Capítulo 1

Funções a valores vetoriais - curvas parametrizadas

Trataremos de uma classe importante de funções, a saber, as funções, de uma variável real, a valores vetoriais e as curvas parametrizadas.

Para tanto, utilizaremos a seguinte notação:

Notação 1.0.1

1. *no plano, indicaremos o vetor* $\underline{\vec{e}_1}$ *por* $\underline{\vec{i}}$ *e o vetor* $\underline{\vec{e}_2}$ *por* $\underline{\vec{j}}$*, isto é*

$$\vec{i} = \vec{e}_1 \doteq (1\,,0) \quad e \quad \vec{j} = \vec{e}_2 \doteq (0\,,1)\,.$$

2. *no espaço, indicaremos o vetor* $\underline{\vec{e}_1}$ *por* $\underline{\vec{i}}$*, o vetor* $\underline{\vec{e}_2}$ *por* $\underline{\vec{j}}$ *e o vetor* $\underline{\vec{e}_3}$ *por* $\underline{\vec{k}}$*, onde*

$$\vec{i} = \vec{e}_1 \doteq (1\,,0\,,0), \quad \vec{j} = \vec{e}_2 \doteq (0\,,1\,,0) \quad e \quad \vec{k} = \vec{e}_3 \doteq (0\,,0\,,1)\,.$$

.

Começaremos pela:

1.1 Funções de uma variável real a valores vetoriais

Definição 1.1.1 *Sejam* $n \doteq 2$ *ou* $n \doteq 3$*,* $\underline{A}$ *um subconjunto aberto* $\mathbb{R}$ *e* $F_1\,,\cdots,F_n : A \to \mathbb{R}$ *funções.*

Podemos definir uma função $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^n$ *(ou* $\vec{F} : A \to V^n$*) dada por*

$$\vec{F}(t) \doteq (F_1(t)\,,\cdots,F_n(t)) \doteq F_1(t)\cdot\vec{e}_1 + \cdots F_n(t)\cdot\vec{e}_n\,, \quad para \quad t \in A\,. \tag{1.1}$$

Tal função será dita <u>**função, de uma variável real, a valores vetoriais**</u> *ou, simplesmente,* <u>**função vetorial**</u>*.*

Para cada $i \in \{1\,,\cdots,n\}$*, a função* $F_i : A \to \mathbb{R}$ *será denominada* <u>**i-ésima função coordenada (ou componente) associada à função vetorial** $\vec{F}$</u>*.*

Podemos operar com funções vetoriais operando com suas funções componentes, ou seja:

Definição 1.1.2 *Sejam* $\underline{A}$ *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}$ *e* $\vec{F}, \vec{G} : A \to \mathbb{R}^n$ *funções vetoriais tais que*

$$\vec{F}(t) \doteq (F_1(t)\,,\cdots,F_n(t)) \doteq F_1(t)\cdot\vec{e}_1 + \cdots + F_n(t)\cdot\vec{e}_n \tag{1.2}$$

$$\vec{G}(t) \doteq (G_1(t)\,,\cdots,G_n(t)) \doteq G_1(t)\cdot\vec{e}_1 + \cdots + G_n(t)\cdot\vec{e}_n\,, \quad para \quad t \in A\,. \tag{1.3}$$

1. *Definimos a função vetorial* $\left(\vec{F}+\vec{G}\right): A \to \mathbb{R}^n$ *como sendo*

$$\begin{aligned}\left(\vec{F}+\vec{G}\right)(t) &\doteq \vec{F}(t)+\vec{G}(t) = (F_1(t)+G_1(t), \cdots, F_n(t)+G_n(t)) \\ &= [F_1(t)+G_1(t)]\cdot\vec{e}_1+\cdots+[F_n(t)+G_n(t)]\cdot\vec{e}_n,\end{aligned} \tag{1.4}$$

para cada, $t \in A$, *que será dita* **função vetorial soma, da função vetorial $\vec{F}$ com a função vetorial $\vec{G}$**.

2. *De modo semelhante definimos a função vetorial* $\left(\vec{F}-\vec{G}\right): A \to \mathbb{R}^n$ *como sendo*

$$\begin{aligned}\left(\vec{F}-\vec{G}\right)(t) &\doteq \vec{F}(t)-\vec{G}(t) = (F_1(t)-G_1(t), \cdots, F_n(t)-G_n(t)) \\ &= [F_1(t)-G_1(t)]\cdot\vec{e}_1+\cdots+[F_n(t)-G_n(t)]\cdot\vec{e}_n,\end{aligned} \tag{1.5}$$

para cada, $t \in A$, *que será dita* **função vetorial, diferença da função vetorial $\vec{F}$ pela função vetorial $\vec{G}$**.

3. *Se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definimos a função* $\left(\alpha\cdot\vec{F}\right): A \to \mathbb{R}^n$ *como sendo*

$$\left(\alpha\cdot\vec{F}\right)(t) \doteq \alpha\cdot\vec{F}(t) = (\alpha F_1(t), \cdots, \alpha F_n(t)) = [\alpha F_1(t)]\cdot\vec{e}_1+\cdots+[\alpha F_n(t)]\cdot\vec{e}_n, \tag{1.6}$$

para cada $t \in A$, *que será dita* **função vetorial, produto da função vetorial $\vec{F}$ pelo número real** α.

