$g''(0) < 0.$$

Neste caso a função  $g$  teria um máximo local (ou relativo) em  $x_0 = 0$ , daí a importância do sinal da derivada segunda da função  $g$  no ponto  $x_0 = 0$ .

A figura abaixo ilustra o que ocorreu em cada um dos casos acima.



## I.2 Fórmula e polinômio de Taylor para funções a valores reais, de duas variáveis reais

Nosso objetivo é encontrar uma expressão semelhante ao que foi feito para funções a valores reais, de uma variável real, na seção anterior para funções a valores reais, de  $n$ -variáveis reais.

Iniciaremos tratando do caso de funções a valores reais, de duas variáveis reais (isto é, o caso  $n = 2$ ).

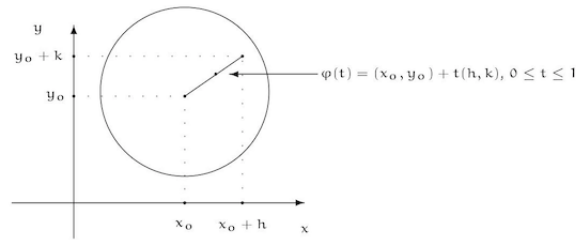
**Observação I.2.1** Para isto consideremos  $A$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_0 \doteq (x_0, y_0) \in A$  e  $(h, k)$ , de modo que  $(x_0, y_0) + t \cdot (h, k) \in A$ , para cada  $t \in [0, 1]$  (que é possível pois o conjunto  $A$  é aberto em  $\mathbb{R}^2$  e  $P_0 \in A$  - veja figura abaixo).

Consideremos a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  em  $A$  e, a partir dela, defina a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(t) \doteq f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad \text{para } t \in [0, 1], \quad (\text{I.11})$$

ou seja, a função

$$g \doteq f \circ \varphi,$$



onde a função  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (x(t), y(t)) \\ &\doteq (x_0 + th, y_0 + tk), \quad \text{para } t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Notemos que imagem da função  $\varphi$  é o segmento de reta que une o ponto  $(x_0, y_0)$  ao ponto  $(x_0 + h, y_0 + k)$  (veja a figura acima).

Como a função  $\varphi$  é de classe  $C^\infty$  em  $[0, 1]$ , segue que a função  $\underline{g}$  será uma função de classe  $C^{n+1}$  em  $[0, 1]$  (pois ela é a composta da função  $\underline{f}$  com a função  $\varphi$ ).

Podemos assim aplicar o Teorema de Taylor visto na disciplina de Cálculo I (isto é, o Teorema I.1.1) para a função  $\underline{g}$  e obter a fórmula de Taylor para a função  $\underline{g}$ , com

$$a \doteq 0 \quad e \quad b = 1.$$

Notemos que

$$\varphi(0) = (x_0, y_0) = P_0, \quad g(0) = f(P_0) \quad e \quad g(1) = f(x_0 + h, y_0 + k). \quad (\text{I.13})$$

Fazendo uso da regra da cadeia (isto é, o Teorema 9.1.1), teremos:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi(t)] \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}[\varphi(t)] \frac{dy}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}[(x(t), y(t))]h + \frac{\partial f}{\partial y}[(x(t), y(t))]k, \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\varphi(t)] \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}[\varphi(t)] \frac{dy}{dt}(t) \right] h + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}[\varphi(t)] \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[\varphi(t)] \frac{dy}{dt}(t) \right] k \\ &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\varphi(t)] h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}[\varphi(t)] k \right] h + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}[\varphi(t)] h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[\varphi(t)] k \right] k \\ &\stackrel{\text{Teorema de Schwarz}}{=} f_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[(x(t), y(t))] h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x(t), y(t)) k h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[(x(t), y(t))] k^2 \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

$$\begin{aligned}
 g'''(t) &= \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} [\varphi(t)] \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} [\varphi(t)] \frac{dy}{dt}(t) \right] h^2 \\
 &\quad + 2 \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} [\varphi(t)] \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} [\varphi(t)] \frac{dy}{dt}(t) \right] kh \\
 &\quad + \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} [\varphi(t)] \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} [\varphi(t)] \frac{dy}{dt}(t) \right] k^2 \\
 &= \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} [\varphi(t)] h + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} [\varphi(t)] k \right] h^2 \\
 &\quad + 2 \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} [\varphi(t)] h + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} [\varphi(t)] k \right] kh \\
 &\quad + \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} [\varphi(t)] h + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} [\varphi(t)] k \right] k^2 \\
 &\quad + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} [\varphi(t)] h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} [\varphi(t)] h^2 k \\
 &\quad + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} [\varphi(t)] h k^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} [\varphi(t)] k^3, \\
 &\quad \vdots \\
 g^k(t) &= \dots,
 \end{aligned}$$

$f_{xyy} \stackrel{\text{Teorema de Schwarz}}{=} f_{yyx}, f_{xyx} \stackrel{\text{Teorema de Schwarz}}{=} f_{xxy}$

para  $k \in \{3, 4, \dots, n + 1\}$ .

Fazendo-se  $t = 0$  nas expressões acima, obtemos (lembramos que  $\varphi(0) = P_0$ ):

$$\begin{aligned}
 g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) k, \\
 g''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) k^2, \\
 g'''(0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_0) h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(P_0) h^2 k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(P_0) h k^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(P_0) k^3, \quad (I.16)
 \end{aligned}$$

em geral teremos:

$$\begin{aligned}
 g^{(n)}(0) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(P_0) h^{n-j} k^j \\
 g^{(n+1)}(c) &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_0 + c h, y_0 + c k) h^{n+1-j} k^j, \quad (I.17)
 \end{aligned}$$

para algum  $c \in (0, 1)$ .

Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h, y_0 + k) &\stackrel{(I.11)}{=} g(1) \\
 &\stackrel{(I.9)}{=} g(0) + g'(0) \cdot 1 + \frac{g''(0)}{2!} \cdot 1^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \cdot 1^n + \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} \\
 &\stackrel{(I.16)}{=} \stackrel{(I.17)}{=} f(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2 \right) \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_0, y_0) h^{n-j} k^j + R_{n+1}(h, k) \quad (I.18)
 \end{aligned}$$

onde

$$R_{n+1}(h, k) \doteq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_0 + c h, y_0 + c k) h^{n+1-j} k^j, \quad (I.19)$$

para algum  $c \in (0, 1)$ .

Notemos que, embora  $c$  possa variar com  $(h, k)$ , teremos que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_0 + c h, y_0 + c k) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_0, y_0), \quad (I.20)$$

pois a função  $f$  é de classe  $C^{n+1}$  no conjunto  $\underline{A}$  (logo a função  $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}$  será uma função contínua em  $(x_0, y_0)$ ) e  $c \in (0, 1)$ .

Além do mais, para  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{|h^{n+1-j} k^j|}{\|(h, k)\|^n} &= \left| \frac{h^{n+1-j} k^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} \right| \\
 &= \frac{|h|^{n+1-j}}{(h^2 + k^2)^{\frac{n-j}{2}}} \frac{|k|^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{j}{2}}} \\
 &\stackrel{h^2 + k^2 \geq h^2, k^2}{\leq} \frac{|h|^{n+1-j}}{(h^2)^{\frac{n-j}{2}}} \frac{|k|^j}{(k^2)^{\frac{j}{2}}} \\
 &= \frac{|h|^{n+1-j} |k|^j}{|h|^{n-j} |k|^j} \\
 &= |h|. \quad (I.21)
 \end{aligned}$$

Notemos que, para

$$j = n + 1,$$



teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{|h^{n+1-j} k^j|}{\|(h, k)\|^n} &= \left| \frac{h^{n+1-j} k^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} \right| \\
 &\stackrel{n+1=j}{=} \frac{|k|^{n+1}}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} \\
 &\stackrel{h^2+k^2 \geq k^2}{\leq} \frac{|k|^{n+1}}{(k^2)^{\frac{n}{2}}} \\
 &= |k|.
 \end{aligned} \tag{I.22}$$

Assim, do Teorema do sanduiche e de (I.21) e (I.22), segue que para cada

$$j \in \{0, \dots, n+1\},$$

teremos:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^{n+1-j} k^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} = 0. \tag{I.23}$$

Combinando as identidades (I.20) e (I.23), teremos que  $R_{n+1}(h, k)$ , irá satisfazer

$$\begin{aligned}
 \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_{n+1}(h, k)}{\|(h, k)\|^n} &\stackrel{(I.19)}{=} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_0 + ch, y_0 + ck) h^{n+1-j} k^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \underbrace{\left[ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_0 + ch, y_0 + ck) \right]}_{\stackrel{(I.20)}{=} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_0, y_0)} \underbrace{\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^{n+1-j} k^j}{(h^2 + k^2)^{\frac{n}{2}}}}_{\stackrel{(I.23)}{=} 0} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_{n+1}(h, k)}{\|(h, k)\|^n} = 0.$$

Com isto podemos introduzir a s:

**Definição I.2.1** Considerando-se

$$x \doteq x_0 + h \quad e \quad y \doteq y_0 + k$$

na expressão (I.18), definimos o polinômio de Taylor de grau (no máximo)  $n$ , associado à função  $f$  no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$  como sendo o polinômio  $p_n$  (nas duas variáveis  $x$  e  $y$ ) dado por:

$$p_n(x, y) \doteq f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o, y_o)(x - x_o)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)(x - x_o)(y - y_o) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o, y_o)(y - y_o)^2 \right) + \dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_o, y_o)(x - x_o)^{n-j}(y - y_o)^j, \quad (\text{I.24})$$

e o resto de Taylor, associado à função  $f$ , de ordem  $n + 1$ , no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ , indicado por

$R_{n+1}(h, k)$ , como sendo:

$$R_{n+1}(h, k) \doteq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(x_o + ch, y_o + ck) h^{n+1-j} k^j, \quad (\text{I.25})$$

para algum  $c \in (0, 1)$ .

### Observação I.2.2

1. A expressão (I.24) é conhecida como Fórmula de Taylor de ordem  $n$ , associado à função  $f$ , no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ .
2. Note que o polinômio de Taylor de ordem um, associado à função  $f$ , no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ , ((I.24) com  $n = 1$ ) será dado por:

$$p_1(x, y) = f(P_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)(y - y_o) \quad (\text{I.26})$$

cuja representação geométrica do gráfico é o plano tangente a representação geométrica do gráfico da função  $f$  no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ .

3. Já o polinômio de Taylor de ordem dois, associado à função  $f$ , no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ , ((I.24) com  $n = 2$ ) será dado por:

$$p_2(x, y) = f(P_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)(y - y_o) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o)(x - x_o)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_o)(x - x_o)(y - y_o) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o)(y - y_o)^2 \right) \quad (\text{I.27})$$

que será uma quádrica, cuja representação geométrica do seu gráfico, melhor aproxima (entre todas as quádricas) a representação geométrica gráfico da função  $f$ , perto do ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ .

4. Nos exemplos que seguem, procuraremos identificar o comportamento da função próximo ao ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ , analisando a representação geométrica do gráfico do seu polinômio de Taylor de ordem 2, associado à função  $f$ , no ponto  $P_o = (x_o, y_o)$ .

Começaremos pelo:

**Exemplo I.2.1** *Encontre o polinômio de Taylor de ordem dois, isto é*

$$p_2(x, y),$$

*associado à função  $f$ , no ponto*

$$P_0 = (x_0, y_0) \doteq (0, 0),$$

*onde a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por*

$$f(x, y) \doteq x \operatorname{sen}(y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{I.28})$$

**Resolução:**

A função acima é claramente de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo podemos considerar o polinômio de Taylor de qualquer ordem associado a função  $f$  em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

Em particular, consideraremos o polinômio de Taylor de ordem dois associado à função  $f$  no ponto

$$P_0 = (x_0, y_0) = (0, 0). \quad (\text{I.29})$$

Para isto precisaremos calcular todas as derivadas parciais da função  $f$ , até a segunda ordem, no ponto (I.29).

Podemos fazer isto olhando a tabela abaixo (veja (I.28)):

	$(x, y)$	calculado em $P_0$
$f$	$x \operatorname{sen}(y)$	0
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\operatorname{sen}(y)$	0
$\frac{\partial f}{\partial y}$	$x \cos(y)$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	0	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\cos(y)$	1
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$-x \operatorname{sen}(y)$	0

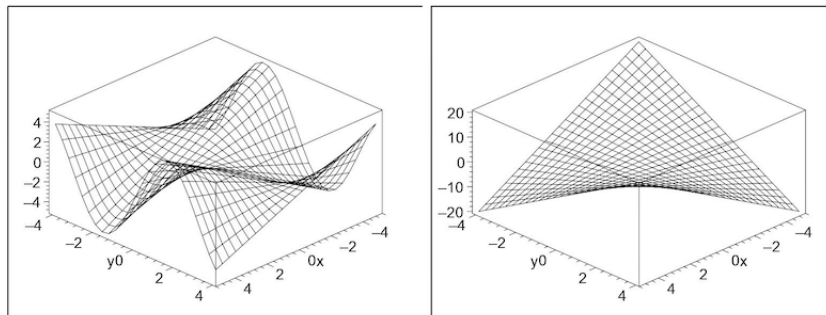
Assim, do item 3. da Observação I.2.2 e da tabela acima, teremos:

$$\begin{aligned}
 p_2(x, y) &\stackrel{(I.27)}{=} f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)(y - y_0)^2 \right) \\
 &\stackrel{(I.29)}{=} f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right) \\
 &\stackrel{\text{tabela acima}}{=} \frac{1}{2}(2xy) \\
 &= xy, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{I.30}
 \end{aligned}$$

completando a resolução. □

**Observação I.2.3** *Observemos que a representação geométrica do gráfico da função polinomial  $p_2$ , dada por (I.30), será uma sela (como foi visto na disciplina de Geometria Analítica).*

*As figuras abaixo exibem a representação geométrica do gráfico da função  $f$  e do polinômio de Taylor de ordem 2, associado à função  $f$ , no ponto  $P_0$ , isto é, a função polinomial  $p_2$ :*



Tratemos agora do:

**Exemplo I.2.2** *Encontre o polinômio de Taylor de ordem dois, associado à função  $f$ , no ponto*

$$P_0 = (x_0, y_0) \doteq (0, 0),$$

*isto é, a função polinomial  $p_2$ , dada por (I.27), onde a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por*

$$f(x, y) \doteq x \operatorname{sen}(x) + y \operatorname{sen}(y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{I.31}$$

### Resolução:

Como no Exemplo I.2.1 acima, temos que a função acima é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo podemos considerar o polinômio de Taylor de qualquer ordem, associado a função  $f$ , em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

Em particular, consideraremos o polinômio de Taylor de ordem dois, associado à função  $f$ , no ponto

$$P_0 = (x_0, y_0) \doteq (0, 0). \tag{I.32}$$

Para isto precisamos calcular todas as derivadas parciais da função  $f$ , até a segunda ordem, no ponto  $P_0$  (veja (I.32)), que são dadas na tabela abaixo:

	$(x, y)$	calculado em $P_0$
$f$	$x \operatorname{sen}(x) + y \operatorname{sen}(y)$	0
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)$	0
$\frac{\partial f}{\partial y}$	$\operatorname{sen}(y) + y \cos(y)$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$2 \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)$	2
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	0	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$2 \cos(y) - y \operatorname{sen}(y)$	2

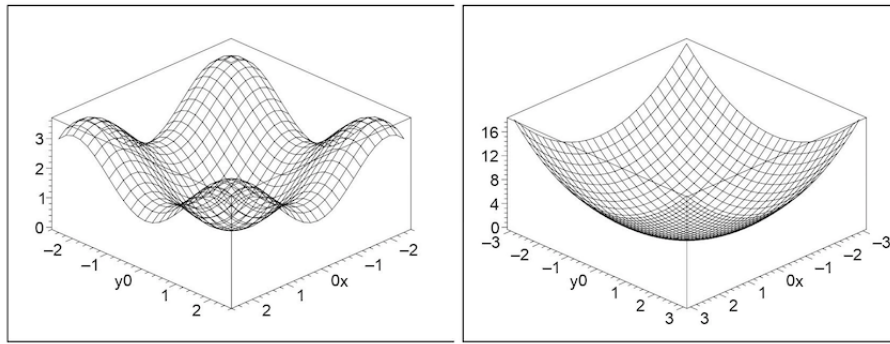
Assim,

$$\begin{aligned}
 p_2(x, y) &\stackrel{(I.27)}{=} f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)(y - y_0)^2 \right) \\
 &\stackrel{\text{tabela acima}}{=} \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2) \\
 &= x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{I.33}
 \end{aligned}$$

completando a resolução. □

**Observação I.2.4** *Notemos que a representação geométrica do gráfico da função polinomial  $p_2$  (dada por (I.33)) é um paraboloide de revolução (como visto na disciplina de Geometria Analítica).*

*As figuras abaixo representam as representações geométricas dos gráficos das funções  $f$  e  $p_2$ , respectivamente.*



A seguir temos o:

**Exercício I.2.1** *Encontre o polinômio de Taylor de ordem dois (isto é, a função polinomial  $\underline{p}_2$ , dada por (I.27)), associado à função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x, y) \doteq \text{sen}(x^4 + y^4), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{I.34})$$

em torno da origem, isto é, no ponto

$$P_o = (x_o, y_o) \doteq (0, 0).$$

### Resolução:

Notemos que a função  $\underline{f}$ , dada por (I.34), é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo podemos considerar o polinômio de Taylor, de qualquer ordem, associado à função  $\underline{f}$ , em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

Em particular, consideraremos o polinômio de Taylor de ordem dois associado à função  $\underline{f}$  no ponto

$$P_o = (x_o, y_o) = (0, 0). \quad (\text{I.35})$$

Para isto precisamos calcular todas as derivadas parciais da função  $\underline{f}$ , até a segunda ordem, no ponto  $\underline{P}_o$  (dado por (I.35)), que são dadas na tabela abaixo:

	$(x, y)$	calculado em $P_o$
$f$	$\text{sen}(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$4x^3 \cos(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial f}{\partial y}$	$4y^3 \cos(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$12x^2 \cos(x^4 + y^4) - 16x^6 \text{sen}(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$-16x^3 y^3 \text{sen}(x^4 + y^4)$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$12y^2 \cos(x^4 + y^4) - 16y^6 \text{sen}(x^4 + y^4)$	0

Assim,

$$\begin{aligned}
 p_2(x, y) &\stackrel{(I.27)}{=} f(P_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)(y - y_o) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_o)(x - x_o)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_o)(x - x_o)(y - y_o) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_o)(y - y_o)^2 \right) \\
 &\stackrel{\text{tabela acima}}{=} 0,
 \end{aligned} \tag{I.36}$$

completando a resolução.

□

**Observação I.2.5** *Notemos que a representação geométrica do gráfico da função polinomial  $p_2$ , dada por (I.36), é um plano horizontal, na verdade, o próprio plano tangente a representação geométrica do gráfico da função  $f$  na origem.*

*Este exemplo ilustra que o polinômio de Taylor de ordem dois, isto é, a função polinomial  $p_2$ , pode **não** ser suficiente para sabermos mais informações sobre a função  $f$ , próximo ao ponto  $P_o$ .*

*Deixamos como exercício ao leitor descobrir qual o menor inteiro  $n$  para os quais  $p_n(x, y)$  é diferente do polinômio nulo.*

Considerações de caracter geral são dadas pela:

**Observação I.2.6**

1. Notemos que existem funções de classe  $C^\infty$  que não são identicamente nulas tais que todos os polinômios de Taylor (de qualquer ordem) associados à função, em um determinado ponto (isto é, as funções polinomiais  $p_n$ ) são identicamente nulos.

Um exemplo da situação acima é dado pela função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & \text{para } (x, y) \neq 0. \\ 0, & \text{para } (x, y) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

Podemos mostrar que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$  e, além disso,

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(0, 0) = 0, \quad (\text{I.38})$$

para cada  $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Deste modo o polinômio de Taylor, associado à função  $f$  no ponto  $(0, 0)$ , de qualquer ordem, será identicamente nulo, isto é,

$$p_n(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

mas a função  $f$ , dada por (I.37), não é identicamente nula.

Na verdade ela só se anula em  $(0, 0)$ .

2. De modo semelhante ao desenvolvido acima podemos obter a fórmula de Taylor para uma função a valores reais, de  $n$ -variáveis reais e assim definirmos o polinômio de Taylor e o resto de Taylor da mesma.

Deixaremos como exercício para o leitor este desenvolvimento.



## Apêndice J

# Transformações entre espaços euclidianos

Tratamos, superficialmente, na Observação H.3.5, questões relacionados com funções a valores vetoriais, de várias variáveis reais.

Neste capítulo faremos um estudo mais aprofundado de tal situação.

### J.1 Definições e propriedades básicas

**Definição J.1.1** *Seja  $n, m \in \mathbb{N}$  fixados. Uma função  $T: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , será dita transformação do  $\mathbb{R}^n$ , no  $\mathbb{R}^m$ .*

*Podemos escrever a transformação acima da seguinte forma:*

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq (T_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, T_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

*para cada  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{A}$*  (J.1)

*ou, de forma abreviada,*

$$T(P) = (T_1(P), T_2(P), \dots, T_m(P)), \quad \text{para cada } P \in \mathcal{A}, \quad (\text{J.2})$$

*onde as funções  $T_j: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

*para  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , serão denominadas funções coordenadas, associadas à transformação  $T$ .*

**Observação J.1.1** *Notemos que, a Definição J.1.1, nos diz que uma transformação entre espaços euclidianos nada mais é que uma função de várias variáveis reais, a valores vetoriais.*

Podemos definir a soma e multiplicação por um escalar de transformações, como nos diz a:

**Definição J.1.2** *Sejam  $T, S: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  transformações e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

*Então, definiremos*

1. *a transformação  $(T + S): \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dada por*

$$(T + S)(P) \doteq T(P) + S(P), \quad \text{para cada } P \in \mathcal{A}; \quad (\text{J.3})$$

2. *a transformação  $\lambda \cdot T: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dada por*

$$(\lambda \cdot T)(P) \doteq \lambda \cdot T(P), \quad \text{para cada } P \in \mathcal{A}. \quad (\text{J.4})$$

Temos também a:

**Definição J.1.3** Uma transformação  $T : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  será dita injetora, se para  $P, Q \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \text{satisfazendo} \quad & P \neq Q, \\ \text{teremos:} \quad & T(P) \neq T(Q), \end{aligned} \tag{J.5}$$

$$\begin{aligned} \text{ou ainda, se} \quad & T(P) = T(Q), \\ \text{deveremos ter:} \quad & P = Q. \end{aligned} \tag{J.6}$$

Uma transformação  $t : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  será dita sobrejetora se

$$\begin{aligned} \text{para cada} \quad & Q \in \mathbb{R}^m, \\ \text{podemos encontrar} \quad & P \in \mathcal{A}, \\ \text{de modo que} \quad & t(P) = Q, \end{aligned} \tag{J.7}$$

$$\text{ou seja,} \quad t(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^m, \tag{J.8}$$

onde

$$T(\mathcal{A}) \doteq \{S(P); P \in \mathcal{A}\}, \tag{J.9}$$

ou seja, o conjunto imagem da transformação  $t$ .

