TÓPICOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

TATIANA ROQUE
JOÃO BOSCO PITOMBEIRA

Sumário

Introdução

Fala-se muito, hoje em dia, em inserir o ensino de um conceito matemático em um contexto. Justamente porque muitos alunos consideram a Matemática por demais abstrata, ouvimos muitos pedidos para que ela se torne mais "concreta", ligada ao "quotidiano". Contudo, a Matemática é vista, ao mesmo tempo, como um saber abstrato por excelência. Diante disso, como seria possível torná-la mais concreta?

Estas questões aparecem frequentemente na experiência de ensinar matemática, bem como nas discussões sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem desta disciplina. Em nossa formação, já ouvimos dizer que o aprendizado da Matemática é importante porque ajuda a desenvolver a capacidade de raciocínio e, portanto, o pensamento lógico coerente, que é um tipo de pensamento abstrato. Muitas vezes, a Matemática lida com conceitos que não parecem corresponder à experiência sensível, como é o caso dos números negativos, irracionais ou complexos. Mesmo os conceitos geométricos básicos de ponto e reta são abstratos, uma vez que não existem, no mundo real, grandezas sem dimensão, ou com somente uma dimensão. Todos os objetos de que temos experiência são tridimensionais. Mesmo o conceito de número, apesar de ter sido definido a partir de necessidades concretas, pode ser encarado como abstrato. Sendo assim, parece estarmos diante de um paradoxo: como tornar a Matemática mais "concreta" sem abdicar da capacidade de abstração que o seu aprendizado proporciona? Não investigaremos a natureza desta aparente contradição, o que demandaria definir, de modo mais preciso, o que estamos chamando de "concreto" e de "abstrato". Acreditamos, contudo, que quando os alunos pedem para que a Matemática se torne mais "concreta", eles podem não querer dizer, somente, que desejam ver este conhecimento aplicado às necessidades práticas. Talvez eles demandem compreender seus conceitos em relação com algo que lhes dê sentido. Este pode ser o papel mais importante da história da Matemática para o ensino.

A Matemática pode ser ensinada de uma maneira mais "concreta", caso seus conceitos forem tratados a partir de um contexto. Isto não significa necessariamente partir de um problema quotidiano, e sim saber com o que estes conceitos se relacionam, como podem ser inseridos em uma rede de relações e de significados – ainda que estas relações pertençam à própria Matemática.

Entender os problemas que alimentam a Matemática de hoje é praticamente impossível, haja vista sua complexidade e a especificidade da linguagem e do simbolismo nos quais eles se exprimem. Mas os conteúdos que ensinamos, desde o ensino fundamental até o ensino superior, já foram desenvolvidos há muitos séculos. Podemos, então, analisar o momento no qual os conceitos foram criados e como os resultados, que hoje consideramos clássicos, foram demonstrados, contrabalançando a concepção tradicional que se tem da Matemática como um saber operacional, técnico ou abstrato. Raramente entendemos o sentido dos conceitos e das ferramentas que aprendemos no Ensino Básico. A história da Matemática pode tirar do esconderijo onde se encontram os problemas que constituem o campo de experiência do matemático, ou seja, o lado concreto do seu fazer.

Há uma diferença crucial entre a ordem lógica da exposição, o modo como um texto matemático é organizado para ser apresentado, e a ordem da invenção, que diz respeito ao modo como os resultados matemáticos se desenvolveram. Muitas vezes, é necessário reverter a ordem da exposição, se queremos compreender o sentido amplo das noções matemáticas. Ao analisar a estrutura das revoluções científicas, T. Kuhn ([103]) já havia sinalizado que os cientistas, em seu trabalho sistemático, estão continuamente reescrevendo (e escondendo) a história real do que os levou até ali. Isto é natural, pois o objetivo destes pesquisadores é fazer a ciência avançar e não refletir sobre seus resultados.

Esta diferença entre o modo de produzir e de escrever os resultados é muito presente na Matemática, que parece ter sido escrita de trás para a frente. As definições, que precedem as conclusões sobre os objetos de que se está tratando, explicitam, na verdade, os requisitos para que um enunciado seja verdadeiro, que foram descobertos por último, em geral, no trabalho efetivo do matemático. Este encadeamento lógico na apresentação dos enunciados dá a impressão de que a Matemática é desconectada de seu contexto de descoberta.

Um dos fatores que contribuem para que a Matemática seja considerada abstrata vem da forma como esta disciplina é ensinada, fazendo uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, ao invés de partimos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido e exibirmos as perguntas às quais ele responde, tomamos este conceito como algo pronto. Vejamos como a ordem lógica sugere apresentar o teorema de Pitágoras.

Definição1: Um triângulo é retângulo se contém um ângulo reto.

Definição2: Em um triângulo retângulo o maior lado é chamado "hipotenusa" e os outros dois são chamados "catetos".

Teorema: Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Problema: Desenho um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e pergunto o valor da hipotenusa.

Temos primeiro as definições, depois os teoremas e as demonstrações que usam estas definições e, finalmente, as aplicações dos teoremas a alguma situação particular, considerada um problema. A partir desta apresentação, podemos demonstrar e aplicar o teorema de modo convincente. Ainda assim, diversas perguntas permanecem sem resposta: Por que um triângulo retângulo merece uma definição especial? Por que estes nomes? O que é medir? Por que é interessante medir os lados de um triângulo? Por que devemos conhecer a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo? As respostas a estas perguntas permanecem escondidas por trás do modo coerente como enunciamos o teorema e, sobretudo, do modo como utilizamos operacionalmente o resultado que ele exprime.

A Matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. O papel da história da Matemática pode ser o de exibir estes problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram. Para além da reprodução estéril de anedotas que visam a "motivar" o interesse dos estudantes, é possível reinventar o ambiente "problemático" no qual os conceitos foram criados. A noção de problema usada aqui, bem como de "problemático", não remete a uma ignorância, à falta de conhecimento que deve ser suplantada pelo saber. Neste último caso, o significado de um problema é o mesmo dos "exercícios de fixação" que pedimos para os alunos responderem, propostos após a exposição de uma teoria para testar o seu conhecimento (como no exemplo acima do problema sobre o teorema de Pitágoras).

As situações que motivaram os matemáticos são problemas em um sentido muito mais rico. Podem ter sido problemas quotidianos (contar, fazer contas); problemas relativos à descrição dos fenômenos naturais (por que um corpo cai, por que as estrelas giram?); problemas filosóficos (o que é conhecer, como a Matemática ajuda a alcançar o conhecimento verdadeiro?); ou ainda, problemas matemáticos (como legitimar certa técnica ou certo conceito?). Na história da Matemática, encontramos motivações que misturam todos estes tipos de problemas. Até o século XIX, problemas físicos e ou de engenharia, bem como questões filosóficas, possuíam um papel muito mais importante no desenvolvimento da Matemática do que possuem hoje. Entre os séculos XIX e XX, problemas relativos à formalização e à sistematização da Matemática tornaram-se preponderantes.

Para tentar compreender como a Matemática se tornou o que é hoje, é extremamente importante ler as produções dos que praticaram Matemática ao longo dos séculos. Em geral, esta tarefa é difícil, se quisermos ir diretamente às fontes. Ainda assim, é essencial ler os autores e não somente teorizar sobre suas obras. Felizmente, no caso da Matemática, há antologias ("sourcebooks") de partes significativas de obras matemáticas do passado, traduzidas para uma língua moderna e comentadas. Recomendamos, o uso frequente das organizadas por Fauvel [59], Katz [95], Smith [136], Stedall [138], Struik [139] e Swetz [142] , entre outras. Chamamos a atenção, por sua qualidade e adequacão às tendências historiográficas de nosso livro, para as duas mais recentes, as de Fauvel e Stedall[1].

A Matemática que lemos nos livros já foi produzida há muito tempo, e reorganizada inúmeras vezes. Neste livro, procuraremos dar exemplos de alguns momentos na história da Matemática, aqueles que se relacionam mais de perto com os conteúdos ensinados nas escolas. Para reintroduzir os conceitos em seu contexto não basta relacioná-los com o ambiente em que foram criados, sem investigar de perto o modo como as técnicas e as ferramentas foram elaboradas. Este é um dos princípios que nortearam este trabalho. A fim de entender o modo como um conceito foi pensado ao longo da história é importante entrar nos detalhes técnicos dos procedimentos a ele associados, a fim de exibir a particularidade de um tipo de raciocínio ou sua relação com outros argumentos. Procuraremos, contudo, apresentar os desenvolvimentos matemáticos do modo mais didático possível, a fim de torná-los acessíveis a alunos com um conhecimento básico de matemática. Uma conseqüência deste tipo de abordagem, que também julgamos interessante, é que o estudo da história pode ser também uma ocasião para se aprender Matemática, ainda que seja uma Matemática distinta daquela que praticamos hoje.

Os temas abordados aqui possuem grande relevância na constituição da imagem que temos da Matemática, seja porque são ensinados ou porque, ainda que não ensinados diretamente, podem ajudar a esclarecer alguns pressupostos ocultos na maneira como a disciplina se apresenta. Quase todos os livros de história da Matemática disponíveis em português, traduzidos de obras estrangeiras já ultrapassadas, são marcados por uma visão retrospectiva, que parte dos conceitos tais como os conhecemos hoje para investigar sua origem. Deste ponto de vista, surgem afirmações como "o primeiro a descobrir esta fórmula foi o matemático X"; "este resultado já estava presente na obra de Y, ou na época Z". Este tipo de informação é considerada "anacrônica" pelos pesquisadores mais recentes, ou seja, ela indica uma postura de se olhar o passado a partir do ponto de vista atual. Outro objetivo deste trabalho, ainda que secundário, é apresentar as novas contextualizações fornecidas pela pesquisa recente em história da Matemática, que desmistificam a visão tradicional. Iniciaremos cada capítulo com um resumo sobre o contexto histórico da época tratada. Todas estas seções, bem como grande parte do material usado ao longo de todos nos capítulos, foram retiradas

[1] Além disso, a Matemática foi construída, aos poucos, por homens, que viveram em uma certa época e lugar. Uma boa visão, resumida e integrada, das muitas sociedades que forjaram práticas as quais, aos poucos, constituíram a Matemática como a conhecemos hoje, encontra-se em McNeill [107].

do livro *Uma Nova História da Matemática* ([128]). Aos leitores interessados em um maior aprofundamento histórico sobre os temas abordados aqui indicamos este trabalho, bem como muitos outros listados na bibliografia e citados ao longo do texto[2].

No capítulo 1, falaremos dos registros numéricos nas civilizações mesopotâmica e egípcia. Além disso, mostraremos as características principais dos sistemas de numeração empregados e como as operações matemáticas intervinham em procedimentos de resolução de problemas, descritos em forma de receitas. A Matemática desta época é vista como essencialmente prática, marcada pelo uso de receitas e algoritmos de cálculo. Veremos, contudo, que o modo de enunciar estes procedimentos pode indicar um tipo distinto de generalidade, diferente do que concebemos como tal. A visão tradicional da história da Matemática associa os procedimentos numéricos dos mesopotâmicos a operações aritméticas, ou mesmo algébricas. É freqüente sermos informados, por exemplo, de que os mesopotâmicos já sabiam resolver equações do segundo grau. Esta afirmação, contudo, reflete um grande anacronismo, sobretudo se levarmos em conta as dificuldades de se lidar com as fontes do período que, além de extremamente fragmentadas, podem ser interpretadas de muitos modos. Em contraposição à interpretação algébrica dos procedimentos de resolução de problemas mesopotâmicos, pesquisadores mais atuais propuseram que os algoritmos numéricos podem ter sido enunciados a partir de técnicas geométricas, baseados em procedimentos de cortar e colar figuras para obter outras com a mesma área. Isto sugere que a divisão em disciplinas, como álgebra ou geometria, é inadequada para analisar épocas nas quais a Matemática não era uma disciplina, como é hoje, contendo subáreas bem delimitadas. Exibiremos, ao final, procedimentos de medida que poderíamos chamar de "geométricos", com o cuidado de entender esta palavra em um sentido muito específico.

O capítulo 2 começa por descrever brevemente o mundo grego antes de Euclides. Normalmente, fala-se da transição do tipo de Matemática realizada pelos mesopotâmicos e egípcios, marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática teórica, praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações. Não há, contudo, uma documentação confiável que possa es-

[2]Os livros de história da Matemática mais conhecidos no Brasil são os de Carl Boyer, *História da Matemática*, e Howard Eves, *Introdução à História da Matemática*. Qualquer trabalho que mencione um fato ou um personagem histórico da Matemática cita, obrigatoriamente, uma destas obras. Quando muito, podem ser mencionados os livros de Dirk Struik, *História Concisa da Matemática*([141]), disponível em português; além de obras em inglês, como a de Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* ([98]). Tratam-se todas, sem exceção, de obras ultrapassadas e amplamente questionadas pela pesquisa mais recente em história da matemática, a qual, infelizmente, temos pouco acesso em português. O objetivo de [128] é justamente o de suprir, parcialmente, esta deficiência.

tabelecer tal transição. Além disso, mesmo no seio da Matemática grega, não podemos afirmar que as práticas de que temos notícia pertenciam a um corpo unificado de conhecimento que poderíamos designar como "Matemática grega", ao menos até a época de Euclides. Um de nossos objetivos será desconstruir o mito da crise provocada pela descoberta dos irracionais que, na verdade, é a descoberta da possibilidade de existirem segmentos incomensuráveis. Falar de descoberta dos "irracionais" já indica uma visão retrospectiva, pois a questão dos incomensuráveis se inseria em um contexto geométrico, que não tinha nada a ver com a existência de números irracionais. Para compreender o conceito de número dos pitagóricos, e mostrar que a incomensurabilidade não foi descoberta no contexto desta escola, analisaremos alguns aspectos de seu pensamento. Além disso, procuraremos dar uma ideia, a partir das pouquíssimas fontes disponíveis, do contexto geométrico dos séculos V e IV a.E.C.. Analisaremos, em particular, um método que parece ter sido usado para comparar grandezas, inclusive as incomensuráveis, chamado "método da antifairese". Em seguida, passamos à análise de alguns livros dos *Elementos* de Euclides. Discutiremos, brevemente, as possíveis motivações do modo particular de expor os enunciados nesta obra, enfatizando a separação entre o tratamento das grandezas e dos números, que, esta sim, pode ter sido uma conseqüência da descoberta dos incomensuráveis.

Voltamo-nos, em seguida, para alguns desenvolvimentos da Matemática grega após Euclides. No capítulo 3, falaremos de Arquimedes e da tradição dos problemas geométricos na Matemática grega, contrastando o aspecto formal, normalmente enfatizado, com o pragmatismo na resolução de problemas geométricos, que parece ter sido o real motor da geometria da época. Exporemos alguns métodos de cálculo de áreas, em particular aqueles que ficaram conhecidos como "método de exaustão", cujos procedimentos evitam processos infinitos, passagens ao limite. Explicaremos estas técnicas nos termos da época, sem recorrer à linguagem atual de limites. Além disso, daremos exemplos de como problemas clássicos da geometria grega, como o da trisseção do ângulo, eram resolvidos por meio de curvas mais gerais que a reta e o círculo, os instrumentos de construção geométrica associados à geometria euclidiana. As exigências relativas à formalização e à sistematização da Matemática se inserem, provavelmente, no contexto filosófico do período helenístico, que se desenvolveu em Alexandria depois da morte de Euclides e Arquimedes. Veremos, com o exemplo de Apolônio e de sua definição das cônicas, o modo como a tradição de Euclides parecia vigorar em uma época um pouco posterior à de Arquimedes. Saltando para um momento ainda mais tardio, no qual a Matemática grega parecia ser pouco influenciada por Euclides, daremos exemplos das técnicas aritméticas de Diofanto e da trigonometria grega.

O capítulo 4 se organiza, sobretudo, em torno dos procedimentos para a resolução de equações. Analisaremos alguns trabalhos indianos e árabes a partir dos séculos VIII e IX, explicando seus métodos, predominantemente retóricos, para resolver problemas que, hoje, podem ser expressos por equações. Veremos que a fórmula de resolução de equações de segundo grau, conhecida como "fórmula de Bhaskara" não pode ter sido conhecida por este matemático indiano, nem pelos árabes, apesar de ambos saberem resolver "equações" (de seus respectivos modos). Falaremos das práticas algébricas no período do Renascimento, sobretudo no contexto italiano. As técnicas de resolução de problemas com quantidades desconhecidas introduziram, aos poucos, simbolismos que podem ser vistos como um passo na constituição de métodos algébricos. A relação entre estas práticas algébricas e suas justificativas geométricas será analisada de perto, pois é útil para a compreensão de um movimento, iniciado no século XVI, que buscava praticar Matemática com base no método analítico. Em contraposição ao método sintético, a chamada "arte analítica", defendida por François Viète, pretendia resolver problemas geométricos e aritméticos por meio de ferramentas algébricas. Ao final do capítulo, discutimos a importância de uma Matemática prática, para expor a invenção dos logaritmos por Neper.

No século XVII a Matemática sofrerá uma transformação importante, frequentemente associada à obra de René Descartes, que analisaremos no capítulo 5. A separação entre teoria e prática, forjada para avaliar os acontecimentos tratados no capítulo anterior, continuou hegemônica na história deste período, levando a história da Matemática a negligenciar o contexto mais geral de problemas ligados à construção de instrumentos práticos para a compreensão de fenômenos físicos. A Matemática de Descartes também pode ser encarada a partir desta perspectiva. O desenvolvimento da álgebra, mas, sobretudo, as novas concepções sobre o movimento e sobre a ideia de curva influíram nas transformações da geometria na época. Costumamos atribuir a Descartes a criação do que conhecemos hoje como "geometria analítica". Investigaremos de perto seus métodos, descrevendo os desenvolvimentos que julgamos mais esclarecedores para mostrar que esta afirmação é retrospectiva e ilusória, pois as práticas de Descartes, apesar de conterem algumas inovações, não estavam em ruptura com a Matemática e a ciência de seu tempo. Outro "herói" do século XVII é Pierre de Fermat, conhecido pelo famoso teorema, mas que participava das discussões sobre os métodos mais eficazes a serem usados na geometria, que se articulavam em torno da figura do padre Marin de Mersenne. Falaremos, resumidamente, das contribuições de Fermat para a geometria. O estudo do movimento e das curvas, incluindo a dedução de propriedades com significado físico, como o cálculo de tangentes, era uma parte fundamental dos problemas geométricos tratados por diversos matemáticos da primeira metade do século XVII. As mesmas questões continuaram a motivar os pensadores da segunda metade desse século, não somente na França, mas em outros países, levando à proposta de técnicas infinitesimais para tratar problemas com sentido físico, como os que envolviam o cálculo de tangentes a curvas e de áreas definidas por elas. Estas técnicas começaram a ser sistematizadas nas últimas décadas do século XVII, em particular por Gottfried Wilhelm von Leibniz e Isaac Newton, conhecidos como os fundadores do que chamamos hoje de "cálculo infinitesimal". Mas as técnicas infinitesimais usadas neste contexto foram questionadas por alguns pensadores da época, o que gerou uma longa discussão a respeito da legitimidade dos métodos do cálculo, que faziam intervir infinitesimais, ou seja, quantidades infinitamente pequenas. A busca de uma exposição que pudesse fornecer maior legitimidade às técnicas do cálculo infinitesimal levou à introdução de métodos algébricos, determinante para o tipo de Matemática que será praticada no século XVIII. A partir das contribuições de Leonhard Euler e Joseph-Louis Lagrange a noção de *função*, identificada à sua expressão analítica, passou a ser o objeto fundamental da matemática.

O capítulo 6 será o último, enfocando, de modo bastante parcial, alguns aspectos da história da Matemática do século XIX que contribuíram para formar a imagem que temos atualmente. Pretendemos mostrar que a própria noção de "rigor" possui uma história, expressa pelo modo como noções fundamentais da Matemática básica, como as de função e de número, foram discutidas e redefinidas ao longo da história. As noções de números irracionais, negativos e complexos – chamados durante séculos de números "impossíveis", "falsos", "absurdos", "imaginários" – começaram a ganhar cidadania Matemática no início do século XIX. Veremos como as tentativas de representar geometricamente os números negativos e imaginários, nos trabalhos de Argand e Gauss, também faziam parte do esforço para que estes números pudessem adquirir o estatuto de objetos matemáticos aceitáveis. Tudo isso se deu paralelamente ao movimento que passou a encarar a Matemática como um saber abstrato, que não precisava mais se justificar pela geometria ou pela intuição. Também tiveram um papel importante nestas transformações as discussões sobre a definição mais geral do conceito de função, ligada às tentativas de mostrar que uma função qualquer pode ser representada por uma série trigonométrica. Na França, a legitimação de um novo modo de se fazer Matemática está relacionada às transformações do ensino francês depois da Revolução Francesa, as quais deram origem à fundação da *École Polytechnique*. Veremos que esta instituição teve um papel determinante na incorporação de um novo tipo de rigor, expresso de modo exemplar pelos trabalhos de Cauchy. Uma nova etapa na constituição da Matemática abstrata partiu da necessidade de definir os objetos fundamentais desta teoria, muitos deles usados sem justificativa. Este é o caso da noção de número real, usado até este momento como contrapartida natural da noção intuitiva de quantidade. A consciência de que a Matemática trabalha sobre objetos que precisam ser definidos, como os de função e número, tratados aqui, se tornou dominante a partir do final do século XIX e início do XX e teve um papel fundamental na constituição do que passamos a chamar, até hoje, de "Matemática pura".

Os capítulos são divididos em seções e, ao final de cada uma, há uma lista de exercícios sobre o conteúdo daquela seção. Estes primeiros exercícios têm cunho histórico e visam a explorar ou complementar o conteúdo exposto na seção. Ao final de cada capítulo, acrescentamos também exercícios suplementares, que se relacionam de modo indireto com os desenvolvimentos históricos e, muitas vezes, buscam incentivar a reflexão sobre o conhecimento matemático relacionado à época tratada.

Capítulo 1

Sistemas de numeração, problemas e medidas na Babilônia e no Antigo Egito

1.1 Contextualização histórica

Não é difícil imaginar que sociedades muito antigas tenham possuído uma noção de quantidade. Um registro relacionado com contagens, e cuja interpretação suscita discussões entre os especialistas, é o osso, mostrado na Figura 1.1, encontrado em Ishango, na África, e datado entre vinte mil e dez mil anos a.E.C.

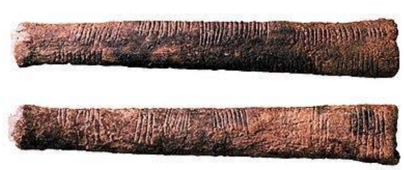


Figura 1.1 O osso de Ishango

Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência. Quando lemos sobre a origem da contagem, o exemplo que encontramos com mais freqüência é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, ao invés de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas, escritas na argila, e estas marcas estariam na origem dos números. Mas esta versão não é segura. As fontes para o estudo das civilizações muito antigas são escassas e fragmentadas.

Os primeiros registros, que podem ser concebidos como um tipo de escrita, datam aproximadamente do quarto milênio antes da era comum e são provenientes da Baixa Mesopotâmia, onde atualmente se situa o Iraque. O surgimento da escrita e o surgimento da Matemática, nesta região, estão intimamente relacionados. As primeiras formas de escrita foram motivadas pela necessidade de se registrar quantidades e não foi somente o controle de rebanhos a maior motivação para a criação dos números, e sim o registro de quantidades de insumos relacionados à sobrevivência, mas - sobretudo - à organização da sociedade. Nesta época, houve um crescimento populacional considerável, particularmente na região Sul do Iraque, o que motivou o desenvolvimento de cidades e o aperfeiçoamento das técnicas de administração da vida comum. O surgimento de registros de quantidades associados às primeiras formas de escrita está diretamente relacionado a esta nova conjuntura.

A invenção da escrita não seguiu um percurso linear, nem a sua história. Por volta dos anos 1930, começaram a ser elaboradas novas teses sobre a origem da escrita, com a descoberta de novos tabletes, provenientes da região de Uruk, datados de aproximadamente 3000 a.E.C. Centenas de tabletes arcaicos indicavam que a escrita já existia no quarto milênio, pois continham sinais traçados ou impressos com um tipo de estilete. Este material mostrava que, na fase inicial da escrita, as figuras que representavam algum objeto concreto eram exceção. Diversos tabletes traziam sinais comuns que não procuravam representar um objeto: o sinal para designar uma ovelha não era o desenho de uma ovelha, mas um círculo com uma cruz.

A continuação das escavações trouxe ao conhecimento dos estudiosos tabletes ainda mais enigmáticos, mostrando que esta forma arcaica de escrita consistia de figuras como cunhas, círculos, ovais e triângulos, impressos em argila. Nos anos 1990, Denise Schmandt-Besserat propôs a tese inovadora de que a forma mais antiga de escrita tem origem em um dispositivo de contagem. Ela observou que as escavações traziam, de modo regular, pequenos *tokens* – objetos em argila de diversos formatos: cones, esferas, discos, cilindros, etc (Veja a Figura 1.2). Estes objetos serviam às necessidades da economia, pois permitiam manter o controle sobre produtos da agricultura, e foram expandidos, na fase urbana, para controlar também os bens manufaturados. Com o desenvolvimento da sociedade, aperfeiçoaram-se métodos para armazenar estes *tokens*. Um deles empregava invólucros de argila, como uma bola oca, dentro dos quais eles eram guardados e fechados. Estes invólucros escondiam os *tokens* e, por isso, em sua superfície, eram impressas as formas contidas em seu interior.

O número de unidades de um produto era expresso pelo número correspondente de marcas na superfície. Uma bola contendo sete ovóides, por exemplo, possuía sete marcas ovais na superfície, às vezes produzidas por meio dos próprios *tokens* pressionados contra a argila ainda molhada. A substituição destes *tokens*

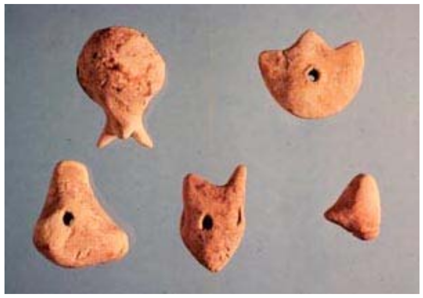


Figura 1.2 Exemplos de tokens

por sinais foi o primeiro passo para a escrita. Os contadores do quarto milênio devem ter percebido que o conteúdo dos invólucros se tornava desnecessário em vista das marcas superficiais. Estes sinais não consistiam de figuras representando os produtos em si, mas os *tokens* usados para contá-los.

Tratava-se de uma maneira de contar bem diferente da nossa. Não se representavam os números, como 1 ou 10, mas usavam-se instrumentos particulares para contar cada tipo de insumo: jarras de óleo eram contadas com ovóides, pequenas quantidades de grãos, com esferas. Os *tokens* eram usados em correspondência um a um com o que contavam: uma jarra de óleo era representada por um ovóide; duas jarras, por dois ovóides e assim por diante. Besserat afirma que este procedimento traduz um modo de contar concreto, anterior à invenção de números abstratos. Isto quer dizer que o fato de associarmos um mesmo símbolo, no caso 1 ou um cone, a objetos de tipos distintos, como ovelhas e jarras de óleo consiste em uma abstração que não estava presente no processo de contagem descrito acima. Este sistema deu origem à representação cuneiforme dos números. As marcas impressas nos invólucros passaram a incluir impressões com estiletes. Além disso, uma vez que o registro na superfície tornava desnecessária a manipulação dos *tokens*, os invólucros não precisavam ser usados enquanto tais e as impressões podiam ser feitas sobre tabletes planos de argila.

Os primeiros numerais não eram símbolos criados para representar números abstratos, mas sinais impressos indicando medidas de grãos. Em um segundo momento, as marcas representando as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que se referiam aos objetos que estavam sendo contados. Este foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de natureza distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado. Na verdade, há registros de que estas sociedades possuíam uma vida econômica ativa e a variedade dos objetos com os quais estes povos tinham que lidar podia ser muito grande. Neste caso, o modo de representação que emprega símbolos distintos para quantidades (iguais) de objetos distintos pode ser restritivo.

Os registros eram usados para documentar atividades administrativas e exibiam um sistema complexo para controlar as riquezas, apresentando balanços de produtos e contas. Os tabletes mostram que eram usados diferentes sistemas de medidas e bases, dependentes do assunto tratado nos balanços. Neste momento, os símbolos não eram números absolutos, mas significavam diferentes relações numéricas dependentes do que estava sendo contado. No entanto, as listas mostram um interesse crescente pelas propriedades dos números em si mesmas. Com isto, desenvolveu-se a escrita cuneiforme, "em forma de cunha", ao longo do terceiro milênio. Presume-se que o sistema de contagem que agrupava animais, ou outros objetos discretos, em grupos de 10, 60, 600 ou 3600 foi o primeiro a ser traduzido para a representação cuneiforme.

Apesar das evidências não permitirem um conhecimento linear dos registros numéricos, pode-se conjecturar que o sistema evoluiu de um estágio no qual um único contador era impresso várias vezes a uma fase mais econômica, na qual era possível diminuir a quantidade de impressões dos contadores de tamanhos e formas diferentes. Esta é a essência do sistema posicional: um mesmo símbolo serve para representar diferentes números, dependendo da posição que ocupa na escrita. Este é o caso do símbolo em forma de cunha, que serve para 1, 60 e 3600. Uma simplificação análoga é usada em nosso sistema de numeração, no qual o símbolo 1 também serve para representar os números 10 e 100. O sistema sexagesimal posicional, usado no período babilônio, surgiu da padronização deste sistema numérico, antes do final do terceiro milênio.

Conforme a metrologia foi sendo racionalizada pelo poder administrativo, também foram se multiplicando as funções da representação dos números, como é o caso de práticas pedagógicas. Há evidências de que, mais ou menos em meados do terceiro milênio a.E.C., as propriedades dos números passaram a ser investigadas por si mesmas, transformação que pode ser associada ao início de uma Matemática mais abstrata. Neste momento, o domínio da escrita não era universal, ou seja, nem todos manejavam estas técnicas. Desenvolveu-se, assim, a atividade dos escribas, que tinham funções ligadas à administração e eram responsáveis pelos registros. Aos poucos esta elite intelectual foi adquirindo outras atribuições ligadas ao ensino. Na verdade, presume-se que muitos dos tabletes que nos permitem ter algum conhecimento sobre a Matemática cuneiforme tinham funções pedagógicas.

Veremos adiante como algumas operações aritméticas eram realizadas neste sistema. Mas ao mesmo tempo em que uma parcela da sociedade começou a se dedicar especificamente à Matemática, as práticas que podem ser designadas por este nome passaram a incluir também procedimentos para resolução de problemas numéricos, tratados como "algébricos" pela historiografia tradicional. Historiadores conhecidos, como O. Neugebauer ([111]) e B.L. van der Waerden ([146]), postularam que os babilônios já possuíam um tipo de álgebra e as traduções propostas pelo primeiro pressupunham esta interpretação. No entanto, esta versão começou a ser desconstruída por J. Høyrup, nos anos 1990, com base em novas traduções dos termos que aparecem nos registros. Ele mostrou que a "álgebra" dos babilônios estava intimamente relacionada a um procedimento geométrico de "cortar e colar", que descreveremos em detalhes. Logo, esta prática não poderia ser descrita como uma álgebra, sendo mais adequado falar de "cálculos com grandezas". Tanto os mesopotâmicos quanto os egípcios realizavam uma espécie de cálculo de grandezas, ou seja, efetuavam procedimentos de cálculo sobre coisas que podem ser medidas (grandezas), e esta era uma das principais características de sua prática matemática. Podemos falar de "Matemática" babilônia, ou egípcia, mas tendo em mente que se trata de um conjunto de práticas muito distintas daquelas atualmente designadas por este nome.