4. *Além disso, podemos definir a função* $\left(\vec{F}\bullet\vec{G}\right): A \to \mathbb{R}$ *como sendo*

$$\left(\vec{F}\bullet\vec{G}\right)(t) \doteq \vec{F}(t)\bullet\vec{G}(t) = F_1(t)\,G_1(t)+\cdots+F_n(t)\,G_n(t)), \tag{1.7}$$

para cada $t \in A$, *que será dita* **função produto escalar, da função vetorial $\vec{F}$ pela função vetorial $\vec{G}$** .

5. *Se* $n = 3$ *podemos definir a função* $\left(\vec{F}\times\vec{G}\right): A \to \mathbb{R}^3$ *como sendo*

$$\begin{aligned}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)(t) &\doteq \vec{F}(t)\times\vec{G}(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t)) \times (G_1(t), G_2(t), G_3(t)) \\ &= (F_2(t)\,G_3(t)-F_3(t)\,G_2(t), -(F_1(t)\,G_3(t)-F_3(t)\,G_1)), F_1(t)\,G_2(t)-F_2(t)\,G_1(t)) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \end{vmatrix},\end{aligned} \tag{1.8}$$

para cada $t \in A$, *que será dita* **função produto vetorial, da função vetorial $\vec{F}$ pela função vetorial $\vec{G}$**.

Podemos estudar limites de funções introduzidas acima, estudando o limite de suas funções componentes, a saber, temos a:

Definição 1.1.3 *Sejam* $\underline{A}$ *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$ *e* $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$ *função vetorial, tal que*

$$\vec{F}(t) \doteq (F_1(t), \cdots, F_n(t)) \doteq F_1(t)\cdot\vec{e}_1+\cdots+F_n(t)\cdot\vec{e}_n, \quad \textit{para cada} \quad t \in A \tag{1.9}$$

e $t_o \in \mathbb{R}$ *ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$*, em* $\mathbb{R}^n$*.*

Diremos que existe **limite de $\vec{F}(t)$ quando t tende a t_o** *e dá*

$$L \doteq (L_1, \cdots, L_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \to t_o} F_i(t) = L_i, \quad \textit{para} \quad i \in \{1, \cdots, n\}. \tag{1.11}$$

Neste caso escreveremos

$$\lim_{t \to t_o} \vec{F}(t) \doteq L = (L_1, \cdots, L_n) = L_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + L_n \cdot \vec{e}_n. \tag{1.12}$$

Observação 1.1.1

1. *A Definição 1.1.3 acima nos diz que, caso exista o limite* $\lim_{t \to t_o} \vec{F}(t)$*, deveremos ter:*

$$\lim_{t \to t_o} \vec{F}(t) = \left(\lim_{t \to t_o} F_1(t), \cdots, \lim_{t \to t_o} F_n(t)\right), = \left(\lim_{t \to t_o} F_1(t)\right) \cdot \vec{e}_1 + \cdots + \left(\lim_{t \to t_o} F_n(t)\right) \cdot \vec{e}_n. \tag{1.13}$$

   ou seja, para estudarmos limites de funções vetoriais, em um ponto $\underline{t_o}$ *(um ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$*), basta sabermos estudar os limites de suas funções coordenadas*

$$F_i : A \to \mathbb{R}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\},$$

   no ponto $\underline{t_o}$*, isto é, de funções a valores reais, de uma variável real, no ponto* t_o *(estudadas no Cálculo 1).*

2. *Rigorosamente, a definição de limites para funções vetoriais* **<u>NÃO</u>** *é a que exibimos acima. Para maiores detalhes, veja o Apêndice das notas de aula.*

Como conseqüência da Definição 1.1.3 e das propriedades de limites de funções a valores reais, de uma variável real (estudas no Cálculo 1) temos a:

Proposição 1.1.1 *Sejam* $\vec{F}, \vec{G} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *funções vetoriais,* $t_o \in \mathbb{R}$ *ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$*, em* $\mathbb{R}$*, e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Suponhamos que existam os limites:*

$$\lim_{t \to t_o} \vec{F}(t) = L \quad e \quad \lim_{t \to t_o} \vec{G}(t) = M. \tag{1.14}$$

Então:

1. *existem* $\lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \pm \vec{G}\right)(t)$ *e, além disso, teremos*

$$\lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \pm \vec{G}\right)(t) = L \pm M, \quad \textit{isto é,} \quad \lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \pm \vec{G}\right)(t) = \lim_{t \to t_o} \vec{F}(t) \pm \lim_{t \to t_o} \vec{G}(t). \tag{1.15}$$

2. *existe* $\lim_{t \to t_o} \left(\alpha \cdot \vec{F}\right)(t)$ *e, além disso, termos*

$$\lim_{t \to t_o} \left(\alpha \cdot \vec{F}\right)(t) = \alpha \cdot L, \quad \textit{isto é,} \quad \lim_{t \to t_o} \left(\alpha \cdot \vec{F}\right)(t) = \alpha \cdot \lim_{t \to t_o} \vec{F}(t). \tag{1.16}$$

3. *existe* $\lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right)(t)$ *e, além disso, teremos*

$$\lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right)(t) = L \bullet M, \quad \textit{isto é,} \quad \lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right)(t) = \left(\lim_{t \to t_o} \vec{F}(t)\right) \bullet \left(\lim_{t \to t_o} \vec{G}(t)\right). \tag{1.17}$$