A transformação  $T : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dita bijetora se for uma transformação injetora e sobrejetora.

Podemos também compor transformações, ou seja, temos a:

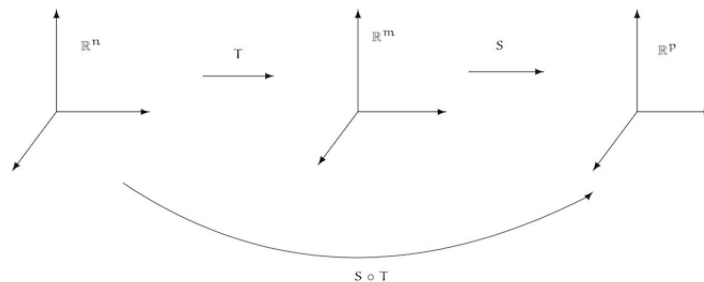
**Definição J.1.4** Sejam  $T : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $S : \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  transformações, tais que

$$T(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}. \tag{J.10}$$

Definimos a transformação composta de  $S$  com  $T$ , indicada por  $S \circ T$ , como sendo a transformação  $S \circ T : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , dada por

$$(S \circ T)(P) \doteq S[T(P)], \quad \text{para cada } P \in \mathcal{A}. \tag{J.11}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Como isto podemos definir a transformação inversa (quando existir), isto é,

**Definição J.1.5** *Sejam  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $B \subseteq \mathbb{R}^m$ .*

*Diremos que a transformação  $T : A \rightarrow B$  é uma transformação inversível, se existir uma transformação  $S : B \rightarrow A$  de modo que*

$$(S \circ T)(x) = x, \quad \text{para cada } x \in A \quad (\text{J.12})$$

$$\text{e } (T \circ S)(y) = y, \quad \text{para cada } y \in B. \quad (\text{J.13})$$

Deste modo temos a:

**Proposição J.1.1** *Se  $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$  é uma transformação inversível, então a transformação  $S : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ , satisfazendo (J.12) e (J.13), será única.*

**Demonstração:**

A demonstração será deixada como exercício para o leitor. □

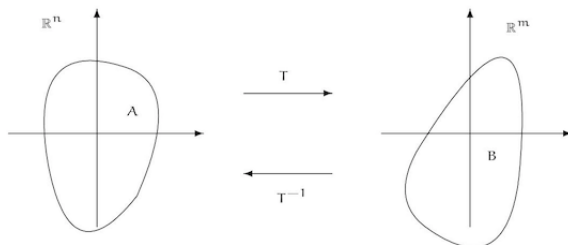
Devido a propriedade acima temos a:

**Definição J.1.6** *Se a transformação  $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$  é inversível, a transformação obtida na Proposição J.1.1 acima, será dita transformação inversa da transformação  $T$  e denotada por  $T^{-1}$ , isto é, a transformação  $T^{-1} : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  satisfaz:*

$$(T^{-1} \circ T)(x) = x, \quad \text{para cada } x \in A \quad (\text{J.14})$$

$$\text{e } (T \circ T^{-1})(y) = y, \quad \text{para cada } y \in B. \quad (\text{J.15})$$

Geometricamente a situação acima é descrita na figura abaixo.



Com isto temos a seguinte propriedade:

**Proposição J.1.2** *Suponhamos que  $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B$  e  $S : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^p$  são transformações inversíveis.*

*Então a transformação composta  $(S \circ T) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^p$ , é uma transformação invertível e sua transformação inversa será dada por  $(T^{-1} \circ S^{-1}) : C \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ , isto é,*

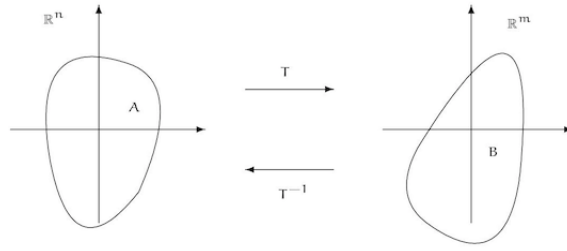
$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}. \quad (\text{J.16})$$

*Geometricamente a situação acima pode ser descrita pela figura abaixo.*

**Demonstração:**

A demonstração será deixada como exercício para o leitor. □

Um modo de verificar se uma transformação é inversível é dado pela:



**Proposição J.1.3** *Uma transformação é invertível se, e somente se, for uma transformação bijetora, isto é, for injetora e sobrejetora.*

**Demonstração:**

A demonstração será deixada como exercício para o leitor. □

Podemos agora introduzir a:

**Definição J.1.7** *Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P_0 \in A$  e  $T: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma transformação.*

*Dizemos que a transformação  $T$  é contínua no ponto  $P_0 \in A$  se dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$ , de modo que*

$$\begin{array}{ll} \text{se} & P \in A \\ \text{satisfaz} & \|P - P_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta, \\ \text{deveremos ter} & \|T(P) - T(P_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon. \end{array} \quad (\text{J.17})$$

*Se a transformação  $T$  for contínua em todos os pontos do conjunto  $A$ , diremos que a transformação  $T$  é contínua em  $A$ .*

Uma outra maneira de testar a continuidade de uma transformação é dado pela:

**Proposição J.1.4** *Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$  e  $P_0 \in A$ .*

*A transformação  $T: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua no ponto  $P_0$  se, e somente se, cada função coordenada associada a transformação  $T$ , for uma função contínua no ponto  $P_0$ , ou seja, se para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  a função  $T_j: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (J.2), seja uma função contínua no ponto  $P_0$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos que a transformação  $T$  seja uma função contínua no ponto  $P_0$ .

Consideremos, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , a função (a  $j$ -ésima projeção)  $\pi_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (veja (7.130))

$$\pi_j(y_1, y_2, \dots, y_m) \doteq y_j, \quad \text{para cada } (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Vimos, na Proposição 7.2.2, que, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , a função  $\pi_j$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^m$ .

Notemos que, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , temos que

$$T_j = \pi_j \circ T$$

e portanto, pela Proposição (J.1.5), segue-se que a transformação  $\underline{T}_j$  será uma função contínua no ponto  $\underline{P}_o$ .

Reciprocamente, suponhamos agora que, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , a função  $T_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , seja uma função contínua no ponto  $\underline{P}_o$ .

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta_j > 0$ , de modo

$$\begin{aligned} & \text{se } p \in A \\ & \text{satisfaz } \|P - P_o\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_j, \\ & \text{teremos } \|T_j(P) - T_j(P_o)\|_{\mathbb{R}^m} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \\ & \text{ou seja, } \sqrt{\sum_{j=1}^m [T_j(P) - T_j(P_o)]^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}. \end{aligned} \tag{J.18}$$

Consideremos

$$\delta \doteq \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}. \tag{J.19}$$

Logo, se  $P \in A$ , satisfaz

$$\begin{aligned} & \|P - P_o\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \\ & \stackrel{\text{(J.19)}}{<} \delta_j, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, m\}, \end{aligned}$$

teremos:

$$\begin{aligned} \|T(P) - T(P_o)\|_{\mathbb{R}^m} &= \sqrt{\sum_{j=1}^m [T_j(P) - T_j(P_o)]^2} \\ &\stackrel{\text{(J.18)}}{<} \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\underbrace{\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m}}_{\frac{m \varepsilon^2}{m}}} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, a transformação  $\underline{T}$  é uma função contínua no ponto  $\underline{P}_o$ , completando a demonstração. □

Para a composição de transformações contínuas temos a:

**Proposição J.1.5** *Sejam  $T : A \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S : B \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  transformações, tais que*

$$T(A) \subseteq B \quad e \quad P_o \in A.$$

*Se a transformação  $\underline{T}$  é contínua no ponto  $\underline{P}_o$  e a transformação  $S$  é contínua no ponto  $T(P_o) \in B$ , então a transformação composta  $S \circ T$  será contínua no ponto  $\underline{P}_o$ .*

**Demonstração:**

Como a transformação  $\underline{S}$  é contínua no ponto  $\underline{T(P_o)}$ , dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta_1 > 0$ , de modo que

$$\begin{aligned} & \text{se } Q \in B \\ & \text{satisfaz } \|Q - T(P_o)\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_1, \\ & \text{teremos: } \|S(Q) - S[T(P_o)]\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{J.20})$$

Como a transformação  $\underline{T}$  é contínua no ponto  $\underline{P_o}$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  (tomando-se  $\varepsilon \doteq \delta_1$  na Definição da continuidade para a transformação  $\underline{T}$  no ponto  $\underline{P_o}$ ), de modo que

$$\begin{aligned} & \text{se } P \in \\ & \text{satisfaz } \|P - P_o\|_{\mathbb{R}^n} < \delta, \\ & \text{deveremos ter: } \|T(P) - T(P_o)\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_1. \end{aligned} \quad (\text{J.21})$$

Logo para cada  $P \in A$  satisfazendo

$$\begin{aligned} & \|P - P_o\|_{\mathbb{R}^n} < \delta, \\ & \text{teremos, por (J.21), que } \|T(P) - T(P_o)\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_1. \end{aligned}$$

Assim, de (J.20), implicará em

$$\|S[T(P)] - S[T(P_o)]\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon,$$

mostrando que a transformação  $\underline{S \circ T}$  é contínua no ponto  $\underline{P_o}$ , completando a demonstração.  $\square$

Como consequência temos a:

**Proposição J.1.6** *Se  $T, S : A \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são transformações contínuas no ponto  $P_o \in A$ , então a transformação soma  $(T + S)$  é uma transformação contínua no ponto  $\underline{P_o}$ .*

*Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então a transformação  $\lambda \cdot T$  é uma transformação contínua no ponto  $\underline{P_o}$ .*

### Demonstração:

As demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor.  $\square$

A seguir trataremos da diferenciabilidade de uma transformação  $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Antes faremos algumas considerações.

**Observação J.1.2** *Sabemos que uma função  $f : A \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (função a valores reais, de  $n$ -variáveis reais) é diferenciável em  $\underline{P_o}$ , se existirem as suas derivadas parciais de 1.a ordem no ponto  $\underline{P_o}$  e*

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{E(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(P_o + \vec{h}) - f(P_o) - \nabla f(P_o) \bullet \vec{h}}{\|\vec{h}\|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observemos que, fixado o ponto  $\underline{P_o}$ , vemos que a aplicação

$$\vec{h} \mapsto \nabla f(P_o) \bullet \vec{h}$$

define uma transformação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ , isto é, a transformação  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$S(\vec{h}) \doteq \nabla f(P_0) \bullet \vec{h}, \quad \text{para cada } \vec{h} \in \mathbb{R}^n,$$

satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} S(\vec{h}_1 + \vec{h}_2) &= S(\vec{h}_1) + S(\vec{h}_2) \\ \text{e } S(\alpha \cdot \vec{h}) &= \alpha \cdot S(\vec{h}), \end{aligned}$$

para  $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h} \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Esta noção se estende de maneira análoga para transformações entre espaços euclidianos, conforme veremos a seguir:

**Definição J.1.8** *Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P_0 \in A$  e  $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma transformação.*

*Diremos que a transformação  $T$  é diferenciável no ponto  $P_0$  se, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , existirem as derivadas parciais de 1.ª ordem das funções coordenadas  $T_j$ , no ponto  $P_0$ , isto é, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , existe*

$$\frac{\partial T_j}{\partial x_i}(P_0),$$

e além disso, temos que:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\|T(P_0 + \vec{h}) - T(P_0) - J_T(P_0) \vec{h}\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\vec{h}\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \quad (\text{J.22})$$

onde  $J_T(P_0)$  denota a matriz de ordem  $m \times n$ , definida por:

$$J_T(P_0) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_m}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial T_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix} \quad (\text{J.23})$$

que será denominada matriz jacobiana da transformação  $T$ , no ponto  $P_0$ .

**Observação J.1.3**

1. Observemos que

$$J_T(P_0) \vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_m}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial T_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad (\text{J.24})$$

ou seja, o produto de duas matrizes, onde o vetor

$$\vec{h} \doteq (h_1, h_2, \dots, h_n),$$

está sendo visto em termos da matriz de suas coordenadas em relação à base canônica  $\mathcal{B} \doteq \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  do  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, como

$$[\vec{h}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

2. Se

$$m = 1,$$

isto é, se  $T: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $P_0 \in A$ , então, de (J.23), teremos:

$$J_T(P_0) = \nabla T(P_0), \quad (\text{J.25})$$

onde o vetor gradiente  $\nabla T(P_0)$ , está sendo interpretado como a matriz linha

$$\nabla T(P_0) = \left( \frac{\partial T}{\partial x_1}(P_0) \quad \dots \quad \frac{\partial T}{\partial x_n}(P_0) \right), \quad (\text{J.26})$$

ou seja, identificamos o vetor gradiente  $\nabla T(P_0)$  com a sua matriz das coordenadas em relação à base canônica  $\mathcal{B}$ , do  $\mathbb{R}^n$ .

Com isto temos a:

**Definição J.1.9** Na situação acima, suponhamos que

$$m = n.$$

Neste caso, o determinante da matriz jacobiana da transformação  $\underline{T}$  no ponto  $\underline{P}_0$  (como  $m = n$ , esta será uma matriz quadrada) será denominado jacobiano associado a transformação  $\underline{T}$  no ponto  $\underline{P}_0$  e indicado por  $j_T(P_0)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} j_T(P_0) &\doteq |J_T(P_0)| \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_m}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial T_m}{\partial x_n}(P_0) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{J.27})$$

**Observação J.1.4** Observemos, como indicado, a norma no numerador do limite (J.22) é a norma do  $\mathbb{R}^m$  e a norma no denominador será a norma do  $\mathbb{R}^n$ .

Em geral, omitiremos estas indicações, ficando implícito que norma utilizaremos em cada um dos membros daquele quociente.

A seguir enunciaremos alguns resultados relativos à diferenciabilidade de transformações que serão importantes no decorrer das notas.

**Proposição J.1.7** Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$  e  $P_0 \in A$ .

Uma transformação  $T: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável no ponto  $\underline{P}_0$  se, e somente se, cada uma função de suas funções coordenada for diferenciável no ponto  $\underline{P}_0$ , isto é, para  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , a função  $T_j: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  for diferenciável em  $\underline{P}_0$ .



**Demonstração:**

A demonstração deste resultado será deixada como exercício para o leitor. □

Temos também o:

**Teorema J.1.1 (regra da cadeia para transformações)** *Sejam  $A, B$  subconjuntos abertos, não vazios, de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente e as transformações  $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , modo que  $P_0 \in A$  e  $T(A) \subseteq B$ .*

*Se a transformação  $T$  é diferenciável no ponto  $P_0$  e a transformação  $S$  é diferenciável no ponto  $T(P_0)$ , então a transformação composta  $(S \circ T)$  será diferenciável no ponto  $P_0$ .*

*Além do mais, a matriz jacobiana da transformação  $(S \circ T)$ , no ponto  $P_0$ , será dada por*

$$J_{(S \circ T)}(P_0) = J_S [T(P_0)] \cdot J_T(P_0), \tag{J.28}$$

*isto é, a matriz jacobiana da composta das transformações  $S$  com  $T$ , no ponto  $P_0$  (ou seja, da transformação  $(S \circ T)$ ) será o produto da matriz jacobiana da transformação  $S$ , no ponto  $T(P_0)$ , pela matriz jacobiana da transformação  $T$ , no ponto  $P_0$ .*

**Demonstração:**

A demonstração será deixada como exercício para o leitor. □

**Observação J.1.5**

1. A ordem da multiplicação das matrizes na expressão (J.28) (onde aparecem as matrizes jacobianas,  $J_{(S \circ T)}$ ,  $J_S$  e  $J_T$ ) é fundamental.
2. Se a transformação  $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetora ela será sobrejetora sobre sua imagem, isto é, a transformação

$$T : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \doteq T(A) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

admitirá transformação inversa  $T^{-1} : B \rightarrow A$ .

Suponhamos que as transformações  $T$  e  $T^{-1}$  sejam diferenciáveis nos pontos  $P_0$  e  $Q_0 \doteq T(P_0)$ , respectivamente.

Então, pelo Teorema J.1.1 acima, segue que a transformação

$$Id \doteq T^{-1} \circ T$$

será diferenciável no ponto  $P_0$ .

Além disso, teremos:

$$\begin{aligned} J_{Id}(P_0) &= J_{(T^{-1} \circ T)}(P_0) \\ &\stackrel{(J.28)}{=} J_{T^{-1}}[T(P_0)] \cdot J_T(P_0). \end{aligned} \tag{J.29}$$

onde  $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a, assim denominada, transformação identidade, dada por

$$Id(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A.$$

Mas, a matriz jacobiana da transformação  $Id$  será a matriz identidade de ordem  $n$  (que indicamos por  $I_n$ ), isto é,

$$J_{Id}(P_0) = I_n, \tag{J.30}$$

onde  $I_n$  denota a matriz identidade de ordem  $n$ .

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo a expressão (J.29), tornar-se-á:

$$I_n = J_{T^{-1}}[T(P_o)] \cdot J_T(P_o),$$

ou seja, a matriz  $J_T(P_o)$  será uma matriz inversível e sua matriz inversa será a matriz  $J_{T^{-1}}[T(P_o)]$ .

Portanto temos a seguinte relação:

$$J_{T^{-1}}[T(P_o)] = [J_T(P_o)]^{-1}, \quad (\text{J.31})$$

ou seja, a matriz jacobiana da transformação  $\underline{T}^{-1}$ , no ponto  $\underline{T}(P_o)$ , será a matriz inversa da matriz jacobiana da transformação  $\underline{T}$ , no ponto  $P_o$ .

A seguir consideraremos alguns exemplos para ilustrar o que tratamos acima.

**Exemplo J.1.1** Sejam  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  as transformações dadas por:

$$T(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{J.32})$$

$$S(t) \doteq (t, t, e^t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{J.33})$$

Encontre, se existir, as matrizes jacobianas das transformações  $\underline{T}$  e  $\underline{S}$  nos pontos  $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$  e  $t_o \in \mathbb{R}$ , respectivamente.

Encontre a matriz jacobiana da transformação  $(S \circ T)$ , no ponto  $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ , diretamente e utilizando a regra da cadeia (isto é, o Teorema J.1.1).

### Resolução:

Observemos que a transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.32), é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , pois é uma função polinomial de duas variáveis, e a transformação  $\underline{S}$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , dada por (J.33), pois suas funções coordenadas são diferenciáveis  $\mathbb{R}$ .

Logo a transformação  $\underline{S \circ T}$  será uma transformação diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

Além disso:

1. as componentes da transformação  $\underline{S}$  (veja (J.33)) serão:

$$S_1(t) \doteq t, \quad S_2(t) \doteq t, \quad S_3(t) \doteq e^t, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{J.34})$$

que têm derivadas dadas por:

$$S_1'(t) = 1, \quad S_2'(t) = 1 \quad \text{e} \quad S_3'(t) = e^t, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{J.35})$$

Portanto, de (J.23) e (J.35), segue que

$$J_S(t_o) \stackrel{(\text{J.23})}{=} \begin{pmatrix} S_1'(t_o) \\ S_2'(t_o) \\ S_3'(t_o) \end{pmatrix} \stackrel{(\text{J.35})}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e^{t_o} \end{pmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \quad (\text{J.36})$$

2. temos também que:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) \stackrel{(C.35)}{=} 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) \stackrel{(C.35)}{=} 2y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (J.37)$$

Portanto, de (J.23) e (J.37), segue que

$$\begin{aligned} J_T(x_0, y_0) &\stackrel{(J.23)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial T}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(J.37)}{=} (2x_0 \quad 2y_0) M_{1 \times 2}(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (J.38)$$

Como

$$\begin{aligned} (S \circ T)(x, y) &= S[T(x, y)] \\ &\stackrel{(C.35)}{=} S(x^2 + y^2) \\ &\stackrel{(C.35)}{=} (x^2 + y^2, x^2 + y^2, e^{x^2 + y^2}), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

temos que as componentes da transformação  $(S \circ T)$  serão dadas por :

$$(S \circ T)_1(x, y) \doteq x^2 + y^2, \quad (S \circ T)_2(x, y) \doteq x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad (S \circ T)_3(x, y) = e^{x^2 + y^2}, \quad (J.39)$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Logo a matriz jacobiana associada à transformação  $(S \circ T)$ , no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , será dada por:

$$\begin{aligned} J_{(S \circ T)}(x_0, y_0) &\stackrel{(J.23)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial (S \circ T)_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial (S \circ T)_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial (S \circ T)_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial (S \circ T)_2}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial (S \circ T)_3}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial (S \circ T)_3}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(J.39)}{=} \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 e^{x_0^2 + y_0^2} & 2y_0 e^{x_0^2 + y_0^2} \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (J.40)$$

Utilizando a regra da cadeia (isto é, o Teorema J.1.1), teremos que:

$$\begin{aligned} J_{(S \circ T)}(x_0, y_0) &\stackrel{(J.28)}{=} J_S[T(x_0, y_0)] \cdot J_T(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(J.36) \text{ e } (J.38)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e^{x_0^2 + y_0^2} \end{pmatrix} (2x_0 \quad 2y_0) \\ &= \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 e^{x_0^2 + y_0^2} & 2y_0 e^{x_0^2 + y_0^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que foi o mesmo obtido, por via direta (isto é, é igual a (J.40)), completando a resolução. □

Para finalizar temos a:

**Proposição J.1.8** *Sejam  $A$  subconjunto aberto, não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T, S : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  transformações diferenciáveis no ponto  $P_0 \in A$ .*

*Então a transformação soma  $(T + S)$  será diferenciável no ponto  $P_0$ .*

*Além disso,*

$$J_{(T+S)}(P_0) = J_T(P_0) + J_S(P_0), \quad (\text{J.41})$$

*isto é, a matriz jacobiana da soma das transformações  $T$  em  $S$ , no ponto  $P_0$ , será igual a soma das matrizes jacobianas das transformações  $T$  e  $S$ , no ponto  $P_0$ .*

*Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  então a transformação  $\lambda \cdot T$  será diferenciável no ponto  $P_0$ .*

*Além disso,*

$$J_{(\lambda \cdot T)}(P_0) = \lambda \cdot J_T(P_0), \quad (\text{J.42})$$

*isto é, a matriz jacobiana da transformação  $\lambda \cdot T$ , no ponto  $P_0$ , será igual a matriz jacobiana da transformação  $T$ , no ponto  $P_0$ , multiplicada pelo número real  $\lambda$ .*

### Demonstração:

As demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor.