Falaremos aqui somente destas duas civilizações antigas, as da Mesopotâmia e do Antigo Egito. Por volta do final do quarto milênio a.E.C., os egípcios registravam nomes de pessoas ou de lugares, bem como bens materiais e suas quantidades. As evidências disponíveis são mais numerosas para a Matemática mesopotâmica do que para a egípcia, provavelmente devido à maior facilidade na preservação da argila do que do papiro. As fontes indicam que, quando a Matemática começou a ser praticada no Egito antigo, ela também estava associada a necessidades administrativas. A quantificação e o registro de bens levaram ao desenvolvimento de sistemas de medida, empregados e aperfeiçoados pelos escribas, ou seja, pelos responsáveis pela administração da sociedade. Estes profissionais eram importantes para assegurar a coleta e a distribuição dos insumos disponíveis, mas também pela formação de novos escribas. Os papiros matemáticos, aqui também, fazem parte desta tradição pedagógica, e contém problemas e soluções preparados pelos escribas para antecipar as situações que os mais jovens poderiam encontrar em sua prática futura. Os textos matemáticos eram escritos em hierático e datam da primeira metade do segundo milênio antes da era comum (a.E.C.), apesar de haver registros numéricos anteriores.

Temos notícia da Matemática egípcia por meio de um número limitado de papiros, como o de Rhind, escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.E.C. O nome se deve ao escocês Alexander Henry Rhind que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito. Este documento também é chamado papiro de Ahmes o escriba egípcio que o copiou, e encontra-se no Museu Britânico. A Figura 1.3 mostra um dos problemas deste papiro.

Analisaremos algumas diferenças e semelhanças entre os sistemas de numeração empregados na Babilônia e no Antigo Egito, examinando o modo como os cálculos eram realizados em cada cultura. Isto nos levará a concluir que as técnicas usadas dependiam intimamente da natureza dos sistemas de numeração. Por isso, cálculos considerados difíceis em um sistema, podiam ser considerados

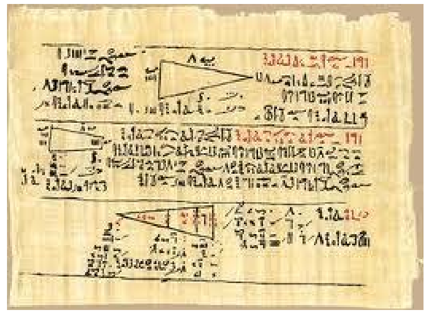


Figura 1.3

mais fáceis no outro. Logo, a referência às necessidades práticas de cada um destes povos não basta para explicar a criação de diferentes sistemas de numeração, contendo regras próprias e bem distintas umas das outras. É preciso relativizar, portanto, a interpretação freqüente de que a Matemática nesta época se constituía somente de procedimentos de cálculo voltados para a resolução de problemas quotidianos.

Mesmo o desenvolvimento do conceito de número, apesar de ter sido impulsionado por necessidades concretas, implica em um tipo de abstração. Contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato. A Matemática antiga não era puramente empírica, nem envolvia somente problemas práticos. A Matemática evolui pelo desenvolvimento de suas técnicas, o que permite que certos problemas sejam colocados, e outros não.

Mencionaremos, ao final, alguns problemas que podem ser chamados de "geométricos", em um sentido particular, o que nos leva a questionar, uma vez mais, algumas teses da história tradicional. Havia ou não *geometria* no Antigo Egito? É anacrônico e temerário querer enquadrar as práticas de Matemática de povos antigos em nossa classificação atual das áreas do saber ou dos campos da Matemática. Por exemplo, mesmo atualmente os significados que atribuímos aos termos *álgebra* e *geometria* têm mudado radicalmente. A concepção da álgebra no início do século XIX é muito diferente daquela do fim do mesmo século. De modo semelhante, a geometria, ao longo dos séculos, mudou de significado, paradigmas, técnicas e objetivos. Tanto os egípcios quanto os babilônios tinham procedimentos sistemáticos para resolver problemas que hoje chamaríamos de geométricos, envolvendo medidas. Por vezes, estes procedimentos estão ancorados em uma maneira conceitualmente diferente de conceber os conceitos geométricos[1].

[1] Como é o caso do círculo na Matemática babilônia, segundo Robson [125].

Querer comparar as práticas "geométricas" dos antigos egípcios com o encaminhamento dado à geometria pelos gregos, mais tarde, é colocar uma alternativa que não faz sentido. Os preconceitos que cercam nossa visão da Matemática egípcia impediram, até recentemente, que ela fosse apreciada tal como se apresenta nos registros disponíveis. Mesmo estudiosos que sempre valorizaram a Matemática egípcia, como Gillings, não escapam da comparação com a Matemática grega:

> Sejamos, no entanto, muito claros quanto ao semi-cilindro e ao hemisfério. Em nenhum dos casos foi estabelecida uma demonstração [...] pelo escriba egípcio [...]. Tudo o que podemos dizer é que, neste caso específico, as operações efetuadas mecânicamente [pelo escriba] são consistentes com as que alguém que conhece as fórmulas efetuaria, embora com ordem e notação diferentes. Não temos como saber se os escribas encontraram, por acaso, uma boa aproximação ou se seus métodos são o resultado de estimativas feitas ao longo de séculos de aplicações práticas. [68]

Um conhecido historiador da Matemática, Morris Kline, chega a desdenhar dos egípcios ([97], p. 14), ao afirmar que que "[...] suas contribuições à Matemática foram quase insignificantes" e, comparada com a dos gregos, "[a Matemática] dos egípcios e dos babilônios é como as garatujas de crianças que estão aprendendo a ler, comparadas com a boa literatura".

Não pensamos deste modo e procuraremos mostrar, por meio de poucos exemplos, que os babilônios e egípcios faziam Matemática, em um sentido diferente do nosso. Para enxergar esta possibilidade, é preciso considerar que não há somente uma Matemática, que evoluiu ao longo do tempo para aquela que conhecemos hoje. Várias práticas, ao longo da história, podem ser chamadas de "matemáticas", ainda que se assemelhem de maneira vaga com o que hoje concebemos como tal.

1.2 O sistema sexagesimal posicional na antiga Babilônia

Enfocaremos somente o sistema de numeração utilizado pelos escribas babilônios que habitaram a Mesopotâmia por volta de 2000 a 1600 a.C, durante o período *Babilônio Antigo*, sem nos preocuparmos com seus antecedentes, que remontam a épocas bem mais remotas.

Os símbolo para o número "um" pode ser visto na Figura 1.4. Ele era repetido para formar os números maiores do que um, como dois, três, e assim por diante até chegar a dez, representado por um símbolo diferente, que também pode ser visto na Figura ReHORTO.

O processo aditivo descrito acima prosseguia da mesma forma apenas até o número sessenta, quando se voltava a empregar o símbolo o mesmo símbolo usado para o número um. Continuando a contar, ao chegar a $60^2 = 3.600$, emprega-se novamente o mesmo símbolo, e assim sucessivamente.

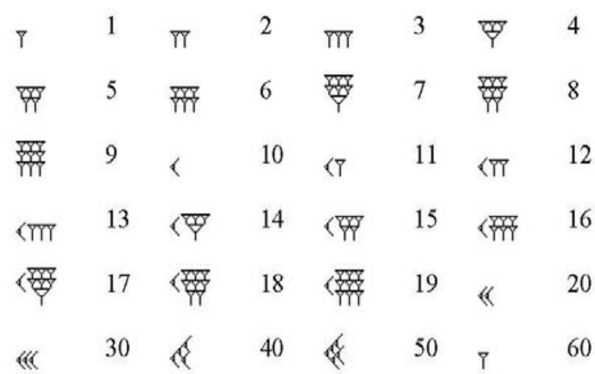


Figura 1.4

Como podemos observar na Figura 1.4, o número sessenta era representado pelo mesmo símbolo usado para representar o número um. O sistema dos antigos babilônios usa uma *notação posicional de base sessenta*. Ou seja, é um *sistema sexagesimal*, . Na verdade, eles usavam uma combinação de base sessenta e de base dez, pois os símbolos até cinquenta e nove mudam de dez em dez.

Ainda hoje, o sistema que usamos para representar as horas, minutos e segundos é um sistema posicional sexagesimal. Assim, 1h 4min 23s é igual a 1x3600 (60x60) + 4x60 + 23 = 6023s.

Nosso sistema de numeração também é posicional. Temos símbolos diferentes para os números de 1 a 9, e o dez é representado pelo próprio 1, mas em uma posição diferente. Por isso dizemos que nosso sistema é um *sistema posicional de numeração de base dez*.

Uma grande vantagem dos sistemas posicionais, que é utilizada em nosso sistema decimal, é que os mesmos símbolos são suficientes para escrever qualquer número, inteiro ou fracionário. Os chamados "algarismos", $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ nos permitem escrever qualquer número, desde a massa de um próton até o número de partículas atômicas do universo. Os egípcios, os gregos e os romanos, por exemplo, não adotavam sistemas posicionais. Seus sistemas eram "aditivos", isto é, somavam-se os valores de cada símbolo usado na representação de um número para se ter este número (o sistema romano era aditivo-subtrativo, com uma regra que especificava quando somar e quando subtrair valores). Outra grande vantagem de um sistema posicional, como o nosso, é que neles é possível desenvolver algoritmos eficientes para realizar operações.

Em nosso sistema de numeração, no número decimal 125, o algarismo 1 representa 100, o 2 representa 20 e o 5 representa 5. Assim, podemos escrever que $125 = 1\times 10^2 + 2\times 10^1 + 5\times 10^0$. O mesmo é válido para um número que, além de uma parte inteira, contenha também uma parte fracionária. Por exemplo, no número $125,38$ os algarismos 3 e 8 representam $3\times 10^{-1} + 8\times 10^{-2}$.

Generalizando, podemos representar um número racional qualquer, r, na base 10, escrevendo

$$r = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_0 10^0 + a_{-1}10^{-1} + \ldots + a_{-t}10^{-t},\ n,\, t \in \mathbb{N}.$$

Isto significa que $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_0 10^0$ é a parte inteira e $a_{-1}10^{-1} + \ldots + a_{-t}10^{-t}$ é a parte fracionária deste número.

Suponhamos agora que queiramos escrever o número racional r em um sistema de numeração posicional cuja base é um número natural b diferente de 1. Para isso, escrevemos

$$r = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 b^0 + a_{-1}b^{-1} + \ldots + a_{-t}b^{-t}. \tag{1.1}$$

Isto significa que $a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 b^0$ é a parte inteira e $a_{-1}b^{-1} + \ldots + a_{-n}b^{-n}$ é a parte fracionária deste número. Logo, o número será escrito, na base b, como $a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-t}$.

Qual a vantagem de se utilizar a base sessenta, ou seja, um sistema *sexagesimal*? A divisibilidade por inteiros pequenos é uma importante característica a ser levada em conta no momento de escolhermos a "base" para um sistema de numeração. A base 12 está presente até hoje no comércio quando usamos a dúzia, justamente pelo fato do número 12 ser divisível por 2, 3 e 4. Uma das vantagens do sistema sexagesimal é que o número sessenta é divisível por todos os inteiros entre 1 e 6, o que facilita o cálculo dos inversos multiplicativos dos números expressos nesta base, como veremos adiante.

A Figura 1.5 mostra alguns exemplos de números escritos no sistema sexagesimal usado pelos babilônios.

Observamos que a leitura mais fácil deve ser feita da direita para a esquerda e que este sistema dá margem a algumas ambiguidades. Por exemplo, usando duas cunhas, que representam cada uma delas o número "um", temos o número 2 ou o número 61. Na representação do número 2, este problema é resolvido unindo-se bem os dois símbolos. Mas como diferenciar 1 de 60? Neste último caso, houve uma época em que se usava o símbolo de 1 com tamanho diferente para representar 60. Este hábito talvez esteja na origem do sistema posicional.

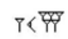
Cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
	1;15 = 1x60 + 15	75
	1;40 = 1x60 + 40	100
	16;43 = 16x60 + 43	1003
	44;26;40 = 44x3600 + 26x60 + 40	160000
	1;24;51;10 = 1x216000 + 24x3600 + 51x60 + 10	305470

Figura 1.5

Quando os símbolos se tornaram padronizados, para facilitar os registros, a diferenciação entre o número 1 e as potências de 60 dependia do contexto, que permitia determinar a ordem de grandeza dos números com que se estava lidando em cada problema.

E como escrever os números decimais $3,601$ e $7,200$? No sistema dos babilônios estes números seriam escritos também como $\triangledown\triangledown$. Algumas vezes era deixado um espaço entre os dois símbolos para marcar uma coluna vazia. Esta solução não era estendida à expressão de uma coluna vazia no fim do número, logo não seria possível diferenciar 7.200 de 2 e de 120. No entanto, o contexto do problema permitia distinguir com que número se estava lidando.

Um período babilônio de que temos bastante evidência é a época do Império Selêucida, que se estabeleceu por volta do ano 300 a.E.C., no qual a astronomia estava bastante desenvolvida e empregava técnicas matemáticas sofisticadas. Os astrônomos selêucidas, talvez pela necessidade de lidar com números grandes, chegaram a introduzir um símbolo para designar um zero, ou melhor, uma coluna vazia. No caso de 3.601 escrevia-se 1; separador; 1. O separador era simbolizado por dois traços inclinados.

O símbolo usado como separador pode ser considerado como um tipo de "zero", dada sua função no sistema posicional; no entanto, ele não era usado para diferenciar 1, 60 e 3.600, ou seja, não podia ser usado como último algarismo, nem podia ser resultado de um cálculo. Este separador, portanto, não era exatamente o que chamamos de zero, pois não era um número.

Exercícios

1.1. Como determinar os coeficientes a_n, a_{n-1}, ... em (1.1)?

1.2. Escreva, no sistema de base 60, o número representado em nossa base decimal por $234,572$.

1.3. Escreva, em nosso sistema decimal, os números seguir, representados, em base 60, por [2]

1. $23;15,4;17;9;45$.
2. $1;1;1,1;1;1;$
3. Como você escreveria, em nosso sistema, o número sexagesimal $1;1;1;1;1;1$?
4. Como os babilônios representariam o número, dado em nosso sistema, por $0,4321$? (Lembre-se de que os babilônios não conheciam o zero).

1.4. Mostre que, na base sessenta, os zeros não aparecem com tanta frequência quanto no sistema decimal.

1.5. Exprima um número n na base dez. Faça o mesmo para a base sessenta e veja porque há mais frações finitas na base dez do que na base sessenta. Esta é uma das razões pelas quais os astrônomos, desde os gregos, como Ptolomeu, até Kepler e Copérnico sempre preferiram a base sessenta.

1.6. Multiplique por 60 o número cuja representação sexagesimal é

$$a_1, b_1; b_2; b_3; \ldots, b_n.$$

1.7. Divida por 60 o número cuja representação sexagesimal é

$$a_1, b_1; b_2; b_3; \ldots; b_n.$$

[2] Usaremos o símbolo ";" como separador dos "algarismos" dentro da parte inteira ou da parte fracionária; e o símbolo "," para a separação entre a parte inteira e a parte fracionária". Muitos historiadores estrangeiros fazem o contrário, ou seja, usam o ponto e vírgula para separar a parte inteira da parte fracionária e a vírgula para separar os algarismos dentro da parte inteira ou da parte fracionária. Decidimos inverter esta representação uma vez que, no Brasil, a vírgula é usada normalmente para separar a parte inteira da parte fracionária e já estamos habituados a esta utilização do símbolo ",".

1.3 Cálculos e problemas matemáticos babilônios

Como os babilônios "faziam contas"? Eles sabiam somar, subtrair, multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas e mostraremos, a seguir, como eles efetuavam algumas destas operações, e como resolviam problemas.

Em primeiro lugar, eles dispunham de tabletes com a mesma função de nossas "tabuadas". A maioria das operações realizadas pelos babilônios usava diretamente estes tabletes. No caso da multiplicação, elas eram fundamentais. Basta observar que os cálculos elementares, ou seja, aqueles que são os correspondentes à nossa tabuada, incluem multiplicações até 59×59! Isso torna necessária a presença de tabletes com "tabuadas", mesmo para os escribas mais experientes.

Vejamos, inicialmente, um exemplo de uma "tabuada" de multiplicação por 25. Nos tabletes, os textos entre parênteses ficam subentendidos, só são escritos os multiplicadores $(1, 2, 3, \ldots)$ e os resultados da multiplicação, $(25, 50, \ldots)$:

1 (vezes 25 é igual a) 25
2 (vezes 25 é igual a) 50
3 (vezes 25 é igual a) $1;15$
4 (vezes 25 é igual a) $1;40$
5 (vezes 25 é igual a) $2;05$
6 (vezes 25 é igual a) $2;30$
7 (vezes 25 é igual a) $2;55$
...

As tabelas de multiplicação fornecem os múltiplos de um número. Em geral, dado o número p, a tabela dos múltiplos de p não mostra os produtos $1 \times p$, $2 \times p$, ..., até $59 \times p$. São dados os produtos $1 \times p$, $2 \times p$, ..., até $20 \times p$ e, deste número em diante, somente os produtos $30 \times p$, $40 \times p$, $50 \times p$. Para calcular, por exemplo, $37 \times p$, é suficiente somar $30 \times p$ com $7 \times p$.

A adição é feita de maneira inteiramente análoga à nossa adição usual em base 10. Isso não é de espantar pois nosso algoritmo se baseia nas propriedades associativa, distributiva e comutativa da adição, e as mesmas podem ser utilizadas em um sistema cuja base seja qualquer número natural, b, maior do que 1.

Os exemplos mostrados abaixo têm finalidade puramente didática, não reproduzem a maneira como os babilônios efetuavam operações. Em verdade, a adição e a subtração são simples, e seus resultados eram indicados sem mais sobre como foram encontrados.

Exemplo 1.1. *Vejamos exemplos de operações feitas no sistema sexagesimal babilônio.*

1. $1;30,27;50 + 0;29,38;13 = 2;0,6;3$.

   Temos, montando o algoritmo de maneira exatamente igual à nossa:

60^1	60^0	60^{-1}	60^{-2}
1	1	1	
1	30	27	50
0	29	38	13
2	00	06	03

2. $2;30,4;38 - 40,5;15 = 1;49,59;23$.

   O algoritmo também é análogo ao que usamos em base 10.

60^1	60^0	60^{-1}	60^{-2}
1	1	1	
2	30	4	38
	40	5	15
2	00	06	03

3. $11;32 \times 25$.

Podemos desenhar 4 colunas indicando o multiplicando e a ordem de grandeza do resultado (Figura 1.6). [3]

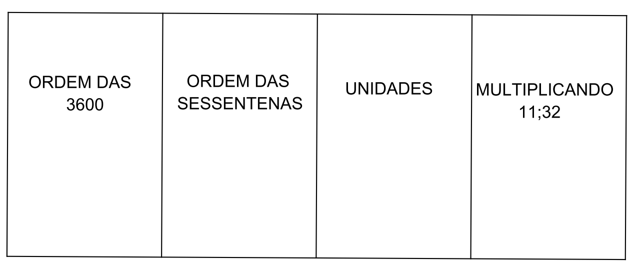


Figura 1.6

Em seguida, procuro na tábua de multiplicação por 25 o correspondente à multiplicação por 2 (50) e reproduzo o valor encontrado na coluna das unidades (Figura 1.7).

Agora, apago o 2 na coluna do multiplicando e escrevo o valor correspondente a 30 na tábua de multiplicação por 25 $(12;30)$ (Figura 1.8).

Apago o 30 da coluna do multiplicando e procuro na tábua de multiplicação por 25 o valor correspondente a 11 $(4;35)$. Como 11 é de uma ordem superior

[3] Frisamos que este exemplo tem finalidades puramente didáticas. Ele não reproduz exatamente como uma multiplicação era feita pelos babilônios.

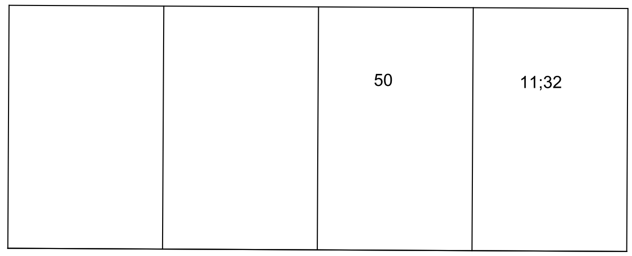


Figura 1.7

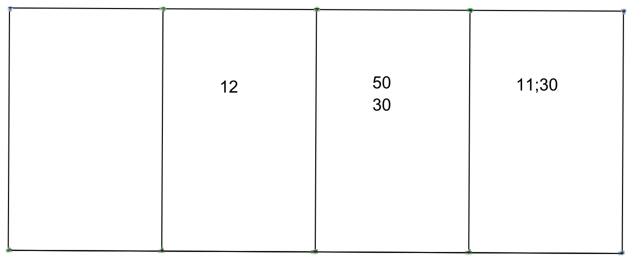


Figura 1.8

à utilizada até este ponto, escrevo 4 na coluna das 3.600 e 35 na coluna das sessentenas (Figura 1.9).

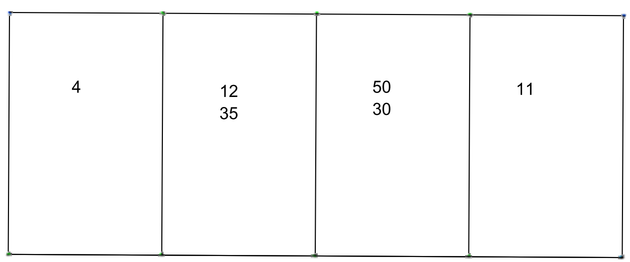


Figura 1.9

Podemos, agora, apagar o 11 e só resta simplificar cada coluna para obter o resultado (Figura 1.10).

Assim, o resultado é $4; 48; 20$.

As divisões eram feitas com o auxilio de tabletes de inversos multiplicativos, que listavam números e seus inversos multiplicativos. Esses inversos hoje seriam escritos como frações do tipo $\frac{1}{n}$. A divisão de m por n era efetuada pela multiplicação de m pelo inverso multiplicativo de n, ou seja, em nossa linguagem moderna, desconhecida para os babilônios, $\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$. Havia, no entanto, um

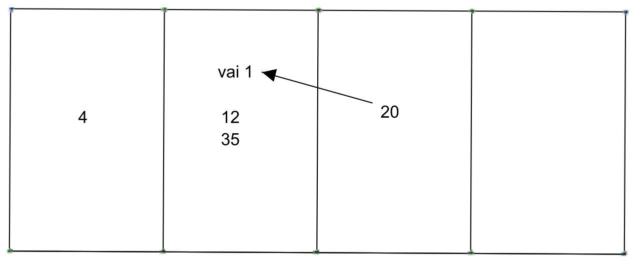


Figura 1.10

problema com os números cujo inverso não possuem representação finita em base sessenta, como 7 ou 11. Nós temos o mesmo problema com o número 3, pois o desenvolvimento decimal de $\frac{1}{3}$ é infinito.

Exemplo 1.2. *Mostraremos que os inversos de* 7 *e de* 11 *não têm representação finita em base sessenta.*

Com efeito, o número $\frac{1}{k}$ tem representação finita em base sessenta se pode ser escrito como $\frac{1}{k} = 0, a_1 a_2 \dots a_n = \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \dots + \frac{a_n}{60^n}$. Multiplicando e dividindo todas as parcelas por 60^n, temos

$$\frac{1}{k} = (a_1 60^{n-1} + \dots + a_n 60^0)/60^n = \frac{a}{60^n}.$$

em que o numerador é um inteiro. Disso, segue-se imediatamente que

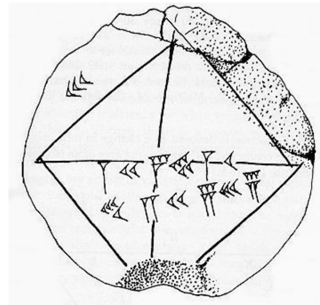
$$ak = 60^n = 2^{2n} \times 3^n \times 5^n.$$

Então, pelo teorema fundamental da aritmética, o produto ak só pode conter os fatores primos $2,\ 3$ e 5. Logo, a só pode ter estes fatores. Isso não acontece para 7 e 11.

O fato de não se poder representar de modo finito os inversos de 7 e 11, em base sessenta, não significava que não fosse possível realizar multiplicações do tipo $22 \times \frac{1}{11}$. Da mesma forma, ainda que $\frac{1}{3}$ não possua representação finita na base dez, $6 \times \frac{1}{3}$ possui, pois o resultado aqui é igual a 2. No caso dos babilônios, estas divisões eram escritas em tabletes, assim como a solução de problemas análogos que aparecem na extração de raízes.

Este procedimento de divisão nos leva a concluir que a utilização dos tabletes não servia apenas à memorização de tabuadas, o que seria um papel acessório. Para que a técnica utilizada na divisão fosse rigorosa, havia uma necessidade intrínseca de se representar em tabletes as divisões por números cujo inverso não possuem representação finita em base sessenta. Isto porque, no caso de $\frac{1}{n}$ não

(a)



(b)

Figura 1.11 YBC 7289

possuir representação finita, o resultado da divisão de m por n tem que estar registrado em um tablete. Se esta operação fosse realizada pelo procedimento usual, ou seja, multiplicando-se m por $\frac{1}{n}$, o resultado obtido não seria correto.

1.3.1 O cálculo da raiz quadrada

Além das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, os babilônios sabiam também calcular potências e raízes quadradas, que eram registradas em tabletes.

O exemplo mais famoso de cálculo de raízes quadradas pelos babilônios encontra-se na tablete YBC 7289, de que mostramos uma imagem e um desenho, o qual permite ler, com mais clareza, os números que constam do tablete (Figura 1.11), de entre os anos 2.000 e 1.600 a.E.C., produzido em um contexto escolar. O tablete, de forma grosseiramente circular, tem um diâmetro de aproximadamente 7 cm. Próximo a um dos lados do quadrado vemos o número, escrito no sistema sexagesimal babilônio, 30. Próximo a uma das diagonais, encontram-se os números $1,24;51;10$[4] e $42;25;35$. [5]

Ora, $30 \times 1,24;51;10 = 42;25;35$. Segundo Fowler e Robson ([64]), a constante $1,24;51;10$ encontra-se em uma *tabela de coeficientes*,[6] o tablete YBC 7243, e é chamado a *diagonal do quadrado*. Assim, a conclusão inevitável é

[4] A posição da ",", que separa a parte inteira da parte fracionária, é feita pelo contexto do problema. Observando a Figura 1.11, vê-se que a consideração desse contexto era essencial para determinar a ordem de grandeza dos números com os quais se estava lidando.

[5] Lembre-se que usamos "," para separar a parte inteira da parte fracionária e ";" para separar os algarismos.

[6] As tabelas de coeficientes eram essenciais na Matemática da Babilônia. Elas eram tabletes de referência que continham números que ocorrem em vários tipos de problemas. Elas são *listas de constantes*.

que a diagonal d do quadrado é igual a $l \times 1,24;51;10$, em que l é o lado do quadrado, no nosso caso 30 ($1/2$ em nosso sistema de numeração decimal). Vemos portanto que os escribas babilônios sabiam que $l/d \approx 1,24;51;10$. De fato, $(1,24;51;10)^2 = 1,24;51;10$, o que dá uma boa aproximação de $\sqrt{2}$.

Apresentamos a seguir a proposta de Katz ([94], p. 28) para explicar como os babilônios chegaram a esta raiz quadrada. O método era bastante interessante, uma vez que permitia obter valores aproximados para raízes que sabemos hoje serem irracionais. Escrito em linguagem atual, o procedimento para calcular a raiz de um número k se baseava, segundo Katz, no resultado geométrico explicado a seguir.

Na figura 1.12, se o segmento AE é cortado em um ponto B, o quadrado sobre AE é igual ao quadrado sobre AB mais o quadrado sobre BE mais duas vezes o retângulo formado por AB e BE. Se AB medir a e BE medir c, trata-se da versão geométrica da igualdade que escrevemos hoje em dia como $(a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$.

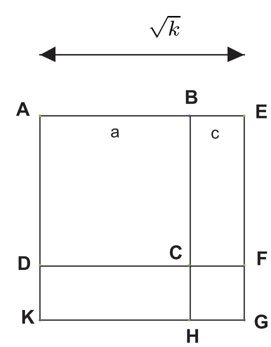


Figura 1.12

Calcular a raiz de k é achar o lado de um quadrado de área k. Logo, podemos tentar colocar no interior deste quadrado o maior quadrado possível cujo lado conhecemos e usar o resultado geométrico acima para encontrar o resto. Ou seja, se a é o lado do quadrado conhecido, obtemos que a raiz de k, $\sqrt{k}$, é igual a $a + c$. Para achar uma raiz melhor do que a, vamos procurar uma boa aproximação para c, o que pode ser feito observando a área da região poligonal $BEGKDC$ (Figura 1.12).

A área da região poligonal é obviamente igual a $k - a^2$. Por outro lado, ele pode ser decomposto em dois retângulos de lados a e c e em um quadrado de lado c. Assim,

$$2ac + c^2 = k - a^2.$$

Se c for bem pequeno, podemos desprezar c^2, e obtemos

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}.$$

Faça

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right). \tag{1.2}$$

Então, $a' \approx a + c$ é uma aproximação de $\sqrt{k}$ melhor do que a, como pode ser visto imediatamente pela interpretação geométrica que apresentamos. Isso decorre também do do fato que se $a < \sqrt{k}$, então $k/a > \sqrt{k}$, e se $a > \sqrt{k}$, então $k/a < \sqrt{k}$.

Com efeito, como estamos lidando com números positivos não-nulos,

$$a < \sqrt{k} \Longleftrightarrow a\sqrt{k} < \sqrt{k}\sqrt{k} = k \Longleftrightarrow \sqrt{k} < \frac{k}{a}.$$

A segunda parte da afirmação é demonstrada de maneira análoga.

1.3.2 Problemas do segundo grau na Babilônia

Além de tabletes de resultados de operações, existem também outras que contêm procedimentos, como se fossem exercícios resolvidos. Estes exercícios correspondem a problemas que resolveríamos hoje por meio de equações. Analisaremos alguns destes procedimentos com detalhes, a fim de mostrar, contudo, o quanto seria anacrônico considerar que os babilônios soubessem resolver equações. Durante bastante tempo, até recentemente, os historiadores realmente acreditavam, erroneamente, que os babilônios sabiam resolver equações, "tinham uma álgebra", que mais tarde seria expressa geometricamente pelos gregos.