4. *para o caso* $n = 3$, *existe* $\lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \times \vec{G}\right)(t)$ *e, além disso, teremos*

$$\lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \times \vec{G}\right)(t) = L \times M\,, \quad \textit{isto é,} \quad \lim_{t \to t_o} \left(\vec{F} \times \vec{G}\right)(t) = \left(\lim_{t \to t_o} \vec{F}(t)\right) \times \left(\lim_{t \to t_o} \vec{G}(t)\right). \tag{1.18}$$

Apliquemos os resultados acima ao:

Exemplo 1.1.1 *Sejam* $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *funções vetoriais dadas por:*

$$\vec{F}(t) \doteq \mathrm{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + \left(t^2 + 1\right) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3\,, \tag{1.19}$$

$$\vec{G}(t) \doteq \cos(t) \cdot \vec{e}_1 + (t + 1) \cdot \vec{e}_2 + t^3 \cdot \vec{e}_3\,, \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{1.20}$$

Calcule, se existir,

$$\lim_{t \to 0} \left(\vec{F} + \vec{G}\right)(t)\,, \quad \lim_{t \to 0} \left(\vec{F} - \vec{G}\right)(t)\,, \quad \lim_{t \to 0} \left(2 \cdot \vec{F}\right)(t)\,, \quad \lim_{t \to 0} \left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right)(t) \quad e \quad \lim_{t \to 0} \left(\vec{F} \times \vec{G}\right)(t)\,.$$

Resolução:

Notemos que, neste caso, temos que as respectivas funções componentes $F_1, F_2, F_3, G_1, G_2, g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$F_1(t) \doteq \mathrm{sen}(t)\,, \quad F_2(t) \doteq t^2 + 1\,, \quad F_3(t) \doteq t, \tag{1.21}$$

$$G_1(t) \doteq \cos(t)\,, \quad G_2(t) \doteq t + 1\,, \quad G_3(t) \doteq t^3\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{1.22}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \vec{F}(t) &\overset{(1.21)}{=} \lim_{t \to 0} \left[\mathrm{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + \left(t^2 + 1\right) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3\right] \\
&\overset{\text{Definição 1.1.3 (veja (1.12))}}{=} \left[\lim_{t \to 0} \mathrm{sen}(t)\right] \cdot \vec{e}_1 + \left[\lim_{t \to 0} (t^2 + 1)\right] \cdot \vec{e}_2 + \left[\lim_{t \to 0} t\right] \cdot \vec{e}_3 \\
&\overset{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{k} \; = \vec{e}_2\,,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \vec{F}(t) &\overset{(1.21)}{=} \lim_{t \to 0} \left(\mathrm{sen}(t)\,, t^2 + 1\,, t\right) \\
&\overset{\text{Definição 1.1.3 (veja (1.12))}}{=} \left(\lim_{t \to 0} \mathrm{sen}(t)\,, \lim_{t \to 0} (t^2 + 1)\,, \lim_{t \to 0} t\right) \overset{\text{visto na disciplina de Cálculo 1}}{=} (0\,, 1\,, 0)\,.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \vec{G}(t) &\overset{(1.22)}{=} \lim_{t \to 0} \left[\cos(t) \cdot \vec{e}_1 + (t + 1) \cdot \vec{e}_2 + t^3 \cdot \vec{e}_3\right] \\
&\overset{\text{Definição 1.1.3 (veja (1.12))}}{=} \left[\lim_{t \to 0} \cos(t)\right] \cdot \vec{e}_1 + \left[\lim_{t \to 0} (t + 1)\right] \cdot \vec{e}_2 + \left[\lim_{t \to 0} t^3\right] \cdot \vec{e}_3 \\
&\overset{\text{visto na disciplina deCálculo 1}}{=} 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \vec{G}(t) &\overset{(1.22)}{=} \lim_{t \to 0} \left(\cos(t)\,, t + 1\,, t^3\right) \overset{\text{Definição 1.1.3 (veja (1.12))}}{=} \left(\lim_{t \to 0} \cos(t)\,, \lim_{t \to 0} (t + 1)\,, \lim_{t \to 0} t^3\right) \\
&\overset{\text{visto na disciplina deCálculo 1}}{=} (1\,, 1\,, 0)\,.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Logo, dos itens 1., 2., 3. e 4. da Proposição 1.1.1, segue que:

$$\lim_{t\to 0}\left(\vec{F}+\vec{G}\right)(t) \overset{(1.15)}{=} \lim_{t\to 0}\vec{F}(t)+\lim_{t\to t_o}\vec{G}(t) \overset{(1.23)\text{ e }(1.24)}{=} (0,1,0)+(1,1,0)=(1,2,0)\,,$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\vec{F}-\vec{G}\right)(t) \overset{(1.15)}{=} \lim_{t\to 0}\vec{F}(t)-\lim_{t\to t_o}\vec{G}(t) \overset{(1.23)\text{ e }(1.24)}{=} (0,1,0)-(1,1,0)=(-1,0,0)\,,$$

$$\lim_{t\to 0}\left(2\cdot\vec{F}\right)(t) \overset{(1.16)}{=} 2\cdot\lim_{t\to 0}\vec{F}(t) \overset{(1.23)}{=} 2\cdot(0,1,0)=(0,2,0)\,,$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\vec{F}\bullet\vec{G}\right)(t) \overset{(1.17)}{=} \lim_{t\to 0}\vec{F}(t)\bullet\lim_{t\to t_o}\vec{G}(t) \overset{(1.23)\text{ e }(1.24)}{=} (0,1,0)\bullet(1,1,0)=0\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 0=1\,,$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)(t) \overset{(1.18)}{=} \lim_{t\to 0}\vec{F}(t)\times\lim_{t\to t_o}\vec{G}(t) \overset{(1.23)\text{ e }(1.24)}{=} (0,1,0)\times(1,1,0)=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(1\cdot 0-0\cdot 1)\cdot\vec{e}_1-(0\cdot 0-1\cdot 0)\cdot\vec{e}_2+(0\cdot 1-1\cdot 1)\cdot\vec{e}_3=(-1)\cdot\vec{e}_3=(0,0,-1)\,,$$

completando a resolução.