□

## J.2 Exemplos importantes

Nesta seção trataremos de vários exemplos de transformações que serão importantes no decorrer dos próximos capítulos.

Começaremos pelo:

### **Exemplo J.2.1** (mudança de variáveis para coordenadas polares)

*Sejam*

$$\mathcal{A} \doteq \{(r, \theta); r \in (0, \infty) \text{ e } \theta \in [0, 2\pi)\} \quad (\text{J.43})$$

$$= (0, \infty) \times [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{B} \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad (\text{J.44})$$

*e consideremos a transformação  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , dada por:*

$$T(r, \theta) \doteq (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \quad \text{para cada } (r, \theta) \in \mathcal{A}. \quad (\text{J.45})$$

*Mostre que a transformação  $T$  é diferenciável em  $\mathcal{A}$  e bijetora.*

*Encontre a matriz jacobiana e o jacobiano da transformação  $T$  em  $(r, \theta) \in \mathcal{A}$ .*

### Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:

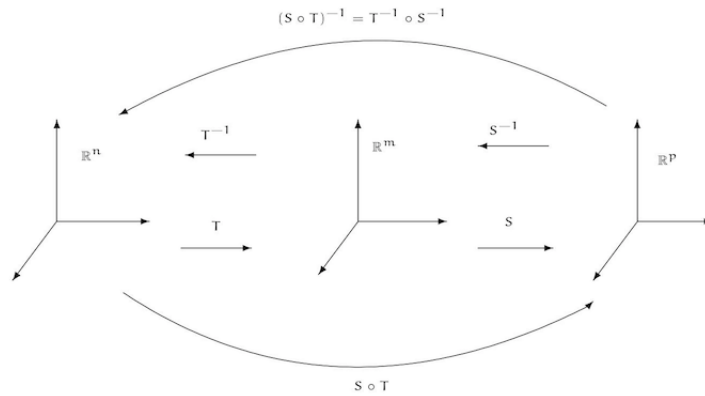
Observemos que cada uma das funções coordenadas associadas a transformação  $T$  (dada por (J.45)), a saber, as funções  $T_1, T_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por:

$$T_1(r, \theta) \doteq r \cos(\theta) \text{ e } T_2(r, \theta) \doteq r \sin(\theta), \quad \text{para cada } (r, \theta) \in \mathcal{A}, \quad (\text{J.46})$$

são funções diferenciáveis no conjunto  $\mathcal{A}$ .

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Logo, da Proposição J.1.7, segue que a transformação  $T$  será diferenciável no conjunto  $\mathcal{A}$ .



Além disso, para cada  $(r, \theta) \in \mathcal{A}$ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial r}(r, \theta) &= \cos(\theta), & \frac{\partial T_1}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \operatorname{sen}(\theta), \\ \frac{\partial T_2}{\partial r}(r, \theta) &= \operatorname{sen}(\theta), & \frac{\partial T_2}{\partial \theta}(r, \theta) &= r \cos(\theta). \end{aligned} \tag{J.47}$$

Logo, a matriz jacobiana da transformação  $\underline{T}$ , no ponto  $(r, \theta) \in \mathcal{A}$ , será dada por:

$$\begin{aligned} J_{\underline{T}}(r, \theta) &\stackrel{\text{(J.23)}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial T_1}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial T_2}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial T_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{(J.47)}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{J.48}$$

Calculando-se o determinante dessa matriz, isto é, o jacobiano da transformação  $\underline{T}$ , no ponto  $(r, \theta) \in \mathcal{A}$ , obteremos:

$$\begin{aligned} j_{\underline{T}}(r, \theta) &= \det [J_{\underline{T}}(r, \theta)] \\ &\stackrel{\text{(J.48)}}{=} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= r \\ &\stackrel{\text{(J.43)}}{\neq} 0. \end{aligned} \tag{J.49}$$

Em particular, o jacobiano da transformação  $\underline{T}$ , no ponto  $(r, \theta) \in \mathcal{A}$ , **não** depende de  $\theta \in [0, 2\pi)$ . A verificação que a transformação  $\underline{T}$  é bijetora será deixada como exercício para o leitor. □

Temos as seguintes considerações sobre a transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.45), introduzida no Exemplo J.2.1 acima:

**Observação J.2.1**

1. para cada  $r_0 \in (0, \infty)$  fixado, a imagem, pela transformação  $\underline{T}$ , do segmento de reta

$$\{r_0\} \times [0, 2\pi)$$

será a circunferência centrado na origem  $(0,0)$  e de raio  $r_0$ .

De fato, pois

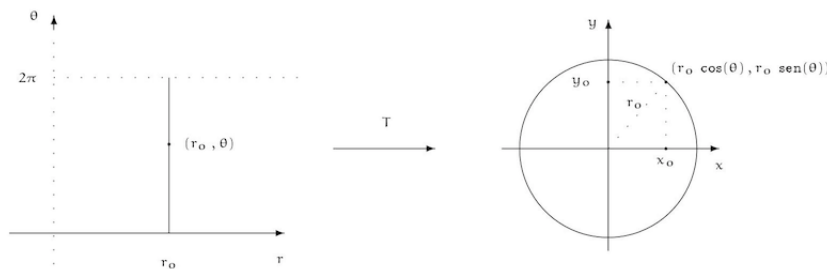
$$T(r_0, \theta) \stackrel{(J.45)}{=} \overbrace{(r_0 \cos(\theta), r_0 \operatorname{sen}(\theta))}^{\doteq x, \doteq y}, \quad \text{para cada } \theta \in [0, 2\pi), \quad (J.50)$$

e assim teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\stackrel{(J.50)}{=} [r_0 \cos(\theta)]^2 + [r_0 \operatorname{sen}(\theta)]^2 \\ &= r_0^2 \underbrace{[\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)]}_{=1} \\ &= r_0^2, \end{aligned}$$

para cada  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



2. Para cada  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$  fixado, a imagem da semi-reta

$$(0, \infty) \times \{\theta_0\}$$

pela transformação  $\underline{T}$  será uma semi-reta com origem em  $(0,0)$  e direção do vetor (não nulo)

$$\vec{u} \doteq (\cos(\theta_0), \operatorname{sen}(\theta_0)). \quad (J.51)$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} T(r, \theta_0) &\stackrel{(J.45)}{=} (r \cos(\theta_0), r \operatorname{sen}(\theta_0)) \\ &= r (\cos(\theta_0), \operatorname{sen}(\theta_0)) \\ &\stackrel{(J.51)}{=} r \cdot \vec{u}, \quad \text{para cada } r \in (0, \infty), \end{aligned}$$

O vetor  $\vec{u}$  (dado por (J.51)) será um vetor diretor da semi-reta.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:

3. A transformação  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , dada por (J.45) é bijetora, isto é, admite transformação inversa,  $T^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  dada por

$$T^{-1}(x, y) \doteq (r, \theta), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathcal{B}, \quad (J.52)$$



onde

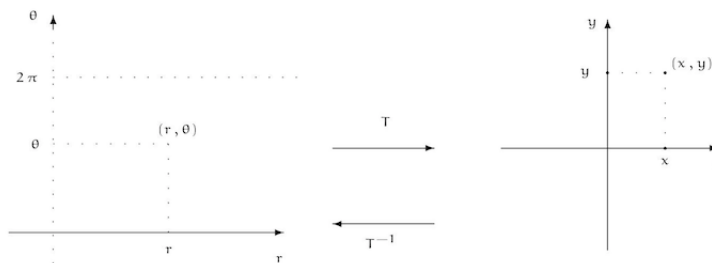
$$r \doteq \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{J.53}$$

$$\theta \doteq \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{para } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{para } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{para } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases} . \tag{J.54}$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que, de fato, a transformação  $\underline{T}^{-1}$ , dada por (J.52), é a transformação inversa associada a transformação  $\underline{T}$ , isto é, que

$$\begin{aligned} \underline{T}^{-1}[\underline{T}(r, \theta)] &= (r, \theta), & \text{para cada } (r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \\ \underline{T}[\underline{T}^{-1}(x, y)] &= (x, y), & \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



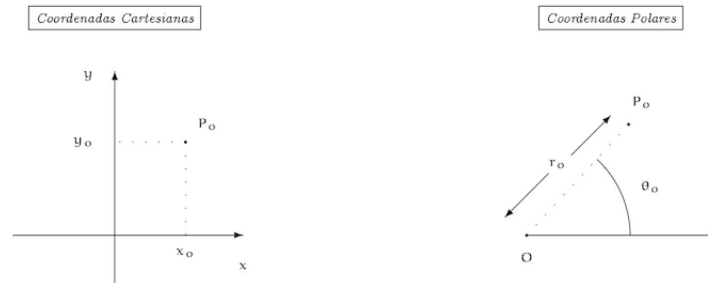
4. Além disso, a transformação  $\underline{T}^{-1}$  será diferenciável em  $\underline{B}$ , pois suas componentes são funções diferenciáveis em  $\underline{B}$ .

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

5. Além disso, do item 2. da Observação J.1.5 (veja (J.31)), segue que

$$\begin{aligned} J_{\underline{T}^{-1}}(x, y) &\stackrel{(x,y)=\underline{T}(r,\theta)}{=} J_{\underline{T}^{-1}}[\underline{T}(r, \theta)] \\ &\stackrel{(C.18)}{=} [J_{\underline{T}}(r, \theta)]^{-1}, & \text{para cada } (x, y) \in \underline{B}. \end{aligned}$$

6. Em resumo, com o Exemplo J.2.1 acima, podemos representar pontos do plano  $\mathbb{R}^2$  de dois modos diferentes, a saber:



A transformação que relaciona esses dois modos de representar pontos de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  é dada pela transformação

$$T: A \rightarrow B,$$

dada por (J.45), que no caso, leva as coordenadas polares de um ponto do plano menos a origem, e leva nas suas respectivas coordenadas cartesianas.

Um outro exemplo importante é:

### Exemplo J.2.2 (mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas)

Sejam

$$A \doteq \{(r, \theta, z); r \in (0, \infty), \theta \in [0, 2\pi) \text{ e } z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (\text{J.55})$$

$$B \doteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{J.56})$$

e consideremos a transformação  $T: A \rightarrow B$ , dada por

$$T(r, \theta, z) \doteq (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z), \quad \text{para cada } (r, \theta, z) \in A. \quad (\text{J.57})$$

Mostre que a transformação  $\underline{T}$  é diferenciável em  $\underline{A}$  e bijetora.

Encontre a matriz jacobiana e o jacobiano da transformação  $\underline{T}$  em  $(r, \theta, z) \in A$ .

#### Resolução:

Notemos que a transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.57), é uma transformação diferenciável em  $\underline{A}$ , pois suas funções componentes,  $T_1, T_2, T_3: A \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por:

$$T_1(r, \theta, z) \doteq r \cos(\theta), \quad T_2(r, \theta, z) \doteq r \sin(\theta), \quad T_3(r, \theta, z) \doteq z, \quad \text{para cada } (r, \theta, z) \in A, \quad (\text{J.58})$$

são funções diferenciáveis em  $\underline{A}$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Logo, da Proposição J.1.7, segue que a transformação  $\underline{T}$  será diferenciável no conjunto  $\underline{A}$ .

Além disso, para cada  $(r, \theta, z) \in A$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial r}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} \cos(\theta), & \frac{\partial T_1}{\partial \theta}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} -r \sin(\theta), & \frac{\partial T_1}{\partial z}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial r}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} \sin(\theta), & \frac{\partial T_2}{\partial \theta}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} r \cos(\theta), & \frac{\partial T_2}{\partial z}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial r}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} 0, & \frac{\partial T_3}{\partial \theta}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} 0, & \frac{\partial T_3}{\partial z}(r, \theta, z) &\stackrel{(\text{J.58})}{=} 1, \end{aligned} \quad (\text{J.59})$$



ou seja, a matriz jacobiana da transformação  $\underline{T}$ , no ponto  $(r, \theta, z) \in \mathcal{A}$ , será dada por:

$$J_{\underline{T}}(r, \theta, z) \stackrel{(J.23)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial T_1}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial T_1}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial T_2}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial T_2}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial T_2}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial T_3}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial T_3}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial T_3}{\partial z}(r, \theta, z) \end{pmatrix} \stackrel{(J.59)}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (J.60)$$

cujo determinante, isto é, o jacobiano da transformação  $\underline{T}$ , no ponto  $(r, \theta, z) \in \mathcal{A}$ , será dado por:

$$\begin{aligned} j_{\underline{T}}(r, \theta, z) &= |J_{\underline{T}}(r, \theta, z)| \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2(\theta) + 0 + 0 - 0 - 0 - [-r \operatorname{sen}^2(\theta)] \\ &= r, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} j_{\underline{T}}(r, \theta, z) &= \det [J_{\underline{T}}(r, \theta, z)] \\ &= r \\ &\stackrel{(J.55)}{\neq} 0, \quad \text{para cada } (r, \theta, z) \in \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (J.61)$$

Em particular, o jacobiano da transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.57), no ponto  $(r, \theta, z) \in \mathcal{A}$ , não depende de  $\theta \in [0, 2\pi)$  ou de  $z \in \mathbb{R}$ .

A verificação que a transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.57), é bijetora será deixada como exercício para o leitor.

□

Temos as seguintes considerações sobre a transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.57), acima:

### Observação J.2.2

1. Notemos que, para cada

$$r_o \in (0, \infty)$$

fixado, a transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.57), leva a "fatia" ilimitada do  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\{r_o\} \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

no cilindro

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 = r_o^2\}. \quad (J.62)$$

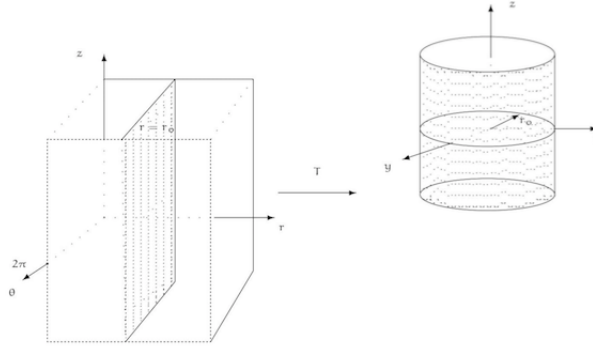
De fato, pois para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $z \in \mathbb{R}$ , fixado, teremos:

$$T(r_o, \theta, z) \stackrel{(J.57)}{=} \underbrace{(r_o \cos(\theta))}_{\doteq x}, \underbrace{(r_o \operatorname{sen}(\theta))}_{\doteq y}, z \quad (J.63)$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &\stackrel{\text{(J.63)}}{=} [r_o \cos(\theta)]^2 + [r_o \text{sen}(\theta)]^2 \\
 &= r_o^2 \underbrace{[\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)]}_{=1} \\
 &= r_o^2,
 \end{aligned}$$

ou seja, o cilindro (J.57).

Geometricamente temos a seguinte situação relacionada aos fatos acima:



2. Para cada

$$\theta_o \in [0, 2\pi)$$

fixado, a transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.57), leva a "fatia" do  $\mathbb{R}^3$ ,

$$[0, \infty) \times \{\theta_o\} \times \mathbb{R},$$

no semi-plano

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \text{sen}(\theta_o) x - \cos(\theta_o) y = 0 \quad \text{e} \quad x \cos(\theta_o) + y \text{sen}(\theta_o) > 0 \right\}. \quad (\text{J.64})$$

De fato, pois para cada  $r \in (0, \infty)$  e  $z \in \mathbb{R}$ , teremos:

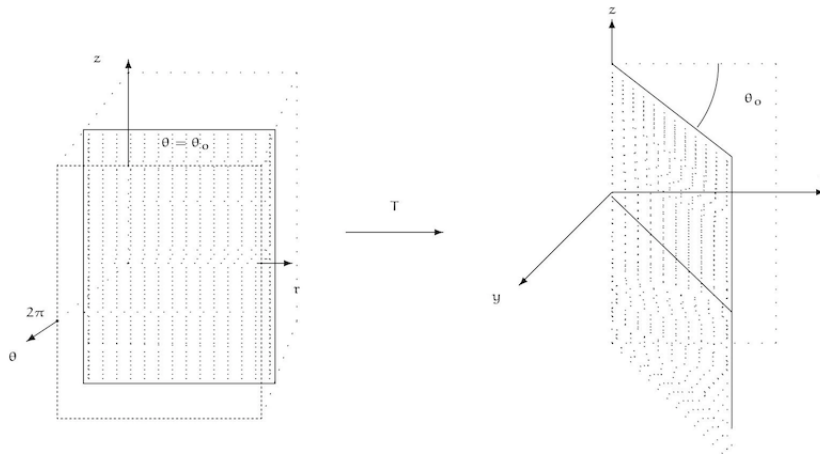
$$T(r, \theta_o, z) \stackrel{\text{(J.57)}}{=} \underbrace{(r \cos(\theta_o))}_{\doteq x}, \underbrace{(r \text{sen}(\theta_o))}_{\doteq y}, z). \quad (\text{J.65})$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(\theta_o) x - \cos(\theta_o) y &\stackrel{\text{(J.65)}}{=} \text{sen}(\theta_o) [r \cos(\theta_o)] - \cos(\theta_o) [r \text{sen}(\theta_o)] \\
 &= 0, \\
 x \cos(\theta_o) + y \text{sen}(\theta_o) &\stackrel{\text{(J.65)}}{=} [r \cos(\theta_o)] \cos(\theta_o) + [r \text{sen}(\theta_o)] \text{sen}(\theta_o) \\
 &= r [\cos^2(\theta_o) + \text{sen}^2(\theta_o)] \\
 &= r > 0,
 \end{aligned}$$

ou seja, pertence ao semi-plano dado por (J.64).

Geometricamente temos seguinte situação geométrica relacionada com as considerações acima:



3. Para cada

$$z_0 \in \mathbb{R}$$

fixado, a transformação  $\mathbb{T}$ , dada por (J.57), leva a "faixa" do plano  $z = z_0$ , menos o ponto  $(0, 0, z_0)$  (que corresponderia à  $r \doteq 0$ ), isto é, o conjunto

$$\{(r, \theta, z_0); r \in (0, \infty), \theta \in [0, 2\pi)\}$$

no plano  $z = z_0$ , menos o ponto  $(0, 0, z_0)$ , ou seja, no conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = z_0 \text{ com } (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

De fato, pois para  $r \in (0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , teremos:

$$\mathbb{T}(r, \theta, z_0) \stackrel{\text{(J.57)}}{=} \underbrace{(r \cos(\theta))}_{\doteq x}, \underbrace{(r \text{ sen}(\theta))}_{\doteq y}, z_0). \tag{J.66}$$

Logo

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \text{ sen}(\theta)) \neq (0, 0)$$

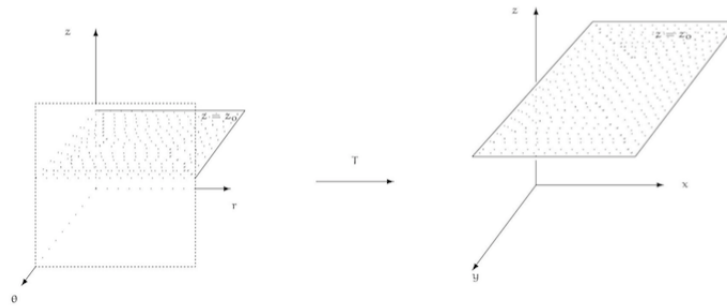
Geometricamente temos seguinte situação geométrica relacionada com as considerações acima:

4. Como a transformação  $\mathbb{T} : A \rightarrow B$ , dada por (J.57), é bijetora segue que ela admitirá transformação inversa,

$$\mathbb{T}^{-1} : B \rightarrow A,$$

dada por

$$\mathbb{T}^{-1}(x, y, z) \doteq (r, \theta, z), \text{ para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\},$$



onde

$$r \doteq \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta \doteq \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases} . \quad (\text{J.67})$$

Observemos que a transformação  $\underline{T}^{-1}$  é diferenciável em  $B$ .

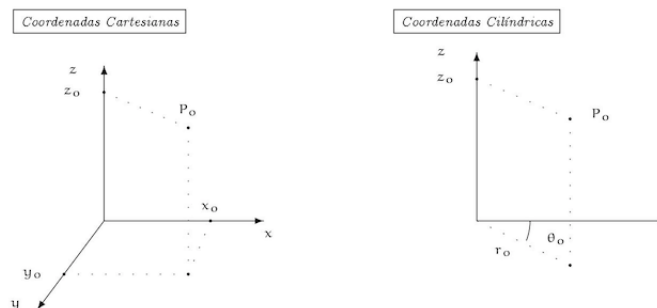
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, do item 2. da Observação J.1.5 (veja (J.31)), podemos concluir que

$$J_{\underline{T}^{-1}}(x, y, z) \stackrel{(x,y,z) = \underline{T}(r,\theta,z)}{=} J_{\underline{T}^{-1}}[\underline{T}(r, \theta, z)] = [J_{\underline{T}}(r, \theta, z)]^{-1}, \quad (x, y, z) \in B.$$

5. Em resumo, com o Exemplo J.2.2 acima, nos diz que podemos representar pontos do espaço  $\mathbb{R}^3$  de dois modos diferentes, a saber, utilizando coordenadas cilíndricas ou coordenadas cartesianas.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



6. A transformação que relaciona esses dois modos de representar pontos de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$  é dada pela transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.57), que no caso, pega um ponto do espaço dado em coordenadas cartesianas e leva nas suas coordenadas cilíndricas.

Outro exemplo importante é:

**Exemplo J.2.3** (mudança de variáveis para coordenadas esféricas)

Sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\doteq \{(\rho, \theta, \varphi) ; \rho \in (0, \infty), \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } \varphi \in [0, \pi]\} \\ &= (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \end{aligned} \tag{J.68}$$

$$\mathcal{B} \doteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}. \tag{J.69}$$

Definamos a transformação  $\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , dada por:

$$\Gamma(\rho, \theta, \varphi) \doteq (\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi)), \text{ para cada } (\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A}. \tag{J.70}$$

Mostre que a transformação  $\Gamma$  é diferenciável em  $\mathcal{A}$  e bijetora.

Encontre a matriz jacobiana e o jacobiano da transformação  $\Gamma$  em  $(r, \theta, z) \in \mathcal{A}$ .

**Resolução:**

Notemos que a transformação acima é diferenciável em  $\mathcal{A}$ , pois suas funções coordenadas, a saber, as funções  $T_1, T_2, T_3 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$T_1(\rho, \theta, \varphi) \doteq \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \quad T_2(\rho, \theta, \varphi) \doteq \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad T_3(\rho, \theta, \varphi) \doteq \rho \cos(\varphi), \tag{J.71}$$

para  $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A}$ , são funções diferenciáveis em  $\mathcal{A}$ .