Os dois exemplos a seguir encontram-se na coleção do British Museum, no tablete BM 13901. O primeiro é o problema #1, traduzido usualmente da seguinte maneira:

Exemplo 1.3. *Procedimento*: *"Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?"*

Solução:

1. tome 1
2. fracione 1 tomando a metade (:0,30)
3. multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15)
4. some 0,15 a 0,45 (:1)

5. 1 é a raiz quadrada de 1
6. subtraia os 0,30 de 1
7. 0,30 é o lado do quadrado

Cada passo do procedimento acima era executado com a ajuda de um tablete, por exemplo, a etapa (3) exigia a consulta a um tablete de multiplicação ou de quadrados e a etapa (5), evidente neste caso particular, era resolvida em geral pela consulta a um tablete de raízes quadradas.

Neste mesmo tablete, BM 13901, há um problema parecido, o #3, traduzido como segue:

Exemplo 1.4. *Procedimento*: *"Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante:* $0,20$*"*

Solução:

1. tome $1;0$
2. subtraia o terço de $1;0$, ou seja $0,20$, obtendo $0,40$
3. multiplique $0,40$ por $0,20$ obtendo $0,13;20$
4. encontre a metade de $0,20$ $(: 0,10)$
5. multiplique $0,10$ por $0,10$ $(: 0,1;40)$
6. adicione $0,1;40$ a $0,13;20$ $(: 0,15)$
7. $0,30$ é a raiz quadrada
8. subtraia $0,10$ de $0,30$ $(: 0,20)$
9. tome o recíproco de $0,40$ $(1,30)$
10. multiplique $1,30$ por $0,20$ $(: 0,30)$
11. $0,30$ é o lado do quadrado

Atualmente, os problemas dos Exemplos 1.3, 1.4 e 1.5, o qulal ainda será visto, poderiam ser resolvidos por uma equação do segundo grau. Obviamente, na época de que tratamos não se escrevia uma equação geral do tipo $Ax^2+Bx+C =$

0, pois não havia símbolos para designar os coeficientes e as incógnitas. Logo, não havia sequer um sentido para aquilo que concebemos como "equação".

Resolvemos problemas como os acima, hoje, criando regras gerais que podem ser aplicadas a exemplos particulares. Os exemplos particulares são vistos como "casos" de um tipo de problema genérico. Os babilônios obtêm os mesmos resultados construindo uma lista de exemplos típicos, empregando-os em seguida para resolver novos problemas e não possuíam uma linguagem para expressar estes casos de modo genérico. No entanto, isto não significa que esta Matemática não fosse dotada de um certo tipo de generalidade. Na verdade, os primeiros passos do problema 3 servem para reduzir seu enunciado ao do problema 1, sendo possível interpolar o procedimento já enunciado para este problema, considerado um exemplo típico.

O modo de enunciar o procedimento babilônio para o caso geral de uma equação de tipo $Ax^2 + Bx = C$ levou alguns historiadores a conjecturarem que a Matemática babilônia seria de natureza primordialmente algébrica. Entre eles destaca-se O. Neugebauer, um dos principais responsáveis pelas primeiras traduções de textos matemáticos babilônios.

Com efeito, dada uma equação do tipo $Ax^2 + Bx = C$, o procedimento acima pode ser traduzido algebricamente no roteiro descrito abaixo para encontrar a raiz $L = \left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) \times \frac{1}{A}$.

1) Multiplique A por C (obtendo AC)
2) Encontre metade de B (obtendo $\frac{B}{2}$)
3) Multiplique $\frac{B}{2}$ por $\frac{B}{2}$ (obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2$
4) Adicione AC a $\left(\frac{B}{2}\right)^2$(obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC$)
5) A raiz quadrada é $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC}\right)$
6) Subtraia $\frac{B}{2}$ da raiz acima
7) Tome o recíproco de A (obtendo $\frac{1}{A}$)
8) Multiplique $\frac{1}{A}$ pela raiz para obter o lado do quadrado
9) O lado do quadrado é $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) \times \frac{1}{A}$

Este paralelo, no entanto, decorre das traduções tendenciosas propostas pelos historiadores mais antigos, que pressupunham, implicitamente, a natureza algébrica da Matemática babilônia. Temos hoje disponíveis trabalhos históricos, como os de J. Høyrup, mostrando que estas traduções não eram fiéis ao estilo da Matemática praticada na época. A partir daí, novas traduções foram propostas, que podem nos levar a conclusões bastante distintas sobre a natureza da Matemática nesta cultura. Traduzimos para o português, com algumas simplificações, a nova transcrição proposta em [87].

Exemplo 1.5. (*nova tradução*).

Procedimento: "A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive $0,45$" (Estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação – o lado)

Solução:

1. 1 é a projeção
2. quebre 1 na metade (obtendo $0,30$) e retenha $0,30$, obtendo $0,15$
3. agregue $0,15$ a $0,45$
4. 1 é o lado igual
5. retire do interior de 1 os $0,30$ que você reteve
6. $0,30$ é a confrontação

Esta versão motiva uma nova interpretação do procedimento, de natureza geométrica. Em primeiro lugar, faz-se uma "projeção" de 1, que permite interpretar a medida do lado procurado, que chamaremos de l, concretamente como um retângulo de lados 1 e l. Os babilônios transformavam, por meio de uma projeção, esta linha de comprimento l em um retângulo com lados medindo, respectivamente, l e $1l$. Ou seja, eles "projetavam" o lado l para que se tornasse o lado de um retângulo com área igual a l. (Figura 1.13).

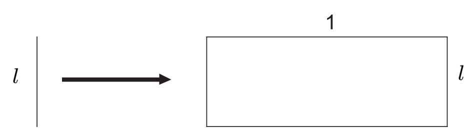


Figura 1.13 – Passo (I): Projeção do lado l

Na figura 1.14, temos um retângulo de lados 1 e l e um quadrado de lado l. Esta figura será "cortada e colada" a fim de se estabelecer uma equivalência entre medidas de áreas que resolva o problema.

No passo (II), ilustrado na Figura 1.15, "quebramos" 1 na metade, o que divide o retângulo inicial em duas partes. Rearrumando as duas metades do retângulo, obtemos a figura 1.15, cuja área é igual à área dada inicialmente $(0,45)$.

Os lados quebrados, na figura em forma de l da Figura 1.15, delimitam um quadrado de lado $0,30$ que "retenho", ou seja, multiplico por ele mesmo, obtendo

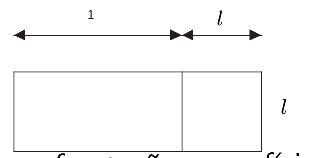


Figura 1.14 – Enunciado: A superfície e a minha confrontação acumulei

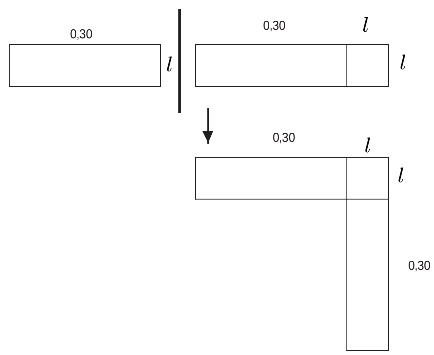


Figura 1.15 – Passo (II): quebre l no meio

a área de um novo quadrado $(0, 15)$. Esta área pode ser agregada ao conjunto, completando o quadrado e formando um quadrado maior de área 1 (Figura 1.16).

Como 1 é o quadrado de 1, 1 é o lado igual. Deste lado, retiro o lado do quadrado menor (0,30). Obtemos, assim, que o lado procurado é 1 - 0,30 $=$ 0,30. É importante observar que este lado é chamado "confrontação" e o enunciado do problema pede para acumular uma área e uma confrontação. Ou seja, queremos somar a área de um quadrado com o seu lado, que seria a confrontação da área. Para efetuar esta operação, vimos que os babilônios transformavam esta linha em um retângulo, por isso o lado é uma confrontação (da área).

Este lado é chamado "confrontação" e o enunciado do problema pede para acumular uma área e uma confrontação. Ou seja, queremos somar a área de um quadrado com o seu lado, que seria a confrontação da área. Para efetuar este procedimento, os babilônios transformavam, esta linha, digamos de comprimento l, em um retângulo com um lado dado por l e o outro medindo 1. Sendo assim, eles projetavam o lado l na direção oposta à do quadrado, obtendo um retângulo cuja área possui medida igual à do lado em questão.

Este procedimento é interessante, pois, como veremos mais tarde, desde a época grega, e pelo menos até o século XVII, a geometria teve que respeitar a homogeneidade das grandezas. Isto quer dizer que não era permitido somar uma área com um segmento de reta. O procedimento babilônio mostra que eles não experimentavam nenhuma dificuldade deste tipo, uma vez que possuíam um procedimento concreto para transformar um segmento de reta em um retângulo:

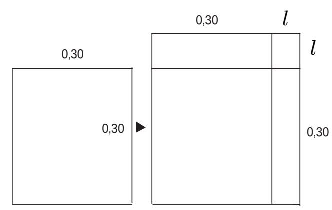


Figura 1.16 – Passos (III) e (IV): Retenha $0,30$ e agregue o resultado a $0,45$. O quadrado maior tem área 1 e lado 1

aquele que foi traduzido aqui como "projeção". Høyrup mostra que houve uma fase da Matemática babilônia em que eram considerados segmentos com espessura, que foram substituídos pelos retângulos descritos acima em escritos posteriores, pertencentes a uma tradição de formação de escribas. Exemplos como este, envolvendo operações de "cortar e colar" figuras geométricas parecem ter sido comuns na época. Høyrup caracteriza estas práticas como um tipo de "geometria ingênua".

Apesar de ser bastante plausível a hipótese de que os procedimentos babilônios usavam raciocínios geométricos, seria precipitado concluir que, ao invés de possuírem uma álgebra, eles fizessem geometria. Como já sinalizamos, devemos ter cuidado ao aplicar as definições disciplinares que usamos hoje para caracterizar a Matemática dos povos antigos.

Exercícios

1.8. Verifique, trabalhando no sistema sexagesimal dos babilônios, que o produto de $37;28$ por 19 é igual a $11;51;52$.

1.9. Encontre os resultados das operações indicadas, **USANDO O SISTEMA SEXAGESIMAL DOS BABILÔNIOS**, sem converter os números para a base 10!

1. $59;27 + 59;40 = 1;59;7$.
2. $48;32 \times 3 = 2;25;36$.
3. $48;32 \times 3,2 = 2;27;12,64$.
4. $2;1;1 - 1;2;2 = 58;59$.
5. $23;18 : 3 = 7;40;6$.
6. $1,30 : 3 = 0,30$.

1.10. Trabalhando no sistema sexagesimal, ache o inverso multiplicativo de $\frac{1}{45}$.

1.11. Usando o sistema sexagesimal, divida 30 por 45.

1.12. Os números racionais que têm representações sexagesimais finitas são exatamente aqueles cujos denominadores são produtos de potências dos números 2, 3 e 5. Nos outros casos, os desenvolvimentos sexagesimais são infinitos. Calcule, aproximadamente, com cinco casas sexagesimais, $\frac{5}{42}$.

1.13. Escreva o procedimento seguido no Exemplo 1.3 em linguagem atual e o compare com nosso método de resolução.

1.14. Interprete, o seguinte problema, e o resolva de maneira análoga à do Exemplo 1.5.

Retirei meu lado quadrado de dentro da área, de maneira que [o resultado] fosse $14;30$. Você escreve 1, a projeção. Você quebra metade de 1. Você combina $0,30$ e $0,30$. Você adiciona $0,15$ a $14;30$. $14;30,15$ quadrados $29,30$. Você adiciona $0,30$ que você tinha combinado com $29,30$, de maneira que o lado quadrado é 30.

Sugestão: Neste caso, é dada a diferença entre a área e o lado do quadrado, o qual deve ser calculado. É necessário remover uma "projeção" do quadrado. Então, a diferença entre os dois lados é dividida em duas partes iguais e rearrumada em forma de gnomon.

1.15. Considere o seguinte problema do tablete VAT 6598, da Biblioteca do Vaticano:

Se o portão tem altura $0,40$ (cúbitos) e diagonal $0,41;15$, qual sua largura? Você: tome $0,40$, a altura, de $0,41;15$, a diagonal. O resto é $0,01;15$. Duplique $0,01;15$. Você verá $0,02;30$. Multiplique $0,40$, o comprimento, por $0,02;30$ o fator que você viu. Você verá $0,01;40$. Qual é a raiz quadrada? $0,10$ é a raiz quadrada. A largura é $0,10$. O método.

Como você formularia o procedimento do escriba usando nossa simbologia algébrica moderna?

1.16. Forneça uma interpretação de porque, no tablete YBC 7289, o lado do quadrado tem comprimento 1/2 e não, como parece mais natural para nós, 1.

1.17. Represente, em base 10, o número sexagesimal $1,24;51;10$. Qual o erro cometido se tomarmos esse número como aproximação de $\sqrt{2}$?

1.18. No procedimento proposto por Katz, que reencontraremos no algoritmo de Hierão (Veja a página 141), e também no método de Newton para o cálculo de raízes quadradas, qual teria sido a aproximação inicial escolhida pelo escriba para obter o resultado $1,24;51;10$?

1.19. Tome $1,41$ como aproximação inicial de $\sqrt{2}$ no algoritmo proposto por Katz. Qual aproximação de $\sqrt{2}$ você obtém? E se tomarmos esta nova aproximação e aplicarmos a ela o mesmo algoritmo, qual é o resultado obtido? E se dermos mais um passo, ou seja, se usarmos esta segunda aproximação no algoritmo babilônio, qual será o resultado encontrado? A iteração do algoritmo é a ideia do algoritmo de Hierão, o qual permite o obtermos aproximações sucessivas, cada vez melhores, para a raiz quadrada de um número.

1.4 Sistemas de numeração no Antigo Egito

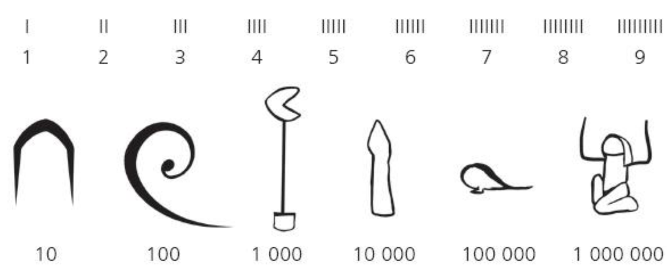


Figura 1.17

Segundo os estudiosos, os egípcios desenvolveram um sistema de numeração e uma escrita mais ou menos na mesma época que os babilônios, ou seja, por volta do ano 3000 a.E.C. Como em nosso sistema de numeração, os antigos egípcios empregavam um sistema decimal. Mas, diferente dos babilônios, o sistema de numeração no Egito não era posicional, era *aditivo*.

O número 1 era representado por uma barra vertical e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras. Em seguida, os números são múltiplos de dez e, por esta razão, dizemos que o sistema é decimal. O número *dez* é uma alça; *cem*, uma espiral; *mil*, a flor de lótus; *dez mil*, um dedo; *cem mil*, um sapo e *um milhão*, um deus com as mãos levantadas (Veja a Figura 1.17).

Para pensar

O sistema de numeração egípcio não é prático para escrever números muito grandes. Por exemplo, como você escreveria, no sistema egípcio, o número 1×10^{255} Quantos deuses seriam necessários? Qual a característica de nosso sistema de numeração que permite vencer esta dificuldade?

A convenção para escrever e ler os números é simples: os números maiores vêm escritos na frente dos menores e, se há mais de uma linha de números, devemos começar de cima. Sendo assim, para escrevermos um número, basta escrevermos, seguindo esta convenção, todos os símbolos, e a soma fornece o número desejado. Por exemplo, qual o número representado na Figura 1.18?

Figura 1.18

Como o sistema é aditivo, e os números são obtidos pela soma de todos os números representados pelos símbolos, basta então escrevermos:

$$1.000 + 1.000 + 1.000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3.244.$$

1.4.1 Frações

Até aqui falamos apenas de como os egípcios representavam os números inteiros. E os números fracionários? Eles usavam um conceito que, para nós, equivale às frações unitárias, da forma $\frac{1}{n}$. Uma fração, com numerador diferente de 1 a ter uma representação no sistema egípcio era a fração $\frac{2}{3}$, e a fração $\frac{1}{2}$ era por vezes representada por um símbolo especial. A Figura 1.19 mostra como os egípcios escreviam algumas frações.

As outras frações eram representadas escrevendo os números inteiros com uma elipse em cima, significando "parte". Por exemplo, $\frac{1}{7}$ seria escrito com a elipse sobre sete barras verticais (Veja a Figura 1.20).

O símbolo oval colocado acima do número não possui o mesmo sentido daquilo que chamamos hoje de "numerador". Nosso numerador indica quantas partes estamos tomando de uma subdivisão em um dado número de partes. Na designação egípcia, o símbolo oval, que exprime a palavra "parte" não possui

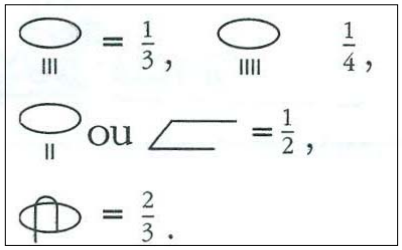


Figura 1.19

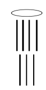


Figura 1.20

um sentido cardinal, mas ordinal. Ou seja, ele indica que, em uma distribuição em n partes iguais, tomamos a n-ésima parte, aquela que conclui a subdivisão em n partes. é como se estivéssemos distribuindo algo por n pessoas e $1/n$ é o quanto a última pessoa irá ganhar. Logo, é um certo abuso de linguagem dizer que, na representação egípcia, as frações possuem numerador 1.

Por que os egípcios podem ter se restringido a frações deste tipo? Será que esta representação é mesmo uma *limitação* da Matemática egípcia? Será que o sistema egípcio possui alguma razão de ser? A resposta é sim e um dos sentidos desta representação está ligado justamente ao procedimento de divisão. Podemos imaginar um exemplo para entender a que modo de raciocínio esta representação se relaciona.

Exemplo 1.6. *Como repartir a quantidade de grãos contida em* 5 *sacos de feijão por oito pessoas.*

Começamos por imaginar que, se tivéssemos 4 sacos, cada pessoa deveria receber a metade de cada saco. Sendo assim, como são cinco sacos, cada pessoa deve receber, no mínimo, a metade de cada saco, ou seja, $\frac{1}{2}$. Fazendo isso, sobrará um saco, que poderá ser dividido pelas oito pessoas, cada uma recebendo mais $\frac{1}{8}$ deste saco. Sendo assim, podemos dizer que o resultado da divisão de 5 por 8 é $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Este resultado expressa diretamente o modo como a divisão foi realizada.

Em nosso modo de representar frações, este resultado equivaleria a $\frac{5}{8}$ o que significa que cada meio saco será dividido em quatro com o único objetivo de que a adição de frações seja homogênea, ou seja, para que somemos frações de mesmo denominador. Poderíamos perguntar se esta divisão de cada meio

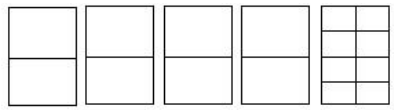


Figura 1.21

saco por quatro não é, de certo modo, artificial, e se ela não serve apenas para justificar a nossa técnica particular de somar frações.

Podemos entender as vantagens da representação egípcia a partir do problema de se representar uma divisão, por exemplo de 58 por 87. Se quisermos distribuir 58 coisas por 87 pessoas teremos que dividir primeiramente cada coisa em dois, obtendo 116 (58×2) metades. Daremos então uma metade para cada pessoa, restando 29 $(116 - 87)$ metades. Devemos em seguida dividir cada metade por três obtendo 87 (29×3) metades divididas por três, ou seja, 87 sextos. O resultado é quanto cada um vai receber do todo. É este raciocínio que está expresso no fato de que a representação egípcia de $58/87$ é $1/2 + 1/6$.

Para pensar

Qual seria uma vantagem da representação egípcia em relação ao nosso sistema? Para responder, tente decidir, usando a representação egípcia e a nossa, qual a maior fração: $58/87$ ou $5/8$?

Veremos, no exemplo seguinte, como converter uma fração qualquer em uma soma de frações egípcias distintas? Isto é sempre possível?

Exemplo 1.7. *Expressar* $3/7$ *como uma soma de frações com numerador* 1.

Em primeiro lugar, é necessário saber qual a maior fração com numerador 1 menor que 3/7.

1. Inverto $3/7$ obtendo $7/3$;
2. tomo o maior inteiro mais próximo da fração obtida (como $2 < 7/3 < 3$, o maior inteiro é 3);
3. $1/3 < 3/7$ é a maior fração com numerador 1 menor que $3/7$;
4. faço $3/7 - 1/3 = 2/21$, logo $3/7 = 1/3 + 2/21$;
5. repito o algoritmo para $2/21$.

(a) inverto $2/21$ obtendo $21/2$;

(b) $10 < 21/2 < 11$, o maior inteiro é 11)

(c) $1/11 < 2/21$ é a maior fração com numerador 1 menor que $2/21$;

(d) faço $2/21 - 1/11 = 1/231$, logo $2/21 = 1/11 + 1/231$;

(e) $3/7 = 1/3 + 1/11 + 1/231$.

A escrita de uma fração qualquer em frações unitárias deu origem a vários problemas, alguns deles muito difíceis. Por exemplo, em 1948 os matemáticos Paul Erdös e Ernst Straus conjecturaram que, qualquer que seja o número natural $n > 5$, então existem números naturais a, b e c, distintos entre si, tais que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Até hoje não se conseguiu provar esta afirmativa. Sabe-se, experimentalmente, que ela é verdadeira para $n < 10^{24}$, mas não se conhece uma demonstração para o caso geral.

Exercícios

1.20. Qual o número representado na Figura 1.22?

Figura 1.22

1.21. Como escreveríamos o número 3.568.327 no sistema egípcio?

1.22. Encontre a resposta para o exemplo 1.7 usando o algoritmo de divisão dos saquinhos e compare as respostas.

1.23. A representação de uma fração como uma soma de frações com numerador 1 é única?

1.24. Divida, como no Exemplo 1.6, 13 pães por 12 pessoas.

1.25. Qual a maior fração? $58/87$ ou $5/8$? Resolva este problema escrevendo as duas frações como somas de frações unitárias.

1.26. Prove que qualquer fração tem infinitas representações como soma de frações unitárias.

1.5 Operações e problemas no Antigo Egito

Vejamos como os egípcios efetuavam operações com números, e examinemos alguns dos problemas encontrados em textos matemáticos egípcios. No que segue, a fração $1/n$ será denotada por $\dot{n}$. Assim, $\dot{5}$ representa $\frac{1}{5}$, e $\dot{\overline{37}}$ representa $\frac{1}{37}$. Uma expressão do tipo $a\dot{n}$ representa $a+\frac{1}{n}$. Como já dissemos, além das frações unitárias, os egípcios usavam a fração $\frac{2}{3}$. Nós a representaremos por $\ddot{3}$. Observe que $2 \times \dot{3} = \ddot{3}$ e que $\ddot{3}$ dividido por 2 é igual a $\dot{3}$.

Exemplo 1.8. *Multiplique, usando o método egípcio,* 7 *por* 5*. Ou seja, tome* 5 *vezes o número* 7*.*

Veremos que multiplicar 7 por 5 é tomar 5 vezes o número 7, e NÃO tomar 7 vezes o número 5. Hoje, quando escrevemos 7×5 desaparece totalmente a assimetria existente ao escrevermos "multiplique 7 por 5". Isto não quer dizer que os egípcios não conhecessem a propriedade comutativa do produto, eles a utilizavam para simplificar cálculos, mas o algoritmo que empregavam para multiplicar estava baseado na distinção entre multiplicando e multiplicador.

Os egípcios procediam por duplicações sucessivas do multiplicando, 7.

\1	7
2	14
\4	28

Após fazer isso, marcavam com um símbolo, "\", os números da coluna da esquerda que somados dão 5, e somavam os números correspondentes na coluna da direita. No nosso caso, a resposta é 35.

Este processo egípcio repousa sobre o resultado geral, bem conhecido, que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de 2. Ou seja, se $n \in \mathbb{N}$, então existe k, número natural tal que,

$$n = \sum_{0}^{k} a_k 2^k = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 \cdots a_k 2^k.$$

Exemplo 1.9. *Multiplique, como os egípcios,* 27 *por* 15*, ou seja, tome* 15 *vezes o número* 27*.*

Temos:

\1	27
\2	54
\4	108
\8	216
16	432

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15 \Longrightarrow 27 \times 15 = 27 + 54 + 108 + 216 = 405.$$

Uma maneira mais rápida de resolver este problema, também usada pelos egípcios, é a seguinte:

$$\begin{array}{rl} 1 & 27 \\ \backslash 10 & 270 \\ \backslash 5 & 135 \end{array}$$

(Da segunda para terceira linha, os números de cada coluna foram divididos por 2).

Então,

$$10 + 5 = 15 \Longrightarrow 27 \times 15 = 270 + 135 = 405.$$

□

Os escribas egípcios dispunham de muitas tabelas, e usavam livremente seus resultados ou os que eles já conheciam por serem usados frequentemente em problemas. Assim, por exemplo, encontramos no *Papiro Ahmes*, o cálculo de como reduzir $\frac{2}{n}$ a uma soma de partes, para n ímpar entre 5 e 101. Entre estes resultados, encontra-se o seguinte

$$\frac{2}{5} = \dot{3}\ \overline{\dot{15}}. \tag{1.3}$$

Vejamos agora como os egípcios efetuavam divisões. Eles transformavam o problema de dividir a por b em achar um número x tal que b vezes $x = a$. Assim, dividir a por b significava, para eles, por quanto devo multiplicar b para obter a.

Exemplo 1.10. *Os três problemas a seguir, do papiro Ahmes, mostram como os egípcios efetuavam divisões, transformando-as no problema inverso da multiplicação.*

1. *Divida* 19 *por* 8, *ou seja, por quanto se deve multiplicar* 8 *a fim de obter* 19.

   Temos

   $$\begin{array}{rl} 1 & 8 \\ \backslash 2 & 16 \\ \dot{2} & 4 \\ \backslash\ \dot{4} & 2 \\ \backslash\ \dot{8} & 1 \end{array}$$

   A resposta é $2\,\dot{4}\,\dot{8}$. □

2. *Calcule, como no papiro Ahmes,* $\frac{2}{5}$. *Ou seja, por quanto devo multiplicar* 5 *para obter* 2.

   O escriba escreveu:

$\dot{5}$ de 5 é $1\,\ddot{3}$, $\dot{15}$ de 5 é $\dot{3}$

$$\begin{array}{cc}
1 & 5 \\
\ddot{3} & 3\,\dot{3} \\
\backslash\dot{3} & 1\,\ddot{3} \\
\backslash\dot{\overline{15}} & \dot{3}
\end{array}$$

Assim, a resposta será $\dot{3}\,\dot{\overline{15}}$.

(Este resultado será usado no Exemplo 1.11)

3. *Estudemos o problema 21 do papiro Ahmes*:

   É dito a você para completar $\ddot{3}\,\dot{\overline{15}}$ *para obter* 1.

   Aplicado a 15 $\ddot{3}$ *é* 10 *e* $\dot{\overline{15}}$ *é* 1, *fazendo* 11. *O resto é* 4. *Multiplique* 15 *para obter* 4.

$$\begin{array}{cc}
1 & 15 \\
\dot{\overline{10}} & 1\,\dot{2} \\
\backslash\dot{5} & 3 \\
\backslash\dot{\overline{15}} & 1
\end{array}$$

   Total 4.

   O que fez o escriba? Em linguagem moderna, o problema é resolver a equação

$$1 = \ddot{3} + \dot{\overline{15}} + x.$$

   Multiplicando ambos os lados por 15, obtemos

$$15 = 10 + 1 + 15x \Longrightarrow 15x = 4.$$

   Assim, devemos dividir 4 por 15, e foi exatamente isso que o escriba fez: Multiplicou 15 até achar 4.

1.5.1 A regra de falsa posição.

Considere a equação $ax = b$. Uma maneira de resolvê-la até recentemente, usando somente aritmética, antes dos procedimentos algébricos se tornarem praticamente universais para resolver problemas desse tipo, era a seguinte:

Escolha um valor arbitrário x_0 e calcule então o valor de ax_0, que chamaremos de b_0. Na prática, x_0 é escolhido a fim de facilitar as contas. Assim, por exemplo, se a é uma fração com denominador 53, é conveniente escolher $x_0 = 53$. Isso eliminará os denominadores, tornando os cálculos mais simples.

Considere então a igualdade

$$ax_0 = b_0.$$

Por quanto devo multiplicar os dois membros da igualdade acima para termos, do lado direito, b? Claramente por $\frac{b}{b_0}$. Fazendo isso, temos:

$$ax_0 \times \frac{b}{b_0} = b_0 \times \frac{b}{b_0}.$$

Ou seja,

$$a \times \left(x_0 \times \frac{b}{b_0}\right) = b_0 \times \frac{b}{b_0} = b.$$

Assim,

$$x_0 \times \left(\frac{b}{b_0}\right)$$

é solução de $ax = b$.

O processo descrito acima é conhecido como *regra da falsa posição*, e foi muito usado, ao longo da História, em várias civilizações, até recentemente.

Exemplo 1.11. *Considere, agora, o seguinte problema do papiro de Ahmes* (*Problema 24*).

Uma quantidade, com $1/7$ *dela adicionado, torna-se*: 19.

Em primeiro lugar, resolvamos o problema como nós o faríamos hoje.

O problema se transforma em resolver a equação

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \Longleftrightarrow \frac{8}{7}x = 19 \Longleftrightarrow x = \frac{19 \times 7}{8} = \frac{133}{8}.$$

Uma outra solução seria usar a regra de falsa posição, procedendo como segue:

Se a quantidade procurada fosse igual a 7, teríamos que ela mais $1/7$ dela seria igual a 8. Como a resposta deve ser 19, multiplicaremos os dois membros da igualdade

$$7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8$$

por $\frac{19}{8}$, obtendo

$$\left(7 \times \frac{19}{8}\right) + \frac{1}{7} \times \left(7 \times \frac{19}{8}\right) = 19 \times \frac{19}{8} = 19.$$

Assim, $7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$
é a raiz procurada.

Chegaremos ao mesmo resultado procedendo como segue, usando notação algébrica para tornar os passos do processo de falsa posição mais transparentes:

Faça $x_0 = 7$. Temos, então, que

$$x_0 + \frac{1}{7}x_0 = 8.$$

Multipliquemos os dois lados dessa igualdade por $\frac{19}{8}$:

$$\frac{19}{8}x_0 + \frac{19}{8}\frac{1}{7}x_0 = \frac{19}{8} \times 8 = \frac{19}{8}x_0 + \frac{1}{7}\frac{19}{8}x_0 = 19.$$

Como $x_0 = 7$, e colocando $\frac{19}{8}$ em evidência, vemos facilmente que

$$\frac{19}{8}x_0$$

é realmente a solução do problema. Guarde este resultado a fim de compará-lo com o que obtivermos resolvendo o mesmo problema como no papiro Ahmes. Salientamos que o procedimento imediatamente acima, que utiliza notação algébrica, é estranho à regra de falsa posição. É somente uma explicação, em linguagem algébrica moderna, de porque ela funciona.