□

Tendo a noção de limites para funções de uma variável real a valores vetoriais podemos introduzir o conceito de continuidade para tais funções, mais precisamente:

Definição 1.1.4 *Sejam* $\vec{F}: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ *função vetorial e* $t_o\in A$, *um ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$, *em* $\mathbb{R}$.

1. *Diremos que* **a função vetorial $\vec{F}$ é contínua em t_o** , *se*

$$\lim_{t\to t_o}\vec{F}(t)=\vec{F}(t_o)\,. \tag{1.25}$$

2. *Diremos que* **a função vetorial $\vec{F}$ é contínua no conjunto A** *se ela for contínua em cada um dos pontos do conjunto* $\underline{A}$ *(que forem de acumulação do conjunto* $\underline{A}$*).*

Observação 1.1.2

1. *Na situação da Definição* 1.1.4 *acima, temos que uma função vetorial* $\vec{F}$ *é contínua em* t_o *se, e somente, se:*

   (a) *a função vetorial* $\vec{F}$ *está definida em* t_o*;*

   (b) *existe o limite* $\lim_{t\to t_o}\vec{F}(t)$*;*

   (c) *vale a identidade* (1.25), *ou seja:*

$$\lim_{t\to t_o}\vec{F}(t)=\vec{F}(t_o)\,.$$

2. *Segue das Definições* 1.1.3 *e* 1.1.4 *que, uma função vetorial* $\vec{F}$ *é contínua em* $t_o\in A$ *(ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$*) se, e somente se, suas funções coordenadas, isto é, as funções* $F_i: A\to\mathbb{R}$, *para cada* $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, *forem funções contínuas em* t_o, *isto é, a função vetorial* $\vec{F}$ *é contínua em* $t_o\in A$ *se, e somente se,*

$$\lim_{t\to t_o}F_i(t)=F_i(t_o)\,, \tag{1.26}$$

   para cada $i\in\{1,2,\cdots,n\}$.

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 1.1.2 *Seja* $\vec{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *a função vetorial dada por*

$$\vec{F}(t) \doteq \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + \left(t^2 + 1\right) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3 , \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R} . \tag{1.27}$$

Mostre que a função vetorial $\underline{\vec{F}}$ *é contínua em* $\underline{\mathbb{R}}$*.*

Resolução:

De fato, notemos que as funções coordenadas associadas à função vetorial $\underline{\vec{F}}$, a saber, as funções $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$F_1(t) \doteq \text{sen}(t) , \quad F_2(t) \doteq t^2 + 1 , \quad F_3(t) \doteq t , \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R} , \tag{1.28}$$

são funções a valores reais, de uma variável real, que são contínuas em $\underline{\mathbb{R}}$ (visto no Cálculo 1).

Logo, do item 2. da Observação 1.1.2, segue que a função vetorial $\underline{\vec{F}}$ é contínua em $\underline{\mathbb{R}}$, completando a resolução.

□

Como conseqüência da Proposição 1.1.1 temos o:

Corolário 1.1.1 *Sejam* $\vec{F}, \vec{G} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *funções vetoriais contínuas em* $t_o \in A$*,* $\underline{t_o}$ *um ponto de acumulação do conjunto* $\underline{A}$*, em* $\underline{\mathbb{R}}$*, e* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Então as funções vetoriais $\left(\vec{F} \pm \vec{G}\right)$*,* $\left(\alpha \cdot \vec{F}\right)$*,* $\left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right)$ *e, no caso* $n = 3$*, a função vetorial* $\left(\vec{F} \times \vec{G}\right)$*, são funções vetoriais contínuas em* $\underline{t_o}$*.*

Além disso temos a:

Proposição 1.1.2 *Sejam* $\underline{B}$ *um subconjunto aberto em* $\underline{\mathbb{R}}$*,* $f : B \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $s_o \in B$*, de modo que o conjunto* $\underline{f(B)}$ *é um subconjunto de* $\underline{A}$*, que é um subconjunto aberto em* $\underline{\mathbb{R}}$*, e* $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *função vetorial contínua em* $t_o = f(s_o)$*.*

Então a função vetorial $\left(\vec{F} \circ f\right) : B \to \mathbb{R}^n$*, onde*

$$\left(\vec{F} \circ f\right)(s) \doteq \vec{F}\,[f(s)] , \quad \textit{para cada} \quad s \in J ,$$

será contínua em $\underline{s_o}$*.*

Podemos tratar também da diferenciabilidade de funções vetoriais, a saber:

Definição 1.1.5 *Seja* $\vec{F} : A \overset{aberto}{\subseteq} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *uma função vetorial dada por*

$$\vec{F}(t) \doteq F_1(t) \cdot \vec{e}_1 + \cdots + F_n(t) \cdot \vec{e}_n = (F_1(t), \cdots, F_n(t)) , \tag{1.29}$$

para cada $t \in A$*.*

A função vetorial $\underline{\vec{F}}$ *é diferenciável em* $t_o \in A$ *se, e somente se, as funções coordenadas associadas à função vetorial* $\vec{F}$*, isto é, as funções* $F_i : A \to \mathbb{R}$*, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, forem funções a valores reais, de uma variável real, diferenciáveis em* $\underline{t_o}$ *(estudadas no Cálculo I).*

Neste caso, teremos

$$\vec{F}\,'(t_o) = F_1{}'(t) \cdot \vec{e}_1 + \cdots + F_n{}'(t) \cdot \vec{e}_n = \left(F_1{}'(t_o), \cdots, F_n{}'(t_o)\right) , \tag{1.30}$$

isto é, para estudarmos a diferenciabilidade de funções vetoriais, basta estudarmos a diferenciabilidade de funções a valores reais, de uma variável real (visto no Cálculo I).

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 1.1.3 *Seja* $\vec{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *a função vetorial dada por*

$$\vec{F}(t) \doteq \text{sen}(t) \cdot \vec{e}_1 + \left(t^2 + 1\right) \cdot \vec{e}_2 + t \cdot \vec{e}_3 , \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R} . \tag{1.31}$$

Mostre que a função vetorial $\underline{\vec{F}}$ *é uma função diferenciável em* $\underline{\mathbb{R}}$ *e encontre* $\vec{F}\,'(t)$, *para cada* $t \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Notemos que, neste caso, temos que as funções coordenadas associadas à função vetorial $\underline{\vec{F}}$ serão dadas por:

$$F_1(t) \doteq \text{sen}(t), \quad F_2(t) \doteq t^2 + 1, \quad F_3(t) \doteq t , \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R} . \tag{1.32}$$

Observemos que, do Cálculo I, sabemos que a função $\underline{F_i}$ é diferenciável em $\underline{\mathbb{R}}$, para cada $i \in \{1 , 2 , 3\}$.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} F_1{}'(t) &\overset{(1.32)}{=} \frac{d}{dt}[\text{sen}(t)] = \cos(t) , \\ F_2{}'(t) &\overset{(1.32)}{=} \frac{d}{dt}\left[t^2 + 1\right] = 2\,t , \\ F_3{}'(t) &\overset{(1.32)}{=} \frac{d}{dt}[t] = 1 , \end{aligned} \tag{1.33}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Logo da Definição 1.1.5 acima, segue que a função vetorial $\underline{\vec{F}}$ é diferenciável em $\underline{\mathbb{R}}$ e, além disso, teremos

$$\vec{F}\,'(t) \overset{(1.30)}{=} \left(F_1{}'(t) , F_2{}'(t) , F_3{}'(t)\right) \overset{(1.33)}{=} (\cos(t) , 2t , 1) ,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, completando a resolução.

$\square$

Como conseqüência da Definição 1.1.5 e da Proposição 1.1.1, temos a:

Proposição 1.1.3 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$ *aberto,* $t_o \in A$, $\vec{F}, \vec{G} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *funções vetoriais diferenciáveis em* t_o *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então:

1. *as funções vetoriais* $\left(\vec{F} \pm \vec{G}\right)$ *são diferenciáveis em* $\underline{t_o}$ *e, além disso,*

$$\left(\vec{F} \pm \vec{G}\right)'(t_o) = \vec{F}\,'(t_o) \pm \vec{G}\,'(t_o) . \tag{1.34}$$

2. *a função vetorial* $\alpha \cdot \vec{F}$ *é diferenciável em* $\underline{t_o}$ *e, além disso,*

$$\left(\alpha \cdot \vec{F}\right)'(t_o) = \alpha \cdot \vec{F}\,'(t_o) . \tag{1.35}$$

3. *a função* $\vec{F} \bullet \vec{G}$ *é diferenciável em* $\underline{t_o}$ *e, além disso,*

$$\left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right)'(t_o) = \vec{F}\,'(t_o) \bullet \vec{G}(t_o) + \vec{F}(t_o) \bullet \vec{G}\,'(t_o) . \tag{1.36}$$

4. se $n = 3$, a função vetorial $\left(\vec{F} \times \vec{G}\right)$ é diferenciável em $\underline{t_o}$ e, além disoo,

$$\left(\vec{F} \times \vec{G}\right)'(t_o) = \vec{F}\,'(t_o) \times \vec{G}(t_o) + \vec{F}(t_o) \times \vec{G}\,'(t_o)\,. \tag{1.37}$$

Temos o seguinte resultado que relaciona as noções de continuidade e diferenciabilidade de funções vetoriais:

Teorema 1.1.1 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto, $t_o \in A$, $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial que é diferenciável em $\underline{t_o}$. Então a função vetorial $\underline{\vec{F}}$ será contínua em $\underline{t_o}$.*

Observação 1.1.3 **Não** *vale a recíproca do resultado acima, isto é, existem funções vetoriais contínuas em um ponto que* **não** *são diferenciáveis nesse ponto.*

Por exemplo, a função vetorial $\vec{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{F}(t) \doteq (t\,,|t|)\,, \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{1.38}$$