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, da Proposição J.1.7, segue que a transformação  $\Gamma$ , dada por (J.70), será diferenciável no conjunto  $\mathcal{A}$ .

Além disso, para  $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), & \frac{\partial T_1}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} -\rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \\ \frac{\partial T_1}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} \rho \cos(\varphi) \cos(\theta), & & \\ \frac{\partial T_2}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), & \frac{\partial T_2}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} \rho \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), & & \\ \frac{\partial T_3}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} \cos(\varphi), & \frac{\partial T_3}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.71)}{=} -\rho \operatorname{sen}(\varphi). \end{aligned} \tag{J.72}$$

Logo a matriz jacobiana da transformação  $\Gamma$ , dada por (J.70), no ponto  $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A}$ , será dada por:

$$\begin{aligned} J_{\Gamma}(\rho, \theta, \varphi) &\stackrel{(J.23)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial T_1}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial T_1}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial T_2}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial T_2}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial T_2}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial T_3}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial T_3}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial T_3}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(J.72)}{=} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\varphi) \cos \theta & -\rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & \rho \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{J.73}$$

cujo determinante, isto é, o jacobiano da transformação  $\mathbb{I}$ , dada por (J.70), no ponto  $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A}$ , será:

$$\begin{aligned} \det [J_{\mathbb{I}}(\rho, \theta, \varphi)] &\stackrel{\text{(J.73)}}{=} \begin{aligned} &\text{sen}(\varphi) \cos(\theta) \rho \text{sen}(\varphi) \cos(\theta) [-\rho \text{sen}(\varphi)] \\ &- \rho \text{sen}(\varphi) \text{sen}(\theta) \rho \cos(\varphi) \text{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ &- \rho \text{sen}(\varphi) (\rho \text{sen}^2(\varphi) \cos^2(\theta) + \rho \text{sen}^2(\varphi) \text{sen}^2(\theta)) \\ &= -\rho^2 \cos^2(\varphi) \text{sen}(\varphi) - \rho^2 \text{sen}^3(\varphi) \\ &= -\rho^2 \text{sen}(\varphi) \end{aligned} \\ &\stackrel{\text{(J.68)}}{\neq} 0, \end{aligned} \tag{J.74}$$

Ou seja, o jacobiano da transformação  $\mathbb{I}$  no ponto  $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A}$  será dado por

$$\begin{aligned} j_{\mathbb{I}}(\rho, \theta, \varphi) &= \det [J_{\mathbb{I}}(\rho, \theta, \varphi)] \\ &= -\rho^2 \text{sen}(\varphi). \end{aligned} \tag{J.75}$$

Em particular, o jacobiano da transformação  $\mathbb{I}$ , dada por (J.70), no ponto  $(r, \theta, \theta) \in \mathcal{A}$ , **não** depende de  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

A verificação que a transformação  $\mathbb{I}$ , dada por (J.70), é bijetora será deixada como exercício para o leitor. □

Temos as seguintes considerações sobre o Exemplo J.2.3:

**Observação J.2.3** *Vejam agora como a transformação  $\mathbb{I}$ , dada por (J.70), age sobre certos subconjuntos do espaço  $\mathbb{R}^3$ .*

1. Para isto usaremos a seguinte notação para as funções coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \text{sen}(\varphi) \\ y = \rho \text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi). \end{cases} \tag{J.76}$$

Logo, de (J.76), segue que valem as relações, cujas demonstrações deixaremos como exercício para o leitor:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \text{sen}^2 \varphi \end{cases} . \tag{J.77}$$

2. Para cada

$$\rho_0 \in (0, \infty)$$

fixado, consideremos o conjunto

$$\mathcal{A}_{\rho_0} \doteq \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A}; \rho = \rho_0\}.$$

Neste caso a imagem deste conjunto pela transformação  $\mathbb{I}$ , dada por (J.70), será o conjunto:

$$\mathbb{I}(\mathcal{A}_{\rho_0}) \stackrel{\text{(J.70)}}{=} \{ \underbrace{(\rho_0 \cos(\theta) \text{sen}(\varphi))}_{\doteq x}, \underbrace{(\rho_0 \text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi))}_{\doteq y}, \underbrace{(\rho_0 \cos(\varphi))}_{\doteq z} \}; \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } \varphi \in [0, \pi]. \tag{J.78}$$

Com isto teremos

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &\stackrel{(J.78)}{=} [\rho_o \cos(\theta) \text{sen}(\varphi)]^2 + [\rho_o \text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi)]^2 + [\rho_o \cos(\varphi)]^2 \\
 &= \rho_o^2 \cos^2(\theta) \text{sen}^2(\varphi) + \rho_o^2 \text{sen}^2(\theta) \text{sen}^2(\varphi) + \rho_o^2 \cos^2(\varphi) \\
 &= \rho_o^2 \underbrace{[\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)]}_{=1} \text{sen}^2(\varphi) + \rho_o^2 \cos^2(\varphi) \\
 &= \rho_o^2 \underbrace{[\text{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)]}_{=1} \\
 &= \rho_o^2,
 \end{aligned} \tag{J.79}$$

isto é, o conjunto  $\mathcal{A}_{\rho_o}$  que representa geometricamente, nas variáveis  $\rho, \theta$  e  $\varphi$  (ou seja, em coordenadas cilíndricas), uma região retangular do plano

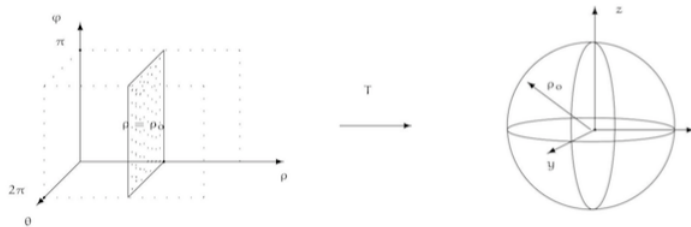
$$\rho = \rho_o,$$

será levado, pela transformação  $\mathbb{I}$ , dada por (J.70), em uma esfera, centrada na origem e de raio igual a  $\rho_o$  (veja (J.79)).

Na verdade, pode-se mostrar que a imagem é toda a esfera.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



3. Para cada

$$\theta_o \in [0, 2\pi)$$

fixado, consideremos

$$\mathcal{A}_{\theta_o} \doteq \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A} ; \theta = \theta_o\}.$$

Neste caso, a imagem do conjunto acima pela aplicação  $\mathbb{I}$ , dada por (J.70), será o seguinte conjunto:

$$\mathbb{T}(\mathcal{A}_{\theta_o}) \stackrel{(J.70)}{=} \left\{ \underbrace{[\rho \cos(\theta_o) \text{sen}(\varphi)]}_{\doteq x}, \underbrace{[\rho \text{sen}(\theta_o) \text{sen}(\varphi)]}_{\doteq y}, \underbrace{[\rho \cos(\varphi)]}_{\doteq z} ; \rho \in (0, \infty), \varphi \in [0, \pi] \right\}. \tag{J.80}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 x \text{sen}(\theta_o) - y \cos(\theta_o) &\stackrel{(J.80)}{=} [\rho \cos(\theta_o) \text{sen}(\varphi)] \text{sen}(\theta_o) - [\rho \text{sen}(\theta_o) \text{sen}(\varphi)] \cos(\theta_o) \\
 &= 0, \\
 \text{ou seja,} \quad \text{sen}(\theta_o) x - \cos(\theta_o) y &= 0
 \end{aligned} \tag{J.81}$$

que representa a equação geral de um plano vertical (não depende de  $z$ ) e que contém o eixo  $Oz$ .

Por outro lado, notemos que:

$$\begin{aligned} x \cos(\theta_0) + y \operatorname{sen}(\theta_0) &\stackrel{(J.80)}{=} [\rho \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi)] \cos(\theta_0) + [\rho \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi)] \operatorname{sen}(\theta_0) \\ &= \rho \cos^2(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi) + \rho \operatorname{sen}^2(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi) \\ &= \rho \underbrace{[\cos^2(\theta_0) + \operatorname{sen}^2(\theta_0)]}_{=1} \operatorname{sen}(\varphi) \\ &= \rho \operatorname{sen}(\varphi) \geq 0, \end{aligned}$$

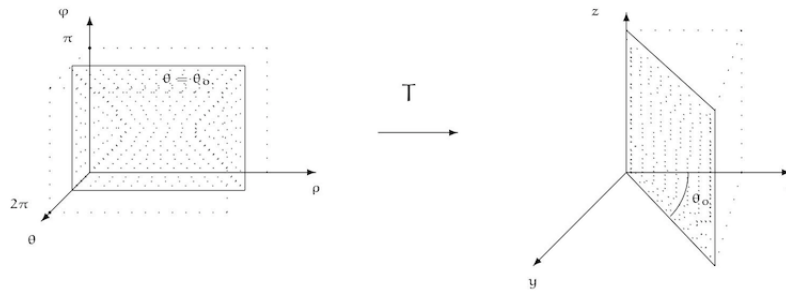
pois

$$\rho \in (0, \infty) \quad e \quad \varphi \in [0, \pi],$$

ou seja, a imagem de do conjunto  $\mathcal{A}_{\theta_0}$ , pela transformação  $\mathbb{T}$ , dada por (J.70), será um semi-plano, na verdade será o semi-plano

$$\mathbb{T}(\mathcal{A}_{\theta_0}) = \{(x, y, z) ; x \operatorname{sen}(\theta_0) - y \cos(\theta_0) = 0 \quad e \quad x \cos(\theta_0) + y \operatorname{sen}(\theta_0) \geq 0\}.$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



4. Para cada

$$\varphi_0 \in [0, \pi]$$

fixado, consideremos

$$\mathcal{A}_{\varphi_0} \doteq \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathcal{A} ; \varphi = \varphi_0\}.$$

Assim teremos:

$$\mathbb{T}(\mathcal{A}_{\varphi_0}) \stackrel{(J.70)}{=} \left\{ \underbrace{[\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0)]}_x, \underbrace{[\rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0)]}_{=y}, \underbrace{[\rho \cos(\varphi_0)]}_{=z} ; \rho \in (0, \infty) \text{ e } \theta \in [0, 2\pi] \right\}. \quad (J.82)$$

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} z^2 &\stackrel{(J.82)}{=} [\rho \cos(\varphi_0)]^2 \\ &= \rho^2 \cos^2(\varphi_0) \\ &\stackrel{(J.77)}{=} \frac{x^2 + y^2}{\operatorname{sen}^2(\varphi_0)} \cos^2(\varphi_0) \\ &= (x^2 + y^2) \operatorname{cotg}^2(\varphi_0). \end{aligned} \quad (J.83)$$



Por outro lado, temos que

$$z = \rho \cos(\varphi_0). \tag{J.84}$$

Logo, de (J.84), o sinal de  $z$  deverá ser o mesmo de  $\cos(\varphi_0)$ , que coincide com o sinal de  $\cotg(\varphi_0)$ , quando  $\varphi_0 \in (0, \pi)$  (pois neste caso teremos  $\text{sen}(\varphi_0) > 0$ ).

Logo a equação (J.83), tornar-se-á

$$z = \cotg(\varphi_0) \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{J.85}$$

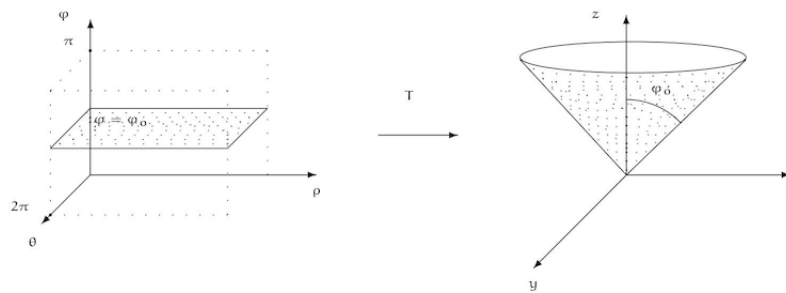
que é a equação de um cone circular reto, cuja "abertura" é igual a  $\varphi_0$ .

Note que este cone circular reto, "transforma-se" no plano  $z = 0$ , quando

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Observe também que o cone (J.85), está "voltado para cima", quando  $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  e "voltado para baixo", quando  $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima:



5. Como a transformação  $T : A \rightarrow B$  é bijetora ela admitirá transformação inversa,  $T^{-1} : B \rightarrow A$ , que será dada por:

$$T^{-1}(x, y, z) \doteq (\rho, \theta, \varphi), \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \doteq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta \doteq \begin{cases} \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}, \\ \varphi \doteq \begin{cases} \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), & \text{se } z \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } z = 0 \end{cases} \end{array} \right. , \tag{J.86}$$

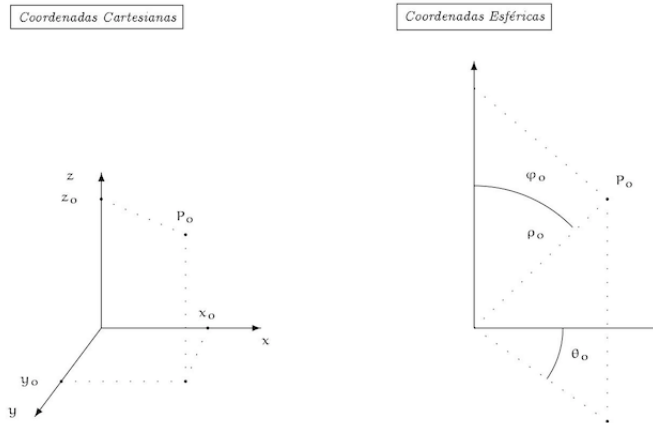
Temos também que a transformação  $T^{-1}$  será diferenciável em  $\underline{B}$ .

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação destes fatos.

Além disso, do item 2. da Observação J.1.5 (veja (J.31)), teremos

$$\begin{aligned} J_{T^{-1}}(x, y, z) &\stackrel{(x,y,z)=T(r,\theta,\varphi)}{=} J_{T^{-1}}[T(r, \theta, \varphi)] \\ &= [J_T(r, \theta, \varphi)]^{-1}, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \underline{B}. \end{aligned}$$

6. Em resumo, com o Exemplo J.2.3 acima, podemos representar pontos do espaço  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  de outro modo diferente, a saber:



A transformação que relaciona esses dois modos de representar pontos de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  é dada pela transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.70), que no caso, pega um ponto do espaço dado em coordenadas cartesianas e leva nas suas coordenadas esféricas.

O exemplo a seguir nos mostrará como levar uma região do plano em um cilindro e este numa esfera, preservando as correspondentes áreas.

**Exemplo J.2.4** Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \underline{A} &\doteq \{(x, y) ; x \in (0, 2\pi) \text{ e } y \in (-1, 1)\} \\ &= (0, 2\pi) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (\text{J.87})$$

$$\underline{B} \doteq \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 = 1, \text{ com } z \in (-1, 1) \text{ e } (x, y) \neq (1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad (\text{J.88})$$

$$\underline{C} \doteq \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ com } z \neq -1, z \neq 1 \text{ e } x \neq \sqrt{1 - z^2}\} \subseteq \mathbb{R}^3. \quad (\text{J.89})$$

Notemos que o conjunto  $\underline{A}$ , dado por (J.87), representa um retângulo em  $\mathbb{R}^2$ .

Por outro lado, o conjunto  $\underline{B}$ , dado por (J.88), representa um cilindro, do qual foi retirado o segmento

$$\{(1, 0, 0)\} \times \underbrace{(-1, 1)}_{\text{intervalo aberto}}$$

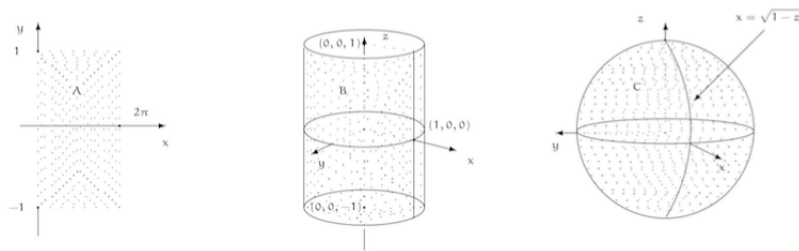
e o conjunto  $\underline{C}$  representa a esfera unitária centrada na origem, retirado um meridiano, que corresponde à curva

$$x = \sqrt{1 - z^2}, \quad \text{para cada } z \in [-1, 1]$$

(veja a figura abaixo) e os dois polos norte e sul, que correspondem aos pontos

$$(0, 0, 1) \quad \text{e} \quad (0, 0, -1),$$

respectivamente.



Consideremos as transformações  $T : A \rightarrow B$  e  $S : B \rightarrow C$ , dadas por

$$T(x, y) \doteq (\cos(x), \sin(x), y), \quad \text{para cada } (x, y) \in A, \quad (\text{J.90})$$

$$S(x, y, z) \doteq (x \sqrt{1-z^2}, y \sqrt{1-z^2}, z), \quad \text{para cada } (x, y, z) \in B. \quad (\text{J.91})$$

Mostre que as transformações  $\underline{T}$  e  $\underline{S}$  são diferenciáveis em  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$ , respectivamente.

Encontre as respectivas matrizes jacobianas e jacobianos associadas às transformações  $\underline{T}$  e  $\underline{S}$  em  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$ , respectivamente.

Mostre também que transformações  $\underline{T}$  e  $\underline{S}$  são bijetoras.

**Resolução:**

Observemos que as transformações  $\underline{T}$  e  $\underline{S}$  são diferenciáveis em  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$ , pois suas correspondentes funções coordenadas são funções diferenciáveis em  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$ , respectivamente.

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Deixamos também como exercício para o leitor, mostrar que a transformação  $\underline{T}$  leva o conjunto  $\underline{A}$  no conjunto  $\underline{B}$ , isto é,

$$T(\mathcal{A}) = \mathcal{B}, \quad (\text{J.92})$$

e que a transformação  $\underline{S}$  leva o conjunto  $\underline{B}$  no conjunto  $\underline{C}$ , isto é,

$$S(\mathcal{B}) = \mathcal{C}. \quad (\text{J.93})$$

Além disso, afirmamos que as transformações  $\underline{T}$  e  $\underline{S}$  são transformações injetoras.

As verificações destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Logo, deste fato e de (J.92) e (J.93), segue que as transformações  $\underline{T}$  e  $\underline{S}$  serão bijetoras sobre suas correspondentes imagens, ou seja,

$$T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} = T(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} = S(\mathcal{B}),$$

são transformações bijetoras.

Logo as transformações  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  e  $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  admitem transformações inversas,  $T^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  e  $S^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ , respectivamente.

Notemos que um modo de verificar que estas transformações  $\underline{T}$  e  $\underline{S}$  são transformações invertíveis é encontrando, explicitamente, suas transformações inversas

$$T^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{e} \quad S^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}.$$

Para isto, seja

$$(u, v, w) \in \mathcal{B}.$$

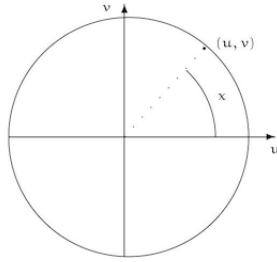
Logo, de (J.88), teremos

$$u^2 + v^2 = 1, \quad w \in (-1, 1) \quad \text{e} \quad (u, v) \neq (1, 0).$$

Logo podemos encontrar um único número

$$\begin{aligned} & x = x(u, v) \in (0, 2\pi), \\ \text{de modo que:} & \quad u = \cos(x) \quad \text{e} \quad v = \text{sen}(x), \\ \text{isto é, se} & \quad u \neq 0, \\ \text{teremos:} & \quad x \doteq \text{arctg}\left(\frac{v}{u}\right), \\ \text{e se} & \quad u = 0, \\ \text{teremos} & \quad x \doteq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{J.94}$$

Geometricamente, a situação acima é descrita na figura abaixo:



Desse modo, podemos definir a transformação  $W : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , dada por

$$W\left(\underbrace{u}_{=\cos(x)}, \underbrace{v}_{=\text{sen}(x)}, w\right) \doteq (x, w), \quad \text{para cada } (u, v, w) \in \mathcal{B}, \tag{J.95}$$

onde  $\underline{x}$  é definido em (J.94).

Logo, para  $(x, y) \in \mathcal{A}$ , teremos:

$$\begin{aligned} W[T(x, y)] & \stackrel{(J.90)}{=} W[\cos(x), \text{sen}(x), y] \\ & \stackrel{(J.95)}{=} (x, y) \end{aligned} \tag{J.96}$$

e para  $(u, v, w) \in \mathcal{B}$  teremos:

$$\begin{aligned} T[W(u, v, w)] & \stackrel{(J.95)}{=} T[x(u, v), w] \\ & \stackrel{(J.90)}{=} [\cos[x(u, v)], \text{sen}[x(u, v)], w] \\ & \stackrel{(J.94)}{=} (u, v, w). \end{aligned} \tag{J.97}$$

Portanto, a transformação  $W : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , dada por (J.95), é a transformação inversa da transformação  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , dada por (J.90), ou seja, a transformação  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , dada por (J.90), é uma transformação inversível, ou ainda, de (J.96) e (J.97), temos que

$$T^{-1} = W.$$

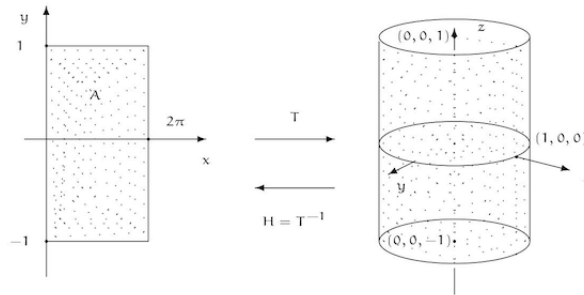
□

**Observação J.2.4**

1. Geometricamente, o que a transformação  $\underline{T}$ , dada por (J.90), faz é "enrolar" o retângulo  $\underline{A}$  sobre o cilindro  $\underline{B}$ .

Obviamente,  $T^{-1} = W$  faz o oposto, isto é, "desenrola".

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



2. Notemos que, para cada

$$y_0 \in (-1, 1),$$

o segmento de reta

$$(0, 2\pi) \times \{y_0\},$$

que está contido no conjunto  $\underline{A}$ , é levado na circunferência (menos o ponto  $(1, 0, y_0)$ )

$$A_{y_0} \doteq \{(\cos(x), \text{sen}(x), y_0) ; x \in (0, 2\pi)\}$$

contido no cilindro  $\underline{B}$  (veja figura abaixo).