Vejamos agora a solução apresentada no papiro:

\1	7	faça como mostrado
\ $\dot{7}$	1	

1	8	A quantidade
\2	16	$\dot{7}$ 2 $\dot{4}$ $\dot{8}$
$\dot{2}$	4	pedido 19
\ $\dot{4}$	2	Total
\ $\dot{8}$	1	

\1	2 $\dot{4}$ $\dot{8}$
\2	4 $\dot{2}$ $\dot{4}$
\4	9 $\dot{2}$

A solução apresentada pelo escriba está disposta em três blocos, com 2, 5 e 3 linhas, respectivamente. Analisemos cada um deles.

O primeiro bloco simplesmente faz $x_0 = 7$, e calcula $x_0 + \frac{1}{7}x_0 = 8$. Percebe-se aqui a conveniência dessa escolha para x_0.

O segundo bloco divide 19 por 8, chegando ao resultado $2\,\dot{4}\,\dot{8}$. Esse resultado é igual exatamente a $\frac{19}{8}$.

O terceiro bloco multiplica $2\,\dot{4}\,\dot{8}$ por 7, obtendo

$$2\,\dot{4}\,\dot{8}\,4\,\dot{2}\,\dot{4}\,9\,\dot{2} = 15 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 16\,\dot{2}\,\dot{8} = \frac{133}{8},$$

que é o resultado procurado.

Por vezes é afirmado que os egípcios resolviam problemas com a regra de falsa posição. Essa afirmação pode dar a impressão de que ela era o método que os egípcios usavam sistematicamente para resolver problemas como o discutido acima. Isso não é verdade. Por vezes eles usavam a regra, por vezes utilizavam outros métodos.

Exercícios

1.27. Divida, como os egípcios, 27 por 15, ou seja, por quanto devo multiplicar 15 para obter 27?

1.28. Multiplique $1\,\dot{2}$ por 13. Ou seja, tome 13 vezes o número $1\,\dot{2}$.

1.29. Como é calculado, no papiro Ahmes, $\frac{2}{5}$? Ou seja, por quanto devo multiplicar 5 para obter 2? Explique o procedimento usado pelo escriba.

1.30. Resolva, usando os métodos descritos nesta seção, o problema 26 do papiro de Ahmes:

Uma quantidade e seu 1/4 é igual a 15. Qual é a quantidade?

1.31. Resolva, usando os métodos egípcios mostrados nesta seção, o problema 28 do papiro de Ahmes:

Uma quantidade é somada com seus 2/3, é subtraido 1/3 do resultado e resta 10. Qual é a quantidade

1.32. (Problema 30 do papiro de Ahmes) Qual a quantidade de que 2/3 + 1/10 são iguais a 10?

1.33. O problema 40 de papiro de Ahmes é particularmente interessante. Trata-se obviamente de um problema sem aplicações práticas, proposto a fim de testar a competência matemática dos escribas egípcios:

Divida 100 pães entre 5 homens, de maneira que as porções estejam em progressão aritmética e que 1/7 das três maiores porções seja igual à soma das duas menores porções. Qual a diferença entre as porções?

Resolva este problema por nossos métodos algébricos atuais e discuta a solução apresentada no papiro de Ahmes. Suponha, como fez o escriba, que as porções de pão estão em progressão aritmética:

"Eis como é feito. A diferença de porções sendo $5\,\dot{2}$. Faça você a multiplicação: $1\,2/3$".

$\backslash\ 1$	23
$\backslash\ 1$	$17\,\dot{2}$
$\backslash\ 1$	12
$\backslash\ 1$	$6\,\dot{2}$
$\backslash\ 1$	1
	60
Total	
$\backslash\ 1$	60
$\backslash\ \ddot{3}$	40

23	$38\,\dot{3}$
$\backslash 4$	$9\,\dot{2}$
a tantas vezes	isso se torna:
$17\,\dot{2}$	$29\,\dot{6}$
12	20
$6\,\dot{2}$	$10\ddot{3}\dot{6}$
1	$1\,ddot3$
60	100
Total	Total

1.34. O primeiro problema do papiro de Berlim é o seguinte:

Um quadrado e um segundo quadrado, cujo lado mede 3/4 do lado do primeiro quadrado, têm conjuntamente área 100. Mostre-me como calcular isso.

1. Resolva este problema usando nossas técnicas algébricas modernas.
2. Resolva o problema usando a regra da falsa posição, o que foi feito na solução que se encontra no papiro.

1.35. Resolva, usando a regra de falsa posição, o problema 27 do papiro Ahmes:

Uma quantidade e seu quinto se torna 21. Qual é a quantidade?

1.6 Conhecimentos geométricos na Babilônia e no Egito

A "geometria" dos babilônios e egípcios era essencialmente uma geometria métrica, isto é, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes, para o que utilizavam algumas propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, sem que saibamos como chegaram a estes resultados. Como ainda hoje acontece na Matemática escolar, os exemplos de problemas babilônios e egípcios às vezes são bem artificiais, modelos simplificados de situações reais propostos para exercitar ou verificar as habilidades de cálculo dos escribas.

1.6.1 Cálculo de áreas na Babilônia

Encontram-se, entre os muitos tabletes achadas em sítios arqueológicos na Mesopotâmia, alguns que contêm problemas de geometria. Uma dos mais famosos é o YBC 7289, que já discutimos ao estudar como os babilônios achavam raízes quadradas.

Vejamos agora o tablete YBC 7302, mostrada na Figura 1.23, na qual encontramos os números, em representação sexagesimal, 3 (a circunferência do círculo), 9 e 45 (a área do círculo).

Como defendido por Robson ([125]), baseada no estudo do tablete YBC 7302, entre outros, a maneira como os babilônios consideravam o círculo era fundamentalmente diferente da nossa. Conceitualmente, para nós, o círculo é obtido traçando-se uma circunferência com um compasso (Axioma 3 de Euclides). Para os babilônios, ele era concebido como a figura limitada por uma circunferência. Mesmo quando conheciam o diâmetro do círculo, eles calculavam sua área usando o comprimento da circunferência.

Se A é a área do circulo de circunferência S e raio r, então, $A = \pi r^2$, $S = 2\pi r$. Assim,

$$r = \frac{S}{2\pi},$$

$$A = \pi \times \frac{S^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi} S^2.$$

Se fizermos $\pi = 3$, teremos

$$A = \frac{1}{12}S^2.$$

Como, no sistema sexagesimal, $1/12 = 5$, veremos que, de fato, a área do círculo do tablete foi encontrada desta maneira. Com base nesta tradução, afirma-se frequentemente que a aproximação $\pi = 3$ era padrão, para os babilônios ou que, em casos especiais, eles usavam $3,07;30$ (o que, em nosso sistema, é igual a $3 + \ 1/8$). No entanto, esta interpretação é anacrônica. Conceitualmente, há uma grande diferença entre o que fazemos e os procedimentos dos babilônios.

Para nós, π é uma constante de proporcionalidade, que relaciona a área e o quadrado do raio de um círculo ***qualquer***, ao passo que os babilônios tinham um ***processo*** para calcular a área de círculos no qual dividiam o quadrado da circunferência do círculo por 12. Veremos, no próximo exercício, o que significa a multiplicação pela constante 3 no procedimento babilônio.

Figura 1.23 YBC 7302

Os babilônios calculavam volumes de vários sólidos, como, por exemplo, o de um cilindro circular reto e de prismas retos, com bases retangulares ou triangulares. Os problemas que envolvem estes cálculos de volume são contextualizados em situações agrícolas, construções civil ou militar, ou outras atividades. São calculados os volumes de muros, muralhas e barragens e o número de operários necessários para construí-los ([94], p. 20).

Exemplo 1.12. *Procedimento para um tronco (cilíndrico) com* $0,05$ *de diâmetro (Haddad 104).*

Em primeiro lugar, calculava-se a área de uma seção transversal, de forma circular:

"Triplique a linha divisória $0,05$ *tal que* $0,15$ *aparecerá. A circunferência do tronco é* $0,15$*. Combine (faça o quadrado) de* $0,15$ *tal que* $0,03;45$ *aparecerá. Multiplique* $0,03;45$ *por* $0,05$ *e terás* $0,00;18;45$*, a área, aparecerá".*

Em seguida, basta multiplicar esta área da base circular pela altura. A altura era considerada implicitamente como igual ao diâmetro.

Vimos que deve-se multiplicar o diâmetro por 3 para obter a circunferência (ou o perímetro) da base do tronco. Lembramos que a fórmula usada atualmente para o perímetro da circunferência é πd (onde d é o diâmetro). Podemos dizer que o método dos babilônios não está muito longe do nosso, usando 3 como valor aproximado de π.

Mas o objetivo do problema não é calcular o perímetro e sim a área da circunferência. Para calcular a área a partir do perímetro, temos que elevar ao quadrado e depois dividir o resultado por 4π (basta verificar na nossa fórmula que a área $\pi r^2 = \frac{\pi^2 d^2}{4\pi}$). Mas considerando que os babilônios usavam 3 como constante, em base sessenta, dividir por 4π é equivalente a multiplicar por $0,5$ (pois $1/12$ é $0,5$ em base 60). Isto explica a multiplicação por esta constante no final do procedimento.

Aqui, o cálculo da área da circunferência também faz intervir uma constante, no caso o sexagesimal $0,5$ (= $5/60$ na base 10[7]) utilizado na última etapa. Esta é uma constante relativa ao círculo empregada em qualquer procedimento de cálculo de área de circunferência. No entanto, o 3 pelo qual devemos multiplicar o diâmetro, não é exatamente uma constante, e sim uma operação, indicada por um verbo ("triplique").

Se usarmos a fórmula da área que conhecemos atualmente e fizermos $A = \pi \times r^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9} \times 2\right)^2 r^2$, obteremos que os babilônios aproximavam π por 3. No entanto, seria um tremendo anacronismo dizer que estes povos já possuíam uma estimativa para π, pois multiplicar por três era uma operação, e não era um número considerado como constante universal, como é o caso de nossa concepção atual sobre π. Veremos na próxima seção que o mesmo porde ser dito sobre os egípcios.

Voltemo-nos agora para o tablete YBC 7290 (Figura 1.25), que mostra um trapézio. Vemos que sua base maior e um dos lados são iguais a $2,20$ (no sistema sexagesimal), e que a base menor é igual a 2. O escriba supõe que o trapézio é reto e, então, sua área é calculada fazendo (sem os símbolos)

$$A = 2,20 \times \left[\frac{1}{2} \times (2,20 + 2)\right].$$

[7]Este é um exemplo de fração cujo desenvolvimento na base sexagesimal é finito, e infinito na base decimal.

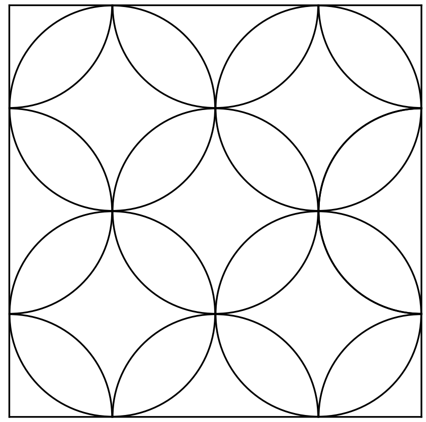


Figura 1.24

Encontram-se aí exercícios sofisticados, como o de calcular as áreas das figuras que formam a configuração mostrada na Figura 1.24 (Veja [95], p. 99).

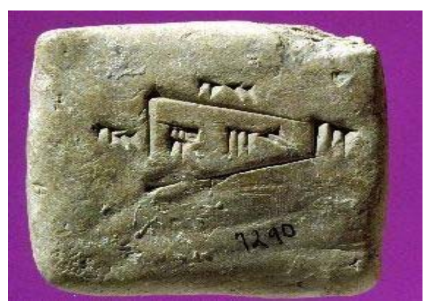


Figura 1.25 YBC 7290

As propriedades dos triângulos retângulos são exploradas no exercício do tablete IM 55357 (ver [95], p. 100). Os comprimentos BF, AB e AF são iguais, respectivamente, a 1, $0,45$ e $1,15$, escritos em notação sexagesimal. A área do triângulo ABF é $0,22;30$. As áreas dos triângulos ABC,CDE, DEF são, respectivamente, $0,08;06$, $0,05;11;02;24$, $0,03;19;03;56;09;36$ e $0,05;53;53;39;50;24$. Pede-se para calcular os comprimentos BC, CD e DE (Figura 1.26).

1.6.2 A geometria no Antigo Egito

O que significa falar de geometria no Egito antigo? Significa falar de procedimentos de cálculo de áreas e de volumes. Por exemplo, a área de um

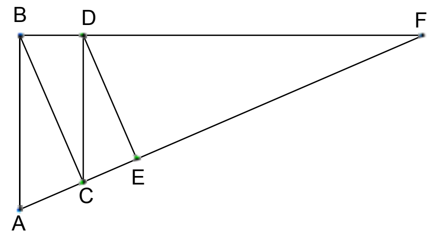


Figura 1.26 IM 55357

retângulo era calculada multiplicando sua base por sua altura. O problema nº 6 do *Papiro de Moscou* ilustra bem o procedimento empregado:[8]

Exemplo 1.13. *Método para calcular um retângulo*

Se lhe é dito, um retângulo de área $12\ \overline{2}\ \overline{4}$ *do comprimento*
Para o comprimento. Calcule $\overline{2}\ \overline{4}$ *até obter* 1. *Resultado* $1\ \overline{3}$.
Calcule com estes 12, $1\ \overline{3}$ *vezes. Resultado* 16.
Calcule [*sua raiz quadrada*]. *Resultado* 4 *para o comprimento.*
$\overline{2}\ \overline{4}$ *é* 3 *para a largura.*

Em linguagem moderna, teríamos

$$A = lb \quad \text{e} \quad b = (\overline{2}\ \ \overline{4}) \Longrightarrow l \times (\overline{2}\ \ \overline{4})l = 12.$$

Assim,

$$l \times l = 12 \div (\overline{2}\ \ \overline{4}) = 12 \times\ 1\ \ \overline{3} = 16.$$

Segue-se então que o comprimento l é igual a 4 e que $\overline{2}\ \ \overline{4}$ da largura (altura) é 3.

Vemos que, neste problema, a área de um retângulo é calculada. Mas há divergências, entre os estudiosos, sobre a maneira como os egípcios calculavam a área de um triângulo. Mais precisamente, discute-se se eles calculavam a área tomando a metade da base vezes a altura ou se tomavam metade da base vezes um lado. No segundo caso, o resultado está certo somente se o triângulo for reto. O Exemplo 1.6.2 mostra o cálculo, pelos egípcios, da área de um triângulo.

Os egípcios sabiam achar o volume de um paralelepípedo reto (um bloco retangular) e de um cilindro circular reto. O Exemplo 1.6.2 discute como interpretar o cálculo da área do círculo pelos egípcios.[9]

---

[8] Seguimos, neste exemplo, a apresentação de [68].

[9] Isso também é discutido cuidadosamente em [94], pp. 18-19.

Ao discutir a geometria no Egito antigo, é inevitável perguntar o que era conhecido, então, sobre a geometria da pirâmide. A resposta, baseada nos documentos matemáticos egípcios que chegaram até nós, é decepcionante. Segundo Gillings ([68], pp. 185 - 186), as únicas coisas que sabemos, com certeza, sobre seus conhecimentos deste assunto são as seguintes:

1. A inclinação dos lados de uma pirâmide.
2. O volume de um tronco de pirâmide.
3. O volume de uma pirâmide.

O item 2) consta do problema 14 do Papiro de Moscou, pelo que se deduz que 3) também era conhecido. Os problemas 56, 57, 58, 59 e 60 do Papiro Ahmes lidam com o item 1).

Encontramos, no papiro Rhind, problemas geométricos, como, por exemplo, o problema 51:

Exemplo 1.14. *Exemplo de um triângulo de terreno. Suponha que lhe é dito, qual a área de um triângulo de lado* 10 *khet e base* 4 *khet*?

Resolva o problema da seguinte maneira:

1	400
1/2	200
1	1000
2	2000

Sua área é 20 *setat.*

Retire $\frac{1}{2}$ *de* 4*, a fim de obter seu retângulo. Multiplique* 10 *vezes* 2*; isso é a área.*

Analisaremos agora um exemplo de exercício que pedia o cálculo do volume, em grãos, de uma caixa de forma cilíndrica. Insere-se neste problema a discussão sobre a existência de uma possível aproximação para π na Matemática egípcia.

Exemplo 1.15. *Fazer um celeiro* (*ou um cilindro*) redondo de 9 por 10.

A primeira parte do problema consiste em calcular a área da base, em forma de circunferência, cujo diâmetro é 9, e a segunda parte em calcular o volume em grãos se a sua altura é 10 (para simplificar o problema, evitamos aqui entrar em detalhes sobre as unidades de medida utilizadas).

O procedimento empregado para resolver a primeira parte é o seguinte:

Subtraia $1/9$ *de* 9 *de* 9*:* 1*. Resta:* 8*. Multiplique* 8 *por* 8*; obtendo* 64*.*

A área da circunferência de base seria, portanto, 64. Mas de onde veio esta subtração de 1/9 do dado? Ela não está relacionada ao fato de o lado ser 9. Este valor, 1/9, é uma constante que devia ser aprendida e utilizada pelos egípcios sempre que quisessem calcular a área de uma circunferência (multiplicando esta constante pelo diâmetro). Sempre que fosse necessário calcular esta área, o diâmetro deveria ser multiplicado por 1/9 do lado e subtraída na primeira etapa do procedimento citado (podemos imaginar o quanto a consideração de um lado diferente de 9 iria complicar os cálculos).

Mais uma vez, usando a fórmula da área que conhecemos, obteremos aproximadamente $3,16$ para o valor de π no procedimento egípcio. Mas o valor de 1/9 usado pelos egípcios era uma constante multiplicativa, que devia ser operada com o diâmetro, e não um número. Logo, não se trata exatamente de uma aproximação para π!

Exercícios

1.36. Calcule, trabalhando no sistema sexagesimal, a área do trapézio do tablete YBC 7290.

1.37. Resolva o problema proposto no tablete IM 55357. Suponha, como fez o escriba, que o triângulo ABF é retângulo, BC é perpendicular a AF, DC é perpendicular a BF e que DE é perpendicular a AF.

1.38. Um antigo exercício da Matemática babilônia (ver Figura 1.27) trata do cálculo da área de um terreno de forma quadrangular. Neste exercício, a área é calculada tomando as médias dos comprimentos dos lados opostos e multiplicando-as. Traduzindo em nossa notação, se a, b, c e d são os comprimentos dos lados do terreno, então (Figura 1.28)

$$S = \frac{(a+c)}{2} \times \frac{(b+d)}{2}.$$

Em que casos esta fórmula fornece resultados exatos?

1.39. O *seked* era a unidade usada para medir inclinações. Ele se baseava na medida de comprimento chamada de *cúbito real*. Cada cúbito era dividido em 7 palmos e cada palmo, por sua vez, era dividido em 4 dedos. A inclinação era medida como o número de palmos e dedos percorridos horizontalmente para subir um cúbito real.

O problema 56 do papiro de Ahmes pede o cálculo da inclinação da face de uma pirâmide:

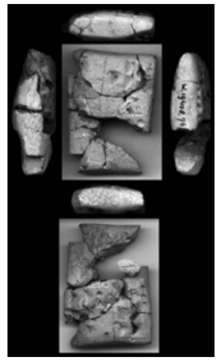


Figura 1.27

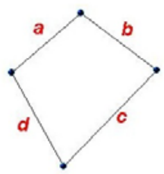


Figura 1.28

Se uma pirâmide tem 250 cúbitos de altura e o lado de sua base mede 360 cúbitos, qual é seu seked?

Tome 1/2 de 360; faz 180. Multiplique 250 para obter 180, faz $\dot{2}\,\dot{5}\,\dot{\overline{50}}$ de um cúbito. Um cúbito é [sic] 7 palmos. Multiplique 7 por $\dot{2}\ \dot{5}\,\dot{\overline{50}}$.

1	7
$\dot{2}$	$3\,\dot{2}$
$\dot{5}$	$1\,\dot{3}\,\dot{\overline{15}}$
$\dot{\overline{50}}$	$\dot{\overline{10}}\,\dot{\overline{25}}$

O seked é igual a $5\,\dot{\overline{25}}$ palmos.

Resolva este problema usando nossos métodos e compare sua solução com o método usado pelo escriba.

1.40. O problema 44 do papiro de Ahmes calcula a quantidade de grãos contida em um celeiro:

Exemplo do cálculo de um celeiro retangular, seu comprimento sendo 10, sua largura 10 e sua altura 10. Qual a quantidade de grão [sic] que vai nele?

Resolva o problema usando nossa simbologia matemática moderna e compare sua solução com a do escriba, exposta a seguir:

Multiplique 10 por 10; faz 100. Multiplique 100 vezes 10; faz 1000. Adicione seu $\dot{2}$; faz 1500, sua capacidade em *khar*. Tome $\dot{\overline{20}}$ de 1500; faz 75 sua capacidade em *hekat* quádruplos, ou seja, 7500 *hekat* de grãos.

Os cálculos:

1	10
10	100
1	100
10	1000
1	1000
$\dot{2}$	500
1	1500
$\dot{\overline{10}}$	150
$\dot{\overline{20}}$	75

Prova:

1	75
10	750
\20	1500
$\dot{\overline{10}}$ de 1500	150
$\dot{\overline{10}}$ de $\dot{\overline{10}}$	15
$\ddot{3}$ de $\dot{\overline{10}}$ de $\dot{\overline{10}}$	10

1.7 Exercícios suplementares

1.41. No papiro Ahmes, são calculados os desenvolvimentos das frações $2/n$, para $n = 5 \dots 101$. Pode-se observar que não há uma maneira geral, uniforme, no papiro, para achar estes desenvolvimentos. Uma maneira de calculá-los todos, sistematicamente, seria usando o fato de que

$$\frac{2}{2i+1} = \frac{1}{i+1} + \frac{1}{(i+1)(2i+1)}.$$

Mostre que esta identidade se verifica sempre, para i um número natural.

1.42. Seja uma fração $\frac{a}{b}$. Mostre que o desenvolvimento decimal desta fração é finito se e somente se seu numerador é da forma $b = 2^t 5^s$, com t e s números inteiros não negativos.

1.43. Consideremos frações $\frac{a}{b}$, em um sistema de base k, com k um número natural maior do que 1. Como saber se o desenvolvimento decimal desta fração terá somente um número finito de algarismos diferentes de zero?

1.44. Usando o fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, mostre que é possível atribuir um valor (em $\mathbb{R}$), a qualquer desenvolvimento decimal, finito ou infinito.

1.45. Mostre que um número real é racional se e somente se seu desenvolvimento decimal é finito (isto é, tem um número finito de algarismos diferentes de zero) ou periódico (uma dízima periódica).

1.46. Como já foi explicado neste capítulo, os egípcios usavam somente frações unitárias, ou seja, frações com numerador igual a 1.

1. Demonstre que qualquer fração ordinária $\frac{a}{b}$ pode ser decomposta em uma soma de um número finito de frações unitárias **distintas**. (Sugestão: Dada a fração $\frac{a}{b}$, ache a maior fração $\frac{1}{n}$ **menor** do que $\frac{a}{b}$. Considere então a fração $\frac{a}{b}$ menos a fração unitária que você encontrou e repita sucessivamente o processo.)
2. Prove que o processo descrito acima termina em um número finito de passos e que as frações unitárias obtidas são diferentes entre si.
3. O processo descrito acima é o único que funciona? Tente encontrar outros processos para decompor uma fração arbitrária em uma soma de um número finito de frações unitárias **distintas**.

1.47. Escreva as frações abaixo como soma de frações unitárias distintas:

1. $\frac{3}{4}$.
2. $\frac{17}{45}$.
3. $\frac{19}{7}$.

1.48. Demonstre que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de 2.

1.49. Os chineses usavam a regra de dupla falsa posição, chamando-a de *método de excesso e de falsa*. Resolva o seguinte problema, usando nossas técnicas algébricas modernas e pelo método de dupla falsa posição:

Um certo número de pessoas comprou galinhas. Se cada pessoa tivesse contribuído com 9 unidades monetárias para a compra, sobrariam 11 u.m. Se cada pessoa tivesse contribuído com 6 u.m., faltariam 16 u.m. para a compra. Determine o número de pessoas e o preço de cada galinha.

Capítulo 2

O nascimento do método dedutivo e a geometria de Euclides

2.1 Contextualização histórica

É muito comum ouvirmos que a geometria surgiu às bordas do Nilo, devido às enchentes e à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas entre aqueles que haviam sofrido prejuízos. Esta hipótese tem sua origem nos escritos de Herôdoto:

> "[Quando das inundações do Nilo,] o rei Sésostris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou, mais tarde, para a Grécia".(Herôdoto, *Oeuvres complètes* II 109, p.183).

Por outro lado, Aristóteles afirma que a Matemática surgiu

> "[...] em lugares nos quais as pessoas dispunham de lazer. Esta é a razão de a Matemática ter surgido primeiro no Egito; pois aí a casta dos sacerdotes tinha permissão para desfrutar de lazer." (Aristóteles, *Metafísica*, 981^b20-25, apud [75], pp. 258-259.)

A história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.E.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Diz-se que um de seus feitos teria sido, justamente, o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, a partir da semelhança entre, por um lado, a relação desta altura com sua sombra e, por outro, a relação de sua própria altura com sua própria sombra. A Matemática pitagórica, datada da primeira metade do século V a.E.C., teria feito a transição entre as épocas de Tales e Euclides.

É verdade que os povos mesopotâmicos e egípcios, de que tratamos no capítulo anterior, realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes. Contudo, estas práticas são bem diferentes da geometria grega. Nas práticas de medida, os problemas geométricos são transformados em problemas numéricos. A escolha de uma unidade de medida basta para converter um comprimento, uma área ou um volume em um número. Sem, dúvida, os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como os povos antigos. Não há, contudo, uma documentação confiável que possa estabelecer a transição entre a Matemática mesopotâmica e egípcia e a Matemática grega.

Também influenciado pela Matemática egípcia, Pitágoras teria introduzido um tipo de Matemática abstrata na Grécia. A narrativa histórica tradicional enfatiza a transição do tipo de Matemática realizada pelos babilônios e egípcios, profundamente marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática teórica, praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações.

O tipo de pensamento que se expressa nesta Matemática tem relação com o contexto grego da época, tal como se desenvolveu a partir do século V a.E.C. Por volta do século VII a.E.C., o crescimento populacional e a dispersão dos gregos pela bacia do Mediterrâneo deram origem à mais importante instituição da antiguidade grega, que foi determinante para a organização política, administrativa, religiosa e militar da Grécia durante os séculos V e IV a.E.C. Trata-se da *polis* – a cidade-estado grega.

A *polis* surgiu ao mesmo tempo em que o cidadão passou a ter direito de reger sua cidade. Para isto, eram necessários parâmetros, o que alimentava um gosto pela discussão. A controvérsia movimentava a polis grega e, como contribuía para vencer o debate, a persuasão tornou-se uma habilidade bastante valorizada. Em seus estudos sobre as origens históricas da razão grega, Jean-Pierre Vernant mostra que este universo é marcado pela ligação íntima entre logos, razão e atividade política. Tratamos de um período no qual a vida pública adquiriu suma importância para os antigos gregos, o que se refletiu no debate político na ágora, nas trocas comerciais, na laicização e na expansão das formas de religiosidade ao espaço externo (até então assunto privado, restrito ao interior do templo) e na organização racional e geométrica do território. O pensamento racional foi se constituindo neste contexto e ganhou impulso neste novo tipo de organização. Surgiu então, na

Grécia, a ideia de que quem soubesse persuadir sempre poderia convencer os outros de que sua tese era verdadeira. Em sentido oposto, no entanto, essa tentação ao ceticismo deu origem a um esforço para mostrar que verdade e verossimilhança são coisas diversas. A partir do final do século V a.E.C., Platão e Aristóteles buscaram propor maneiras de selecionar os tipos de afirmação que alguém pode fazer, distinguindo os raciocínios falsos dos corretos e estabelecendo critérios de verdade.

Em um mundo no qual as opiniões se multiplicavam, era necessário selecionar os argumentos, estabelecer critérios para decidir quem tinha razão. Este novo tipo de pensamento, para Platão, devia se fundar em definições claras, que distinguem os seres inteligíveis de suas cópias no mundo sensível. Nos discursos de Sócrates está presente este modo de argumentação, chamado "dialética", que se servia das ideias para ultrapassar as opiniões. A distinção entre retórica e dialética irá marcar a educação do cidadão livre. Mais tarde, Aristóteles desenvolverá uma lógica, na qual os critérios de verdade estarão mais ligados à pura coerência, ao rigor da demonstração. Ou seja, em uma cadeia de conclusões, tudo deve decorrer daquilo que antes foi dito, sem que haja contradição no interior do raciocínio. Platão e Aristóteles se serviram da Matemática para constituir este novo ideal de pensamento. Mas, na verdade, que Matemática era esta?

Grande parte do conhecimento de que dispomos hoje sobre a Matemática da época é indireto, proveniente de escritos como os de Platão, Aristóteles, Euclides e Proclus. Além destas obras, há outras evidências em alguns poucos fragmentos atribuídos a Eudemo de Rodes, que viveu no século IV. a.E.C. Presume-se que o "catálogo dos geômetras", contido no comentário de Proclus, é provenienete dos escritos deste pupilo de Aristóteles, que mencionava proposições e construções que teriam sido realizadas por Tales. No final do século VII a.E.C., diversas realizações tecnológicas podem ter contribuído para o desenvolvimento da Matemática. Alguns termos de geometria já apareciam, por exemplo, na arquitetura. Há escritos técnicos do século VI a.E.C. tratando de problemas relacionados à astronomia e ao calendário. Neles intervinham alguns conceitos geométricos, como círculos e ângulos. Ao menos um destes livros ainda estava em circulação na época de Eudemo, e os enunciados geométricos aí contidos podem ter ficado conhecidos como sendo de Tales.

No entanto, é difícil estabelecer as bases factuais destas afirmações. O papel de Tales foi objeto de algumas controvérsias históricas, descritas por W. Burkert ([21]). Parece ser fato que, por volta do século V. a.E.C., seu nome era empregado em conexão com resultados geométricos. Além disso, Aristóteles menciona Tales, na Metafísica, como o fundador da filosofia. Esta honra, somada à circulação da referência a seu nome como geômetra, pode ter levado a se atribuir ao filósofo de Mileto importantes descobertas geométricas.

Entre Tales e Euclides, a historiografia da Matemática costuma analisar as contribuições da escola pitagórica do século V a.E.C.. Além disso, é freqüente encontrarmos referências a Pitágoras como um dos primeiros matemáticos gregos. Mas ambas as afirmações são hoje largamente questionadas. As evidências mostram que havia uma Matemática grega antes dos pitagóricos. Parecia ser comum a construção de soluções para problemas geométricos e a comparação de grandezas geométricas por meio de razões. Presume-se que no século V. a.E.C., em Atenas, a geometria era ensinada, apesar de não sabermos exatamente como. Podemos deduzir, das poucas evidências, uma intensa prática geométrica na primeira metade do século IV a.E.C.