é contínua em $t = 0$, mas **não** *é diferenciável em $t = 0$.*

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Temos um resultado que nos dá condições suficientes para que a composta de uma função vetorial com uma função a valores reais, de uma variável real, seja uma função vetorial diferenciável, a saber:

Proposição 1.1.4 *Sejam $A\,,B \subseteq \mathbb{R}$ subconjunto abertos em $\mathbb{R}$, $f : B \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $s_o \in B$, tal que $f(B) \subseteq A$ e $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial diferenciável em $t_o = f(s_o)$. Então a função vetorial $\left(\vec{F} \circ f\right) : B \to \mathbb{R}^n$, onde*

$$\left(\vec{F} \circ f\right)(s) \doteq \vec{F}[f(s)]\,, \quad \textit{para} \quad s \in J\,, \tag{1.39}$$

será uma função diferenciável em $\underline{s_o}$. Além disso, temos que

$$\left(\vec{F} \circ f\right)'(s_o) = \vec{F}\,'[f(s_o)]\; f\,'(s_o)\,. \tag{1.40}$$

Demonstração:

A demonstração deste resultado, segue da Observação ?? e da regra da cadeia para funções a valores reais, de uma variável real (visto na disciplina de Cálculo I).

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Podemos integrar funções vetoriais, como diz a:

Definição 1.1.6 *Seja $\vec{F} : [a\,,b] \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial, tal que*

$$\vec{F}(t) = (F_1(t)\,,\cdots,F_n(t)) = F_1(t)\cdot\vec{e}_1 + \cdots + F_n(t)\cdot\vec{e}_n\,, \quad \textit{para} \quad t \in [a\,,b]\,. \tag{1.41}$$

Diremos que a **função vetorial $\underline{\vec{F}}$ é integrável em $[a\,,b]$** *se, e somente se, cada uma das suas funções componentes, isto é, as funções $F_i : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, for uma função integrável em $[a\,,b]$.*

Neste caso definiremos a **integral definida da função vetorial $\vec{F}$ em $[a\,,b]$** *, que será indicada por $\displaystyle\int_a^b \vec{F}(t)\,dt$, como sendo:*

$$\int_a^b \vec{F}(t)\,dt \doteq \left(\int_a^b F_1(t)\,dt\,,\cdots,\int_a^b F_n(t)\,dt\right) = \left[\int_a^b F_1(t)\,dt\right]\cdot\vec{e}_1 + \cdots + \left[\int_a^b F_n(t)\,dt\right]\cdot\vec{e}_n\,. \tag{1.42}$$

Observação 1.1.4 *A definição de integral definida, para funções vetoriais que exibimos acima, não é a definição original.*

Para mais detalhes, veja o Apêndice da notas de aula.

Uma condição suficiente para que uma função vetorial seja integrável em um intervalo $[a\,,b]$ é dado pela:

Proposição 1.1.5 *Seja* $\vec{F}:[a\,,b]\to\mathbb{R}^n$ *uma função vetorial. Se a função vetorial* $\underline{\vec{F}}$ *é contínua em* $[a\,,b]$*, então a função vetorial* $\underline{\vec{F}}$ *será uma função integrável em* $[a\,,b]$.

Valem as propriedades básicas para a integral definida de funções vetoriais, a saber:

Proposição 1.1.6 *Sejam* $\vec{F}, G:[a\,,b]\to\mathbb{R}^n$ *funções vetoriais, que são integráveis em* $[a\,,b]$.

Então:

1. *a função vetorial* $\vec{F}\pm\vec{G}$ *é integrável em* $[a\,,b]$ *e, além disso, teremos*

$$\int_a^b \left(\vec{F}\pm\vec{G}\right)(t)\,dt=\int_a^b \vec{F}(t)\,dt\pm\int_a^b \vec{G}(t)\,dt\,. \tag{1.43}$$

2. *a função vetorial* $\alpha\cdot\vec{F}$ *é integrável em* $[a\,,b]$ *e, além disso, teremos*

$$\int_a^b \left(\alpha\cdot\vec{F}\right)(t)\,dt=\alpha\cdot\int_a^b \vec{F}(t)\,dt\,. \tag{1.44}$$

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 1.1.4 *Consideremos a função vetorial* $\vec{F}:[0\,,1]\to\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\begin{aligned}\vec{F}(t) &\doteq \operatorname{sen}(t)\cdot\vec{e}_1+\left(t^2+1\right)\cdot\vec{e}_2+t\cdot\vec{e}_3\\ &=\left(\operatorname{sen}(t)\,,\,\left(t^2+1\right)\,,\,t\right)\,,\quad \textit{para}\quad t\in[0\,,1]\,.\end{aligned} \tag{1.45}$$

Calcule, se existir, $\displaystyle\int_0^1 \vec{F}(t)\,dt$.

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que a função vetorial $\underline{\vec{F}}$ é contínua em $[0\,,1]$ (pois, com visto no Cálculo 1, as suas funções componentes são funções contínuas em $[0\,,1]$).

Logo, da Proposição 1.1.6 acima, segue que a função vetorial $\underline{\vec{F}}$ será uma função vetorial integrável em $[0\,,1]$.