3. Temos também que, para cada

$$x_0 \in (0, 2\pi),$$

o segmento de reta

$$\{x_0\} \times (-1, 1),$$

que está contido no conjunto  $\underline{A}$ , é levado no segmento de reta

$$A_{x_0} \doteq \{(\cos(x_0), \text{sen}(x_0), y) ; y \in (-1, 1)\},$$

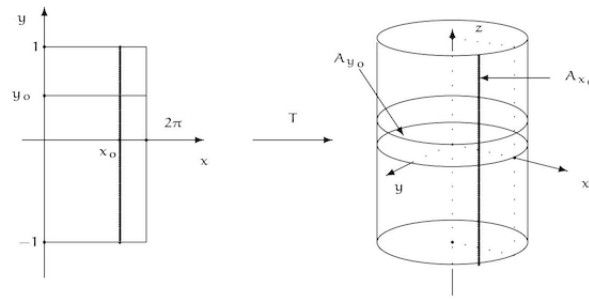
contido do cilindro  $\underline{B}$  (veja figura abaixo).

4. Consideremos agora a transformação  $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$R(u, v, w) \doteq \left( \frac{u}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-w^2}}, w \right), \quad \text{para cada } (u, v, w) \in \mathcal{C}. \quad (\text{J.98})$$

Notemos que

$$R(u, v, w) \in \mathcal{B}, \quad \text{para cada } (u, v, w) \in \mathcal{C}.$$



De fato, pois

$$\begin{aligned} \left( \frac{u}{\sqrt{1-w^2}} \right)^2 + \left( \frac{v}{\sqrt{1-w^2}} \right)^2 &= \frac{u^2 + v^2}{1-w^2} \\ &\stackrel{u^2+v^2=1-w^2}{=} \frac{1-w^2}{1-w^2} \\ &= 1 \\ e \quad -w &\in [-1, 1], \\ \text{isto é, (veja (J.88))} \quad R(u, v, w) &\in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Além do mais, para  $(x, y, z) \in \mathcal{B}$ , temos

$$\begin{aligned} R[S(x, y, z)] &\stackrel{(J.91)}{=} R \left[ x \sqrt{1-z^2}, y \sqrt{1-z^2}, z \right] \\ &\stackrel{(J.98)}{=} \left( \frac{x \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}}, z \right) \\ &= (x, y, z) \\ \text{ou seja,} \quad (R \circ S)(x, y, z) &= (x, y, z), \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

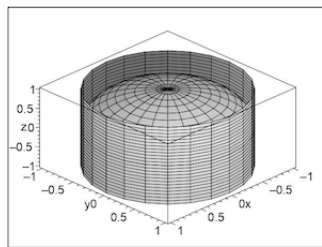
Para cada  $(u, v, w) \in \mathcal{C}$ , temos também que:

$$\begin{aligned} S[R(u, v, w)] &\stackrel{(J.98)}{=} S \left[ \frac{u}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-w^2}}, w \right] \\ &\stackrel{(J.91)}{=} \left( \frac{u}{\sqrt{1-w^2}} \sqrt{1-w^2}, \frac{v}{\sqrt{1-w^2}} \sqrt{1-w^2}, w \right) \\ &= (u, v, w) \\ \text{ou seja,} \quad (S \circ R)(u, v, w) &= (u, v, w), \quad \text{para cada } (u, v, w) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

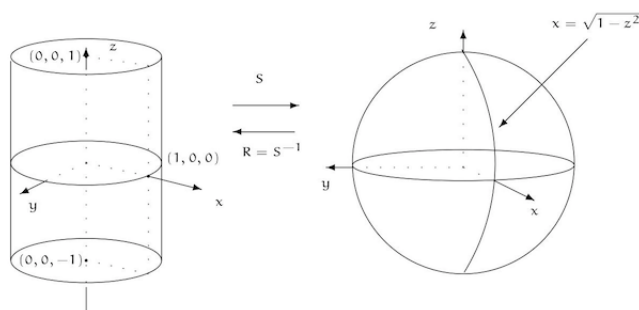
Portanto a transformação  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ , dada por (J.98), é a transformação inversa da transformação  $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ , ou seja,  $S^{-1} = R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ .

Em particular a transformação  $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ , dada por (J.91), é uma transformação inversível.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Geometricamente, a transformação  $R$ , dada por (J.98), "projeta" o cilindro  $\underline{B}$ , sobre a esfera  $\underline{C}$ , preservando a altura do ponto projetado.



5. Notemos que como as transformações  $T : A \rightarrow B$  e  $S : B \rightarrow C$  são ambas transformações invertíveis, a transformação composta

$$H = S \circ T : A \rightarrow C$$

também será (veja a Proposição J.1.2).

Denotemos por  $G : C \rightarrow A$ , a transformação inversa associada a transformação  $H : A \rightarrow C$ , isto é,

$$G = H^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

6. Para ilustrar, pensemos no conjunto  $\underline{C}$ , como se fosse o globo terrestre e no conjunto  $\underline{A}$  como sendo um mapa-mundi (veja a figura abaixo).

Podemos verificar que os meridianos do globo são levados pela transformação  $G$  em segmentos verticais no mapa-mundi  $A$ .

Por outro lado, os paralelos (são circunferências) do globo são levados em segmentos horizontais no mapa-mundi.

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor (veja figura abaixo).

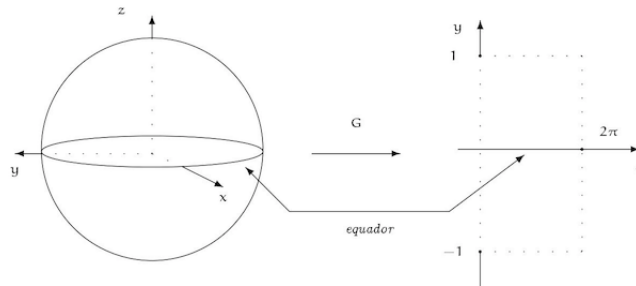
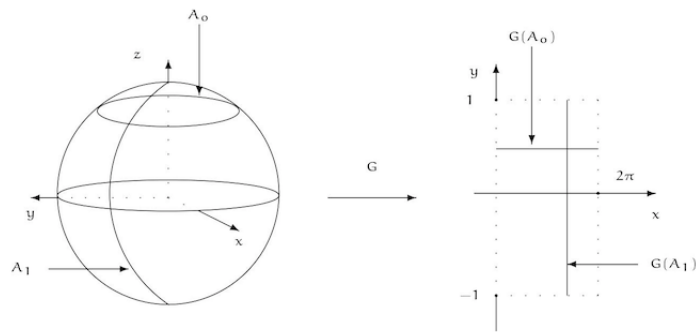
7. Podemos verificar, analiticamente, que ao "equador" do globo terrestre  $\underline{C}$  corresponderá, pela transformação  $\underline{G}$ , ao segmento

$$\{(x, 0) ; x \in (0, 2\pi)\} = (0, 2\pi) \times \{0\}$$

no mapa-mundi  $\underline{A}$ .

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

A figura abaixo ilustra situação descrita acima.



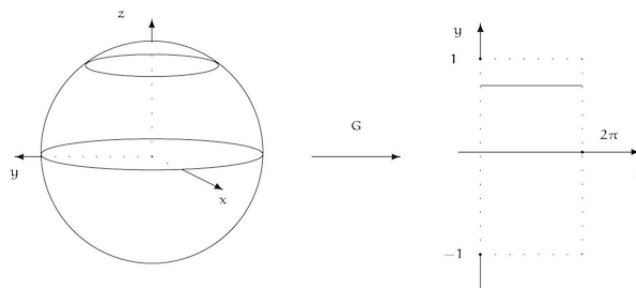
8. Os "paralelos" do globo terrestre  $\underline{C}$ , serão levados, pela transformação  $\underline{G}$ , em segmentos horizontais

$$\{(x, y_0) ; x \in (0, 2\pi)\} = (0, 2\pi) \times \{y_0\}$$

do mapa-mundi  $\underline{A}$ .

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor (veja figura abaixo).

A figura abaixo ilustra situação descrita acima.



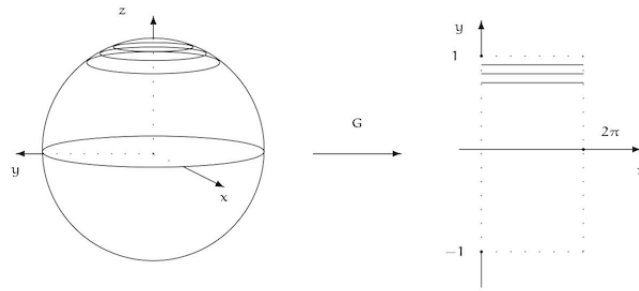
9. Baseado nestas observações podemos concluir que regiões no globo terrestre  $\underline{C}$ , "próximas" ao pólo norte (ou seja, o ponto  $(0, 0, 1)$  da esfera  $\underline{C}$ ), serão levadas pela transformação  $\underline{G}$ , em regiões "próximas" à parte superior do mapa-mundi  $\underline{A}$ , isto é, próximos do segmento de reta

$$\{(x, 1) ; x \in (0, 2\pi)\} = (0, 2\pi) \times \{1\},$$



do conjunto  $\underline{A}$ .

A figura abaixo ilustra situação descrita acima.

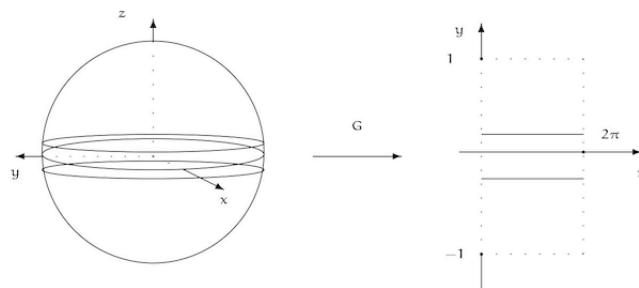


10. É interessante notar a "distorção" que ocorre neste caso, isto é, uma pequena calota ao redor deste pólo no globo terrestre  $\underline{C}$ , corresponde, pela transformação  $\underline{G}$ , a uma faixa extensa no mapa-mundi  $\underline{A}$ .

Em particular, a transformação  $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  (e sua transformação inversa  $G = H^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ) **não preserva comprimento**.

A mesma análise é válida para o pólo sul, isto é, perto do ponto  $(0, 0, -1)$  do globo terrestre  $\underline{C}$ .

Entretanto, a representação é mais "fiel" (no sentido de preservar o tamanho entre regiões correspondentes) quando as regiões, do globo terrestre  $\underline{C}$ , encontram-se "mais próximas" do equador do globo terrestre  $\underline{C}$ .



11. Mais surpreendente ainda é o fato que em qualquer caso (regiões próximas aos pólos, ou ao equador no globo terrestre  $\underline{C}$ ) as áreas das regiões correspondentes, isto é, a área de uma região

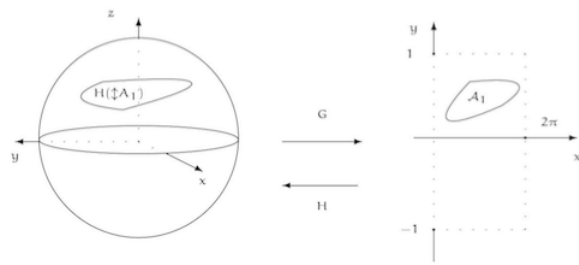
$$A_1 \subseteq \mathcal{A}$$

e a de sua imagem

$$G(A_1) \subseteq \mathcal{C}$$

são **iguais**, ou seja, a transformação  $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  (e sua transformação inversa  $G = H^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ) **preserva área**.

Essa afirmação, entretanto, só poderá ser verificada quando estudarmos **integrais de superfícies** (será visto na disciplina de Cálculo 3).



12. Por ora, podemos verificar que a área do retângulo  $A$  e da esfera  $C$ , são iguais a  $4\pi$ .

## Apêndice K

# Classificação de pontos críticos para funções de duas ou mais variáveis, a valores reais: autovalores

Neste apêndice trataremos do problema de classificar os pontos críticos de uma função  $f \in C^2(A; \mathbb{R})$ , onde  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , para  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ .

### K.1 Caso geral: autovalores da matriz hessiana

Antes de exibirmos outros exemplos aplicando o teste do hessiano daremos um resultado geral para classificarmos os pontos críticos de funções a valores reais, de  $n$  variáveis reais, que estende o teste do hessiano exibido na seção 11.2 (ou seja, o Teorema 11.2.1).

Antes porém vejamos alguns fatos importantes que serão vistos na disciplina de Álgebra Linear. Detalhes sobre estes tópicos serão tratados na disciplina de Álgebra Linear.

**Notação K.1.1** Denotemos por  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ , o conjunto formado por todas as matrizes reais que têm  $n$  linhas e  $m$  colunas (isto é, são do tipo  $n \times m$ ).

Uma matriz de  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$  será indicada por

$$A = (a_{ij}),$$

$$\text{onde } a_{ij} \in \mathbb{R}, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

que serão ditos elementos da matriz A.

Quando

$$m = n,$$

o conjunto acima será denotado por  $M_n(\mathbb{R})$  e seus elementos serão ditos matrizes quadradas de ordem n.

Em uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  os elementos

$$a_{ii}, \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

formarão o que chamaremos de diagonal principal da matriz A.

Indicaremos por  $I_n$ , a matriz quadrada de ordem  $n$ , que tem todos os elementos da diagonal principal iguais a  $1$  e os outros elementos iguais a zero, isto é,

$$a_{ij} \doteq \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ para cada } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Tal matriz será denominada matriz identidade de ordem  $\underline{n}$ .

Podemos agora introduzir a seguinte definição:

**Definição K.1.1** Seja  $A \doteq (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz quadrada de ordem  $\underline{n}$ .

Diremos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor da matriz  $\underline{A}$ , se podemos encontrar uma matriz, não nula,  $v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  de modo que

$$Av = \lambda v. \quad (\text{K.1})$$

No caso acima, a matriz coluna  $\underline{v}$  será dita autovetor da matriz  $A$  associado ao autovalor  $\underline{\lambda}$ .

### Observação K.1.1

1. Observemos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é autovalor da matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  se, e somente se, existe uma matriz coluna  $v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , não nula, tal que

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ \text{ou seja, } Av - \lambda v &= 0, \\ \text{ou ainda, } (A - \lambda I_n)v &= 0, \end{aligned} \quad (\text{K.2})$$

onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $\underline{n}$ .

Mas isto é equivalente a dizer que a matriz quadrada de ordem  $\underline{n}$

$$A - \lambda I_n$$

não admite matriz inversa, ou equivalentemente, que

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &\doteq |A - \lambda I_n| \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{K.3})$$

pois matriz quadrada não é inversível se, e somente se, seu determinante é igual a zero.

Vale observar que  $p_A$ , dada por (K.3), é um polinômio de grau  $\underline{n}$ .

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. Logo

$$\begin{aligned} \lambda_0 \in \mathbb{C} &\quad \text{é autovalor associado à matriz } \underline{A} \\ \text{se, e somente se, } &\quad \lambda_0 \in \mathbb{C} \quad \text{é raiz do polinômio } p_A, \\ \text{isto é, } &\quad p_A(\lambda_0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{K.4})$$

**Definição K.1.2** Na situação acima o polinômio  $p_A$ , dado por (K.3), será dito polinômio característico associado a matriz  $A$  e a equação

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0 \quad (\text{K.5})$$

será dita equação característica associada à matriz  $\underline{A}$ .

### Observação K.1.2

1. Como consequência do item 2. da Observação K.1.1, segue que  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  é autovalor associado à matriz quadrada  $\underline{A}$  se, e somente se, o número complexo  $\lambda_0$  é solução da equação característica associada à matriz  $\underline{A}$ , isto é, é solução complexa da equação

$$p_A(\lambda) = |\underline{A} - \lambda \underline{I}_n| = 0,$$

ou ainda, uma raiz do polinômio característico  $p_A$ .

2. Do Teorema fundamental da Álgebra, podemos concluir que um polinômio de grau  $n$  tem  $n$  raízes, em geral, complexas, não necessariamente distintas.

Assim toda matriz quadrada de ordem  $n$  tem  $n$  autovalores que, em geral, são números complexos e não, necessariamente, todos diferentes entre si.

3. Conhecendo-se os autovalores associado à matriz  $\underline{A}$  podemos encontrar, para cada autovalor fixado, um autovetor associado à matriz, relativamente ao autovalor fixado.

Para isto basta encontrar uma solução matricial  $\underline{v}$  (uma matriz coluna  $n \times 1$ ), não nula, da equação matricial

$$\underline{A} \underline{v} = \lambda \underline{v}, \quad (\text{K.6})$$

onde  $\lambda$  é um autovalor associado à matriz  $\underline{A}$ .

4. Notemos que a equação matricial (K.6) pode ser reescrita como um sistema linear de  $n$  equações a  $n$  incógnitas, que serão as coordenadas da matriz coluna  $\underline{v}$ , como veremos a seguir.

Para ilustrar consideremos o:

**Exemplo K.1.1** Consideremos a matriz

$$\underline{A} \doteq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{K.7})$$

Encontre todos os autovalores associados à matriz  $\underline{A}$  e um autovetor associado à matriz  $\underline{A}$ , relativamente a cada autovalor encontrado.

### Resolução:

Primeiramente encontraremos todos os autovalores associados à matriz  $\underline{A}$  que, pelo item 1. da Observação K.1.2, é equivalente a encontrar todas as raízes do polinômio característico  $p_A$ , ou ainda, da equação característica (notemos que  $n = 2$ )

$$|\underline{A} - \lambda \underline{I}_2| = 0. \quad (\text{K.8})$$

Observemos que equação característica associada a matriz  $\underline{A}$  será dada por:

$$\begin{aligned} 0 &= |\underline{A} - \lambda \underline{I}_2| \\ &\stackrel{(\text{K.7})}{=} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 \\ &\doteq p_A(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{K.9})$$

Logo

$$\lambda = 2$$

será a (única) solução da equação característica (K.8) (com multiplicidade algébrica igual a 2), ou seja, a matriz quadrada A tem dois autovalores (reais) iguais, a saber,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2. \quad (\text{K.10})$$

Encontremos um autovetor associado ao autovalor

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2,$$

ou seja, devemos encontrar uma matriz  $v \in M_{2 \times 1}$  de modo que

$$A v = \lambda_1 v.$$

Para isto, consideremos

$$\begin{aligned} v &\doteq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_v = \underbrace{=2}_{\lambda_1} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_v, \\ \text{de modo que} & \\ \text{isto é,} & \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \underbrace{2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_2, \\ & \quad = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} \\ \text{ou ainda,} & \quad \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}, \\ \text{ou seja,} & \quad \begin{cases} 2a = 2a \\ 2b = 2b \end{cases}, \\ \text{isto é,} & \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja, qualquer matriz 2 × 1, não nula,

$$v \doteq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{K.11})$$

será um autovetor associado à matriz A, relativamente ao autovalor

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Se, por exemplo, considerarmos

$$a \doteq 1 \quad \text{e} \quad b \doteq 0,$$

teremos que a matriz coluna

$$v_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{K.12})$$

será um autovetor associado à matriz  $\underline{A}$ , relativamente ao autovalor

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

finalizando a resolução. □

### Observação K.1.3

1. Observemos também que se considerarmos em (K.11),

$$a \doteq 0 \quad e \quad b \doteq 1,$$

teremos que a matriz coluna

$$v_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \tag{K.13}$$

também será um autovetor associado à  $\underline{A}$ , relativamente ao autovalor

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

2. Neste caso temos que as matrizes colunas  $v_1$  e  $v_2$ , dados por (K.12) e (K.13), respectivamente, são dois auto-vetores associados à matriz  $\underline{A}$  e eles são L.I. no espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$  (munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz).

3. Da disciplina de Álgebra Linear sabemos que a dimensão do espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$  é igual a 2.

Logo, deste fato, e do fato que o conjunto

$$\{v_1, v_2\} \tag{K.14}$$

é L.I. no espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ , segue que o conjunto (K.11) será uma base para no espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ .

4. Notemos também que a base (K.14) é uma base ortonormal do espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ , munido do produto interno usual.

De fato, pois os vetores  $v_1$  e  $v_2$  são ortogonais e unitários, segundo o produto interno usual do espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ .

5. **Conclusão:** no Exemplo (K.1.1) acima, obtivemos uma base de do espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ , formada por auto-vetores associados à matriz  $\underline{A}$ , a saber,

$$\{v_1, v_2\}$$

é uma base do espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ , formada por auto-vetores associados à matriz  $\underline{A}$ .

6. A matriz quadrada  $\underline{A}$  do Exemplo (K.1.1) acima, será denominada **matriz diagonal**, ou seja, é uma matriz quadrada que tem a propriedade que os elementos que não estão na sua diagonal principal serão iguais a zero.

7. Vale observar que os autovalores associados a matriz  $\underline{A}$  do Exemplo (K.1.1) acima, a saber,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$$

são os elementos da diagonal principal da matriz  $\underline{A}$ .

Isto é um fato geral, ou seja, se uma matriz quadrada é uma matriz diagonal, então os autovalores associados a esta matriz, serão todos elementos da sua diagonal principal.

Isto segue do fato que uma matriz diagonal, de ordem  $\underline{n}$ , tem a seguinte configuração:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{K.15})$$

onde

$$a_{ii} \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Assim a polinômio característico associado à uma matriz do tipo  $\underline{D}$  acima, terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &\stackrel{(\text{K.5})}{=} |A - \lambda I_n| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda). \end{aligned} \quad (\text{K.16})$$

Logo os seus autovalores (que são as raízes do polinômio característico  $p_A$ ) serão dados por

$$\lambda_1 \doteq a_{11}, \quad \lambda_2 \doteq a_{22}, \quad \cdots, \quad \lambda_n \doteq a_{nn}. \quad (\text{K.17})$$

Em particular, todos serão números reais.

8. Temos também um outro resultado importante que no diz:

Se a matriz quadrada  $\underline{A}$  é uma matriz triangular inferior ou superior, então os autovalores associados a matriz  $\underline{A}$ , serão todos os elementos da sua diagonal principal.

Para ver isto, lembremos que uma matriz quadrada  $A \doteq (a_{ij})$ , será denominada triangular superior (respectivamente, inferior) se

$$a_{ij} = 0, \quad \text{para cada } i > j \quad (\text{respectivamente, } i < j),$$

ou seja, os elementos que estão "abaixo" (respectivamente, "acima") da sua diagonal principal deverão ser iguais a zero.

Uma matriz triangular superior, de ordem  $\underline{n}$ , tem a seguinte configuração:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (\text{K.18})$$



Assim a polinômio característico associado à uma matriz triangular superior de ordem  $n$  (como acima) terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &\stackrel{\text{(K.5)}}{=} |A - \lambda I_n| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda). \end{aligned} \quad (\text{K.19})$$

Logo os seus autovalores (que são as raízes do polinômio característico  $p_A$ ) serão dados por:

$$\lambda_1 \doteq a_{11} \quad \lambda_2 \doteq a_{22} \quad \cdots, \quad \lambda_n \doteq a_{nn}, \quad (\text{K.20})$$

como afirmamos acima.