Não há sinais de que a Matemática desenvolvida na Grécia durante os séculos V e IV a.E.C. empregasse qualquer precaução no uso de procedimentos heurísticos e informais. Há evidências, todavia, de que no meio dos filósofos os métodos usados pelos matemáticos eram questionados. Por volta do ano 375 a.E.C., Platão começa a criticar os geômetras por não empregarem critérios de rigor desejáveis nas práticas matemáticas. Não por acaso, o trabalho de Eudoxo se desenvolveu no seio da Academia platônica. Sendo assim, ainda que não possamos dizer que a transformação dos fundamentos da Matemática grega é devida a Platão, ele expressa o descontentamento dos filósofos com os métodos empregados e articula o trabalho dos pensadores à sua volta para que se dediquem a formalizar os conceitos e técnicas utilizadas indiscriminadamente na Matemática da época.

Os membros da Academia debatiam o modo de descrever as disciplinas matemáticas, o que pode ter tido um papel na legitimação deste saber em sua forma abstrata e na consolidação da posição da Matemática como uma disciplina do pensamento puro. No século V a.E.C., o pensamento geométrico e técnico já estava desenvolvido, mas não temos como saber se os pitagóricos contribuíram para isto. A geometria grega começou antes deles e continuou depois; como mostra Burkert ([21]), esta escola não parece ter tido um papel significativo na transformação da Matemática de seu tempo.

Quase todos os livros de história da Matemática a que temos acesso em português reproduzem a lenda de que a descoberta dos incomensuráveis provocou uma crise nos fundamentos da Matemática grega. Alguns chegam a afirmar que esta crise só foi resolvida com a definição rigorosa dos números reais, proposta por Cantor e Dedekind no século XIX. Este mito possui conseqüências importantes para o modo como a história da geometria grega se estrutura.

A descoberta das grandezas incomensuráveis, freqüentemente atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens. Esta descoberta contribuiu para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira devendo se dedicar às grandezas geométricas e a segunda, aos números. Esta separação é um dos traços marcantes da geometria grega, ao menos na maneira como ela se disseminou com Euclides.

Apesar de questionarmos a validade da tese historiográfica a respeito da crise dos incomensuráveis, é inegável que a descoberta de que duas grandezas podem não possuir uma medida comum teve conseqüências importantes. Uma delas pode ajudar a explicar o caráter formal e abstrato da geometria, tal como exposta nos *Elementos* de Euclides. O fato de que duas grandezas podem ser incomensuráveis desafia o testemunho dos sentidos e foi, talvez, o que motivou um novo modo de fazer geometria.

A consequência da descoberta dos incomensuráveis que mais gostaríamos de enfatizar neste trabalho é a separação do universo das grandezas do universo dos números. A necessidade de demonstração surge com os gregos a partir deste momento chave da história da geometria. A descoberta dos incomensuráveis nos leva a desconfiar dos sentidos, uma vez que eles não permitem "enxergar" a possibilidade de dois segmentos não serem comensuráveis. É necessário, portanto, demonstrar, fundar a geometria sobre bases mais sólidas do que aquelas que podem ser fornecidas pela intuição. Com esta transformação, ganha destaque o espaço abstrato sobre o qual fundamos, até hoje, a Matemática.

Com Euclides, a Matemática na Grécia parece ter adquirido uma configuração particular, passando a empregar enunciados geométricos gerais, que não envolvem somente procedimentos de medida. Os *Elementos* de Euclides representam, neste contexto, o resultado dos esforços de formalização da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que valesse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou incomensuráveis.

Trataremos a seguir de alguns resultados, dentre os mais significativos que se encontram nos *Elementos*. O papel desta obra na Matemática não pode ser superestimado. Em primeiro lugar, ela expõe, de maneira organizada, a Matemática elementar que os gregos da época clássica tinham criado e desenvolvido. Assim, muito do que sabemos da Matemática grega deve-se a esta obra de Euclides. Em segundo lugar, como os *Elementos* constituem a mais antiga exposição organizada de Matemática que nos chegou, eles muito influenciaram seu desenvolvimento posterior.

Antes de analisar os *Elementos* com mais detalhes, começaremos por descrever a concepção particular de número da escola pitagórica, bem como alguns princípios básicos de sua filosofia. Nosso objetivo será mostrar que, se existiu uma "Matemática pitagórica", tratava-se de uma prática bastante concreta. Mesmo o famoso teorema "de Pitágoras", em sua compreensão geométrica como relação entre medidas dos lados de um triângulo retângulo, não parece ter sido particularmente estudado por Pitágoras e sua escola.

Outro objetivo deste capítulo é desconstruir os mitos envolvidos na chamada "crise dos incomensuráveis". Veremos que esta tese tem origem em obras já ultrapassadas, que constituem um exemplo paradigmático de um modo de fazer história da Matemática, hoje bastante contestado, caracterizado por pressupostos modernos sobre a natureza da Matemática.

2.2 A Matemática grega antes de Euclides

2.2.1 A noção de número dos pitagóricos e a geometria pré-euclidiana

Pitágoras é frequentemente citado como o pai da Matemática grega, mas sua teoria dos números era concreta, baseada em manipulações de números figurados. Sua aritmética era indutiva e não continha provas. Era possível obter, graficamente, generalizações sobre sequências de números, mas as regras para obtenção de tais sequências, como as dos números quadrados, cubos e outros, eram desenvolvidas para uso prático. A diferença estava na reverência que os pitagóricos cultivavam pelos números, empregados não apenas para fins práticos. Associadas a forças cósmicas, as propriedades dos números não podiam ser consequências lógicas de sua estrutura, o que banalizaria suas propriedades.

A concepção de Pitágoras sobre a natureza parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e esta explicação é dada pelos números. Isto levou os pitagóricos a considerarem que as coisas são números, elas consistem de números. Uma das características principais das coisas reside no fato de elas poderem ser organizadas e distinguidas. Sendo assim, as propriedades aritméticas das coisas constituem o seu ser propriamente dito, e o ser de todas as coisas é o número.

Os números figurados dos pitagóricos eram constituídos de uma multiplicidade de pontos que também não eram pontos matemáticos, mas remetiam a elementos discretos: pedrinhas dispostas em uma certa configuração.

O primeiro exemplo de número figurado é dado pelos números triangulares, em que os pontos formam figuras triangulares (os números pitagóricos são apenas as coleções de bolinhas, a cifra escrita embaixo é a tradução de cada um em linguagem atual. Veja a Figura 2.1).

Os números triangulares representados acima podem ser associados aos nossos números 1, 3, 6, 10, 15 e 21, que possuem respectivamente ordem $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ e 6. Em linguagem matemática atual, o número triangular de ordem n é dado pela soma da progressão aritmética $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Em seguida, temos os números quadrados, que atualmente podem ser escritos

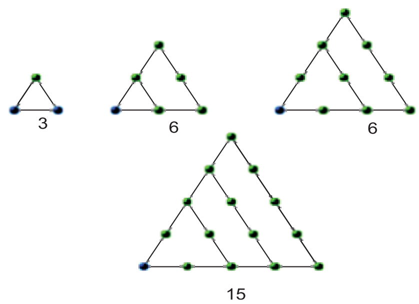


Figura 2.1

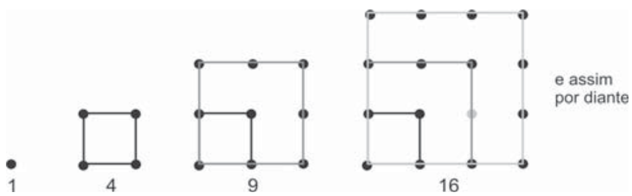


Figura 2.2

como n^2 (Figura 2.2) e os números pentagonais para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ (Figura 2.3).

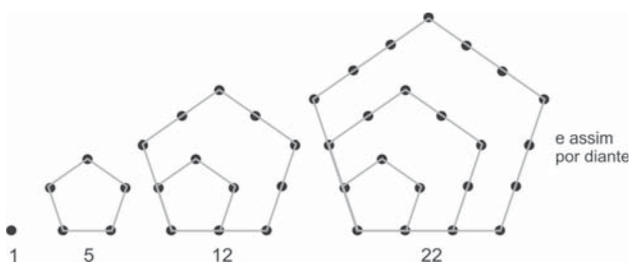


Figura 2.3

Destas configurações numéricas, os pitagóricos tiravam, de forma visual, diversas conclusões aritméticas como:

a) Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos (Veja a Figura 2.4).

b) É possível passar de um número quadrado ao número quadrado imediatamente maior adicionando-se a sequência dos números ímpares. Na figura, os números ímpares são dados pelos contornos em forma de L, os ***gnomons*** dos pitagóricos (Figura 2.5).

Poderíamos exprimir, em linguagem matemática atual, os enunciados

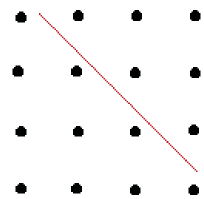


Figura 2.4

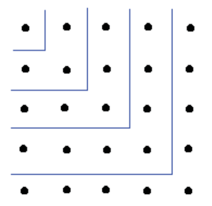


Figura 2.5

acima respectivamente como:

a) $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$

b)

$$\begin{aligned} &1^2 + 3 = 2^2 \\ &2^2 + 5 = 3^2 \\ &3^2 + 7 = 4^2 \\ &\ldots \\ &n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

O problema que chamamos hoje de "triplas pitagóricas" é o de achar dois números quadrados cuja soma seja também um número quadrado. Estas triplas são constituídas por números inteiros, que podem ser associados às medidas dos lados de um triângulo retângulo[1].

Provavelmente, os pitagóricos chegaram a estas triplas por meio do ***gnomon*** que era sinônimo dos números ímpares, formados pelas diferenças entre números quadrados sucessivos. Os ***gnomons*** forneciam uma técnica para realização de cálculos. Observando a figura acima, podemos calcular a sequência dos quadrados por meio de um deslocamento do esquadro, equivalente a somar a sequência dos números ímpares. Por exemplo, para obter o 4 a partir do 1, adicionamos o ***gnomon*** de três pontos; para obter o 9 a partir do 4,

[1]Alguns historiadores da Matemática defendem que no tablete babilônico Plimpton 322 há um indício de que os babilônios povo já estudavam as triplas pitagóricas, o que mostraria que a relação atribuída a Pitágoras já seria conhecida. Esta tese é refutada por E. Robson, em artigo sobre Plimpton 322 ([122]).

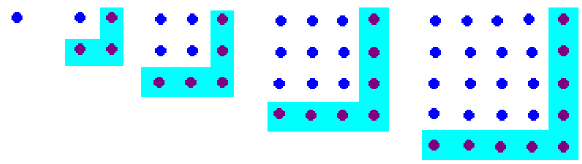


Figura 2.6

adicionamos o próximo *gnomon*, que é o próximo número ímpar, 5. Se continuarmos este procedimento, chegaremos a uma figura na qual o *gnomon* também é um quadrado, constituído por nove pontinhos. Obtemos assim a igualdade $16 + 9 = 25$, que dá origem à primeira tripla pitagórica: (3, 4, 5).

Observamos que, no método pitagórico, as triplas eram obtidas por procedimentos aritméticos. Ou seja, a fórmula de Pitágoras pertence ao contexto dos números figurados. Na tradição, poucas triplas são mencionadas e (3, 4, 5) tem um papel especial, pois 3 é o macho, 4 é a fêmea e 5 é o casamento que os une no triângulo pitagórico.

Não se conhece nenhuma prova do teorema que tenha sido fornecida por algum pitagórico e a possibilidade de que ela exista parece pouco provável.[2] Além disso, o teorema "de Pitágoras" dos pitagóricos não deveria ser um resultado geométrico.

Um pouco depois de Pitágoras, desenvolveu-se efetivamente alguma geometria na Grécia pré-euclidiana, mas os indícios são de que este estudo não teria relação com o círculo pitagórico. Um dos geômetras que conhecemos melhor, antes de Euclides, é Hipócrates de Quios e Demócrito (ambos da segunda metade do século quinto a.E.C.). Em particular, temos as chamadas *lúnulas de Hipócrates* que fornecem o primeiro exemplo de figuras limitadas por linhas curvas cujas áreas foram encontradas. Seu estudo parece ter surgido do problema de se encontrar a quadratura do círculo. Para os matemáticos gregos, fazer a quadratura de uma região limitada do plano significa construir um quadrado "igual" [3] à região.[4]

Hipócrates de Quíos atacou este problema a partir de um caso mais sim-

[2] Algumas provas mais simples do que a de Euclides foram sugeridas, por exemplo, por Heath, em seus comentários da demonstração contida nos *Elementos* de Euclides (Ver página 75).

[3] Para os matemáticos gregos, a palavra "igual" podia significar tanto "ter a mesma área", quanto "ser congruente".

[4] A quadratura do círculo é um dos três problemas clássicos da Matemática grega. Os outros dois eram duplicar o cubo, ou seja, construir um cubo com volume duplo de um cubo dado e trissectar um ângulo dado..

ples, que seria o de encontrar a quadratura das lúnulas. Uma lúnula é uma figura plana limitada por dois arcos circulares de raios diferentes, como exemplificado na Figura 2.7.

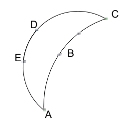


Figura 2.7

Textos de Hipócrates sobre a quadratura das lúnulas são os mais antigos documentos matemáticos gregos que nos chegaram, embora de maneira fragmentada. Hipócrates é também conhecido por ter sido o primeiro matemático grego de que temos notícia a redigir um texto organizado na forma de ***elementos***. Mas esta obra se perdeu.

Exercícios

2.1. Mostre que o número hexagonal de ordem n é igual a $2n^2 - n$.

2.2. Hipócrates percebeu que, para fazer a duplicação do cubo, é suficiente construir duas meias proporcionais entre dois segmentos a e b. Mais precisamente, dados a e b, procuram-se segmentos x e y tais que, em linguagem algébrica moderna,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Mostre que, fazendo $a = 1$ e $b = 2$, então $x^3 = 2$, ou seja, x é a aresta do cubo de volume 2, duas vezes o volume do cubo de raio 1.

2.3. Hipócrates estudou vários tipos de lúnulas, em suas tentativas para fazer a quadratura do círculo. Uma delas é a seguinte (Veja a Figura 2.8): Seja a circunferência com centro O e raio OE. Prolongue OE a fim de obter o diâmetro AE. Seja BD o diâmetro perpendicular a EA. Trace uma circunferência com centro em A e raio AB. A região limitada pelos arcos BCD e BED é uma lúnula. Demonstre que a área desta lúnula é igual à área do triângulo retângulo de vértices D, E e B.

2.4. Outra lúnula estudada por Hipócrates está mostrada na Figura 2.9. Os centros das três circunferências estão sobre os lados do triângulo retângulo ABC, respectivamente. Mostre que a área do triângulo é igual à área das duas lúnulas indicadas na Figura.

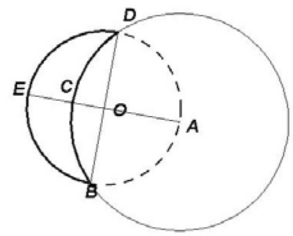


Figura 2.8

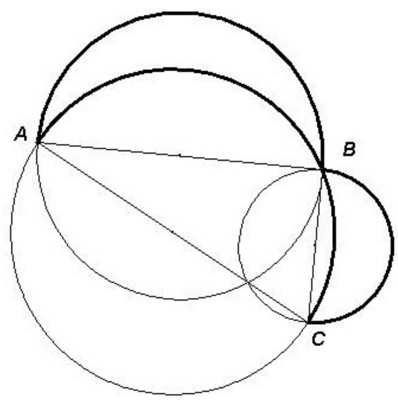


Figura 2.9

2.2.2 O problema da incomensurabilidade

Antes de iniciarmos a discussão histórica sobre o problema da incomensurabilidade, gostaríamos de explicar a principal dificuldade colocada pela contradição da ideia intuitiva de que dois segmentos devem sempre possuir uma unidade de medida comum. Ainda que cada segmento possa ser divido em partes muito pequenas, o fato de dois segmentos não serem comensuráveis significa que não é possível encontrar uma parte que caiba um número inteiro de vezes em ambos. Esta descoberta contradiz o que se pode esperar por meio do testemunho dos sentidos.

Sabemos que, para medir, o primeiro passo é escolher uma unidade de medida. Duas medidas da mesma natureza devem possuir uma unidade de medida comum. Cada grandeza é identificada, assim, ao número inteiro de unidades de medida que a compõem. A medida torna possível, portanto, a correspondência entre qualquer grandeza e um número natural, ou uma relação entre números naturais.

Como "medir" significa, essencialmente, "comparar", precisamos, na maioria das vezes, subdividir uma das grandezas a serem comparadas para obter uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em ambas as grandezas a serem comparadas. Suponhamos, por exemplo, que queiramos comparar dois segmentos A e B. Como B não cabe um número inteiro de vezes em A, podemos dividir B em 3 e tomar a unidade como sendo um terço de B. Como esta unidade cabe 4 vezes em A, a comparação de A com B nos fornece a razão $4 : 3$. é deste tipo de comparação que surgem as medidas expressas por relações entre números inteiros, que chamamos hoje de "racionais" (justamente por serem associados a uma razão).

A |——|——|——|——|

B |——|——|——|

Em geral, o problema é o seguinte: Dadas duas grandezas A e B (segmentos, figuras planas, sólidos geométricos, entre outras), é sempre possível subdividir uma delas, por exemplo B, em um número finito de partes, de modo que uma destas partes caiba um número inteiro de vezes em A? Intuitivamente, se pensamos em grandezas físicas, podemos imaginar que sim. Ou seja, se as partes de B puderem ser tornadas muito pequenas, sempre poderemos encontrar um segmento que caiba em A um número inteiro de vezes, ainda que seja um número muito grande. A descoberta das grandezas incomensuráveis mostra que isto não é verdade, logo nossa intuição nos engana.

Há muitas lendas sobre a descoberta dos incomensuráveis e, em particular, sobre a crise que isso teria provocado. A descoberta de que a comparação das medidas de dois segmentos não pode ser realizada por meio de números teria provocado um escândalo e, até mesmo, levado um pitagórico a ser perseguido. Estes mitos vem sendo profundamente questionados pela história da Matemática nas últimas décadas.[5]

Já vimos que a aritmética dos pitagóricos não era abstrata, mas se baseava em números figurados, descritos por uma configuração espacial de pedrinhas, consideradas unidades com magnitude, manuseadas e arrumadas em padrões visíveis. Burkert ([21]) mostra que este tipo de aritmética e o problema da incomensurabilidade são mutuamente exclusivos e seria mais plausível considerar que a incomensurabilidade tenha sido descoberta no campo da geometria.

Além de duvidar que a possibilidade de grandezas incomensuráveis tenha sido vislumbrada no seio da escola pitagórica, alguns pesquisadores, como

[5] Para uma discussão detalhada em português ver [70].

Burkert e Knorr, contestam até mesmo que esta descoberta tenha representado uma crise nos fundamentos da Matemática grega. Não encontramos alusão a um escândalo em nenhuma passagem dos escritos a que temos acesso e que citam o problema dos incomensuráveis, como os de Platão ou Aristóteles.[6].

O problema da incomensurabilidade parece ter surgido no seio da própria Matemática, mais precisamente, da geometria, sem a relevância filosófica que lhe é atribuída. Diversos argumentos são elencados em favor desta tese: ninguém que não fosse suficientemente instruído em Matemática poderia ficar impressionado pela descoberta da incomensurabilidade; a conexão entre este problema e a filosofia pitagórica é duvidosa; não é certa nem mesmo a relação entre a descoberta dos irracionais e a aplicação do teorema "de Pitágoras" (que nos permitiria concluir que há um lado de um triângulo retângulo cuja medida é $\sqrt{2}$), uma vez que os babilônios e chineses já conheciam o teorema e nem por isso chegaram aos números irracionais.

Uma opinião bastante difundida é a de que a incomensurabilidade foi descoberta pela geometria grega antiga, na segunda metade do século V a.C, mais precisamente entre 430 e 410 a.E.C..

Um dos primeiros exemplos a apresentar a possibilidade de duas grandezas incomensuráveis teria sido o problema de se usar o lado para medir a diagonal de um quadrado, [7] o que exige conhecimentos simples de geometria. Autores do século IV a.E.C., como Platão e Aristóteles, tratam do problema da incomensurabilidade no contexto da comparação entre o lado e o diâmetro de um quadrado e citam matemáticos como Teodoro e Teeteto.

Um dos procedimentos que pode estar ligado ao estudo das grandezas incomensuráveis é o da *antifairese*, ou *subtrações recíprocas*.[8] Os matemáticos gregos que trabalhavam com aritmética no final do século V a.E.C. conheciam o procedimento da antifairese, bem como o modo de empregá-lo no tratamento de alguns segmentos incomensuráveis. No entanto, estes resultados não eram percebidos como uma prova da incomensurabilidade destes segmentos. O objetivo da antifairese era o de aproximar razões entre segmentos incomensuráveis e, ainda assim, os exemplos de seu uso não são abundantes.

[6] Aliás, Aristóteles não cita o problema dos incomensuráveis nem mesmo em sua crítica aos pitagóricos.

[7] O problema das diagonais do pentágono regular, que constituem o famoso pentagrama é algumas vezes relacionado à descoberta dos incomensuráveis, sobretudo por von Fritz (Ver [149]). A descoberta da incomensurabilidade por Hípaso teria se dado justamente a partir deste exemplo. No entanto, os historiadores que seguimos aqui contestam esta reconstrução, uma vez que ela implica o uso de fatos geométricos elaborados, que só teriam se tornado conhecidos posteriormente.

[8] Um indício do emprego deste método pode ser encontrado no tratado peripatético (atribuído a Aristóteles) *De lineis insecabilibus* (970a 15-19).

A antifairese permite definir e comparar razões sem a necessidade do conceito de número racional, ou de fração, e independentemente da razão estar inserida em uma relação de proporção.[9] A definição de razões e proporções a partir da antifairese permite evitar o problema de lidar com grandezas incomensuráveis. No caso geométrico, duas grandezas estariam na mesma razão quando possuem a mesma antifairese. Se tentarmos encontrar a razão entre a diagonal e o lado do quadrado por este procedimento, obteremos "uma vez, duas vezes, duas vezes, duas vezes,...". Não é difícil mostrar, com argumentos da Matemática grega, que esta sequência continua indefinidamente, o que bastaria para concluir pela incomensurabilidade.

Uma outra hipótese sobre a descoberta da incomensurabilidade, desta vez no contexto da aritmética, tem sua origem em um resultado encontrado nos *Elementos* de Euclides. No final do quarto século a.E.C., em sua exposição sobre a técnica de raciocínio por absurdo, Aristóteles se refere à prova da incomensurabilidade dizendo que

> "[...] se o lado e o diâmetro são considerados comensuráveis um em relação ao outro, pode-se deduzir que os números ímpares são iguais aos pares; esta contradição afirma, portanto, a incomensurabilidade das duas grandezas" (*Primeiros Analíticos*, I.23, 41^a29).

Esta afirmação é interpretada frequentemente como uma evidência de que os gregos conheciam uma demonstração mostrando como a suposição de que o lado e a diagonal do quadrado são comensuráveis leva à contradição de que um número deve ser par e ímpar ao mesmo tempo. Muitas vezes, contudo, a demonstração apresentada para este fato faz uso de uma linguagem algébrica que não poderia ter sido usada pelos gregos antigos. Em um apêndice ao Livro X dos *Elementos* de Euclides, provavelmente interpolado em uma época posterior, encontramos uma prova geométrica levando à contradição de que um número ímpar seria igual a um par.

Em qualquer dos casos, podemos afirmar que a descoberta da incomensurabilidade não provocou uma crise dos fundamentos da Matemática, mas foi uma descoberta interessante que motivou novos desenvolvimentos matemáticos.

A antifairese entre a diagonal e o lado de um quadrado

Seja o quadrado $ABCD$ de lado AB e diagonal AC (Figura 2.10). Suponhamos que AB e AC sejam comensuráveis, logo existe um segmento AP que

[9] Por trás dos livros II e X dos Elementos, haveria um interesse em estudar a antifairese de razões quadráticas.

mede AB e AC. Em primeiro lugar, queremos construir um quadrado menor que $ABCD$ cujo lado esteja sobre a diagonal AC e cuja diagonal esteja sobre o lado AB.

Seja B_1 um ponto em AC tal que $B_1C = AB$. Marcando um ponto C_1 sobre AB (com B_1C_1 perpendicular a AC), podemos construir um quadrado $AB_1C_1D_1$ de lados $AB_1 = B_1C_1$ e diagonal AC_1 sobre AB. Isto é possível porque $C\hat{A}B = B_1\hat{A}C_1$ é metade de um ângulo reto e $A\hat{B}_1C_1$ é reto, logo $A\hat{C}_1B_1$ é metade de um ângulo reto e o triângulo AB_1C_1 é isósceles com $AB_1 = B_1C_1$.

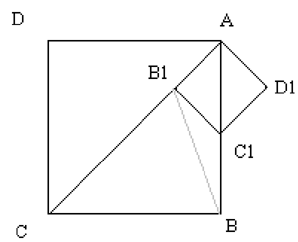


Figura 2.10

Mas como, por construção, $BC = B_1C$, o triângulo BCB_1 é isósceles e temos que $B_1\hat{B}C = B\hat{B}_1C \Rightarrow B_1\hat{B}C_1 = B\hat{B}_1C_1$ (pois $C\hat{B}C_1$ e $C\hat{B}_1C_1$ são retos). Isto significa que o triângulo B_1C_1B também é isósceles e podemos concluir que $BC_1 = B_1C_1$.

Temos assim um novo quadrado, $AB_1C_1D_1$ e podemos escrever que

$$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB$$

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - B_1C_1 = AB - AB_1 = AB - AC + AB = 2AB - AC$$

Por esta igualdade, se AB e AC são comensuráveis com relação à unidade de medida AP, AB_1 e AC_1 também o serão.

Para concluir a demonstração, precisamos mostrar que, do mesmo modo que construímos $AB_1C_1D_1$ sobre o lado e a diagonal de $ABCD$, podemos construir novos quadrados, menores, desta vez sobre o lado e a diagonal do quadrado pequeno $AB_1C_1D_1$. Supondo que o lado e a diagonal do novo quadrado são, respectivamente, AB_2 e AC_2, temos que mostrar que estes segmentos podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada. Isto é, repetimos o procedimento acima até obter um quadrado de lado AB_n e diagonal AC_n, cujos comprimentos serão menores do que a unidade de medida AP, ainda que esta possa ser tornada muito pequena.

Continuando o processo indefinidamente, para qualquer que seja a escolha inicial do segmento AP, podemos obter um quadrado de lado AB_n e diagonal AC_n, comensuráveis em relação a AP, tal que $AB_n < AC_n < AP$, o que é uma contradição. Se escolhêssemos AP menor do que a escolha inicial, obteríamos o mesmo resultado, logo não é possível encontrar uma medida comum entre o lado e a diagonal: eles são incomensuráveis.

Mas para concluir esta demonstração, faltou provar que AB_1 e AC_1 podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada. No exercício 9 fornecemos um roteiro para completar esta parte da demonstração, usando o "lema de Euclides".

Exercícios

2.5. As demonstrações feitas pelos pitagóricos parecem ter se baseado na evidência visual fornecida pelos ***números figurados***.

1. Desenhe os quatro primeiros números triangulares, quadrados e pentagonais, respectivamente.
2. Sejam T_n, Q_n e P_n, respectivamente, os números triangulares, quadrados e pentagonais de ordem n. Mostre, sem utilizar aritmética ou álgebra, simplesmente reorganizando diagramas de números figurados, que

$$P_n = S_n + T_{n-1}.$$

2.6. Mostre, sem utilizar aritmética ou álgebra, simplesmente reorganizando diagramas de números figurados, que oito vezes um número triangular mais um é igual a um número quadrado. Se o número triangular tem ordem n, qual a ordem do número quadrado obtido pelo processo acima?

2.7. Demonstre que, em linguagem atual, o método usado pelos pitagóricos para achar ternas pitagóricas consiste em obter os números $\frac{a^2-1}{2}$ e $\frac{a^2+1}{2}$ que satisfazem a relação

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2.$$

2.8. A contradição obtida no procedimento da antifairese exposto em 2.2.2 pode ser interpretada em linguagem atual do modo como segue: se o lado e a diagonal são comensuráveis podemos escrever $AB = pAP$ e $AC = qAP$, e teríamos $AB_1 = (q-p)AP$ e $AC_1 = (2p-q)AP$. A que resultado sobre a quantidade de números inteiros entre 0 e p (ou entre 0 e q) equivaleria a conclusão da demonstração?

2.9. Conclua a demonstração, iniciada em 2.2.2, de que a diagonal e o lado do quadrado são incomensuráveis. Para mostrar que AB_1 e AC_1 podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada (Figura 2.10) usamos o "lema de Euclides", a proposição X.I dos *Elementos* (que será demonstrada na página 88 e parece ter sido conhecida antes de Euclides). Este lema afirma que se as quantidades sucessivamente retiradas forem sempre menores do que a metade dos restos precedentes, estes restos podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada. Para satisfazer a condição deste lema, usando seus conhecimentos de geometria, prove que:

$$AB_1 < \frac{1}{2}AB. \tag{2.1}$$

$$AC_1 < \frac{1}{2}AC. \tag{2.2}$$

2.10. Mostre aritmeticamente que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis. Em linguagem moderna, se o lado do quadrado tem comprimento 1, demonstre que $\sqrt{2}$ é um número irracional. (Sugestão: suponha que $\sqrt{2}$ é um número racional e chegue à contradição de que um número pode ser par e ímpar simultaneamente.)

2.11. Considere o pentágono regular de lado l inscrito em uma circunferência (Veja a Figura 2.11), mostrado com suas diagonais.

- Prove que o lado do pentágono e sua diagonal são incomensuráveis. (Sugestão: No pentágono $ABCDEF$ da Figura 2.11, as diagonais formam um novo pentágono, $FGHKL$. Suponha que o lado e a diagonal do pentágono são comensuráveis e conclua que o mesmo tem que acontecer com o lado e a diagonal do pentágono $FGHKL$. Repita o processo sucessivamente e chegue a uma contradição.
- Se a diagonal mede x, prove que

$$x = \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

- Suponha que o lado do pentágono mede 1. Demonstre que sua diagonal tem comprimento igual a

$$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}.$$

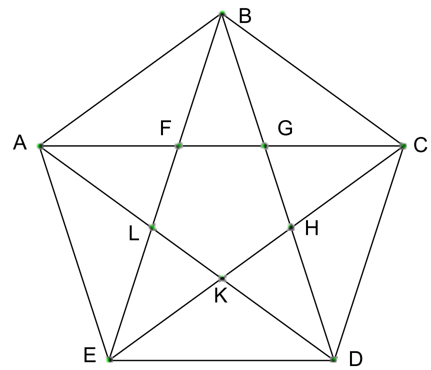


Figura 2.11 O pentágono e suas diagonais

2.3 Os Elementos de Euclides

Os *Elementos* [10] são formados por treze livros, escritos por volta do ano 300 a.E.C., que expõem resultados de tipos diversos, organizados sistematicamente, muitos deles atribuídos a outros geômetras, alguns anteriores a Euclides. Apesar disso, os *Elementos* não podem ser vistos apenas como uma compilação, pois, além de conterem resultados originais, propõem um tratamento sistemático e uniforme da Matemática grega básica. Assim, os *Elementos* não contêm resultados de Matemática grega "avançada", como as cônicas, sobre as quais o próprio Euclides escreveu um livro, hoje perdido. Euclides viveu em torno de 300 a.E.C. Não se conhecem as datas de seu nascimento e morte. Os *Elementos* constituem seu trabalho mais importante, mas ele escreveu também várias outras obras, algumas das quais se perderam.