Além disso, da mesma Proposição, segue que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \vec{F}(t)\,dt &\overset{(1.45)\text{ e }(1.43)}{=} \left(\int_0^1 \operatorname{sen}(t)\,dt\right)\cdot\vec{e}_1+\left(\int_0^1\left(t^2+1\right)\,dt\right)\cdot\vec{e}_2+\left(\int_0^1 t\,dt\right)\cdot\vec{e}_3\\ &\overset{\text{Teorema fundamental Cálculo}}{=}\left[-\cos(t)\Big|_{t=0}^{t=1}\right]\cdot\vec{e}_1+\left[\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_{t=0}^{t=1}\right]\cdot\vec{e}_2+\left[\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1}\right]\cdot\vec{e}_3\\ &=[1-\cos(1)]\cdot\vec{e}_1+\frac{4}{3}\cdot\vec{e}_2+\frac{1}{2}\cdot\vec{e}_3\;=\left(1-\cos(1)\,,\,\frac{4}{3}\,,\,\frac{1}{2}\right)\,,\end{aligned}$$

completando a resolução.

□

1.2 Curvas Parametrizadas

Iniciaremos esta seção com a:

Definição 1.2.1 *Seja* $I \doteq [a\,,b] \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo fechado e limitado de* $\underline{\mathbb{R}}$. *Uma função vetorial* $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}^n$ *que é contínua em* $[a\,,b]$ *será denominada* **curva para metrizada em** $\mathbb{R}^n$.

Suponhamos que

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t)\,,\cdots,\gamma_n(t)) = \gamma_1(t)\cdot\vec{e}_1 + \cdots + \gamma_n(t)\cdot\vec{e}_n\,, \quad para \quad t \in [a\,,b]\,, \tag{1.46}$$

onde $\gamma_i : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, *para cada* $i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$ *(a saber, as funções coordenadas associadas a função vetorial* γ*).*

Então as equações

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \cdots \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases}, \quad para\ cada \quad t \in [a\,,b]\,, \tag{1.47}$$

serão ditas **equações paramétricas associadas à curva parametrizada** γ.

A imagem do conjunto $[a\,,b]$ *pela função vetorial* $\underline{\gamma}$, *isto é,*

$$\gamma\,([a\,,b]) \doteq \{\gamma(t)\ ;\ t \in [a\,,b]\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

será dito **traço da curva** $\underline{\gamma}$.

Com isto temos a:

Observação 1.2.1

1. *Quando* $n = 1$, *uma curva parametrizada em* $\underline{\mathbb{R}}$, *será uma função* $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *que é contínua em* $[a\,,b]$, *ou seja, uma função a valores reais, de uma variável real, que é contínua em* $[a\,,b]$.

2. *Se* $n = 2$, *temos que uma curva parametrizada em* $\underline{\mathbb{R}^2}$, *será uma função vetorial* $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}^2$, *que é contínua em* $[a\,,b]$.

   Neste caso, podemos escrever

   $$\gamma(t) = (\gamma_1(t)\,,\gamma_2(t)) = \gamma_1(t)\cdot\vec{e}_1 + \gamma_2(t)\cdot\vec{e}_2\,, \quad para \quad t \in [a\,,b]\,, \tag{1.48}$$

   onde as funções componentes $\gamma_1\,,\gamma_2 : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas em* $[a\,,b]$.

   Notemos que, neste caso, a representação geométrica do traço da curva parametrizada $\underline{\gamma}$ *será uma curva no plano* xOy, *por isto ela será denominada* **curva no plano (ou curva pla na**.

3. *Se* $n = 3$, *temos que uma curva parametrizada em* $\underline{\mathbb{R}^3}$, *será uma função vetorial* $\gamma : [a\,,b] \to \mathbb{R}^3$ *contínua em* $[a\,,b]$ *e a representação geométrica do seu traço será uma curva em* $\underline{\mathbb{R}^3}$.

   Neste caso podemos escrever

   $$\gamma(t) = (\gamma_1(t)\,,\gamma_2(t)\,,\gamma_3(t)) = \gamma_1(t)\cdot\vec{e}_1 + \gamma_2(t)\cdot\vec{e}_2 + \gamma_3(t)\cdot\vec{e}_3\,, \quad para \quad t \in [a\,,b]\,, \tag{1.49}$$

   onde as funções componentes $\gamma_1\,,\gamma_2\,,\gamma_3 : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, *são funções contínuas em* $[a\,,b]$.

   Neste caso, a representação geométrica do traço da curva parametrizada $\underline{\gamma}$ *será denominada* **curva no espaço (ou curva espacial** *- veja a figura abaixo).*

Apliquemos as ideias acima aos:

Exemplo 1.2.1 *Consideremos a função vetorial* $\gamma : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$\gamma(t) \doteq (\cos(t)\,,\,\mathrm{sen}(t)) = \cos(t)\cdot\vec{e}_1 + \mathrm{sen}(t)\cdot\vec{e}_1\,,\quad \textit{para}\quad t\in[0\,,2\,\pi]\,. \tag{1.50}$$

Mostre que $\underline{\gamma}$ *é uma curva parametrizada (plana) e a representação geométrica do seu traço é a circunferência de centro na origem, a saber,* $O \doteq (0\,,0)$, *e raio igual a* $\underline{1}$, *no* $\underline{\mathbb{R}^2}$, *que é percorrida no sentido anti-horário.*

Resolução:

De fato, notemos que definindo-se as funções $\gamma_1\,,\gamma_2 : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, dadas por

$$\gamma_1(t) \doteq \cos(t)\,,\quad \gamma_2(t) \doteq \mathrm{sen}(t)\,,\quad \text{para}\quad t\in[0\,,2\,\pi]\,, \tag{1.51}$$

segue que as funções $\underline{\gamma_1}$ e $\underline{\gamma_2}$ serão funções contínuas em $[0\,,2\,\pi]$.