Em particular, todos serão números reais.

9. A matriz do Exemplo K.1.1 é uma **matriz simétrica**, isto é,

$$A^t = A, \quad (\text{K.21})$$

onde  $A^t$  denota a **matriz transposta** da matriz  $A$ .

10. Vale observar que os autovalores da matriz quadrada  $A$  do Exemplo K.1.1 são todos números reais e, além disso, o espaço vetorial real  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$  possui uma base ortonormal formada por auto-vetores associados à matriz  $A$  (veja o item 5. desta Observação).

Na verdade vale um resultado mais geral, a saber: quadrada de ordem  $n$ ,  $A$ , é uma matriz simétrica então todos autovalores associados matriz  $A$  são reais e  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  possui uma base ortonormal formada por auto-vetores associados a matriz  $A$ , que é a conclusão da proposição a seguir:

**Teorema K.1.1** Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz com coeficientes reais e simétrica, isto é

$$A^t = A.$$

Então a matriz  $A$  possui  $n$  autovalores reais (não necessariamente distintos).

Além do mais, podemos encontrar  $n$  auto-vetores associados à matriz  $A$ , de modo que estes formem uma base ortonormal do espaço vetorial real  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , munido do produto interno usual, ou seja, existem  $n$  números reais

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

e  $n$  matrizes colunas

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}),$$

tais que

$$\begin{aligned} &A v_j = \lambda_j \cdot v_j, \\ \text{e} \quad &v_i \bullet v_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad \text{para } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

onde, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , onde  $\bullet$  denota o produto interno usual do espaço vetorial real  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ .

, a expressão

$$A \vec{v}_j$$

deve ser entendida como o produto da matriz  $A$ , pela matriz das coordenadas do vetor  $\vec{v}_j$  em relação a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, identificamos os elementos de  $\mathbb{R}^n$  com os elementos de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ .

### Demonstração:

Será vista na disciplina de Álgebra Linear. □

Retornemos ao problema de classificar os pontos críticos de uma função real de  $n$ -variáveis reais.

**Observação K.1.4** Lembremos que se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , definida em um subconjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , então a matriz hessiana de  $f$  no ponto  $P \in A$ , isto é, a matriz quadrada

$$\text{Hess}_f(P),$$

é uma matriz simétrica (veja o item 3. da Observação 11.2.1).

Portanto podemos aplicar o Teorema K.1.1 acima a mesma e assim obter  $n$  autovalores reais, associados à matriz  $\text{Hess}_f(P)$ , e uma podemos obter uma base ortonormal do espaço vetorial real  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , munido do produto interno usual, formada por auto-vetores associados à matriz  $\text{Hess}_f(P)$ , relativamente aos  $n$  autovalores associados à matriz  $\text{Hess}_f(P)$ .

Para ilustrar, consideremos os:

**Exemplo K.1.2** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x, y) \doteq 2x^2 + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{K.22})$$

Encontrar os pontos críticos associados à função  $f$  e classificá-los do ponto de vista de extremos locais.

### Resolução:

Notemos que a função  $f$  tem um mínimo local (na verdade é um mínimo global) no ponto

$$P_0 \doteq (0, 0).$$

De fato, pois para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , teremos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\stackrel{(\text{K.22})}{=} 2x^2 + y^2 \\ &\geq 0 \\ &\stackrel{(\text{K.22})}{=} f(0, 0) \\ &= f(P_0). \end{aligned}$$

Observemos também que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$  (pois é uma função polinomial).

Além disso, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &\stackrel{\text{(K.22)}}{=} \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 + y^2) \\ &= 4x, \end{aligned} \tag{K.23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &\stackrel{\text{(K.22)}}{=} \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 + y^2) \\ &= 2y, \end{aligned} \tag{K.24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \\ &\stackrel{\text{(K.23)}}{=} \frac{\partial}{\partial x} [4x] \\ &= 4, \end{aligned} \tag{K.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{\text{(K.24)}}{=} \frac{\partial}{\partial y} [2y] \\ &= 2 \end{aligned} \tag{K.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &\stackrel{\text{(8.78)}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{\text{(K.24)}}{=} \frac{\partial}{\partial x} [2y] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{K.27}$$

Além disso, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\stackrel{\text{(K.23)}}{=} \text{e } \stackrel{\text{(K.24)}}{=} (4x, 2y), \end{aligned} \tag{K.28}$$

$$\text{logo } \underbrace{\nabla f(x, y)}_{\stackrel{\text{(K.28)}}{=} (4x, 2y)} = (0, 0)$$

se, e somente se,  $(x, y) = (0, 0)$ .

ou seja, o ponto

$$P_0 = (0, 0),$$

é o único ponto crítico da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .

A matriz hessiana da função  $f$ , para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , será dada por :

$$\text{Hess}_f(x, y) \stackrel{(11.27)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(K.25), (K.26) \text{ e } (K.27)}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{em particular, } \text{Hess}_f(P_0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (K.29)$$

Como a matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$ , dada por (K.29), é uma matriz diagonal, pelo item 7. da Observação K.1.3, temos que seus autovalores serão o elementos de sua diagonal principal, ou seja:

$$\lambda_1 \doteq 4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \doteq 2.$$

Ou seja, todos os autovalores associados à matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$  são números reais maiores que zero, isto é:

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad (K.30)$$

e a função  $f$  tem um ponto de mínimo local (ou relativo) no ponto crítico  $\underline{P}_0$ , completando a resolução.  $\square$

Vejamos agora o:

**Exemplo K.1.3** *Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por*

$$f(x, y) \doteq x^2 - y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (K.31)$$

*Encontrar os pontos críticos associados à função  $f$  e classificá-los do ponto de vista dos extremos locais.*

**Resolução:**

Observemos também que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Além disso, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &\stackrel{\text{(K.31)}}{=} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) \\ &= 2x, \end{aligned} \tag{K.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &\stackrel{\text{(K.31)}}{=} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2) \\ &= -2y, \end{aligned} \tag{K.33}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \\ &\stackrel{\text{(K.32)}}{=} \frac{\partial}{\partial x} [2x] \\ &= 2, \end{aligned} \tag{K.34}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{\text{(K.24)}}{=} \frac{\partial}{\partial y} [-2y] \\ &= -2 \end{aligned} \tag{K.35}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &\stackrel{\text{(8.78)}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{\text{(K.35)}}{=} \frac{\partial}{\partial x} [-2y] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{K.36}$$

Observemos também que a função  $f$  tem ponto de sela no ponto

$$P_o \doteq (0, 0).$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} f(x, 0) &\stackrel{\text{(K.31), com } y=0}{=} x^2 - 0^2 \\ &\geq 0 \\ &\stackrel{\text{(K.31)}}{=} f(0, 0) \\ &= f(P_o), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ f(0, y) &\stackrel{\text{(K.31), com } x=0}{=} 0^2 - y^2 \\ &\leq 0 \\ &\stackrel{\text{(K.31)}}{=} f(0, 0) \\ &= f(P_o), \quad \text{para } y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja, "perto" do ponto  $P_o = (0, 0)$ , temos pontos nos quais o valor da função  $f$  fica acima e ficam abaixo do valor da função  $f$  no ponto  $P_o = (0, 0)$ , mostrando que ele realmente é um ponto de sela da função  $f$ .

Além disso, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \stackrel{\text{(K.32)} \text{ e } \text{(K.33)}}{=} (2x, -2y), \quad (\text{K.37})$$

$$\text{em particular, } \underbrace{\nabla f(x, y)}_{\stackrel{\text{(K.37)}}{=} (2x, -2y)} = (0, 0)$$

$$\text{se, e somente se } (x, y) = (0, 0),$$

ou seja, o ponto  $P_0 = (0, 0)$  é o único ponto crítico associado à função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Notemos que a matriz hessiana associada à função  $f$ , em  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , será dada por :

$$\text{Hess}_f(x, y) \stackrel{\text{(11.27)}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \stackrel{\text{(K.34), (K.35)} \text{ e } \text{(K.36)}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{K.38})$$

Em particular,

$$\text{Hess}_f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{K.39})$$

Como a matriz quadrada  $\text{Hess}_f(P_0)$ , dada por (K.39), é uma matriz diagonal, pelo item 7. da Observação K.1.3, seus autovalores serão o elementos de sua diagonal principal, isto é:

$$\lambda_1 \doteq 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \doteq -2.$$

Ou seja, tem um autovalor associado à matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$  que é positivo e outro que é negativo, ou ainda,

$$\lambda_1 > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 < 0 \quad (\text{K.40})$$

e a função  $f$  tem um ponto de sela no ponto crítico  $P_0$ , completando a resolução.  $\square$

Os Exemplos K.1.2 e K.1.3 acima, nos motivam a enunciar o seguinte resultado geral para caracterização de pontos críticos de funções a valores reais, de  $n$ -variáveis reais, utilizando os autovalores da matriz hessiana calculada em ponto crítico da função envolvida, a saber:

**Teorema K.1.2 (classificação de pontos críticos por meio de autovalores)**

Seja  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , definida em um subconjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Suponhamos que o ponto  $P_0 \in A$  é um ponto crítico da função  $f$ , ou seja,

$$\nabla f(P_0) = \vec{0}. \quad (\text{K.41})$$

Sejam

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

os autovalores (o Teorema K.1.1 garante que são todos números reais) associados à matriz hessiana da função  $f$  no ponto  $P_0$ , ou seja, à matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$ .

Então podemos concluir que:

1. se

$$\lambda_j > 0, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (\text{K.42})$$

então o ponto crítico  $\underline{P}_o$  da função  $\underline{f}$ , será um ponto de mínimo local (ou relativo) da função  $\underline{f}$ .

2. se

$$\lambda_j < 0, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (\text{K.43})$$

o ponto crítico  $\underline{P}_o$  da função  $\underline{f}$ , será um ponto de máximo local (ou relativo) da função  $\underline{f}$ .

3. se existirem dois autovalores  $\lambda_{j_1}$  e  $\lambda_{j_2}$ , para  $j_1, j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , com sinais opostos, por exemplo,

$$\lambda_{j_1} > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{j_2} < 0, \quad (\text{K.44})$$

então o ponto crítico  $\underline{P}_o$  da função  $\underline{f}$ , será um ponto de sela da função  $\underline{f}$ .

4. nos demais casos, isto é,

(a) se

$$\lambda_j \geq 0, \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

e existe, pelo menos, um autovalor

$$\lambda_{i_0} = 0$$

ou

(b) se

$$\lambda_j \leq 0, \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

e existe, pelo menos um, um autovalor

$$\lambda_{i_0} = 0,$$

não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico  $\underline{P}_o$  da função  $\underline{f}$ .

### Demonstração:

Daremos a seguir uma idéia da demonstração.

Ao invés de usarmos a base canônica do espaço vetorial real  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , usaremos o Teorema K.1.1 para obter uma base ortonormal

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

do espaço vetorial real  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , formada por auto-vetores associados à matriz hessiana da função  $\underline{f}$ , calculada no ponto  $\underline{P}_o$ , ou seja, da matriz quadrada  $\underline{\text{Hess}}_f(\underline{P}_o)$ .

Em particular, teremos

$$\underline{\text{Hess}}(\underline{P}_o) v_j = \lambda_j v_j, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (\text{K.45})$$

Consideremos a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g(t) \doteq f(\underline{P}_o + t \vec{u}), \quad \text{para cada } t \in [0, 1], \quad (\text{K.46})$$

onde o vetor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$  é um vetor não nulo, com norma suficientemente pequena, para que o ponto

$$\underline{P}_o + t \cdot \vec{u} \in A, \quad \text{para cada } t \in [0, 1].$$

Notemos que isto é possível pois o conjunto  $\underline{A}$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $P_0 \in A$ .

Consideremos

$$\mathbf{u} \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}),$$

a matriz das coordenadas do vetor  $\vec{\mathbf{u}}$  com relação à base canônica de  $\mathbb{R}^n$ .

Usando a regra da cadeia (veja (11.82)), podemos mostrar que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u} \\ &\stackrel{(K.41)}{=} \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{K.47}$$

$$g''(0) = [\text{Hess}_f(P_0)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{u}, \tag{K.48}$$

onde  $\cdot$  denota o produto de matrizes.

Observemos que, da fórmula de Taylor de ordem  $\underline{2}$  para a função  $f$ , no ponto  $P_0$  (veja (I.18) com  $n = 2$ ), quando a norma do vetor  $\vec{\mathbf{u}}$  é pequena o bastante, temos que o valor  $f(P)$ , para  $P = P_0 + \vec{\mathbf{u}}$ , ficará tão próximo quanto se queira de

$$f(P_0) + \frac{1}{2} [\text{Hess}_f(P_0)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{u}. \tag{K.49}$$

Com isto, escrevendo a matriz coluna  $\mathbf{u} \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , na forma (lembramos que o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base do espaço vetorial real  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ )

$$\vec{\mathbf{u}} = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n, \tag{K.50}$$

teremos:

$$\begin{aligned} 2[f(P) - f(P_0)] &\sim [\text{Hess}_f(P_0) \cdot \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} \\ &\stackrel{(K.50)}{=} [\text{Hess}_f(P_0) \cdot (h_1 v_1 + \dots + h_n v_n)] \cdot (h_1 v_1 + \dots + h_n v_n) \\ &= [h_1 \text{Hess}_f(P_0) \cdot v_1 + \dots + h_n \text{Hess}_f(P_0) \cdot v_n] \cdot (h_1 v_1 + \dots + h_n v_n) \\ &\stackrel{\text{Hess}_f(P_0)v_j \stackrel{(K.45)}{=} \lambda_j v_j}{=} [(h_1 \lambda_1) v_1 + \dots + (h_n \lambda_n) v_n] \cdot (h_1 v_1 + \dots + h_n v_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\lambda_i h_i h_j) (v_i \cdot v_j) \\ &\stackrel{v_i \cdot v_j = \delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2 \\ &= \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2, \end{aligned} \tag{K.51}$$

pelo fato dos auto-vetores associados a matriz hessiana da função  $f$ , no ponto crítico  $P_0$ , formarem uma base ortonormal do espaço vetorial real  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ , munido do produto interno usual

Com isto podemos completar a demonstração do resultado, tratando cada um dos casos separadamente.

Mostremos que 1. ocorre, se vale (K.42), ou ainda, se

$$\lambda_j > 0, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{K.52}$$

Então, de (K.52), segue que

$$\begin{aligned} &\lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 > 0, \\ \text{pois } &\mathbf{u} = h_1 v_1 + \dots + h_n v_n \neq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{K.53}$$



Logo, de (K.51) e (K.53), teremos

$$2[f(P) - f(P_o)] \stackrel{(K.51)}{\sim} \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2$$

$$\stackrel{(K.53)}{>} 0,$$

implicando que,  $f(P) > f(P_o)$ , para  $P \sim P_o$ ,

que nos diz que a função  $f$  tem um ponto de mínimo local (ou relativo) no ponto crítico  $\underline{P_o}$ , completando a demonstração do item 1. .

Mostremos que 2. ocorre, se vale (K.43), ou ainda, se

$$\lambda_j < 0, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (K.54)$$

Então, de (K.54), segue que

$$\lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 < 0, \quad (K.55)$$

pois  $u = h_1 v_1 + \dots + h_n v_n \neq O$ .

Logo, de (K.51) e (K.55), teremos

$$2[f(P) - f(P_o)] \stackrel{(K.51)}{\sim} \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2$$

$$\stackrel{(K.55)}{<} 0,$$

implicando que,  $f(P) < f(P_o)$ , para  $P \sim P_o$ ,

que nos diz que a função  $f$  tem um ponto de máximo local (relativo) no ponto crítico  $\underline{P_o}$ , completando a demonstração do item 2. .

Mostremos que 3. ocorre.

Suponhamos agora que existam

$$\lambda_{i_o} < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{j_o} > 0, \quad (K.56)$$

para  $i_o, j_o \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Consideremos

$$P_1 \doteq P_o + h_{i_o} v_{i_o} \in A, \quad \text{onde } h_{i_o} \neq 0, \quad (K.57)$$

$$P_2 \doteq P_o + h_{j_o} v_{j_o} \in A, \quad \text{onde } h_{j_o} \neq 0. \quad (K.58)$$

Deste modo temos, por (K.51):

$$2[f(P_1) - f(P_o)] \stackrel{(K.51) \text{ e } (K.57)}{\sim} [\text{Hess}_f(P_o) h_{i_o} v_{i_o}] \cdot (h_{i_o} v_{i_o})$$

$$= h_{i_o}^2 [\text{Hess}_f(P_o) \cdot v_{i_o}] \cdot v_{i_o}$$

$$\stackrel{\text{Hess}_f(P_o) \cdot v_{i_o} = \lambda_{i_o} v_{i_o}}{=} h_{i_o}^2 [\lambda_{i_o} v_{i_o} \cdot v_{i_o}]$$

$$\stackrel{v_{i_o} \cdot v_{i_o} = 1}{=} \lambda_{i_o} h_{i_o}^2$$

$$\stackrel{(K.56) \text{ e } (K.57)}{<} 0, \quad (K.59)$$

$$\begin{aligned}
2[f(P_2) - f(P_0)] &\stackrel{(K.51) \text{ e } (K.58)}{\sim} [\text{Hess}_f(P_0)h_{j_0} v_{j_0}] \cdot (h_{j_0} v_{j_0}) \\
&= h_{j_0}^2 [\text{Hess}_f(P_0) \cdot v_{j_0}] \cdot v_{j_0} \\
&\stackrel{\text{Hess}_f(P_0) \cdot v_{j_0} = \lambda_{j_0} v_{j_0}}{=} h_{j_0}^2 [\lambda_{j_0} v_{j_0} \cdot v_{j_0}] \\
&\stackrel{\tilde{v}_{j_0} \cdot \tilde{v}_{j_0} = 1}{=} \lambda_{j_0} h_{j_0}^2 \\
&\stackrel{(K.56) \text{ e } (K.58)}{>} 0.
\end{aligned} \tag{K.60}$$

As desigualdades (K.59) e (K.60), mostram que

$$\begin{aligned}
f(P_1) &< f(P_0) \\
\text{e } f(P_2) &> f(P_0), \quad \text{para } P_1, P_2 \sim P_0,
\end{aligned}$$

mostrando que o ponto  $\underline{P}_0$  é um ponto de sela da a função  $\underline{f}$ , completando a demonstração do item 3.

O item 4. segue de exemplos semelhantes ao do Teorema 11.2.1 (o caso bidimensional).

Por exemplo, se considerarmos as funções  $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq x_1^4 + x_2^4, \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq -x_1^4 - x_2^4 \quad \text{e} \quad h(x_1, x_2, \dots, x_n) \doteq x_1^4 - x_2^4,$$

para  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , então teremos que a origem

$$P_0 \doteq (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

será um ponto de mínimo local (que também será ponto mínimo global) para a função  $\underline{f}$ , será um ponto máximo local (que também será ponto de máximo global) para a função  $\underline{g}$  e também será um ponto sela para a função  $\underline{h}$ .

A verificação destes fatos será deixado como exercício para o leitor.

Note que nos três casos, os autovalores associados as respectivas matrizes hessianas das funções  $\underline{f}$ ,  $\underline{g}$  e  $\underline{h}$ , no ponto crítico  $\underline{P}_0$ , serão todos nulos.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação destes fatos. □

**Observação K.1.5** Notemos que o Teorema K.1.2, no caso  $n = 2$ , é equivalente ao Teorema 11.2.1 (isto é, ao teste do hessiano).

Para mostrarmos isto, seja

$$P_0 \in A$$

um ponto crítico da função  $f \in C^2(A; \mathbb{R})$ , onde o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ .

Definamos

$$A \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0), \quad B \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0), \quad C \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \quad \text{e} \quad H \doteq H_f(P_0) = A B - C^2. \tag{K.61}$$

Deste modo teremos

$$\text{Hess}_f(P_0) = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}. \tag{K.62}$$

Portanto, o polinômio característico associado à matriz hessiana da função  $f$  no ponto  $P_0$ , será dado por:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\text{Hess}(P_0) - \lambda I_2| \\ &= \begin{vmatrix} A - \lambda & C \\ C & B - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (A + B)\lambda + AB - C^2 \\ &\stackrel{\text{(K.61)}}{=} \lambda^2 - (A + B)\lambda + H \end{aligned} \quad (\text{K.63})$$

que terá como raízes os números reais

$$\lambda_1 = \frac{A + B + \sqrt{\Delta}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{A + B - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (\text{K.64})$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &\doteq (A + B)^2 - 4H \\ &= (A - B)^2 + 4C^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{K.65})$$

**1.o caso:** Vamos supor que o item 1. do Teorema 11.2.1 seja válido, isto é,

$$A > 0 \quad e \quad H > 0. \quad (\text{K.66})$$

Queremos mostrar que os autovalores associados à matriz hessiana da função  $f$ , no ponto crítico  $P_0$ , isto é,

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

são maiores que zero, isto é, (já sabemos que são números reais pois a matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$  é uma matriz simétrica), ou seja, que temos

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0. \quad (\text{K.67})$$

Notemos que, como

$$\begin{aligned} H &\stackrel{\text{(K.61)}}{=} AB - C^2 > 0, \\ \text{segue que deveremos ter:} \quad AB &> C^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{K.68})$$

Mas, de (K.66), temos

$$\begin{aligned} &A > 0, \\ \text{que, juntamente com (K.68), implicará em:} \quad &B > 0, \\ \text{logo} \quad &A, B > 0. \end{aligned} \quad (\text{K.69})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\stackrel{\text{(K.64)}}{=} \frac{A + B + \overbrace{\sqrt{\Delta}}^{\geq 0}}{2} \\ &\geq \frac{A + B}{2} \stackrel{\text{(K.69)}}{>} 0. \end{aligned}$$

Notemos também que

$$\begin{aligned}
 & AB - C^2 \stackrel{(K.61)}{=} H \stackrel{(K.66)}{>} 0, \\
 \text{ou seja,} & AB > C^2, \\
 \text{ou ainda,} & 4AB > 4C^2, \\
 \text{isto é,} & 2AB > 4C^2 - 2AB \\
 \text{ou seja,} & \underbrace{A^2 + B^2 + 2AB}_{=(A+B)^2} > \underbrace{A^2 + B^2 + 4C^2 - 2AB}_{=(A-B)^2 + 4C^2} \\
 \text{ou ainda,} & (A+B)^2 > \underbrace{(A-B)^2 + 4C^2}_{\stackrel{(K.65)}{=} \Delta}, \\
 \text{isto é,} & (A+B)^2 > \Delta & (K.70) \\
 \text{que, de (K.69), teremos:} & A+B = |A+B| \\
 & > \sqrt{\Delta}, & (K.71) \\
 \text{ou seja,} & A+B - \sqrt{\Delta} > 0, & (K.72) \\
 \text{e, de (K.64), segue que:} & \lambda_2 = \frac{A+B - \sqrt{\Delta}}{2} \stackrel{(K.72)}{>} 0,
 \end{aligned}$$

ou seja, (K.67) ocorrerá, ou seja, vale o item 1. do Teorema K.1.2.