O que eram *elementos* para os gregos? Os *elementos* de uma ciência constituíam as proposições fundamentais, a partir das quais seria possível deduzir as outras. Ou seja, não tinham que ser enciclopédicos, mas mostrar uma escolha judiciosa do que será apresentado. Por exemplo, nos *Elementos* de Euclides, não está demonstrado que as três alturas de um triângulo se encontram em um ponto, mas este teorema pode ser deduzido a partir de outros, mais básicos, demonstrados por Euclides.

[10] O texto completo dos *Elementos* encontra-se, atualmente, disponível gratuitamente, no site www.dominiopublico.gov.br. Recentemente, Irineu Bicudo publicou uma edição completa dos *Elementos* traduzida diretamente do grego ([14]).

Os *Elementos* de Euclides têm sido exaustivamente estudados; procura-se saber que teoremas são devidos ao próprio Euclides e quais são de matemáticos anteriores; analisa-se o encadeamento lógico das proposições; procura-se reconstruir o texto original, visto que não nos chegou nenhuma edição proveniente da época do autor. Cada época tem um ponto de vista predominante, segundo o qual faz sua leitura dos *Elementos*.[11] Cada uma dessas diferentes maneiras de se encarar os *Elementos* faz com que nossa compreensão deste livro se transforme.

Alguns historiadores e filósofos da Matemática mais atuais têm analisado de perto o papel dos primeiros princípios na estrutura dedutiva dos *Elementos*. Estes estudos mostram que algumas definições podem ter sido interpoladas depois de Euclides, em publicações posteriores dos *Elementos*. E mais, dependendo do editor, um postulado pode estar entre os axiomas. É o caso do postulado V o qual, em alguns manuscritos, é considerado um axioma, uma noção comum.

A obra se compõe de 13 "livros", ou seja, 13 capítulos ou partes, cujos conteúdos descreveremos agora, seguindo Artmann [5]. Aos 13 Livros, foram adicionados, posteriormente, mais dois. Os *Elementos* se dividem em três grandes partes:

1. Geometria plana – Livros I-VI;

2. Aritmética – Livros VII-IX;

3. Geométria espacial – Livros XI-XIII.

Apresentaremos, neste trabalho, alguns dos resultados mais significativos dos Livros I, II, V, VII-IX e XII. Obviamente, a descrição acima é global, e portanto não permite distinguir exatamente o que é tratado em cada livro. Um dos principais objetivos dos primeiros livros dos *Elementos* seria o de mostrar que diversas construções podem ser efetuadas somente com régua (não graduada) e compasso. O porquê desta restrição ainda não é consenso entre os historiadores.

Euclides adota, nos *Elementos*, o *método axiomático-dedutivo*, no qual, a partir de alguns fatos aceitos como evidentes e intuitivos (chamados de definições, postulados e axiomas), demonstram-se consequências (teoremas) ou se constroem figuras baseadas nos postulados, axiomas e resultados já demonstrados (problemas). Os primeiros princípios encontram-se no Livro I dos *Elementos*.

[11] Veja, por exemplo, Saito (1998).

DEFINIÇÕES:

I. *Ponto é o que não tem partes.*

II. *Reta é o que tem comprimento sem largura.*

III. *As extremidades da linha são pontos*

IV. *Linha reta é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades.*

V. *Superfície é o que tem comprimento e largura.*

VI. *As extremidades da superfície são linhas.*

(...)

X. *Quando uma linha reta incidindo sobre outra linha reta fizer com esta dois ângulos iguais, cada um destes ângulos iguais se chama ângulo reto e a linha incidente se diz perpendicular à outra linha sobre a qual incide.*

XI. *Um ângulo é obtuso se é maior que um ângulo reto.*

XII. *E um ângulo é agudo se é menor que um ângulo reto.*
(...)
XV. *Círculo é uma figura plana, fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência, de maneira que todos as linhas retas que, de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.*

Observamos que a definição III mostra que o termo "reta" designava o que hoje chamamos de "segmento de reta". Neste capítulo, como Euclides, usaremos "reta" também com este sentido. [12] Após as definições, temos os *axiomas*, enunciados a seguir.

[12] Por vezes, no entanto, Euclides usa o termo reta com nosso sentido atual.

AXIOMAS

I. *As coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si.*

II. *Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.*

III. *Se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.*

IV. *Se a coisas desiguais se juntarem outras iguais, os todos serão desiguais.*

V. *Se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.*

VI. *Quantidades que perfazem cada uma o dobro de outra quantidade são iguais.*

VII. *Quantidades que são metades de uma mesma quantidade são também iguais.*

VIII. *Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com a outra são iguais.*

XIX. *O todo é maior do que qualquer das suas partes.*

X. *Duas linhas retas não compreendem um espaço (uma superfície).*

Por último, são apresentados os *postulados*.

POSTULADOS

I. *Pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto qualquer.*

II. *E que se produza uma linha reta finita continuamente em uma linha reta.*

III. *E que com qualquer centro e qualquer distância se descreva um círculo.*

IV. *E que todos os ângulos retos sejam iguais.*

V. *E que, se uma linha reta cortando duas linhas retas torna os ângulos interiores*
do mesmo lado menores que dois retos, as linhas retas, se continuadas indefinidamente, se encontrem deste lado no qual os ângulos são menores que dois retos.

Atualmente, a distinção dos primeiros princípios entre definições, postulados e axiomas não é utilizada, mas é imprescindível lembrar que a Matemática se faz sempre a partir de primeiros princípios, admitidos como válidos sem demonstração. Todas as proposições contidas nos *Elementos* de Euclides são consequência da aplicação do método axiomático aos primeiros princípios.

2.3.1 Equivalência de áreas nos Livros I e II

As proposições nos *Elementos* são divididas em problemas e teoremas. Os primeiros lidam com construções e transformações dos seres geométricos: construir figuras, seccioná-las, subtraí-las ou adicioná-las umas às outras. Já os teoremas enunciam e demonstram propriedades inerentes aos seres geométricos.

A primeira proposição que decorre dos axiomas é um problema [13]:

Proposição I.1 *Sobre uma determinada reta construir um triângulo equilátero*

[13] A notação I.4, por exemplo, designa a Proposição 4 do livro I dos *Elementos*.

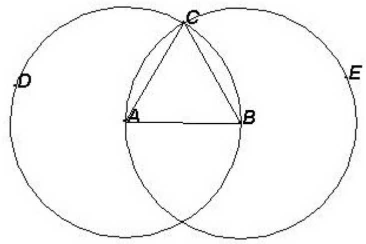


Figura 2.12

Construção: Seja a linha reta AB de um comprimento dado. Com o centro A e com a distância AB descrevemos o círculo BCD (*Postulado* III); e com o centro B e a distância BA descrevemos o circulo ACE. Do ponto C, no qual os círculos se cortam reciprocamente, traçamos (*Postulado* I) pelos pontos A e B as retas CA e CB. Podemos afirmar que o triângulo ABC será equilátero, pois, sendo o ponto A o centro do círculo BCD,[14] AC é igual a AB (*Definição XV*) e, sendo o ponto B o centro do círculo CAE, BC é igual a BA. Lembrando que CA é igual a AB, temos que tanto CA como CB são iguais a AB. Mas as coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si *Axioma* I. Sendo assim, CA é igual a CB e as três retas CA, AB e BC são iguais, logo o triângulo ABC construído sobre a reta AB é equilátero, como queríamos fazer.

Vemos que esta proposição é, na verdade, um problema de construção que faz uso dos primeiros princípios: definições, postulados e axiomas. Sua prova é frequentemente citada como exemplo de demonstração em que é usado um resultado não incluído no enunciado enunciado ou garantidas pelos axiomas e postulados. Mais precisamente, Euclides usa o fato de que as duas circunferências têm um ponto em comum.

As tentativas de construir um conjunto de axiomas *completo* [15] para a geometria plana foram coroadas de sucesso em 1899 por David Hilbert, em seu livro fundamental *Fundamentos da Geometria*, no qual apresentou um sistema de 21 axiomas para a geometria euclidiana plana, mais tarde reduzidos a 20.

Nos *Elementos* de Euclides, o primeiro teorema aparece na quarta propo-

[14]Chamamos assim porque um círculo é determinado por três pontos.

[15]Um conjunto de axiomas para uma teoria matemática é *completo* se todos os teoremas da teoria puderem ser deduzidos a partir dos axiomas. Os axiomas do conjunto são *independentes* se nenhum deles puder ser deduzido, como teorema, a partir dos outros. E é *consistente* se nele não houver axiomas contraditórios.

sição:

Proposição I.4 *Se dois triângulos tiverem respectivamente dois lados iguais a dois lados e se os ângulos compreendidos por estes lados forem também iguais, as bases serão iguais, os triângulos serão iguais e os demais ângulos que são opostos a lados iguais, serão também iguais*

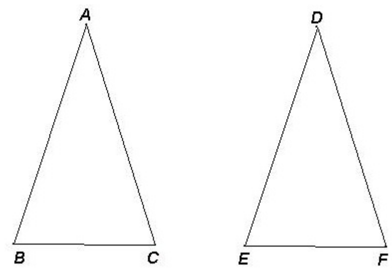


Figura 2.13

Ao passo que a solução de um problema consiste em algo que precisa ser "feito", ou construído, um teorema precisa ser "demonstrado". É interessante notar que a demonstração da proposição acima emprega um procedimento de superposição. Dada a igualdade entre, por um lado, AB e DE e, por outro, AC e DF, bem como a igualdade entre BAC e EDF, Euclides coloca o triângulo ABC sobre DEF e conclui daí a coincidência entre AC e DF. Para os nossos padrões, este método não é válido.[16] Mas ainda que se diga que Euclides evitava pensar em termos de movimento, não há evidências de que ele tenha achado este procedimento problemático.

Uma parte importante do Livro I é a *teoria das paralelas* de Euclides. Há evidências de que, a teoria das paralelas era muito discutida antes de Euclides. Por exemplo, Aristóteles comenta que esta teoria continha um problema de raciocínio circular. [17] Euclides teria percebido a necessidade de introduzir um postulado na teoria das paralelas e apresentar um postulado eficiente que lhe permitiu organizar a teoria de maneira econômica e elegante, nas proposições 27 a 32 dos *Elementos*. Uma grande vantagem da formulação dada por ele é que ela fornece um critério para determinar se duas linhas retas se encontrarão ou não quando forem prolongadas.

Um dos objetivos mais importantes dos primeiros livros dos *Elementos* é realizar operações com áreas, problema que passaremos a descrever em seguida.

[16] Isto levou Hilbert a introduzir um novo axioma, que consiste em uma versão mais fraca da proposição I.4.

[17] *Analítica ant.* II.16, 65^{a}4.

Raciocínios baseados em transformações de figuras planas, mantendo suas áreas, já eram usados, como vimos, pelos babilônios, para resolver problemas que hoje chamaríamos de 2º grau, ou seja, problemas que se reduzem a equações do 2º grau. Não sabemos se há influência destes procedimentos na Matemática grega, mas há diversos resultados nos *Elementos* que teriam por objetivo sistematizar procedimentos relativos à equivalência de áreas. Embora estes desenvolvimentos sejam bastante anteriores a Euclides, nós os apresentaremos aqui na forma como se encontram nos *Elementos*.

Na Matemática grega clássica, como exposta nos *Elementos*, não se medem áreas da maneira como fazemos hoje. Não se encontra, nos *Elementos*, nenhum resultado do tipo "a área de um triângulo é um meio do comprimento da base vezes o comprimento da altura". Certamente, na prática, agrimensores, arquitetos, agricultores, cobradores de impostos, etc, sabiam calcular áreas, mas isso não acontecia na Matemática pura dos gregos. Como procediam para lidar com comprimentos, ou, mais geralmente, com grandezas? Eles as comparavam.

Por exemplo, dadas duas regiões planas S_1 e S_2, elas são transformadas em quadrados equivalentes Q_1 e Q_2, respectivamente. É então fácil saber se as áreas dessas regiões são iguais, ou qual é a que tem menor área, ou se a área de uma delas é múltipla da área da outra.

Este processo de transformar uma região poligonal em um quadrado equivalente denomina-se "fazer a quadratura" da região. Daí vem a expressão "fazer a quadratura do círculo", que significa construir um quadrado com área igual à do círculo dado.

Mostraremos a seguir como é possível, somente com régua e compasso, efetuar a quadratura de qualquer superfície poligonal dada. Euclides faz isso nos Livros I e II, antes de ter à sua disposição a teoria das proporções de Eudoxo, exposta somente no Livro V dos *Elementos*. Assim, em todas as construções que faremos a seguir, não são utilizados argumentos baseados em proporções.

O ponto de partida de Euclides são os critérios de congruência de triângulos (Proposições I.4, I.8, I.26), que omitiremos, para não prolongarmos demasiadamente esta exposição. Em seguida, Euclides demonstra o seguinte resultado importante, que também não demonstraremos:

Proposição I.34: *Em um paralelogramo, os lados e os ângulos opostos são iguais e o paralelogramo é dividido pela diagonal em duas partes iguais.*

Após isso, na linha de nosso objetivo, Euclides demonstra que

Proposição I.35: *Paralelogramos que estão postos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, são iguais.*

Como provaríamos este teorema hoje? Os paralelogramos têm a mesma base e alturas iguais, logo, como a área de um paralelogramo é igual ao comprimento da base vezes o comprimento da altura, o resultado segue-se imediatamente. A fim de mostrar como os matemáticos gregos trabalhavam, demonstraremos a proposição da maneira exposta nos *Elementos*.

Há três casos a considerar mas, como usual, Euclides demonstra somente um caso, deixando os outros a cargo do leitor. Aqui, apresentaremos somente o primeiro caso. Forneceremos esta demonstração por ser um exemplo típico dos raciocínios sobre equivalência de áreas.

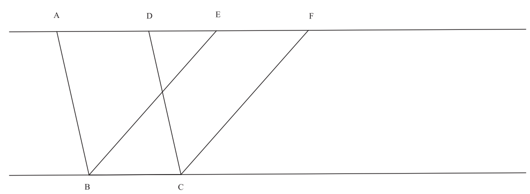


Figura 2.14 *Elementos* I.35

Sejam os paralelogramos $ABCD$ e $EFCB$ sobre a mesma base BC, entre as mesmas paralelas AF, BC (Figura 2.14). Digo que o paralelogramo $ABCD$ é igual ao paralelogramo $EBCF$.

No paralelogramo $ABCD$ a reta AD é igual à reta BC, e no paralelogramo $EBCF$ a reta EF é igual à reta BC. Logo será AD igual a EF. Ajunte-se a ambas a mesma reta DE. Será então $AE = DF$, isto é, o todo igual ao todo. Mas a reta AB é igual à reta DC. Logo as duas retas EA, AB são iguais às duas retas FD, DC, cada uma a cada uma. Mas o ângulo externo FDC é igual ao interno EAB. Será então o triângulo EAB igual ao triângulo FDC. Do trapézio $ABCF$ tire-se o triângulo FDC; e do mesmo trapézio tire-se o triângulo EAB. Logo os paralelogramos $ABCD$, $EBCF$, que são os restos, serão iguais entre si.

De posse deste resultado, é fácil provar que

Proposição I.36: *Paralelogramos que têm bases iguais e situados entre paralelas são iguais.*

Consequências imediatas desses resultados são as duas proposições seguintes:

Proposição I-37: *Triângulos situados sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais entre si.*

Proposição I-38: *Triângulos que têm bases iguais e estão entre as mesmas paralelas são iguais entre si.*

Reunindo estes resultados, podemos resolver o seguinte problema:

Dado um triângulo, construir um retângulo com a mesma área.

Isso pode ser feito seguindo o roteiro abaixo.

1. Dado um triângulo ABC, "complete-o" para obter um paralelogramo $ABCD$ cuja área é igual a duas vezes a área do triângulo.

2. Construa um retângulo $FGHK$ equivalente ao paralelogramo obtido no item anterior.

3. Usando o retângulo $FGHK$, construa um retângulo equivalente ao triângulo ABC.

E como construir um retângulo equivalente a uma região plana poligonal? Basta dividir está região poligonal em triângulos e, depois de transformar cada um em um retângulo, somar os retângulos. Precisamos, portanto, de um procedimento para somar retângulos. Para isto, transforma-se os retângulos em quadrados e soma-se os quadrados por meio do teorema " de Pitágoras". Tal é a importância deste resultado para a geometria grega. Veremos como ele é demonstrado no final do Livro I, antes de exibirmos como transformar um retângulo em uma quadrado (o que só será feito por Euclides no Livro II).

Um dos mais importantes teoremas da geometria euclidiana, o *teorema de Pitágoras*, diz respeito justamente ao modo como os gregos, nesta época, faziam operações com áreas, tema desta seção.

Proposição I.47: *Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que formam o mesmo ângulo reto.*

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ABC (Figura 2.15), cujo ângulo reto é BAC. Digo que o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC, que formam o ângulo reto BAC.

Com efeito, construa sobre BC o quadrado $BDEC$, e sobre BA, AC, os quadrados de lados AB e AC respectivamente. Pelo ponto A trace AL, paralela a BD ou CE e trace também as retas AD, FC.

Então, como os ângulos BAC, BAG são retos, segue-se que as duas retas AC, AG, que não estão no mesmo lado da reta AB, formam com AB, em A, ângulos adjacentes iguais a dois ângulos retos; portanto CA está em linha reta com AG.

Pela mesma razão BA está em linha reta com AH.

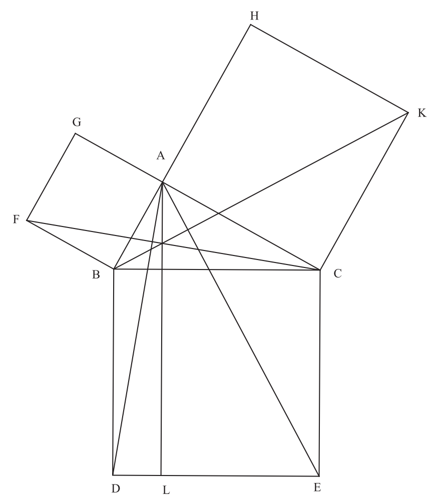


Figura 2.15 *Elementos* I.47 – O teorema de Pitágoras

Os ângulos DBC, FBA, por serem retos, são iguais. Adicione a cada um o mesmo ângulo ABC; logo, o total DBA será igual ao total FBC.

E como DB é igual a BC, e FB a BA, os dois lados AB, BD são iguais aos dois lados FB, BC respectivamente, e o o ângulo DBA é igual ao ângulo FBC; portanto a base AD é igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC.

Ora, o paralelogramo de lados BD e DL é o dobro do triângulo ABD, porque têm a mesma base BD, e estão entre as mesmas paralelas BD, AL.

E e o quadrado de lado BA é o dobro do triângulo FBC, porque têm a base comum FB, e estão entre as mesmas paralelas FB, GC.

Mas os dobros de quantidades iguais são iguais.

Logo, o paralelogramo de lados BD e DL é também igual ao quadrado de lado AB. Do mesmo modo, traçadas as retas AE, BK se demonstra que o paralelogramo de lados EC e EL é igual ao quadrado de lado AC; logo, o quadrado inteiro $BDEC$, de lado BC oposto ao ângulo reto BAC, é igual aos dois quadrados de lados AB e AC, de lados BA, AC, que fazem o mesmo ângulo reto BAC. □

Observe que nesta demonstração não se usa proporcionalidade. Todos os passos são dados utilizando equivalência de áreas. As demonstrações que se encontram atualmente, baseadas em semelhança e nas propriedades métricas em um triângulo retângulo, transformam o teorema de Pitágoras em um simples fato algébrico,"$a^2 = b^2 + c^2$", escondendo inteiramente seu caráter geométrico e que ele é um resultado de equivalência de áreas.

Esta demonstração é estática, mas seria fácil conjecturar como Euclides a descobriu. Ele poderia ter formalizado cuidadosamente um raciocínio do seguinte tipo:

Deslocando-se o ponto B sobre a reta BH, paralela a CK, vemos que o triângulo BCK é igual, no sentido grego, ao triângulo CKH (que não está mostrado na figura), o qual por sua vez é metade do quadrado $ACKH$.

Agora, girando o triângulo BCK em torno do ponto C, até que CB coincida com CE, obtemos o triângulo AEC, igual a BCK. Deslocando em seguida o ponto A sobre a reta AL, até chegar ao ponto de interseção de AL com BC, obtenho um triângulo cuja área é metade do retângulo LC. Procedendo semelhantemente com o triângulo FBC chega-se à conclusão desejada.

Continuando em direção ao nosso objetivo, que é mostrar como fazer a quadratura de qualquer região poligonal, mostraremos agora como transformar um retângulo em um quadrado com mesma área. Para isso necessitamos de outro resultado dos *Elementos*, cuja importância vai muito além da aplicação que aqui faremos do mesmo.

Proposição II.5: *Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais, e em outras duas desiguais, o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas seções, será igual ao quadrado da metade da linha proposta.*

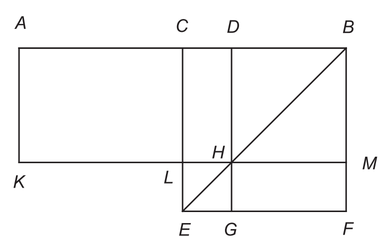


Figura 2.16 *Elementos* II.5

Ou seja, se $\mathrm{R}ET_{AD,DB}$, $\mathrm{Q}UAD_{CD}$ e $\mathrm{Q}UAD_{CB}$ designam, respectivamente, o retângulo com lados AD e DB, o quadrado de lado CD e o o quadrado de lado CD, então

$$\mathrm{R}ET_{AD,DB} + \mathrm{Q}UAD_{CD} = \mathrm{Q}UAD_{CB}.$$

Necessitamos de um último resultado para podermos fazer fazer a *quadratura* de qualquer polígono, ou seja, construir um quadrado de área igual à área do polígono dado.

Proposição II.14 *Construir um quadrado igual a um retângulo dado.*

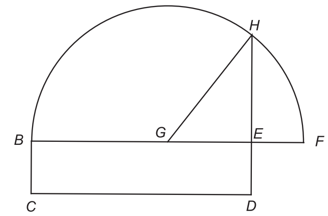


Figura 2.17 *Elementos* II.14

Os resultados acima permitem fazer a quadratura de qualquer região poligonal.

A "álgebra geométrica GREGA"

A designação "álgebra geométrica" foi criada por Paul Tannery e Zeuthen, no fim do século XIX (Veja, por exemplo [152]). Difundiu-se muito devido à adesão de Heath, em sua influente tradução de Heiberg (Ver [76], [77], [78]) e também em sua história da Matemática grega ([79], [80]). Ela foi adotada e difundida também por van der Waerden ([146]). Recentemente, principalmente devido aos trabalhos de Unguru, [18] ele vem caindo em descrédito. [19]

Para os defensores da "álgebra geométrica", os gregos assimilaram os conhecimentos algébricos dos babilônios e os transformaram, principalmente nos *Elementos* de Euclides, em resultados que são simples tradução, para a linguagem geométrica, de fatos algébricos. [20] Uma interpretação alternativa a essa foi proposta por Fowler ([63]).

O Livro II tem sido motivo de controvérsias entre os historiadores. Boa parte de seus resultados têm sido interpretados, pelos que acreditam em uma "álgebra geométrica grega" como simples expressões geométricas de resultados algébricos. Tomemos como exemplo, a proposição II.1, cujo enunciado é:

Proposição II.1: *Se tivermos duas retas e uma delas é dividida em um número qualquer de partes, o retângulo formado pelas duas retas é igual aos retângulos formados pela reta que não foi dividida por cada um dos segmentos.* (Figura 2.18).

[18] Veja [65] para uma discussão ampla do assunto. Um texto acessível e resumido sobre o assunto é Schubring [135].

[19] Um tratamento equilibrado da controvérsia sobre a álgebra geométrica pode ser encontrado na tradução dos *Elementos* por Vitrac [52], pp. 366-376.

[20] A tentativa de "algebrizar" a Matemática grega não se limita aos *Elementos*. Zeuthen ([152]), por exemplo, fez o mesmo com Apolônio.

Os defensores desta interpretação algébrica dos *Elementos* afirmam que este resultado é uma versão geométrica do seguinte resultado algébrico.

Se fizermos $AE = HC = GD = FB = a$, e $AC = b$, $CD = c$, $DB = d$, então, a proposição afirma simplesmente que $a(b + c + d) = ab + ac + ad$.

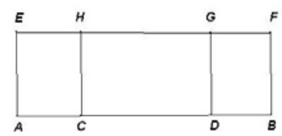


Figura 2.18

A controvérsia sobre a álgebra geométrica é particularmente ilustrativa no caso das proposições II.5 e II.6. Para os que algebrizam a Matemática grega, elas mostram simplesmente como os gregos sabiam resolver geometricamente equações do segundo grau que os babilônios resolviam algebricamente.

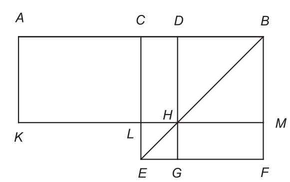


Figura 2.19 Proposição II.5

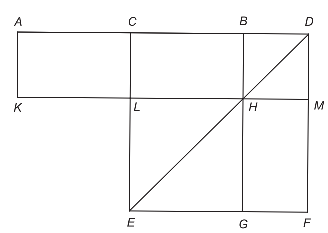


Figura 2.20 Proposição II.6

No entanto, os oponentes dessa visão algebrizante da Matemática grega apontam a importância de II.5 e II.6 em várias construções geométricas, não somente nos *Elementos*, como também apresentam o seguinte argumento contra a interpretação algébrica dessas duas importantes proposições dos *Elementos*. Na figura relativa a II.5, faça $x = CB = AC$, $y = CD$. Então, $AD = x + y$ e $DB = x - y$. Assim, algebricamente, a proposição exprime simplesmente que

$$(x+y)(x-y)+y^2=x^2 \Longrightarrow (x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

Agora, na Figura relativa a II.6, faça $x = CD$, $y = AC = CB$. Então,

$$((x+y)(x-y)+y^2=x^2 \Longrightarrow (x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

Ora, os oponentes da teoria da existência de uma “álgebra geométrica grega” perguntam: por que Euclides, tão cioso da forma de seus *Elementos*, usa duas proposições para provar o mesmo fato? Esse é um argumento de peso contra a teoria da “álgebra geométrica grega”. E mais, esses mesmos oponentes apontam as inúmeras aplicações dessas proposições nos *Elementos* no contexto da própria geometria, como, por exemplo, a equivalência de áreas.

2.3.2 O Livro V – Uma nova teoria das razões e proporções

Antes de expormos a teoria das proporções, atribuída a Eudoxo e inserida no Livro V dos *Elementos* de Euclides, gostaríamos de tecer alguns comentários sobre a noção de *razão* apresentada por Euclides, que não é organizada de modo cronológico. Acredita-se que os livros VII a IX – os livros aritméticos dos *Elementos*, atribuídos aos pitagóricos – sejam os mais antigos. Como Fowler observa, os livros I a IV não usam nenhuma ideia de proporção, ou seja, não empregam a versão de igualdade de razões. Isto poderia ser um indício de que eles teriam sido escritos depois da descoberta dos incomensuráveis.

Veremos mais adiante, na seção dedicada à teoria euclidiana dos números, que o critério para a proporcionalidade de dois números é dado pela definição VII.20: *Números são proporcionais quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes, do segundo que o terceiro é do quarto.*

A proposição VII.19 afirma explicitamente, sem empregar nossa notação simbólica, a condição moderna de que a relação de proporcionalidade $a : b :: c : d$ é equivalente à igualdade $a \cdot d = b \cdot c$.

Na proposição 16 do livro VI é dado um critério para a proporcionalidade de quatro segmentos de reta: *Se quatro retas são proporcionais, o retângulo formado pelos extremos é igual ao retângulo formado pelos meios (e reciprocamente).*

A partir destes enunciados, poderíamos deduzir que a noção de proporcionalidade apresentada nos *Elementos* é equivalente à nossa. Mas qual a motivação das definições complexas que aparecem no livro V, de que trataremos aqui?

No caso comensurável, as diferentes definições de proporção, para grandezas e números, serão reconciliadas pela proposição 5 do livro X: *Grandezas* *comensuráveis têm uma para a outra a razão a qual um número tem para um outro número*. Mas no caso incomensurável, as definições de proporção pela igualdade de razões não serão mais aceitáveis como definições e passarão a ser válidas apenas para o caso particular de grandezas comensuráveis.

Como dissemos, a consequência mais importante da descoberta da incomensurabilidade é o fato de ter produzido um divórcio entre o universo das grandezas e o universo dos números. Logo, a possibilidade de existirem grandezas incomensuráveis tornou necessária uma nova teoria das razões e proporções e um novo conceito de proporcionalidade independente da igualdade entre números. Alguns pesquisadores, como Fowler (Ver [64]), afirmam que o livro V dos *Elementos* trata de resultados mais recentes do que os outros, contendo definições de razões e proporções válidas para todos os casos, que evitam a identificação de grandezas com números.

A teoria das proporções entre quatro grandezas apresentada aqui é atribuída ao matemático grego Eudoxo, discípulo de Platão, nascido em torno do ano 400 a.E.C. Esta teoria abstrata das razões e proporções servirá para o estudo das proposições geométricas do livro VI.

Os enunciados do livro V não atribuem nenhum significado às razões $a : b$ e $c : d$ separadamente, mas apenas ao fato de elas estarem em uma relação de proporcionalidade $a : b :: c : d$.[21] Logo no início deste livro encontramos as seguintes definições:

Definição V.3 *Uma razão é um tipo de relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas do mesmo tipo.*

Definição V.4 *Diz-se que duas grandezas* possuem uma razão *entre elas se estas grandezas, quando multiplicadas, podem se ultrapassar mutuamente.*

Definição V.5 *Diz-se que grandezas estão* na mesma razão, *a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, se quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e outros quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, são tais que os primeiros equimúltiplos ultrapassam, um a um, os segundos, ou são iguais a estes, ou são menores, que os últimos equimúltiplos considerados na ordem correspondente aos primeiros.*

Definição V.6 *Grandezas que possuem a mesma razão são chamadas* proporcionais.