Notemos que estas serão as funções componentes da função vetorial $\underline{\gamma}$, dada por (1.50).

Logo, a função vetorial $\gamma : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$ será uma função vetorial contínua em $[0\,,2\pi]$, em particular, pela Definição 1.2.1, segue que $\underline{\gamma}$, dada por (1.50), será uma curva parametrizada em $\underline{\mathbb{R}^2}$.

Notemos também que

$$\|\gamma(t)\| \overset{(1.51)}{=} \sqrt{[\gamma_1(t)]^2 + [\gamma_2(t)]^2} \overset{(1.51)}{=} \sqrt{\underbrace{[\cos(t)]^2 + [\mathrm{sen}(t)]^2}_{=1}} = 1\,,\quad \text{para}\quad t\in[0\,,2\,\pi]\,,$$

ou seja, para cada $t \in [0\,,2\,\pi]$, temos que

$$\gamma(t) \in S^1\,,\quad \text{onde}\qquad S^1 \doteq \left\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2=1\right\}\,, \tag{1.52}$$

ou seja, $\underline{S^1}$ denota a circunferência de centro na origem $O \doteq (0\,,0)$ e raio igual a $\underline{1}$, do $\underline{\mathbb{R}^2}$.

□

Observação 1.2.2 *Observemos que, no Exemplo acima, as equações paramétricas associadas à curva parametrizada* $\underline{\gamma}$, *serão dadas por :*

$$\begin{cases} x(t) \doteq \cos(t) \\ y(t) \doteq \mathrm{sen}(t) \end{cases}\,,\quad \textit{para}\quad t\in[0\,,2\,\pi]\,.$$

Para finalizar, temos o:

Exemplo 1.2.2 *Consideremos a função vetorial* $\gamma : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\gamma(t) \doteq (\cos(t)\,,\,\mathrm{sen}(t)\,,\,t)\,,\quad \textit{para}\quad t\in[0\,,2\,\pi]\,. \tag{1.53}$$

Então $\gamma : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}^3$ *é uma curva parametrizada no espaço, cuja representação geométrica do seu traço está contido no cilindro circular reto, que tem como base a circunferência de centro na origem* $O \doteq (0\,,0\,,0)$ *e tem raio igual a* $\underline{1}$, *do plano* xOy.

Resolução:

Segue, da disciplina de Cálculo I, que suas funções coordenadas associadas a função vetorial $\gamma : [0\,,2\,\pi] \to \mathbb{R}^3$, *isto é, as funções*

$$\gamma_1(t) \doteq \cos(t)\,,\quad \gamma_2(t) \doteq \mathrm{sen}(t)\,,\quad \gamma_3(t) \doteq t\,,\quad \textit{para}\quad t\in[0\,,2\,\pi]\,, \tag{1.54}$$

são funções contínuas em $[0, 2\pi]$.

Logo, pela Definição 1.2.1, a função vetorial $\underline{\gamma}$ *é uma curva parametrizada espacial.*

Notemos que,

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{[\gamma_1(t)]^2 + [\gamma_2(t)]^2} \overset{(1.54)}{=} \sqrt{[\cos(t)]^2 + [\operatorname{sen}(t)]^2} = 1\,, \quad \textit{para} \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

isto é, a representação geométrica do traço da curva parametrizada $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ *está contido no cilindro circular reto, que tem como base a circunferência de centro na origem* $O \doteq (0, 0, 0)$ *e tem raio igual a* $\underline{1}$, *do plano* xOy.

Logo, pela Definição 1.2.1, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada no espaço.

□

Observação 1.2.3

1. *A curva acima é conhecida como* **hélice**.

2. *Observemos que as equações paramétricas associadas à curva parametrizada* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ *do Exemplo 1.2.2 acima, serão dadas por:*

$$\begin{cases} x(t) \doteq \cos(t) \\ y(t) \doteq \operatorname{sen}(t) \\ z(t) \doteq t \end{cases}, \quad \textit{para} \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Podemos agora introduzir a:

Definição 1.2.2 *Diremos que a curva parametrizada* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *é* **diferenciável em** $t_o \in [a, b]$, *se a função vetorial* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *for uma função vetorial diferenciável em* $\underline{t_o}$.

Diremos que a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *é* **diferenciável em** $[a, b]$, *se ela for uma função vetorial diferenciável em cada ponto do intervalo* $[a, b]$.

Observação 1.2.4 *Como vimos na Definição 1.1.5, uma função vetorial* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *é diferenciável em* $t_o \in [a, b]$ *se, e somente se, cada uma de suas funções componentes forem diferenciáveis em* $\underline{t_o}$, *isto é, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *a função*

$$\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \textit{para cada} \quad t \in [a, b]$$

for uma função diferenciável em $t_o \in [a, b]$, *onde*

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t)) = \gamma_1(t) \cdot \vec{e}_1 + \gamma_n(t) \cdot \vec{e}_n\,, \quad \textit{para} \quad t \in [a, b]\,.$$

Em particular, uma curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *será diferenciável em* $[a, b]$ *se, e somente se, cada uma de suas componentes for diferenciável em* $[a, b]$, *ou seja, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *a função*

$$\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}\,,$$

for uma função diferenciável em $[a, b]$.