Reciprocamente, suponhamos que vale o item 1. do Teorema K.1.2 (para o caso  $n=2$ ), isto é, se os autovalores da matriz hessiana da função  $f$ , no ponto crítico  $P_0$  são maiores que zero, ou seja,

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad (K.73)$$

ou ainda, satisfazem (K.67), segue de (K.64), teremos:

$$\begin{aligned}
 & 0 < \lambda_1 \\
 & \stackrel{(K.64)}{=} \frac{A+B + \sqrt{\Delta}}{2}, \\
 \text{implicando que:} & 0 < A+B + \sqrt{\Delta}, \\
 \text{ou seja,} & -A-B < \sqrt{\Delta}. & (K.74)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 0 < \lambda_2 \\
 & \stackrel{(K.64)}{=} \frac{A+B - \sqrt{\Delta}}{2}, \\
 \text{implicando que:} & 0 < A+B - \sqrt{\Delta}, \\
 \text{ou ainda,} & \sqrt{\Delta} < A+B. & (K.75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Logo, (K.74) e (K.75), teremos:} & -A-B < \sqrt{\Delta} < A+B \\
 \text{ou seja,} & \sqrt{\Delta} < |A+B|. & (K.76)
 \end{aligned}$$

$$\text{Além disso, temos: } (A + B)^2 - 4H \stackrel{(K.65)}{=} \Delta$$

$$\stackrel{(K.76)}{<} (A + B)^2,$$

$$\text{isto é, } -4H < 0,$$

$$\text{ou ainda } H > 0.$$

$$\text{Logo, } AB - C^2 \stackrel{(K.61)}{=} H \stackrel{(A.179)}{>} 0, \quad (K.77)$$

$$\text{isto é } AB > C^2 \geq 0,$$

e, portanto os números reais  $A$  e  $B$  deverão ter o mesmo sinal.

Notemos que

$$\text{se } A < 0,$$

$$\text{deveremos ter: } B < 0 \quad (K.78)$$

e neste caso teríamos

$$\lambda_2 \stackrel{(K.64)}{=} \frac{A + B - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\leq \frac{A + B}{2} \stackrel{(K.78)}{<} 0,$$

o que contraria (K.73).

Portanto, se os autovalores associados à matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$  são maiores que zero, isto é,

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0,$$

deveremos ter

$$A > 0 \quad \text{e} \quad H > 0,$$

ou seja, vale o item 1. do Teorema 11.2.1.

**2.o caso:** Vamos supor que o item 2. do Teorema 11.2.1 seja válida, isto é,

$$A < 0 \quad \text{e} \quad H > 0. \quad (K.79)$$

Neste caso, como anteriormente (veja (K.68)), deveremos ter

$$B < 0. \quad (K.80)$$

Assim

$$\lambda_2 \stackrel{(K.64)}{=} \frac{A + B - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\leq \frac{A + B}{2}$$

$$\stackrel{(K.79) \text{ e } (K.80)}{<} 0,$$

Também, como antes (veja (K.70)), teremos

$$\begin{aligned}
 & \text{se, e somente se,} & H > 0, \\
 & \text{Como } A, B \stackrel{\text{(K.79)} \text{ e } \text{(K.80)}}{< 0}, \text{ teremos:} & (A+B)^2 > \Delta. \tag{K.81} \\
 & & -(A+B) &= |A+B| \\
 & & & \stackrel{\text{(K.81)}}{>} \sqrt{\Delta}, \\
 & \text{ou seja,} & A+B+\sqrt{\Delta} < 0, \\
 & \text{implicando em,} & \lambda_1 \stackrel{\text{(K.64)}}{=} \frac{A+B+\sqrt{\Delta}}{2} < 0, \\
 & \text{isto é,} & \lambda_1, \lambda_2 < 0, \tag{K.82}
 \end{aligned}$$

ou seja, vale o item 2. do Teorema K.1.2 (para o caso  $n=2$ ).

Reciprocamente, se vale o item 2. do Teorema K.1.2 (para o caso  $n=2$ ), ou seja, se os dois autovalores da matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$ , satisfazem

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0, \tag{K.83}$$

segue, como no 1.o caso (veja (K.71)), que

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\Delta} < |A+B|, \\
 & \text{implicando em} & \Delta < (A+B)^2 \\
 & \text{ou ainda, de (K.65), teremos:} & (A+B)^2 - 4H < (A+B)^2, \\
 & \text{isto é,} & -4H < 0, \\
 & \text{ou ainda} & \underbrace{H}_{\stackrel{\text{(K.61)}}{=} AB-C^2} > 0, \\
 & \text{e assim teremos:} & AB > C^2 > 0. \tag{K.84}
 \end{aligned}$$

Portanto, de (K.84), segue que  $A$  e  $B$  têm o mesmo sinal.

Se tivéssemos

$$\begin{aligned}
 & A > 0, \\
 & \text{devíamos ter} & B > 0 \tag{K.85}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{e isto implicaria que} & \lambda_1 = \frac{A+B+\overset{>0}{\sqrt{\Delta}}}{2} \\
 & & \geq \frac{A+B}{2} \stackrel{\text{(K.85)}}{>} 0,
 \end{aligned}$$

uma contradição, pois estamos supondo que os autovalores associados à matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$  são ambos menores que zero (veja (K.83)).

Portanto deveremos ter

$$H > 0 \quad \text{e} \quad A < 0,$$

mostrando que o item 2. do Teorema 11.2.1 ocorre.

O 1.o e 2.a casos acima, mostram a equivalência das hipóteses entre os segundos itens dos Teorema (11.2.1) e (K.1.2), para o caso  $n=2$ .

**3.o caso:** Suponha agora que vale o item 3. do Teorema 11.2.1, ou seja,

$$H < 0. \quad (\text{K.86})$$

Neste caso teremos (como em (K.76))

$$\begin{aligned} & AB - C^2 \stackrel{(\text{K.61})}{=} H \stackrel{(\text{K.86})}{<} 0, \\ \text{ou seja,} & \quad AB < C^2, \\ \text{isto é,} & \quad |A + B| < \sqrt{\Delta} \\ \text{ou ainda,} & \quad -\sqrt{\Delta} \stackrel{(I)}{<} A + B \stackrel{(II)}{<} \sqrt{\Delta}, \\ \text{assim, teremos:} & \quad \begin{cases} \lambda_1 \stackrel{(\text{K.64})}{=} \frac{A + B + \sqrt{\Delta}}{2} \stackrel{\text{de (I)}}{>} 0 \\ \lambda_2 \stackrel{(\text{K.64})}{=} \frac{A + B - \sqrt{\Delta}}{2} \stackrel{\text{de (II)}}{<} 0 \end{cases}, \\ \text{isto é,} & \quad \lambda_2 < 0 < \lambda_1, \end{aligned}$$

ou seja, os autovalores associados à matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$  têm um sinais opostos, mostrando que vale o item 3. do Teorema K.1.2 (para o caso  $n=2$ ).

Reciprocamente, se vale o item 3. do Teorema K.1.2, ou seja, se os autovalores associados à matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$  têm um sinais opostos, ou ainda, se

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

então, de (K.64), segue que

$$\begin{aligned} & A + B - \sqrt{\Delta} < 0 < A + B + \sqrt{\Delta}, \\ \text{implicado que} & \quad |A + B| < \sqrt{\Delta} \\ \text{ou ainda,} & \quad (A + B)^2 < \Delta = (A + B)^2 - 4H, \\ \text{assim teremos:} & \quad H < 0, \end{aligned}$$

mostrando que vale o item 3. do Teorema 11.2.1.

Desta forma temos a equivalência das hipóteses entre os terceiros itens dos Teorema 11.2.1 e K.1.2, para o caso  $n=2$ .

Para os quartos itens, observamos que

$$\begin{aligned} & H = 0, \\ \text{se, e somente se,} & \quad \Delta \stackrel{(\text{K.65})}{=} (A + B)^2 \overbrace{-4H}^{=0} \\ & \quad = (A + B)^2, \\ \text{ou seja,} & \quad \sqrt{\Delta} = |A + B|, \\ \text{ou ainda,} & \quad \lambda_1 \stackrel{(\text{K.64})}{=} 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \stackrel{(\text{K.64})}{=} 0. \end{aligned}$$

Isto termina a prova da equivalência entre os respectivos itens dos Teoremas 11.2.1 e K.1.2 no caso bidimensional (isto é, quando  $n=2$ ).

Apliquemos o resultado acima ao:

**Exemplo K.1.4** Classifique todos os pontos críticos da função  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y, z) \doteq x^3 - 3x + y^2 + z^2 - 2z, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{K.87})$$

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$  (pois é uma função polinomial) e, para  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \stackrel{(\text{K.87})}{=} 3x^2 - 3, \quad (\text{K.88})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \stackrel{(\text{K.87})}{=} 2y, \quad (\text{K.89})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \stackrel{(\text{K.87})}{=} 2z - 2, \quad (\text{K.90})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \stackrel{(\text{K.88})}{=} 6x, \quad (\text{K.91})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \stackrel{(\text{K.89})}{=} 2, \quad (\text{K.92})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \stackrel{(\text{K.90})}{=} 2, \quad (\text{K.93})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) &\stackrel{(\text{8.78})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) \\ &\stackrel{(\text{K.89})}{=} 0, \end{aligned} \quad (\text{K.94})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) &\stackrel{(\text{8.78})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ &\stackrel{(\text{K.90})}{=} 0, \end{aligned} \quad (\text{K.95})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &\stackrel{(\text{8.78})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) \\ &\stackrel{(\text{K.89})}{=} 0. \end{aligned} \quad (\text{K.96})$$

Encontremos os pontos críticos da função  $f$ , a saber:

$$(0, 0, 0) = \nabla f(x, y, z) \stackrel{(\text{K.88}), (\text{K.89}) \text{ e } (\text{K.90})}{=} (3x^2 - 3, 2y, 2z - 2),$$

$$\text{isto é, } \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{ou, ainda, } P_1 \doteq (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad P_2 \doteq (-1, 0, 1), \quad (\text{K.97})$$

são os únicos pontos críticos da função  $f$  em  $\mathbb{R}^3$ .



A matriz hessiana associada a função  $f$ , no ponto  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , será dada por:

$$\text{Hess}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(\text{K.93}), (\text{K.94}), (\text{K.95}) \text{ e } (\text{K.96})}{=} \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{K.98})$$

Desta forma, no o ponto  $P_1 = (1, 0, 1)$ , segue que

$$\text{Hess}_f(P_1) = \text{Hess}_f(1, 0, 1)$$

$$\stackrel{(\text{K.98})}{=} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{K.99})$$

Como a matriz quadrada (K.99) acima é uma matriz diagonal, do item 7. da Observação K.1.3, segue que seus autovalores são os elementos da diagonal principal, isto é, deste fato e de (K.99), teremos que os autovalores associados a matriz  $\text{Hess}_f(P_1)$ , serão dados por:

$$\lambda_1 = 6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2. \quad (\text{K.100})$$

Logo todos os autovalores associados a matriz hessiana de  $f$ , no seu ponto crítico  $\underline{P}_1$ , são positivos (isto é, maiores que zero).

Portanto, do item 1. do Teorema K.1.2, segue que o ponto crítico

$$P_1 = (1, 0, 1)$$

é um ponto de mínimo local (ou relativo) da função  $f$ .

Para o ponto  $P_2 = (-1, 0, 1)$  teremos:

$$\text{Hess}_f(P_2) = \text{Hess}_f(-1, 0, 1)$$

$$\stackrel{(\text{K.98})}{=} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{K.101})$$

Como a matriz quadrada (K.101) acima é uma matriz diagonal, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, do item 7. da Observação K.1.3, segue que os autovalores associados a matriz  $\text{Hess}_f(P_2)$ , serão dados por

$$\lambda_1 = -6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2. \quad (\text{K.102})$$

Logo, os autovalores da matriz hessiana de  $f$  no ponto crítico  $\underline{P}_2$ ,

$$\lambda_1 = -6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2$$

têm sinais contrários.

Portanto, do item 3. do Teorema K.1.2, segue que o ponto crítico

$$P_2 = (-1, 0, 1)$$

é ponto de sela da função  $f$ , completando a resolução. □

A seguir temos um exemplo para uma função a valores reais, de quatro variáveis reais, a saber:

**Exemplo K.1.5** *Classifique os pontos críticos da função  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$f(x, y, z, w) \doteq 2xy + 2yz + y^2 + z^2 - 2w^2, \quad \text{para cada } (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4. \quad (\text{K.103})$$

**Resolução:**

Observemos que a função  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^4$  (pois é uma função polinomial) e, para cada  $P = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(P) &= 2y, & \frac{\partial f}{\partial y}(P) &= 2x + 2z - 2y, & \frac{\partial f}{\partial z}(P) &= 2y + 2z & \frac{\partial f}{\partial w}(P) &= -4w \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) &= -2, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) &= 2, & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(P) &= -4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) &\stackrel{[\text{Teor. Schwarz}]}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = 2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(P) &\stackrel{[\text{Teor. Schwarz}]}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P) &\stackrel{[\text{Teor. Schwarz}]}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(P) = 2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w}(P) &\stackrel{[\text{Teor. Schwarz}]}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x}(P) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w}(P) &\stackrel{[\text{Teor. Schwarz}]}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y}(P) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}(P) &\stackrel{[\text{Teor. Schwarz}]}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}(P) = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 2x + 2z - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(P) = -4w, \quad (\text{K.104})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(P) = -4, \quad (\text{K.105})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) \stackrel{(\text{K.90})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = 2, \quad (\text{K.106})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(P) \stackrel{(\text{K.90})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P) = 0, \quad (\text{K.107})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P) \stackrel{(\text{K.90})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(P) = 2, \quad (\text{K.108})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w}(P) \stackrel{(\text{K.90})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x}(P) = 0, \quad (\text{K.109})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w}(P) \stackrel{(\text{K.90})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y}(P) = 0, \quad (\text{K.110})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}(P) \stackrel{(\text{K.90})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}(P) = 0. \quad (\text{K.111})$$

Encontremos os pontos críticos associados à função  $f$ , a saber:

$$(0, 0, 0, 0) = \nabla f(x, y, z, w) \\ \stackrel{\text{(K.104)}}{=} (2y, 2x + 2y + 2z, 2y + 2z, -4w),$$

que é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ -4w = 0 \end{cases},$$

ou seja,  $P_0 \doteq (0, 0, 0, 0)$  (K.112)

será o único ponto crítico da função  $f$  em  $\mathbb{R}^4$ .

Notemos que

$$\text{Hess}_f(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w}(x, y, z, w) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w}(x, y, z, w) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}(x, y, z, w) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}(x, y, z, w) & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(x, y, z, w) \end{pmatrix} \\ \stackrel{\text{(K.105), (K.106), (K.107), (K.108), (K.109), (K.110) e (K.111)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{(K.113)}$$

para cada  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  (isto é, é uma matriz quadrada constante).

Em particular, no ponto crítico  $P_0 = (0, 0, 0, 0)$ , teremos:

$$\text{Hess}_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad \text{(K.114)}$$

O polinômio característico associado à matriz  $\text{Hess}(P_0)$  será dado por:

$$p_\lambda(\lambda) = |\text{Hess}_f(P_0) - \lambda I_4| \\ \stackrel{\text{(K.114)}}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ = \lambda^4 - 20\lambda^2 - 8\lambda + 32 \\ \stackrel{\text{Exercício}}{=} (4 + \lambda) (\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 8). \quad \text{(K.115)}$$

Notemos que

$$\lambda_1 \doteq -4 < 0$$

é uma raiz do polinômio característico  $p_A$ .

Logo, um autovalor associado a matriz hessiana da função  $f$ , no seu ponto crítico  $P_o$ , será

$$\lambda_1 = -4. \tag{K.116}$$

Como a função  $p_A$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$  (pois é uma função polinomial) e

$$\begin{aligned} p_A(0) &\stackrel{\text{(K.115)}}{=} 32 > 0 \\ \text{e } p_A(2) &\stackrel{\text{(K.115)}}{=} -48 < 0, \end{aligned}$$

do Teorema do valor intermediário (ou do anulamento, visto na disciplina de Cálculo I), segue que existe

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\in (0, 2), \\ \text{tal que } p_A(\lambda_2) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, existe um autovalor  $\lambda_2$  associado a matriz hessiana da função  $f$  no seu ponto crítico  $P_o$  que é positivo, ou seja,

$$\lambda_2 > 0.$$

Portanto, do item 3. do Teorema K.1.2, (temos que  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 > 0$ ), segue que o ponto crítico  $P_o = (0, 0, 0, 0)$  é um ponto de sela da função  $f$ , completando a resolução. □

## K.2 Critério para determinação dos sinais dos autovalores de uma matriz simétrica

O resultado a seguir, que também é um resultado de Álgebra Linear, nos fornece uma condição necessária e suficiente para decidir se uma matriz simétrica apresenta todos os autovalores positivos ou todos autovalores negativos.

Para enunciá-lo precisaremos da:

**Definição K.2.1** *Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

*Definimos o menor principal de ordem  $k$  associado a matriz  $A$  como sendo o determinante da sub-matriz*

$$A_k = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$$

que será denotado por  $m_k(A)$ , ou seja, se a matriz  $A$  é dada por

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & a_{(k+1)3} & \cdots & a_{(k+1)k} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

então  $m_k(A) \doteq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$  (K.117)

Aplicamos isto ao:

**Exemplo K.2.1** Suponhamos que a matriz quadrada  $A$  seja dada por

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (\text{K.118})$$

Encontre todos os menores principais associados à matriz quadrada  $A$ .

**Resolução:**

Notemos que:

$$\begin{aligned} m_4[A] &\stackrel{k=4 \text{ em (K.117)}}{=} \det(A) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Exercício 32}}{=} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{K.119})$$

$$\begin{aligned} m_3[A] &\stackrel{k=3 \text{ em (K.117)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Exercício 8}}{=} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{K.120})$$

$$\begin{aligned} m_2[A] &\stackrel{k=2 \text{ em (K.117)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6, \end{aligned} \quad (\text{K.121})$$

$$\begin{aligned} m_1[A] &\stackrel{k=1 \text{ em (K.117)}}{=} |1| \\ &= 1, \end{aligned} \quad (\text{K.122})$$

completando a resolução. □

Com isto temos o:

**Teorema K.2.1** *Seja*

$$A = (a_{ij})$$

*uma matriz quadrada simétrica de ordem  $n$ .*

1. *Todos os autovalores associados à matriz quadrada  $A$  são maiores que zero se, e somente se,*

$$m_k(A) > 0, \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (\text{K.123})$$

2. *Todos os autovalores associados à matriz quadrada  $A$  são menores que zero se, e somente se,*

$$\begin{aligned} & m_k(A) < 0, \quad \text{para cada } k \in \{1, \dots, n\} \text{ que é ímpar,} \\ \text{e} \quad & m_k(A) > 0, \quad \text{para cada } k \in \{1, \dots, n\} \text{ que é par,} \end{aligned}$$

*ou seja,*

$$m_{2k+1}(A) < 0, \quad \text{de modo que } 2k+1 \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{K.124})$$

$$\text{e } m_{2k}(A) > 0, \quad \text{de modo que } 2k \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{K.125})$$

**Demonstração:**

Será vista na disciplina de Álgebra Linear.

□

**Observação K.2.1** *A item 2. do Teorema K.2.1 acima, segue do item 1., trocando-se a matriz quadrada  $A$  pela matriz quadrada  $-A$  e notando-se que*

$$m_k(-A) = (-1)^k m_k(A).$$

*A demonstração da identidade acima será deixada como exercício para o leitor, bem como da afirmação, serão deixadas como exercício para o leitor.*

Com isto podemos tratar do:

**Exemplo K.2.2** *Suponhamos que a matriz hessiana de uma função  $f: A \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  no conjunto  $A$ , no ponto crítico  $P_0 \in A$ , onde o conjunto  $A$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^4$ , seja dada por:*

$$\text{Hess}_f(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (\text{K.126})$$

*Classifique o ponto crítico  $P_0$  da função  $f$ .*

**Resolução:**

Observemos que

$$m_4[\text{Hess}_f(P_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} 4 > 0;$$

$$m_3[\text{Hess}_f(P_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Exercício}}{=} 1 > 0,$$

$$m_2[\text{Hess}_f(P_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 > 0,$$

$$m_1[\text{Hess}_f(P_0)] = |1|$$

$$= 1 > 0,$$

ou seja,  $m_k[\text{Hess}_f(P_0)] > 0$ , para todo  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Logo, do item 1. do Teorema K.2.1, segue que todos os autovalores da matriz  $\text{Hess}_f(P_0)$  são maiores que zero.

Portanto, do item 1. do Teorema K.1.2, segue que a função  $f$  tem um mínimo local (ou relativo) no ponto crítico  $P_0$ , completando a resolução.