A definição 3 deixa claro que o conceito de razão é aplicado a grandezas homogêneas. Ou seja, importa observar a natureza da grandeza, não podendo haver razão entre um comprimento e uma área. Ainda que a razão diga respeito à quantidade, ela não será sempre calculável como um número. A definição 4 fornece um critério operatório para determinar se duas grandezas possuem uma razão entre elas: para que duas grandezas a e b possuam uma

[21] Lê-se a está para b assim como c está para d.

razão entre elas, é preciso que haja ao menos um par de inteiros m e n tal que *ma>b* e *nb>a*.

A definição 5 fornece justamente o critério de comparação de duas razões de grandezas. Em nossa linguagem simbólica atual, ela pode ser escrita como segue

> Sejam a, b, c e d grandezas homogêneas. Dizemos que elas são proporcionais se e somente se, para todo par de inteiros positivos m e n, temos um dos casos abaixo:
> (i) *se* $ma < nb$ *então* $mc < nd$.
> (ii) *se* $ma = nb$ *então* $mc = nd$.
> (iii) *se* $ma > nb$ *então* $mc > nd$.

O segundo caso só é possível se a e b, por um lado, e c e d, por outro, forem comensuráveis. Como a razão entre duas grandezas incomensuráveis não podia ser associada à razão de suas medidas, Eudoxo introduziu a noção de razão de grandezas, na qual o conceito de razão tem uma natureza puramente geométrica. Uma razão entre grandezas não é idêntica a uma razão entre números, ainda que a primeira inclua a segunda como caso particular (quando as grandezas forem comensuráveis).

Observe que não podemos escrever

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc,$$

pois a, b, c, d são grandezas, e não existe divisão e multiplicação de grandezas.

No caso comensurável, podemos comparar a definição 5 com um exemplo numérico: mostrar que 6 está para 10 assim como 9 está para 15. Observamos que 2 está contido três vezes em 6 e cinco vezes em 10 e 3 está contido três vezes em 9 e cinco vezes em 15, logo os números 6, 10, 9 e 15 são proporcionais, logo temos o resultado que queremos. Isto porque, para todo m e n, $6m = 10n$ implica que $9m = 15n$, basta fazer $3m = 5n$. Logo, (ii) valerá para quaisquer m, n inteiros positivos.

A proporcionalidade de quatro grandezas comensuráveis duas a duas é estabelecida de modo análogo. Vejamos o exemplo da proposição 1 do livro VI.

Proposição VI.1 - *Triângulos* (*e paralelogramos*) *de mesma altura estão entre eles como as suas bases.*

Considere a Figura 2.21. Queremos comparar as áreas dos triângulos ABC e ADE. Se existe uma unidade de medida comum contida p vezes em um segmento BC e q vezes em um segmento DE, ou seja se $pBC = qDE$, e se sabemos que triângulos de mesma altura que possuem bases iguais são iguais, conclui-se facilmente que, na figura, q vezes a área do triângulo ADE é igual a p vezes a área do triângulo ABC. Sendo assim, tomando m e n inteiros positivos tais que $qm = pn$ temos, pela igualdade (ii), que ABC está para ADE assim como BC está para DE. A partir de um raciocínio deste tipo, quando as bases são comensuráveis, podemos demonstrar este teorema.

Mas e se as bases não são comensuráveis? Neste caso o item (ii) acima não seria válido e devemos utilizar o método de Eudoxo (contido nos itens (i) e (iii) da definição 5). Se queremos comparar as áreas dos triângulos ABC e ADE, podemos usar o seguinte raciocínio:

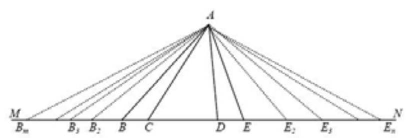


Figura 2.21

Construímos, à esquerda de BC, $m-1$ segmentos B_iB_{i-1} iguais a BC, que juntamente com BC perfazem m segmentos. À direita de DE, construímos $n-1$ segmentos E_jE_{j+1} iguais a DE. Fazemos, em seguida, com que cada um destes segmentos seja a base de um triângulo com a mesma altura de ABC e ADE. Por construção, temos que $B_mC = mBC$ e $DE_n = nDE$. Além disso, como as alturas de todos os triângulos são iguais, $AB_mC = mABC$ e $ADE_n = nADE$. Não sabemos se $B_mC > DE_n$ ou se $B_mC < DE_n$. O que importa nesta definição é podermos verificar que, para qualquer par de inteiros positivos m e n temos:

$$B_mC = mBC > DE_n = nDE \Rightarrow AB_mC = mABC > ADE_n = nADE.$$

$$B_mC = mBC < DE_n = nDE \Rightarrow AB_mC = mABC < ADE_n = nADE.$$

Portanto, pela definição 5,

$$\frac{BC}{DE} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ADE}.$$

□

Note que, uma vez que BC e DE são incomensuráveis, sua razão não se identifica à razão de suas medidas, logo as razões acima não são números e a igualdade destas razões não é uma igualdade entre números.

2.3.3 Teoria dos números – Livros VII, VIII e IX

Nos *Elementos* de Euclides, o tratamento dos números (*arithmos*) é separado do tratamento das grandezas (*mégéthos*). Tanto as grandezas quanto os números são simbolizados por segmentos de reta. No entanto, os números são agrupamentos de unidades que não são divisíveis e as grandezas geométricas são divisíveis em partes da mesma natureza (uma linha é dividida em linhas, uma superfície em superfícies, etc.). A medida está presente nos dois casos, dos números e das grandezas, mas mesmo quando uma proposição sobre medidas possui enunciados semelhantes para números e grandezas, ela é demonstrada de maneiras diferentes nestes dois casos. As primeiras definições do livro VII apresentam a noção de número e o papel da medida:

Definição VII.1 *A unidade é aquilo segundo o que cada uma das coisas existentes é dita "uma".*
Definição VII.2 *O número é uma multiplicidade composta de unidades.*
Definição VII.3 *Um número é uma parte de um número, o menor do maior, quando ele mede o maior.*

Os números servem para contar, mas antes de contar é preciso saber qual a unidade de contagem. No caso das grandezas, a unidade de medida deve ser também uma grandeza mas, neste caso, a unidade não é número nem grandeza. A "unidade", na definição de Euclides, é o que possibilita a medida, mas não é um número. Sendo assim, é inconcebível que a unidade possa ser subdividida. Este ponto de vista, que afirmamos ser o de Euclides, foi explicitado por Aristóteles:

> "O Uno não tem outro caráter do que servir de medida a alguma multiplicidade, e o número não tem outro caráter do que o de ser uma multiplicidade medida e uma multiplicidade de medidas. é também com razão que o Uno não é considerado um número, pois a unidade de medida não é uma pluralidade de medidas." (*Metafísica*, N I 1088a).

Vemos assim que o Um não é considerado um número.

As técnicas de medida que ocupam um lugar preponderante nas práticas euclidianas sobre os números eram realizadas pelo método da antifairese, que no caso dos números é conhecido hoje como "algoritmo de Euclides". Veremos como este método era utilizado para encontrar a medida comum de dois números (ou seja, o **mdc** entre eles):

Proposição VII.1 *Dois números desiguais estando dados, o menor sendo, a cada vez, continuamente retirado do maior, se o número que resta nunca mede o que o precede até que se chegue à unidade, então dizemos que os números de origem são primos entre si.*

Proposição VII.2 *Encontrar a maior medida comum entre dois números que não são primos entre si.*

Na verdade, o enunciado desta proposição emprega uma linguagem de grandezas. Os dois números dados são segmentos A e B dos quais queremos encontrar a maior medida comum. Se B não mede A, então, quando o menor dos números A e B é retirado continuamente do maior, sobra algum número que mede o precedente. Construímos geometricamente as diferenças entre restos sucessivos, por exemplo das grandezas A e B mostradas na Figura 2.22. Retiramos duas vezes B de A, obtendo R_1. Em seguida, retiramos uma vez o resto R_1 de B obtendo R_2. E depois, três vezes R_2 de R_1, e assim por diante...

Figura 2.22

Esta antifairese equivale a fazer $A = n_0 B + R_1$, em seguida $B = n_1 R_1 + R_2$, depois $R_1 = n_2 R_2 + R_3$ e assim por diante. O procedimento pode dar 0, ou seja, pode chegar ao fim, ou não. Se os dois números não são primos entre si, o mesmo procedimento dará um resto, diferente da unidade, que mede o precedente (logo, se retiramos este resto do número precedente um certo número de vezes, obtemos zero). Este resto é a maior medida (divisor) comum entre os dois números. Um número é primo quando não é medido por nenhum número, somente por 1, que não é considerado um número.

Exemplo 2.1. *Encontre, por este método, o mdc de* 119 *e* 85.

Começo por retirar 85 uma vez de 119, obtendo $R_1 = 34$ como resto. Em seguida retiro 34 duas vezes de 85, obtendo o segundo resto $R_2 = 17$. Agora retiro 17 duas vezes de 34 obtendo 0. Logo 17 é o maior divisor de 119 e 85. Podemos exibir o processo da seguinte maneira

$$(119,\ 85) \Longrightarrow (34,\ 85) \Longrightarrow (34,\ 51) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (17,\ 34) \Longrightarrow (17,\ 17) \Longrightarrow (17,\ 0).$$

Note que, se os dois números fossem relativamente primos, este procedimento chegaria ao par $(1, 0)$. Ou seja, a medida comum dos dois números seria 1, a unidade, que não era um número para Euclides.

No caso de dois segmentos, se um resto mede o precedente, o algoritmo termina e obtemos o **mdc** de dois segmentos. Este caso é enunciado pela proposição 3 do livro X que é equivalente à proposição VII-2. Esta proposição X-3 pode ser vista como uma versão da proposição VII-2 para grandezas, em que pedimos para, dadas duas grandezas comensuráveis, encontrar sua maior medida comum. Portanto, podemos concluir que o caso de grandezas comensuráveis é análogo ao dos números que não são primos entre si, pois podemos obter uma maior medida comum.

No entanto, no caso de grandezas, não existe uma grandeza menor do que todas as outras e pode ser que o algoritmo de Euclides não termine (note que o fato de afirmarmos que não existe uma grandeza menor do que todas as outras é equivalente a assumir o argumento de que as grandezas são infinitamente subdivisíveis).

Quando o algoritmo não termina, as grandezas são incomensuráveis, caso que será tratado na proposição X.2 dos *Elementos* de Euclides:

Proposição X.2 *Se, quando a menor de duas grandezas é continuamente subtraída da maior, a que resta nunca mede a precedente, as grandezas são incomensuráveis.*

Alguns autores afirmam que o objetivo do livro X seria distinguir números que têm uma boa antifairese dos que tem uma má antifairese, ou seja, identificar quando o procedimento termina. Mas, no caso de grandezas, como saber antecipadamente que o algoritmo não termina, antes de realizar o número infinito de passos necessários à verificação deste fato?

Vimos um exemplo de como proceder na demonstração geométrica da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado, na qual observamos a repetição da mesma situação que se repetirá tantas vezes quanto queiramos. É exatamente o procedimento geométrico da antifairese que foi usado nesta demonstração. Deste modo, podemos concluir se duas grandezas são comensuráveis ou incomensuráveis apenas de modo geométrico, sem precisar recorrer aos números e já vimos o papel que esta conclusão exerce sobre a concepção grega da geometria. Para assegurar a autonomia das grandezas frente aos números, é necessário conceber uma teoria das proporções que dispense o recurso ao número, que é o papel da teoria de Eudoxo.

Muitas outras proposições do livro VII, envolvendo a antifairese, possuem correspondentes no livro X, que trata das grandezas incomensuráveis. Podemos observar, por meio destas proposições, o paralelismo entre números que não são primos entre si e grandezas comensuráveis, e consequentemente entre números primos entre si e grandezas incomensuráveis. Podemos mencionar, por exemplo, a proposição X-2, versão para grandezas da proposição VII-1 citada anteriormente.

Entre os resultados importantes dos livros aritméticos devemos citar as proposições VII.31 e VII.32. A primeira prova que qualquer número não primo tem um fator primo:

Proposição VII.31. *Todo número composto é medido por algum número primo.*

A segunda é uma consequência fácil da primeira:

Proposição VII.32: *Qualquer número é primo ou é medido por algum número primo.*

O Livro VIII trata dos números em ***proporção continuada***, ou seja, em linguagem moderna, números em progressão geométrica. Entre as proposições do Livro IX encontra-se o importante resultado de que há infinitos números primos, notável pela simplicidade de sua demonstração:

Proposição IX.20. Os números primos são mais numerosos do que qualquer multidão de números primos proposta.

Euclides supõe que existe um número finito de números primos, p_1, p_2, $\ldots$, p_k e forma o número $n = p_1 {\cdot}_2 \cdot \ldots \cdot_k + 1$, que é diferente de todos os primos dados e é primo, o que é uma contradição.

O último resultado do Livro IX, a proposição 36, dá um método para construir números perfeitos, aqueles que são iguais à soma de seus divisores próprios. Por exemplo, 6 é um número perfeito, pois $6 = 1 + 2 + 3$. Ou seja, aqueles que são iguais à soma de seus divisores próprios. Por exemplo, 6 é um número perfeito, pois $6 = 1 + 2 + 3$. Euclides mostra que se a soma

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = p$$

for um número primo, então, $2^n p$ é um número perfeito.

2.3.4 Livro XII – Áreas e volumes. O método de exaustão de Eudoxo

Neste livro, Euclides estuda pirâmides, cilindros, cones e esferas. Para isso, ele começa por demonstrar que dois círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros, na proposição XII.2, usando o método da exaustão de Eudoxo.

Um passo essencial para isso é um resultado do Livro X, a proposição X.I, geralmente conhecida como *Lema de Euclides*.

Lema de Euclides:(**Proposição** X.1) Sejam a e b duas grandezas de mesma espécie (isto é, por exemplo, dois comprimentos, ou duas áreas, ou dois volumes). Se de a tirarmos uma parte maior do que ou igual a sua metade, do restante tirarmos uma parte maior ou igual à metade do restante, e assim sucessivamente, então, após um certo número de repetições desse processo, obteremos uma grandeza menor do que b.

Sejam $AB = a$ e b grandezas da mesma espécie, com $a > b$.

Euclides prova que se de a tirarmos uma parte maior ou igual a sua metade, do restante tirarmos uma parte maior ou igual à metade do restante, e assim sucessivamente, então, após um certo número de repetições desse processo, obteremos uma grandeza menor do que b.

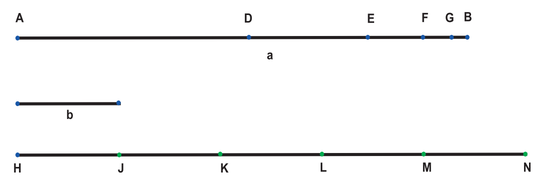


Figura 2.23 O *lema de Euclides*, *Elementos* X.I

É importante notar que neste resultado não há menção de processos infinitos, não é necessário "repetir o processo indefinidamente". Ele é repetido um número finito de vezes.

Em verdade, este lema está demonstrado por Euclides no decorrer da própria XII.2. Nós o apresentamos antes por razões didáticas.

Seja AB o lado de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência e M o ponto médio do arco AB, como mostra a Figura 2.24. Seja RS tangente á circunferência, por M. É claro que $AM = BM$ é o lado do do polígono regular de $2n$ lados inscrito na circunferência.

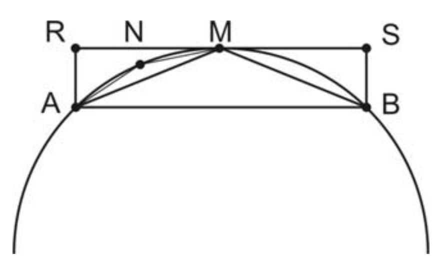


Figura 2.24

A área do triângulo AMB é metade da área do retângulo $ARSB$, logo é maior do que a metade da área do segmento circular AMB. Sendo assim, subtraindo do segmento circular AMB o triângulo AMB, retiramos uma figura com área maior do que a metade da área do segmento circular. Repetindo o mesmo procedimento, por exemplo, para um triângulo ANM, formado por dois lados de um polígono inscrito com o dobro do número de lados do polígono precedente, podemos sempre retirar da área que resta uma área maior do que a metade da área do segmento circular original. Sendo assim, a diferença entre a área do círculo e a área do polígono pode ser tornada menor do que qualquer quantidade dada.

Podemos agora demonstrar XII.2.

Proposição XII.2: *Círculos estão entre si como os quadrados se seus diâmetros.*

Como a demonstração de Euclides é longa, e complexa, nós a apresentamos de maneira simplificada, utilizando nosso simbolismo algébrico atual.

Sejam a e A, d e D respectivamente as áreas e os diâmetros dos círculos c e C da Figura 2.25. Queremos mostrar que

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}.$$

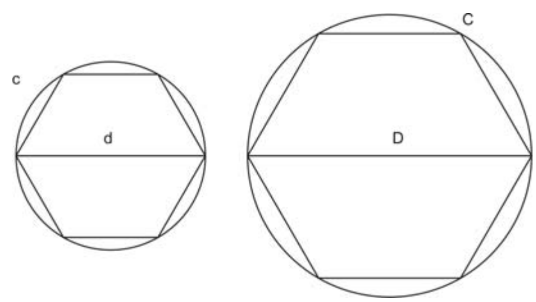


Figura 2.25

Suponhamos, em primeiro lugar, que $a/A > d^2/D^2$ e que existe um polígono regular inscrito em c, com área p tal que $p/A > d^2/D^2$. Na verdade, buscaremos uma contradição para esta segunda desigualdade.

Utilizando o resultado mostrado acima, temos que $a - p$ é menor do que qualquer quantidade dada. Sabemos, então que, como $a/A > d^2/D^2$, temos também que $p/A > d^2/D^2$. Sendo P a área do polígono inscrito em C e semelhante a p, sabemos, por uma propriedade dos polígonos inscritos, que $p/P = d^2/D^2$ (usando semelhança de triângulos). Sendo assim, $p/A > d^2/D^2 = p/P$ e concluímos que $P > A$. Mas P é a área do polígono inscrito na circunferência C de área A, logo P não pode ser maior do que A. De maneira análoga, podemos mostrar que a suposição de que $a/A < d^2/D^2$ (obtida de $a/P < d^2/D^2$) leva a uma contradição, o que mostra que $a/A = d^2/D^2$.
□

Exercícios

2.12. Demonstre as proposições I.4, I.8 e I.26 dos *Elementos* os "critérios de congruência" de triângulos. Compare suas demonstrações com as originais dos *Elementos*.

1. Proposição I.4: Se em dois triângulos um deles tem dois lados iguais, respectivamente, a dois lados do outro, e também os ângulos compreendidos entre estes lados são iguais, então eles terão os terceiros lados iguais, e os dois triângulos serão iguais [22] e seus outros ângulos serão dois a dois iguais, mais precisamente os ângulos opostos aos dois lado considerados.
2. Proposição I.8: Se em dois triângulos um deles tem dois lados iguais, respectivamente, a dois lados do outro, e também os terceiros lados são iguais, os ângulos compreendidos entre os dois lados de cada um serão iguais.
3. Proposição I.26: Se em dois triângulos um deles tem dois ângulos iguais, respectivamente, a dois ângulos do outro, e o primeiro tem um lado igual a um do outro, mais precisamente, ou lados adjacentes, respectivamente, aos ângulos iguais, ou lados que são opostos, respectivamente, aos ângulos iguais, então os outros lados serão, respectivamente, iguais, e o terceiro ângulo do primeiro será igual ao terceiro ângulo do segundo.

Compare o tratamento dado, por Euclides, à congruência de triângulos com o que é feito em um livro moderno, por exemplo [8].

2.13. Demonstre, usando somente as ferramentas disponíveis no Livro I dos *Elementos*, as proposições I.34, I.36, I.37 e I.38.

1. Proposição I.34: Os ângulos e os lados opostos de um paralelogramo são iguais, e a diagonal divide ao meio o paralelogramo, ou seja, o divide em duas partes iguais.
2. Proposição I.36: Paralelogramos sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais.
3. Proposição I.37: Triângulos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais.

[22] Lembramos que, para Euclides, "iguais" pode significar "congruentes" ou "ter a mesma área". Neste caso, obviamente, temos a segunda acepção.

4. Proposição I.38: Triângulos sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais.

2.14. Sejam A e B dois quadrados, com A maior do que B. Ache, utilizando somente régua e compasso, um quadrado igual à diferença dos dois.

2.15. Demonstre, usando somente as ferramentas disponíveis nos Livros I e II dos *Elementos*, as proposições II.5 e II.6.

1. Proposição II.5: Se uma linha reta [23] for dividida em partes iguais, e também em partes desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado sobre a reta entre os pontos de corte é igual ao quadrado sobre metade da reta (Veja a figura na página 77).
2. Proposição II.5: Se uma linha reta for dividida ao meio e prolongada até um ponto qualquer, o retângulo contido por toda a reta assim prolongada, e a parte que a prolongou, juntamente com o quadrado sobre a metade seccionada da reta, é igual ao quadrado sobre a reta que é igual à metade com a parte prolongada (Comparando o enunciado desta proposição com o de II.5, tente você mesmo fazer a figura).

2.16. Seja P uma região poligonal plana. Mostre como, usando os exercícios anteriores e o teorema de Pitágoras (proposição I.47), é possível fazer a quadratura de P, ou seja, construir um quadrado de área igual à de P.

2.17. Demonstre a proposicão VI.2, o "teorema de Tales": Se uma reta é traçada paralelame3nte aos lados de um triângulo, ela cortará os outros lados, os seus prolongamentos, proporcionalmente; e se os lados, ou seus prolongamentos são cortados proporcionalmente, a reta que une os pontos de corte, sobre os lados, será paralela ao lado restante do triângulo.

Sugestão: use a proposição VI.1, da página 82. No triângulo ABC, em que DE é paralela ao lado BC, considere os triângulos BDE e CDE e aplique a proposição VI.1 aos mesmos (Figura 2.26).

2.18. Demonstre a proposição VI.3: Se o ângulo no vértice de um triângulo é dividido em dois por uma a reta que também corta a base do triângulo,

[23] Lembramos que, para Euclides, linha reta significa segmento de reta ou toda a reta. Neste caso, obviamente, temos a primeira acepção.

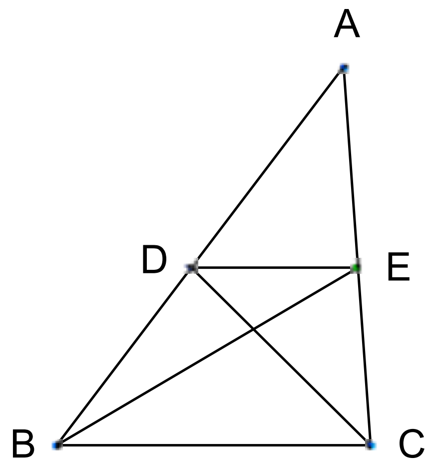


Figura 2.26

os segmentos que essa bissetriz determina na base estão entre si como os dois outros lados do triângulo. E se os segmentos determinados na base por uma reta que passa pelo vértice do triângulo estão entre si como os dois outros lados, então a reta divide o ângulo do vértice em duas partes iguais.

Sugestão: No triângulo ABC da Figura 2.26, trace CE paralela à bissetriz do ângulo A, com E sobre o prolongamento de BA. Então, use VI.2.

2.19. Sejam a e b dois números naturais. Pelo algoritmo da divisão, existem q_1 e r_1 tais que

$$a = bq_1 + r_1,$$

com $r_1 < b$.

Por sua vez, existem q_2 e r_2 tais que

$$b = q_2 r_1 + r_2,$$

com $r_2 < r_1$.

Este processo pode ser continuado, obtendo-se quocientes e restos parciais, respectivamente iguais a $q_1, q_2, q_3, \ldots$ e $r_1, r_2, r_3, \ldots$.

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

- Demonstre que este processo chega ao fim, ou seja, existe N tal que $r_N = 0$.
- Demonstre que, então, q_N é o máximo divisor comum de a e b.

2.20. Demonstre a proposição IX.36 dos *Elementos*: Se a soma

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = p$$

for um número primo, então, $2^n p$ é um número perfeito.

2.21. Demonstre, geometricamente, sem usar álgebra, o lema de Euclides, a proposição X.I (Veja a página 88).

2.22. Demonstre X.I usando nossos métodos modernos, com o emprego de limites.

2.23. No lema de Euclides, o que acontece se a quantidade retirada for 1/3 da original? A quantidade restante tende para zero? Por que o Lema de Euclides afirma que a quantidade retirada deve ser sempre maior do que ou igual à metade da quantidade restante?

2.24. Um dos pontos altos dos *Elementos* de Euclides é a proposição XII.2 (Veja a página 89), a qual emprega o método da exaustão. Nessa demonstração, Euclides utiliza a proposição XII.1: Polígonos semelhantes inscritos em circunferências estão entre si como seus diâmetros. Demonstre-a.

2.4 A transmissão dos Elementos e as edições em língua portuguesa

Os *Elementos* de Euclides constituem uma das obras mais importantes da tradição matemática e cultural do Ocidente. Eles marcaram profundamente a constituição da Matemática, bem como seu ensino. Um exemplo disso é que no movimento de renovação curricular conhecido como *Movimento da Matemática Moderna*, que teve lugar em meados do século XX, uma das palavras de ordem pronunciadas por um dos líderes do movimento, o matemático francês Jean Dieudonné, foi *abaixo Euclides*!

Durante muitos séculos, quando se falava em geometria, tinha-se em mente a geometria tal como exposta nos *Elementos* de Euclides. Mesmo a noção do que é Matemática, do que é rigor em Matemática e de como ela deve ser exposta se baseou nos *Elementos* durante muito tempo. Assim, por exemplo, Isaac Newton deduziu muitos dos resultados de seu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (*Princípios matemáticos da filosofia natural*) usando métodos de cálculo infinitesimal mas suas demonstrações seguiam o modelo euclidiano, geométrico.

Nos *Elementos* de Euclides não se encontram aplicações, exercícios, motivações. A exposição é seca, direta, implacável. O fato de que eles foram usados até recentemente no ensino de jovens em alguns países, como a Inglaterra, muito contribuiu para que algumas pessoas passassem a considerar a Matemática como um saber árido. Em outros países, como a França, muito cedo se começou a discutir a adequação dos *Elementos* para o ensino de jovens, e isso deu origem a livros clássicos, como os de Arnauld, Lacroix, Legendre, Hadamard, entre outros.

Há inúmeras edições dos *Elementos* em diversas línguas, mas não nos chegou nenhum manuscrito da época de Euclides. Não sabemos o que Euclides escreveu e comprovadamente sua obra sofreu acréscimos, modificações, mutilações. Na Idade Média lhe foram acrescentados dois livros espúrios. Vários editores introduziram proposiçòes nos *Elementos*, na tentativa de torná-lo mais fácil, ou suprimiram partes que consideravam muito difíceis ou sem aplicações.

No século IV d.C., Theon de Alexandria publicou uma edição dos *Elementos* que foi muito usada, e deu origem a toda uma longa série de edições posteriores. Esta linhagem de edições constitui os chamados *manuscritos theoninos*.

Enquanto os *Elementos* desapareceram do Ocidente, os árabes os preservaram. O califa Harun Al-Rashid ($\approx$ 763 - 809) encomendou uma tradução baseada em um manuscrito de Proclo. Um pouco mais tarde, em torno de 900 d.C., um manuscrito grego foi copiado em (Bizâncio) Constantinopla.

Em torno de 1120 d.C., Adelard de Bath ($\approx$ 1080 - $\approx$ 1152) traduziu os *Elementos* para o latim, a língua culta da Europa de então, usando um manuscrito árabe. Um pouco depois, em 1260, Campanus de Novara ($\approx$ 1220 - 1296) editou os *Elementos*. De seu trabalho, originou-se a primeira edição latina impressa, em 1482, feita por Erhard Ratdolt, em Veneza. Também de Veneza provém a primeira edição dos *Elementos* em grego, feita por Bartolomeo Zamberti, em 1505.

Em 1533, Simon Grynaeus publicou a *editio princeps* dos *Elementos*, a qual, como sua própria alcunha indica, embora de baixa qualidade, foi a fonte para inúmeras edições posteriores.

Em 1756, o matemático escocês Robert Simson (1687 - 1768) publicou uma edição extremamente influente de Euclides, que foi republicada durante muitos anos e influenciou diversas outras edições.

Um acontecimento importante na história da transmissão dos *Elementos*, foi a edição de Peyrard, em grego, latim e francês, publicada entre 1814 e 1818. Como resultado das campanhas dos exércitos de Napoleão na Itália, Peyrard teve acesso a manuscritos da biblioteca do Vaticano, não descendentes do manuscrito de Theon de Alexandria e os utilizou para preparar esta nova edição.

Johan Ludvig Heiberg (1854 - 1928), filólogo e historiador dinamarquês, publicou, conjuntamente com Heinrich Menge, entre 1883 e 1916, as obras de Euclides, entre elas a importantissima edição dos *Elementos*, que deu origem a praticamente todas as edições modernas de Euclides. Ela se difundiu enormemente devido à tradução para o inglês, com extensos comentários, feita por Thomas Little Heath (1861 - 1940), originalmente publicada em 1908, e que é amplamente utilizada, embora seus comentários estejam em desacordo com as mais recentes interpretações da Matemática grega.

Para sua edição, Heiberg comparou manuscritos da linhagem theonina com os que Peyrard tinha localizado no Vaticano e propôs uma reconstituição do texto euclidiano considerada definitiva durante o século XX. [24] Recentemente, Knorr ([102]) sugeriu que manuscritos árabes podem ser uma fonte mais confiável para a reconstituição do texto euclidiano.

Em 1735, o Padre Jesuíta Manoel de Campos, publicou, em Lisboa, para uso da *Aula da Esfera* do *Colégio de Santo Antão*, seu *Elementos de geometria plana e sólida*, *segundo a ordem de Euclides*. Este livro é a primeira edição de Euclides em língua portuguesa. Ele inspirou-se em outro Jesuíta, André Tacquet, [25] que publicara, em 1725, sua edição dos *Elementos*.

Ainda em Portugal, em 1768, doze anos após a edição de Simson, foram publicados os *Elementos de Euclides, dos Seis Primeiros Livros, do Undécimo e Duodécimo, da Versão Latina de Frederico Comandino, adicionados e ilustrados por Robert Simson e traduzidos em Português para uso do Real Colégio de Nobres por João Ângelo Bruneli. Publicado em Lisboa, nas oficinas de Miguel Menescal da Costa*. Esta edição é incompleta, pois não inclui os livros aritméticos.

[24] Detalhes sobre isso podem ser vistos em [52] e [76].

[25] André Tacquet (1612 - 1660) foi um jesuíta belga que fez trabalhos importantes em Matemática e Física.

Onze anos depois, em 1792, a Universidade de Coimbra passou a publicar esta tradução da edição de Simson. Ela foi reeditada várias vezes em Portugal. No Brasil, em 1944 e 1945 ela foi reeditada, com ortografia atualizada, pela Editora Fundo de Cultura, de São Paulo.

Por fim, em 2009, a lingua portuguesa ganhou sua primeira edição completa dos *Elementos* de Euclides, quando Irineu Bicudo ([14]) os traduziu diretamente do grego.