□

# Índice Remissivo

- $A = (a_{ij})$ , 633  
 $B^t$ , 321  
 $C^\infty(A; \mathbb{R})$ , 240  
 $C^\infty([a, b]; \mathbb{R})$ , 547  
 $C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^n)$ , 548  
 $C^k(A; \mathbb{R})$ , 240  
 $C^k([a, b]; \mathbb{R})$ , 547  
 $C^k([a, b]; \mathbb{R}^n)$ , 547  
 $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ , 547  
 $H_f(P)$ , 319  
 $Hess_f(P)$ , 319  
 $I_n$ , 633  
 $J_T(P_0)$ , 605  
 $M_n(\mathbb{R})$ , 633  
 $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ , 633  
 $\mathbb{R}^3$ , 501  
 $R_{n+1}(h, k)$ , 592  
 $S \circ T$ , 600  
 $T^{-1}$ , 601  
 $V^2$ , 501  
 $V^3$ , 501  
 $\Delta x_i$ , 19  
 $\mathbb{R}$   
 valor absoluto de um elemento de, 506  
 $\mathbb{R}^2$   
 norma de um elemento de, 506  
 $\mathbb{R}^3$   
 norma de um elemento de, 506  
 $\mathbb{R}^n$   
 $\perp$ , 511  
 $+$ , 502  
 $A^c$ , 517  
 $\bullet$ , 504  
 $\cdot$ , 502  
 $\mathcal{B}_r(\vec{x}_0)$ , 513  
 $\bar{A}$ , 519  
 $\partial A$ , 519  
 $\overset{\circ}{A}$ , 519  
 ângulo entre elementos de, 511  
 adição de elementos do, 502  
 bola aberta centrada em um elemento de, 513  
 distância entre elementos de, 507  
 elementos ortogonais de, 511  
 fecho de um subconjunto em, 519  
 fronteira de um subconjunto em, 519  
 hiper-plano no, 170  
 interior de um subconjunto em, 519  
 multiplicação de número real por elementos do, 502  
 norma de um elemento de, 507  
 Pitágoras  
 identidade de, 512  
 ponto de acumulação de um subconjunto de, 514  
 ponto de fronteira de um subconjunto de, 514  
 ponto exterior de um subconjunto de, 514  
 ponto interior de um subconjunto de, 514  
 ponto isolado de um subconjunto de, 515  
 produto interno (ou escalar) de elementos de, 504  
 subconjunto aberto em, 517  
 subconjunto compacto em, 520  
 subconjunto fechado em, 517  
 subconjunto limitado em, 520  
 vetor do, 501  
 $\operatorname{cosech}(x)$ , 478  
 $\operatorname{cosh}(x)$ , 473  
 $\operatorname{cotgh}(x)$ , 476  
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , 222  
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , 223  
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , 223  
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , 222  
 $\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$ , 404  
 $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$ , 409



$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , 433  
 $\int f(x) dx$ , 61  
 $\int_a^\infty f(x) dx$ , 141  
 $\int_a^b f(x) dx$ , 483, 489  
 $\int_a^b g(x) dx$ , 484  
 $\int_a^\infty f(x) dx$ , 490  
 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ , 148, 491  
 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ , 491  
 $\int_{-\infty}^b g(x) dx$ , 141  
 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ , 189  
 $\partial_x f(x_0, y_0)$ , 222  
 $\partial_y f(x_0, y_0)$ , 223  
 $\int_a^b f(x) dx$ , 21  
 $\ln(x)$ , 85  
 $\mathbb{R}^2$ , 501  
 $\operatorname{sech}(x)$ , 477  
 $\operatorname{senh}(x)$ , 474  
 $\operatorname{tgh}(x)$ , 475  
 $\vec{x} \perp \vec{y}$ , 511  
 $d(\vec{x}, \operatorname{vec} y)$ , 507  
 $df(x_0, y_0)$ , 567  
 $df(a)$ , 466  
 $f^{-1}(\{c\})$ , 178  
 $f_x(x_0, y_0)$ , 222  
 $f_y(x_0, y_0)$ , 223  
 $j_T(P_0)$ , 606  
 $m_k(A)$ , 659  
 $p_n$ , 592  
 $\mathcal{P}$ , 19  
 Álgebra  
     teorema fundamental da, 430  
 área  
     da região limitada delimitada por uma função  
         não negativa, 22  
     de uma superfície de revolução, 456  
 ângulo  
     entre dos vetores, 511

$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx$ , 423  
 $\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k} dx$ , 428  
 aberto  
     conjunto, 517  
 bola  
     aberta de centro em um ponto, 513  
 Bolzano-Weierstrass  
     teorema, 520  
 cascas  
     cilíndricas, 132  
 catenária, 480  
 Cauchy-Schwarz  
     desigualdade, 508  
 cilindro  
     em um ponto, de um sólido de revolução, 130  
 compacto  
     conjunto, 520  
 comprimento  
     de uma curva, 451  
 condição lateral, 355  
 convergente  
     integral imprópria  
         de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, \infty)$ , 492  
         de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, b)$ , 491  
         de 1.a e 2.a espécies, em  $(a, \infty)$ , 490  
         de 1.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , 148  
         de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , 141  
         de 1.a espécie, em  $[a, \infty)$ , 141  
         de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , 489  
         de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , 490  
         de 2.a espécie, em  $(a, b]$ , 483  
         de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , 484  
         de 2.a espécie, em  $[a, b]$ , 486  
 curva  
     comprimento de uma, 451  
     no espaço (ou espacial), 540  
     no plano (ou plana, 540  
     curva parametrizada  
         de classe  $C^\infty$  em  $[a, b]$ , 548  
         de classe  $C^k$  em  $[a, b]$ , 547  
         comprimento de uma, 556  
         definição de, 537

- diferenciável em um ponto, 546
- equações paramétricas de uma, 538
- fechada, 539
- fechada e simples, 539
- regular (ou suave) por partes, 552
- regular (ou suva), 552
- sentido de percurso de uma, 540
- simples, 538
- traço de uma, 538
- vetor tangente em um instante, 548
- decomposição
  - em frações parciais, 434
- derivada
  - primeira de uma função no ponto  $\vec{x}_0$ , 265
  - primeira de uma função no ponto  $(x_0, y_0)$ , 264
- derivada direcional
  - de uma função em um ponto, na direção de um vetor unitário, 274
- descontinuidade
  - infinita de uma função em um ponto, 481
- desigualdade
  - de Cauchy-Schwarz, 508
  - triangular, 509
- diferencial
  - de uma função em um ponto, 466
- distância
  - entre elementos de  $\mathbb{R}^n$ , 507
- divergente
  - integral imprópria
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, \infty)$ , 492
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, b)$ , 491
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(a, \infty)$ , 490
    - de 1.a espécie, 141
    - de 1.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , 148
    - de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , 141
    - de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , 489
    - de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , 490
    - de 2.a espécie, em  $(a, b]$ , 483
    - de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , 484
    - de 2.a espécie, em  $[a, b]$ , 486
- divisão
  - de um intervalo fechado e limitado, 19
  - norma de uma, 19
- eixo
  - de revolução, 112
- espaço vetorial
  - sobre  $\mathbb{R}$ , 503
- espaços
  - euclidianos, 502
- extremo
  - inferior da integral definida, 21
  - superior
    - da integral definida, 21
- fecho
  - de um conjunto, 519
- forma
  - bilinear, simétrica, definida e positiva, 505
- frações parciais
  - decomposição em, 434
- fronteira
  - de um conjunto, 519
- função
  - i-ésima projeção, 218
  - contínua em um conjunto, 213
  - contínua em um ponto, 213
  - cossecante-hiperbólica, 478
  - cosseno hiperbólico, 473
  - cotangente-hiperbólica, 476
  - curva de nível do gráfico de uma, 178
  - definida um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  a valores reais, 165
  - derivada parcial (de 1.a ordem), em relação à variável  $x_1$ , no ponto  $\vec{x}_0$ , da, 232
  - derivada parcial (de 1.a ordem), em relação à variável  $x_i$ , no ponto  $\vec{x}_0$ , da, 233
  - derivada parcial de 2.a ordem, em relação à variável  $x$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 237
  - derivada parcial de 2.a ordem, em relação à variável  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 238
  - derivada parcial de 2.a ordem, em relação às variáveis  $x$  e  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 237
  - derivada parcial de 2.a ordem, em relação às variáveis  $y$  e  $x$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 238
  - derivada parcial de 3.a ordem, no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 239
  - derivada parcial, em relação à  $x$ , da, 222
  - derivada parcial, em relação à  $x$ , no ponto, 222
  - derivada parcial, em relação à  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , 223
  - derivadas parciais de primeira ordem da, 223

- descontinuidade infinita em um ponto, 481
- diferenciável em  $\vec{x}_0$ , 563
- diferenciável no conjunto  $B$ , 563
- diferenciável no seu domínio, 563
- diferencial de uma em um ponto, 466
- diferencial, no ponto  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ , da, 567
- domínio de uma
  - definida um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  a valores reais, 165
- função derivada parcial, em relação à  $Y$ , da, 223
- Gamma, 496
- gráfico de uma
  - definida um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  a valores reais, 165
- hessiano, em um ponto, associada a uma, 319
- imagem de uma
  - definida um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  a valores reais, 165
- imagem inversa de um conjunto por uma, 178
- infinitésimo em um ponto, para uma, 206
- integrável em um intervalo fechado e limitado, 20
- integral definida em um intervalo fechado e limitado, 21
- integral imprópria
  - de 2.a espécie de uma, 483
  - de 1.a e 2.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , de uma, 491
  - de 1.a e 2.a espécie, em  $(-\infty, b)$ , de uma, 491
  - de 1.a e 2.a espécie, em  $(a, \infty)$ , de uma, 490
  - de 1.a espécie em  $(-\infty, \infty)$ , 148
  - de 1.a espécie em  $[a, \infty)$ , 141
  - de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , de uma, 488
  - de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , de uma, 489
  - de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , de uma, 484
  - de 2.a espécie, em  $[a, b]$ , de uma, 486
- integral imprópria de 1.a espécie em  $(-\infty, b]$ , 141
- integral indefinida de uma, 61
- interpretação geométrica
  - da derivada parcial (de 1.a ordem), em relação a relação a variável  $x$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 224
  - da derivada parcial (de 1.a ordem), em relação a relação a variável  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 225
- limitada em  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , 175
- limitada no ponto, 175
- limite de uma, 189
- linear afim em  $\mathbb{R}^2$ , 170
- linear afim em  $\mathbb{R}^n$ , 171
- linear em  $\mathbb{R}^2$ , 169
- linear em  $\mathbb{R}^n$ , 170
- logaritmo natural, 85
- matriz hessiana, em um ponto, associada a uma, 319
- notação
  - da derivada parcial de 2.a ordem, em relação à variável  $x$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 237
  - da derivada parcial de 2.a ordem, em relação à variável  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 238
  - da derivada parcial de 2.a ordem, em relação às variáveis  $x$  e a  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 237
  - da derivada parcial de 2.a ordem, em relação a  $y$  e a  $x$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ , da, 238
  - derivada parcial (de 1.a ordem), em relação à variável  $x_i$ , no ponto  $\vec{x}_0$ , da, 233
  - derivada parcial (de 1.a ordem), em relação à variável  $x_1$ , no ponto  $\vec{x}_0$ , da, 233
- polinomial em  $\mathbb{R}^2$ , 171
- polinomial em  $\mathbb{R}^n$ , 174
- ponto crítico de uma, 317
- ponto de extremo absoluto de uma, 310
- ponto de extremo global de uma, 310
- ponto de extremo local de uma, 310
- ponto de extremo relativo de uma, 310
- ponto de máximo absoluto de uma, 309
- ponto de máximo global de uma, 309
- ponto de máximo local de uma, 309
- ponto de máximo relativo de uma, 309
- ponto de mínimo absoluto de uma, 309
- ponto de mínimo global de uma, 309
- ponto de mínimo local de uma, 309
- ponto de mínimo relativo de uma, 309
- ponto de sela de uma, 318
- primitiva de uma, 57
- racional em  $\mathbb{R}^n$ , 175
- secante-hiperbólica, 477
- seno-hiperbólico, 474
- superfície de nível da, 186
- tangente-hiperbólica, 475

- valor máximo absoluto de uma, 309
- valor máximo global de uma, 309
- valor máximo local de uma, 309
- valor máximo relativo de uma, 309
- valor médio em um intervalo fechado e limitado, 34
- valor mínimo absoluto de uma, 309
- valor mínimo global de uma, 309
- valor mínimo local de uma, 309
- valor mínimo relativo de uma, 309
- função vetorial
  - i-ésima coordenada (ou componente) da, 524
  - contínua em conjunto, 529
  - contínua em um ponto, 529
  - de uma variável real, 524
  - definição, 524
  - derivada à direita em um ponto, 546
  - derivada à esquerda em um ponto, 546
  - derivada, em um ponto, de uma, 532
  - diferença de funções vetoriais, 525
  - diferenciável em um conjunto, 532
  - diferenciável em um ponto, 532
  - integrável em  $[a, b]$ , 535, 536
  - integral em  $[a, b]$ , 535
  - integral, em  $[a, b]$ , de uma, 536
  - limite de uma, 525
  - produto de função vetorial por número real, 525
  - soma de funções vetoriais, 524
- funções vetoriais
  - produto interno (ou escalar) de, 525
  - produto vetorial de, 525
- fundamental do Cálculo
  - teorema, 36, 38
- Gamma
  - função, 496
- hélice, 546
- Hessiano
  - teste do, 319
- hessiano
  - de uma função em um ponto, 319
  - teste, no plano, do, 322
- identidade
  - de Pitágoras, 512
- imprópria
  - integral
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, \infty)$ , 491
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, \infty)$ , convergente, 492
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, \infty)$ , divergente, 492
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, b)$ , 491
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, b)$ , convergente, 491
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, b)$ , divergente, 491
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(a, \infty)$ , 490
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(a, \infty)$ , convergente, 490
    - de 1.a e 2.a espécies, em  $(a, \infty)$ , divergente, 490
    - de 1.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , 148
    - de 1.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , convergente, 148
    - de 1.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , divergente, 148
    - de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , 141
    - de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , convergente, 141
    - de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , divergente, 141
    - de 1.a espécie, em  $[a, \infty)$ , convergente, 141
    - de 2.a espécie em  $(a, b]$ , 483
    - de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , 488
    - de 2.a espécie, em  $[a, b]$ , 486
    - de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , convergente, 489
    - de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , divergente, 489
    - de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , convergente, 490
    - de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , divergente, 490
    - de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , 489
    - de 2.a espécie, em  $(a, b]$ , convergente, 483
    - de 2.a espécie, em  $(a, b]$ , divergente, 483
    - de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , 484
    - de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , convergente, 484
    - de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , divergente, 484
    - de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , convergente, 486
    - de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , divergente, 486
    - integral de 1.a espécie, em  $[a, \infty)$ , 141
    - integral de 1.a espécie, em  $[a, \infty)$ , divergente, 141
- integrável
  - função, 20

## integral

de Riemann da função em  $[a, b]$ , 22

definida

extremo inferior da, 21

extremo superior da, 21

integrandos, 21

teorema do valor médio para, 33

definida de uma função em um intervalo fechado e limitado, 21

definida: integração por partes, 46

definida: integração por substituição, 48

imprópria

de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, \infty)$ , 491de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, \infty)$ , convergente, 492de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, \infty)$ , divergente, 492de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, b)$ , 491de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, b)$ , convergente, 491de 1.a e 2.a espécies, em  $(-\infty, b)$ , divergente, 491de 1.a e 2.a espécies, em  $(a, \infty)$ , 490de 1.a e 2.a espécies, em  $(a, \infty)$ , convergente, 490de 1.a e 2.a espécies, em  $(a, \infty)$ , divergente, 490de 1.a espécie em  $(-\infty, \infty)$ , 148de 1.a espécie em  $[a, \infty)$ , 141de 1.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , convergente, 148de 1.a espécie, em  $(-\infty, \infty)$ , divergente, 148de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , convergente, 141de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , divergente, 141de 1.a espécie, em  $[a, \infty)$ , convergente, 141de 1.a espécie, em  $[a, \infty)$ , divergente, 141de 1.a espécie, em  $(-\infty, b]$ , 141

de 2.a espécie de uma função, 483

de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , 488de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , convergente, 489de 2.a espécie, em  $(a, b)$ , divergente, 489de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , convergente, 490de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , divergente, 490de 2.a espécie, em  $(a, b) \setminus \{c\}$ , 489de 2.a espécie, em  $(a, b]$ , convergente, 483de 2.a espécie, em  $(a, b]$ , divergente, 483de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , 484de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , convergente, 484de 2.a espécie, em  $[a, b)$ , divergente, 484de 2.a espécie, em  $[a, b]$ , 486de 2.a espécie, em  $[a, b]$ , convergente, 486de 2.a espécie, em  $[a, b]$ , divergente, 486

indefinida

de potências da função tangente, 415

de potências da função tangente ou cotangente, 415

de uma função em um conjunto, 61

envolvendo as funções seno e cosseno, 411

envolvendo expressões do tipo  $a^2 - x^2$ ,  $a^2 + x^2$  ou  $x^2 - a^2$ , para  $a \neq 0$ , 391

envolvendo funções trigonométricas, 411

envolvendo potências ímpares da função cossecante, 421

envolvendo potências ímpares da função secante, 420

envolvendo potências ímpares das funções seno e cosseno, 411

envolvendo potências pares da função cossecante, 420

envolvendo potências pares da função secante, 419

envolvendo potências pares das funções seno e cosseno, 413

integração por partes, 74

método da substituição direta, 69

indefinida de potências da função cotangente, 417

indefinida envolvendo potências das funções secante e cossecante, 419

integrandos

de uma integral definida, 21

interior

de um conjunto, 519

Laplace

transformada de, 148

limitado

conjunto, 520

linhas coordenadas

da superfície parametrizada, 291

logaritmo

- natural de um número real positivo, 85
- método
  - das cascas cilíndricas, 130
  - das cascas cilíndricas, para o cálculo do volume de um sólido de revolução, 130
  - das cascas cilíndricas, para o cálculo do volume de uma sólido de revolução, 131
  - das fatias, 105
    - para encontrar o volume de um sólido, 105
  - das fatias para o cálculo do volume de um sólido, 104
  - dos cilindros, 130
  - dos cilindros para o cálculo do volume de uma sólido de revolução, 131
  - dos cilindros, para o cálculo do volume de um sólido de revolução, 130
- matriz, 633
  - elementos de uma, 633
  - equação característica associada a uma, 634
  - menor principal de uma, 658
  - polinômio característico de uma, 634
  - quadrada, 633
    - autovalor de uma, 634
    - autovetor associado a um autovalor para uma, 634
  - diagonal, 637
  - diagonal principal de uma, 633
  - identidade, 634
  - simétrica, 639
  - triangular inferior, 638
  - triangular superior, 638
  - transposta, 321
  - transposta de uma, 639
- matriz hessiana
  - de uma função em um ponto, 319
- mudança
  - de variáveis para coordenadas cilíndricas, 614
  - para coordenadas esféricas, 619
- mudança de variáveis
  - para coordenadas polares, 610
- multiplicador de Lagrange
  - para dois vínculos, 381
  - um vínculo, 363
- norma
  - de um vetor em  $\mathbb{R}^2$ , 506
  - de um vetor em  $\mathbb{R}^n$ , 506, 507
- ortogonais
  - dois vetores que são, 511
- partição
  - de um intervalo fechado e limitado, 19
  - norma de uma, 19, 536
  - regular de um intervalo fechado e limitado, 24
- Pitágoras
  - identidade de, 512
  - teorema de, 512
- polinômio
  - multiplicidade de uma raiz (real) de um, 430
- ponto
  - crítico de uma função, 317
  - de acumulação de um conjunto, 514
  - de extremo absoluto de uma função, 310
  - de extremo global de uma função, 310
  - de extremo local de uma função, 310
  - de extremo relativo de uma função, 310
  - de máximo absoluto de uma função, 309
  - de máximo global de uma função, 309
  - de máximo local de uma função, 309
  - de máximo relativo de uma função, 309
  - de mínimo absoluto de uma função, 309
  - de mínimo global de uma função, 309
  - de mínimo local de uma função, 309
  - de mínimo relativo de uma função, 309
  - de sela de uma função, 318
  - exterior de um conjunto, 514
  - interior de um conjunto, 514
  - isolado de um conjunto, 515
- primitiva
  - de uma função em um conjunto, 57
- projeção
  - i-ésima, 218
- raiz
  - multiplicidade de uma, 430
- regra da cadeia
  - para funções de várias variáveis reais, a valores reais, 253
  - para transformações, 607
- revolução
  - eixo de, 112
  - sólido de, 112
  - sólidos de, 130
- Riemann
  - integral de

- uma função em  $[a, b]$ , 22
  - soma de, 20
- sólido
  - de revolução, 112, 130
  - seção plana de um, 104
  - seção reta de um, 104
- Schwarz
  - teorema de, 244
- seção
  - cilíndrica, em um ponto, de um sólido de revolução, 130
  - plana de um sólido, 104
  - reta de um sólido, 104
- sinal de integração, 21
- soma
  - de Riemann, 20
  - de Riemann associada a uma função e a uma partição, 20
- subconjunto
  - aberto, 517
  - fechado, 517
- substituição direta
  - para o cálculo de integrais indefinidas, 69
- superfície
  - de revolução
    - área de uma, 456
    - toro, 123
- superfície parametrizada
  - diferenciável, 291
  - pela função, 289
  - regular, 292
    - equação vetorial do plano tangente à, 295
    - plano tangente à, 295
    - vetor normal à, 295
- Taylor
  - Fórmula de, 592
  - polinômio de, 585, 592
  - resto de, 586, 592
- teorema
  - classificação de pontos críticos utilizando autovalores da matriz hessiana, 644
  - da área de uma superfície de revolução, 456
  - da comparação para integrais impróprias de 1.a espécie, 152
  - da comparação para integrais impróprias de 2.a espécie, 494
  - da integração por partes para a integral definida, 46
  - da integração por partes para a integral indefinida, 74
  - da integração por partes para integral indefinida, 74
  - da integração por substituição para a integral definida, 48
  - da regra da cadeia, 253
  - da regra da cadeia para transformação, 607
  - da substituição para a integral indefinida, 69
  - de Bolzano-Weierstrass, 520
  - de Pitágoras, 512
  - de Schwarz, 244
  - do comprimento de uma curva, 451
  - do método das cascas cilíndricas para o cálculo do volume de uma sólido de revolução, 131
  - do método dos cilindros para o cálculo do volume de uma sólido de revolução, 131
  - do multiplicador de Lagrange, para um vínculo, 363
  - do valor médio para integrais definidas, 33
  - dos multiplicadores de Lagrange para dois vínculos, 381
  - fundamental da álgebra, 430
  - fundamental do Cálculo, 36, 38
  - para o cálculo do volume de um sólido pelo método das fatias, 105
- teste
  - do Hessiano, 319
  - do hessiano no plano, 322
- toro, 123
- transformação
  - bijetora, 600
  - contínua em um conjunto, 602
  - contínua em um ponto, 602
  - diferenciável em um ponto, 605
  - entre espaços euclidianos, 599
  - funções coordenadas associadas a, 599
  - injetora, 600
  - invertível, 601
  - inversa, 601
  - jacobiano de uma, 606
  - matriz jacobina de uma, 605
  - sobrejetora, 600
- transformações

- composta de, 600
- transformada
  - de Laplace de uma função, 148
- triangular
  - desigualdade, 509
- vínculo, 355
- valor
  - de máximo absoluto de uma função em um conjunto, 309
  - de máximo global de uma função em um conjunto, 309
  - de máximo local de uma função em um conjunto, 309
  - de máximo relativo de uma função em um conjunto, 309
  - de mínimo absoluto de uma função em um conjunto, 309
  - de mínimo global de uma função em um conjunto, 309
  - de mínimo local de uma função em um conjunto, 309
  - de mínimo relativo de uma função em um conjunto, 309
- valor médio
  - de uma função em um intervalo fechado e limitado, 34
- vetor
  - de  $\mathbb{R}^n$ , 501
  - gradiente de uma função no ponto  $(x_0, y_0)$ , 262
  - gradiente de uma função no ponto  $\vec{x}_0$ , 262
  - tangente à uma superfície parametrizada, 289
- vetores
  - ortogonais, 511