2.5 Exercicios suplementares

2.25. Afirma-se, tradicionalmente, mas sem evidência histórica, que os pitagóricos introduziram as ***médias*** na Matemática grega. De qualquer maneira, elas já eram conhecidas na época de Platão. Entre as médias, as mais conhecidas são a ***aritmética*** (m_A), a ***harmônica*** (m_H) e a ***geométrica*** (m_G). Hoje, elas são definidas como segue: Dados dois números a e b,

$$m_A = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_H = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$m_G = \sqrt{ab}.$$

Para nós, hoje, estas médias são definidas para números reais quaisquer. Suas definições originais, para os gregos, eram as seguintes:

- Dadas três números naturais, a, b e c, tais que $a < c < b$, c é a média aritmética de a e b se

$$c - a = b - c.$$

- Dados três números naturais, a, b e c, tais que $a < c < b$, c é a média harmônica de a e b se

$$(a-c) : (b-c) :: a : c.$$

- Dados três números naturais, a, b e c, tais que $a < c < b$, c é a média geométrica de a e b se

$$(c - a) : (b - c) :: a : c.$$

1. Dados dois números a e b, $a < b$, mostre que suas médias aritmética, geométrica e harmônica são tais que:

$$m_G = \sqrt{m_A \times m_H}.$$

2.26. Na Figura 2.27, $ab = A$, $bc = b$, a semi-circunferência tem centro em O, ponto médio de AC, BD é perpendicular ao diâmetro AC e FB é perpendicular ao raio OD. Prove que OE é a média aritmética de a e b, BD é sua média geométrica e FD é sua média harmônica. Deduza que

$$m_A > m_G > m_H.$$

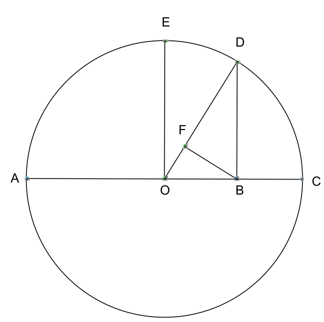


Figura 2.27

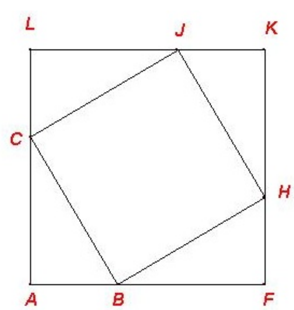


Figura 2.28

2.27. Considere o triângulo ABC da Figura 2.28. Usando esta figura, demonstre o teorema de Pitágoras.

Esta demonstração encontra-se, sem nenhum comentário, em tratados indianos, dos *Sulbasutras* (em torno do século VIII a.E.C.) e na China, nos comentários de Liu-Hui sobre o clássico da Matemática chinesa os *Nove capítulos*. Trata-se do que chamamos hoje de uma "prova sem palavras".

2.28. A construção geométrica a seguir encontra-se em textos rituais religiosos, da Índia, redigidos em torno do VIII século a.E.C., e que provêem de uma tradição oral anterior a 2000 anos a.E.C. Estes textos continham instruções cuidadosas para a construção de altares para cerimônias religiosas. A construção destinava-se a transformar um retângulo em um quadrado de mesma área.

IMPORTANTE: Utilize somente equivalência de áreas e transformações dos retângulos e quadrados envolvidos. Não utilize resultados algébricos, como, por exemplo, usar que em um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c, $a^2 = b^2 + c^2$.

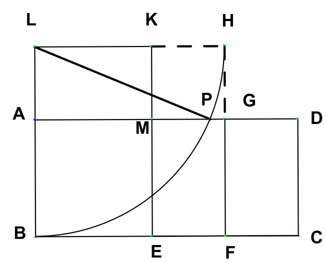


Figura 2.29 Transformação de um retângulo em um quadrado

Seja $ABCD$ o retângulo dado. Sobre BC, marque E tal que $AB = BE$ e construa o quadrado $BEMA$. Divida o segmento EC em duas partes iguais e construa os retângulos $EFGM$ e $GFCD$.

Construa o retângulo $AMKL$ congruente ao retângulo CDG (ou seja, transporte o retângulo $FCGD$ para a posição do retângulo $AMKL$, obtendo a Figura $LBFGMK$).

Prolongue os segmentos LK e FG até se encontrarem em H. Com centro em L e raio LH trace o círculo que corta AD no ponto P.

Demonstre que AP é o lado do quadrado procurado.

Sugestão: Aplique o teorema de Pitágoras.

2.29. A passagem do sensível ao abstrato pode ser percebida na seguinte situação.

Na Figura 2.30 é fácil ver como transformar o paralelogramo $ADCB$ em um retângulo:

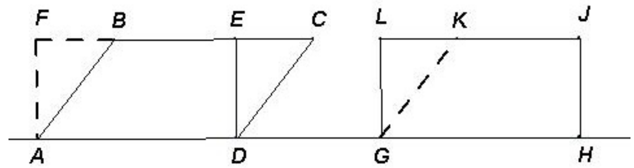


Figura 2.30

Recorte o triângulo EDC do paralelogramo e o coloque na posição FAB, obtendo assim o retângulo desejado. Aliás, essa operação física, que pode ser concebida mentalmente, é o que se faz hoje nos livros didáticos do ensino fundamental para "provar" que é possível transformar um paralelogramo em um retângulo com a mesma área.

Mas o que acontece se o paralelogramo dado for $ADCB$ da Figura 2.31?

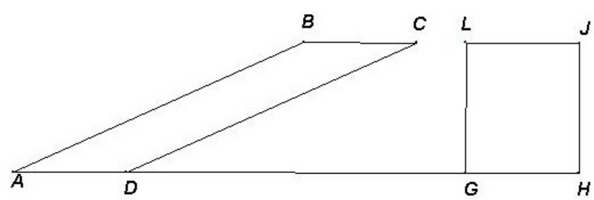


Figura 2.31

Neste caso, será talvez necessário gastar bastante papel e cola, para ser convencido que ele é "igual" ao retângulo $GHJL$.

Prove que, neste caso, são necessários **três** cortes para transformar o paralelogramo no retângulo.

2.30. Examine a Figura 2.32 e demonstre que, usando-a, é possível demonstrar o teorema de Pitágoras. Nela, os triângulos ACD e CGE são congruentes.

2.31. Mostre, usando equivalência de áreas, que a expressão $S = bh/2$, que calcula a área de um triângulo de base b e altura h, fornece sempre o

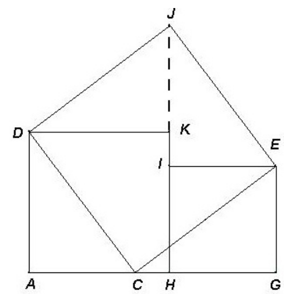


Figura 2.32

mesmo resultado, qualquer que seja o lado do triângulo escolhido como base.

2.32. Diz a tradição que os pitagóricos trabalharam com os *números amigos*.

Dois números são *amigos* se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro. Assim, por exemplo, como

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110,$$

e

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142,$$

os números 284 e 220 são amigáveis. Este é o menor par de números amigos.

Para cada número natural n, defina $K_n = 3 \times 2^n - 1$.

Demonstre que se K_n, K_{n-1} e $3K_{2n-1} + 2$ forem números primos, então o par

$$(2^n \times K_n \times K_{n-1}, 2^n \times (3 \times K_{2n-1} + 2))$$

é formado por números amigos.

Isso se verifica somente para $n = 2$, $n = 4$ e $n = 7$. Os pares correspondentes são (220, 284), (17296, 18416) e (9363584, 9437056).

2.33. Prove a proposição IX.39 dos *Elementos*: Se a soma

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = p$$

for um número primo, então, $2^n p$ é um número perfeito.

Capítulo 3

A Matemática grega após Euclides

3.1 Contextualização histórica

É lugar comum afirmarmos que as figuras geométricas aceitas na geometria grega deviam ser construídas com régua e compasso. De fato, isto é verdade se temos em mente as construções realizadas nos *Elementos* de Euclides. Dizer que o mesmo é verdade para toda a geometria grega significa considerar que o conjunto das práticas gregas seguia o padrão de rigor estabelecido por Euclides, o que não acontecia.

As construções com régua e compasso não permitem resolver todos os problemas tratados pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides, os quais não se furtavam a utilizar outros métodos de construção, ou a empregar outras curvas. Com o auxílio destas curvas, foram resolvidos os problemas clássicos: a trissecção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. Veremos aqui algumas das soluções destes problemas, retiradas de obras fundamentais da beometria grega, que nem sempre se restringiam aos padrões euclidianos.

Pappus, um dos maiores comentadores dos trabalhos matemáticos de seus antecessores gregos, e que viveu no século III E.C., classificou os problemas geométricos do seguinte modo:

> "Os antigos consideravam três classes de problemas ge-o-métri-cos, chamados 'planos', 'sólidos' e 'lineares'. Aqueles que podem ser resolvidos por meio de retas e circunferências de círculos são chamados de 'problemas planos', uma vez que as retas e curvas que os resolvem têm origem no plano. Mas problemas cujas soluções são obtidas por meio de uma ou mais seções cônicas são

> denominados 'problemas sólidos', uma vez que superfícies de figuras sólidas (superfícies cônicas) precisam ser utilizadas. Resta uma terceira classe, que é chamada 'linear' porque outras 'linhas', envolvendo origens diversas, além daquelas que acabei de descrever, são requeridas para sua construção. Tais linhas são as espirais, a quadratriz, a conchóide, a cissóide, todas com muitas propriedades surpreendentes." ([147], pp. 38-39).

O livro no qual encontramos este comentário, A *Coleção matemática*, é uma das fontes principais que nos permite conhecer muitos trabalhos gregos cujas fontes originais se perderam.

O critério usado nesta classificação dos problemas baseia-se nos tipos de linhas necessárias à construção, uma vez que os problemas envolvem sempre construção. Por exemplo, a *conchóide* é uma curva construída de modo mecânico pelos gregos, da seguinte maneira.

Sejam um ponto fixo, K, e uma reta AB, também fixa. A *conchóide* é o lugar geométrico dos pontos P tais que o comprimento entre P e S, ponto de intersecção de KP com a reta AB, é constante (Ver Figura 3.1).

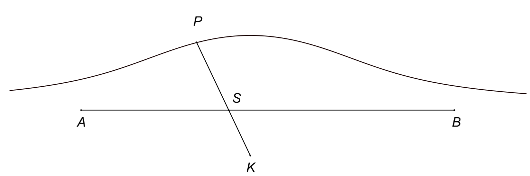


Figura 3.1 Conchóide de Nicomedes

No entanto, a divisão dos problemas em três tipos só foi explicitada no comentário de Pappus, no terceiro século da Era Comum, e podia ser de ordem descritiva, mais do que normativa.

A partir de Arquimedes, podemos estudar métodos que marcaram a geometria grega e se distinguem dos procedimentos euclidianos. Ele nasceu mais ou menos no momento em que Euclides morreu, em torno da segunda década do século III a.E.C. Era de se esperar, portanto, que o trabalho de Euclides tivesse uma influência marcante em sua obra. Mas não foi bem assim, mostraremos que Arquimedes não pode ser visto como um sucessor de Euclides; e seu trabalho não se inscreve, por assim dizer, em uma tradição euclidiana. Um exemplo disso é a utilização de métodos mecânicos de construção, como veremos ser o caso da espiral de Arquimedes. Segundo a tese defendida por Knorr ([100]), Arquimedes exprimiria uma tradição alternativa aos *Elementos* de Euclides, ligada aos métodos desenvolvidos por Eudoxo.

Arquimedes, um dos mais conhecidos matemáticos gregos, chegou a defender um método que permitisse entender certas realidades matemáticas usando a mecânica, ainda que este método possibilitasse apenas a descoberta de propriedades que deveriam ser, em seguida, demonstradas geometricamente. Sabemos hoje que alguns dos resultados demonstrados dessa maneira por Arquimedes eram obtidos de modo puramente mecânico. Haveria, portanto, uma distinção entre métodos de descoberta, que poderiam ser mecânicos, e métodos de demonstração, que deveriam ser *puramente geométricos*.

No início de sua obra sobre a *Quadratura da Parábola* ([81], pp. 233 - 252), em uma carta a Dositeu, Arquimedes afirma que pretende comunicar

> "[U]m certo teorema geométrico que não foi investigado antes e que foi agora investigado por mim e que eu descobri, primeiramente, por meio da mecânica e que exibi, em seguida, por meio da geometria."

Este tipo de procedimento fica ainda mais claro na obra, encontrada apenas em 1899, *O Método dos Teoremas Mecânicos* ([81]), carta escrita a Eratóstenes, na qual Arquimedes explica:

> "(...) [P]ensei que seria apropriado escrever-lhe neste livro sobre um certo método por meio do qual você poderá reconhecer certas questões matemáticas com ajuda da mecânica. Estou convencido de que ele não é menos útil para encontrar provas para os mesmos teoremas. Algumas coisas, que se tornaram claras para mim, em primeiro lugar, pelo método mecânico, foram provadas geometricamente em seguida, uma vez que a investigação pelo referido método não fornece de fato uma demonstração. No entanto, é mais fácil encontrar a prova quando adquirimos previamente, pelo método, algum conhecimento das questões, do que encontrá-la sem nenhum conhecimento prévio."

Arquimedes empregava uma balança abstrata que deveria equilibrar figuras geométricas. Não nos determos sobre este trabalho, do qual podemos encontrar uma análise em [39].

O final do século III a.E.C. foi o período de maior popularidade dos três problemas clássicos. Estes problemas constituem o ponto comum dos trabalhos de diversos geômetras da época, como Eratóstenes, Nicomedes, Híppias, Diocles, Dionisodorus, Perseus e Zenodorus. Apesar da maioria das fontes que contêm estes trabalhos não ter sido preservada, há evidências de aplicações da geometria a problemas de astronomia, ótica, geografia e mecânica. Além disso, estes geômetras parecem ter sofrido influência direta de Arquimedes, o que pode ser constatado pelo uso de métodos mecânicos, como a espiral (e outras curvas geradas por movimentos mecânicos) e diversos tipos de *neuses*[1]. Contudo, nota-se também que estes matemáticos se distanciaram um pouco do estilo de Arquimedes, uma vez que se dedicaram à procura de métodos alternativos em suas construções. Esta busca poderia indicar uma necessidade de ir além dos procedimentos disponíveis na época. Os escritos de Euclides ofereciam uma alternativa, mas sua exploração demandava técnicas de natureza muito distinta, o que talvez ultrapassasse as possibilidades desta geração imediatamente posterior a Arquimedes.

Na verdade, a busca de novos métodos de construção, inspirados no paradigma euclidiano serviu de motivação para os trabalhos de Apolônio, desenvolvidos na virada do século III para o século II a.E.C. Acredita-se que ele tenha começado a redigir seu livro mais conhecido, o *Cônicas*, por volta do ano 200 a.E.C. Nesta obra, Apolônio define as seções cônicas do modo mais geral possível, como seções de cones, usando métodos muito característicos dos *Elementos* de Euclides. Em particular, aqueles que dizem respeito à aplicação de áreas, que deram origem aos nomes dos diferentes tipos de cônicas: parábola, hipérbole e elipse. O estilo deste livro também é muito similar ao de Euclides, pois Apolônio segue o estilo formal dos *Elementos* até nos detalhes do enunciado de certas proposições. Seus resultados parecem exprimir a tentativa de estender e tornar rigorosos os métodos antigos empregados no estudo de cônicas, desenvolvidos por Euclides (em sua obra sobre as cônicas) e Arquimedes.

Uma das preocupações de Apolônio era apresentar soluções por meio de cônicas para os problemas clássicos, como a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo, a fim de eliminar as soluções por neuses e por curvas especiais usadas por Arquimedes e outros. A diversidade de métodos empregados na resolução de problemas geométricos até o século III a.E.C. mostra que, neste estágio do desenvolvimento da Matemática, o importante era resolver os problemas por qualquer técnica disponível. Este leitmotiv marca a tradição grega de resolução de problemas geométricos. Com Apolônio, este panorama começa a se transformar. Mesmo que tenha fornecido, ele mesmo, uma construção da duplicação do cubo por meio da neusis, Apolônio preferia claramente soluções usando cônicas, com um estilo bem euclidiano, e que dependiam de resultados centrais dos *Elementos*. Por exemplo, as

[1] A *neusis* (plural – *neuses*) é um método de construção que usa o ajuste com uma régua graduada, o que não é considerado um procedimento euclidiano. Veremos uma construção por este método mais adiante.

soluções da trissecção do ângulo por meio da *espiral de Arquimedes* e da neusis não eram consideradas satisfatórias, e Apolônio propôs uma construção com a hipérbole. Os trabalhos de Arquimedes apresentam uma diversidade de aplicações do método da neusis em construções que também podiam ser realizadas com régua e compasso.

A popularidade destas construções por neuses demonstra a vasta presença de métodos não-euclidianos nos trabalhos de Arquimedes e seus seguidores. Além destas técnicas, a ênfase de Arquimedes na investigação dos procedimentos de Eudoxo contrasta com o tipo de pesquisa característico de Euclides e Apolônio, marcado pelo estudo de lugares geométricos e pelo uso de cônicas.

Os métodos de resolução de problemas usados por Euclides foram consolidados por Apolônio no período seguinte, ao passo que os procedimentos de Arquimedes só encontrariam seguidores bem mais tarde, por volta dos séculos XVI e XVII. Pode datar da transição entre os séculos III e II a.E.C. a tentativa de regularização dos métodos para resolver problemas geométricos, quando os matemáticos teriam buscado construir, somente por métodos planos (ou seja, com régua e o compasso), ou por métodos sólidos (usando seções cônicas) construções já efetuadas por outros meios.

Na época de Apolônio, o campo da geometria estava desenvolvido a tal ponto que pode ter se tornado interessante regularizar os métodos de resolução de problemas e tornar as técnicas de construção mais formais. A consideração de classes distintas de problemas – como a dos problemas planos, sólidos e lineares – ajudava a compreender o escopo dos métodos usados para tratá-los. Isso explicaria o esforço para reduzir outros tipos de construção a um destes três. Assim, descrever os tipos de problema existentes podia ser conveniente para organizar a pesquisa.

O início do século II a.E.C. foi marcado por um declínio na atenção dos matemáticos aos problemas geométricos avançados, o que não representou uma decadência do campo matemático, mas um deslocamento de interesse em direção a outras áreas, como a trigonometria e os métodos numéricos. W. Knorr ([101]) taxa a escola de Alexandria, nos tempos de Arquimedes, de "academicista". Mesmo a composição dos Elementos de Euclides, para ele, se relaciona aos ideais da época e, sobretudo, aos seus objetivos pedagógicos. Esta abordagem privilegiava uma exposição sintética, que torna inacessível o procedimento heurístico da descoberta e menosprezava toda consideração concreta ou prática. Ele contrasta esta tendência com outras obras alexandrinas mais tardias, como as *Métricas* de Hierão, o *Almagesto* de Ptolomeu, e a *Aritmética* de Diofanto.

A exposição de Euclides não dá nenhuma pista sobre a aplicação de seus teoremas a problemas práticos. A abordagem teórica, de inspiração euclidiana, seria característica do ensino nas escolas filosóficas, pois o estudante devia aprender Matemática por meio da contemplação, e não pela prática. Knorr ([101]) chega a atribuir a paralisação do trabalho produtivo da geometria grega aos efeitos esclerosantes desta pedagogia, típica da orientação escolástica dos pensadores da Alexandria antes do início da era comum. Logo, a divisão, proposta por Pappus, entre problemas planos (construídos com régua e compasso) e outros, sólidos ou mecânicos, não provém do tempo de Euclides. A resolução de problemas era a parte essencial da atividade geométrica na época de Euclides, Arquimedes e Apolônio, e a compilação do saber na forma de um conjunto de teoremas, uma atividade auxiliar.

Exporemos em seguida algumas construções não-euclidianas, bem como problemas de aproximação que empregam o chamado "método de exaustão". Analisaremos depois a utilização de métodos euclidianos para a definição das cônicas por Apolônio.

3.2 Arquimedes

Já vimos que fazer a "quadratura" de uma área limitada por uma curva plana significa construir um quadrado cuja área seja igual à da figura. O método da exaustão foi empregado em muitos problemas de quadratura de figuras limitadas por linhas curvas, ou seja, que não são limitadas por poligonais fechadas. Trataremos aqui, em particular, do exemplo da quadratura da parábola, como apresentado por Arquimedes.

3.2.1 A quadratura da parábola

Para Arquimedes, uma parábola era definida pela seção de um cone circular reto, obtido girando-se um triângulo retângulo em torno de um dos lados que formam o ângulo reto. A parábola é obtida quando seccionamos este cone por um plano perpendicular à hipotenusa do triângulo que foi girado.

Esta definição é equivalente à fornecida por Euclides em seu livro perdido sobre as cônicas. O ponto no qual o plano intercepta esta hipotenusa é chamado "vértice" da parábola, sua interseção com a base do cone é a "base" e obtemos o "diâmetro", ou "eixo", da parábola, ligando o vértice ao ponto médio de sua base.

A quadratura da parábola é um problema de comparação da área determinada por uma parábola e por um segmento de reta com a área de um triângulo tendo este segmento de reta como base. Mais precisamente, queremos mostrar que a área S entre a parábola e o segmento Qq é $4/3$ da área do triângulo PQq (Veja a Figura 3.2). Para isto, precisamos de algumas proposições, que Arquimedes supõe conhecidas (Veja [81], pp. 234-236).

Proposição 1. *Se por um ponto P de uma parábola traçarmos uma reta PV que é o próprio eixo da parábola ou é paralela a esse eixo, e se Qq é uma corda paralela à tangente à parábola por P e que corta PV em V, então: $QV = Vq$. Reciprocamente, se $QV = Vq$, a corda Qq será paralela à tangente em P (Veja a Figura 3.2).*

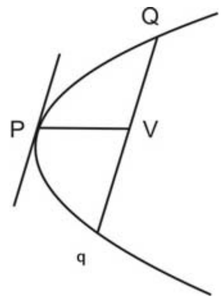


Figura 3.2

Proposição 2. *Se, em uma parábola, QQ' for uma corda paralela à tangente em P, e se uma linha reta que passa por P for o eixo ou paralela ao eixo, e que corta QQ' em V, e a tangente à parábola por P em T, então $PV = PT$* (Figura 3.3).

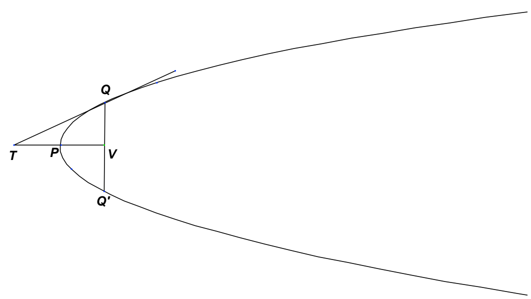


Figura 3.3

Proposição 3. *Se por um ponto da parábola traçarmos uma reta que é o eixo ou é paralela ao eixo da parábola, como PV, e se por dois outros pontos da parábola Q e R traçamos retas paralelas à tangente à parábola por P e que cortam PV respectivamente em V e W, então $PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2.(Figura 3.4)$*

Observamos que a equação da parábola, dada em linguagem atual por $y = kx^2$, pode ser deduzida desta última propriedade. Com efeito, considere o eixo que faz um ângulo reto com a tangente no vértice P, os segmentos

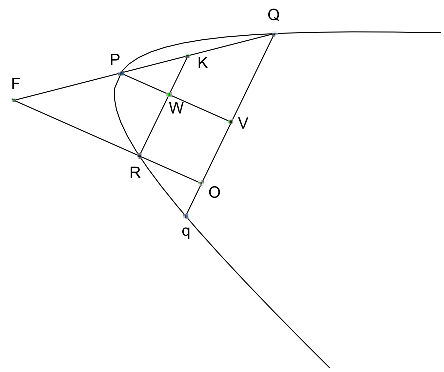


Figura 3.4

PV medindo y, PW medindo y', QV medindo x e RW medindo x'. Pela proposição 3 temos que

$$PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2.$$

Logo

$$\frac{y}{y'} = \frac{x^2}{x'^2},$$

ou seja, $y = kx^2$.

Esta relação é o ***sintoma*** da parábola considerado, anacronicamente, um antecedente grego da equação de uma curva. No entanto, para Arquimedes o ponto P não precisa ser o vértice e os eixos não são fixos. Na dedução do sintoma, os eixos são escolhidos do modo mais conveniente. Quando falarmos de Apolônio, veremos com mais detalhes o que é um sintoma para os gregos.

As provas das três proposições precedentes não são fornecidas por Arquimedes e, para suas demonstrações, ele remete à obra sobre cônicas de Euclides, que se perdeu.

Passamos agora às proposições essenciais para a quadratura da parábola.

Proposição 19. *Sejam P o vértice e Q um ponto qualquer sobre a parábola e R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ, e seja M o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por R corta Qq, paralela à tangente em P. Então,* $PV = (4/3)RM$ (Ver a Figura 3.5).

Demonstração: Sabemos que a paralela a Qq por R corta PV em W. Então, pela proposição 3, temos que

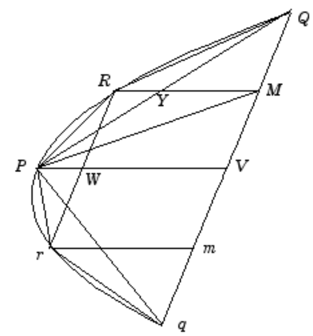


Figura 3.5

$$PV : PW = (QV)^2 : (RW)^2. \tag{3.1}$$

Mas, por construção, $RW = MV$ e temos assim que

$$PV : PW = (QV)^2 : (MV)^2 = (2MV)^2 : (MV)^2 = 4 : 1. \tag{3.2}$$

Lembramos que $QV = 2MV$ pois, pela proposição 1, RM (paralela ao eixo PV) corta PQ (paralela à tangente em R) no ponto médio Y. Mas o triângulo PQV é semelhante a YQM e como RM corta PQ em seu ponto médio, deve cortar QV também em seu ponto médio. Logo, $PW = (1/4)PV$. Assim,temos

$$PV = PW + WV = (1/4)PV + RM, \tag{3.3}$$

logo $RM = (3/4)PV$ e temos que $PV = (4/3)RM$.

Proposição 21. *Sejam Qq a base e P o vértice de um segmento parabólico PQq. Seja R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ (Figura 3.5). Então:*

$$\Delta PQq = 8\Delta PRQ.$$

Demonstração: Seja PV a paralela ao eixo que corta Qq em seu ponto médio V (pela proposição 1, pois Qq é paralela à tangente em P). A reta paralela ao eixo por R corta PQ em seu ponto médio Y (ainda pela proposição 1), logo esta mesma reta corta QV em seu ponto médio M(considerando o triângulo PQV semelhante a YQM, como na proposição 19). Em seguida, traçamos o segmento PM.

Pela Prop. 19, $PV = (4/3)RM$. E temos que $PV = 2YM$, pois os triângulos PQV e YQM são semelhantes e $QV = 2QM$. Logo, como

$$2YM = 4\frac{(RY + YM)}{3}, \tag{3.4}$$

temos que $YM = 2RY$.

Podemos mostrar, assim, que

$$\Delta\, PQM = 2\Delta\, PRQ,$$

pois

$$\Delta\, PQM = \Delta\, YQM + \Delta\, PYM,$$

$$\Delta\, PRQ = \Delta\, RQY + \Delta\, PRY,$$

e ΔYQM tem a mesma altura (até Q) que ΔYRQ e duas vezes a base ($YM = 2RY$), logo $\Delta YQM = 2\ \Delta YRQ$; de modo análogo, $\Delta\, PYM$ tem a mesma altura (até P) que $\Delta\, PRY$ e duas vezes a base, logo $\Delta\, PYM = 2\Delta\, PRY$.

Como $\Delta\, PQM = 2\Delta\, PRQ$, podemos mostrar que $\Delta\, PQV = 4\Delta\, PRQ$, pois $\Delta\, PQM = \Delta\, PMV$ uma vez que têm a mesma altura (até P) e bases iguais ($QM = MV$). Logo,

$$\Delta\, PQV = \Delta\, PQM + \Delta\, PMV = 2\Delta\, PQM = 4\Delta\, PRQ.$$

Mas, como V divide Qq em dois, segue-se que $\Delta\, PQq = 8\Delta\, PRQ$.

Mas, se o segmento RW é traçado de modo a encontrar a parábola novamente em r, temos que $RW = rW$, pois $RW = MV = Vm = rW$, e a mesma prova mostra que $\Delta PQq = 8\Delta Prq$. □

Mostremos agora como Arquimedes efetua a quadratura da parábola, usando o método da exaustão.

Suponhamos que a área do triângulo $\Delta\, PQq$ é T. Como

$$T = \Delta\, PQq = 8\Delta\, PRQ$$

e

$$T = \Delta\, PQq = 8\Delta\, Prq,$$

decorre

$$\Delta\, PRQ + \Delta\, Prq = \frac{T}{4}.$$

(Note que os triângulos PRQ e Prq são construídos sobre os lados de PQq).

Podemos continuar o mesmo processo e construir triângulos na diferença entre a parábola e o polígono obtido pela união dos triângulos ΔPQq, ΔPRQ e ΔPrq, o que fornecerá triângulos de áreas $T/4^2$, $T/4^3$, e assim por diante. A área do segmento parabólico seria a soma das áreas de todos estes triângulos.

Um passo essencial para a quadratura da parábola é dado pela proposição 23, que permite a Arquimedes evitar a soma de uma série infinita.

Proposição 23: Dada uma sucessão finita de áreas, A, B, C, D, $\ldots$, Z, das quais A é a maior, e cada uma das outras é quatro vezes sua sucessora, então,

$$A + B + C + D \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$

a demonstração deste resultado é feita da seguinte maneira

Sejam b, c, d, $\ldots$ áreas tais que

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{3}B \\ c &= \frac{1}{3}C \\ d &= \frac{1}{3}D \\ &\cdots \end{aligned}$$

Segue-se então, facilmente, que

$$B + b = \frac{1}{3}A.$$

De maneira análoga,

$$C + c = \frac{1}{3}B$$
$$\cdots$$

Então

$$B + C + D + \cdots + Z + b + c + d + \cdots + z = \frac{1}{3}(A + B + C + \cdots + Y).$$

Por outro lado,

$$b + c + d + \cdots + y = \frac{1}{3}(B + C + D + \cdots + Y).$$

Então, por subtração

$$B + C + D + \cdots + Z + z = \frac{1}{3}A,$$

ou seja,

$$A + B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$

Arquimedes aplica este resultado aos triângulos obtidos sucessivamente a partir do triângulo PQq (Figura 3.5) e obtém

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}T + \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}T = \frac{4}{3}T.$$

Agora Arquimedes está pronto para demonstrar a proposição 24:

Proposição 24: Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda Qq é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele (Veja a Figura 3.5, página 111).

Arquimedes demonstra este resultado pelo método da exaustão, provando que a área área S do segmento parabólico não pode ser nem menor nem maior que $\frac{4}{3}T$ (soma das áreas dos triângulos). Logo $S = 4T/3$. Lembramos que este é o procedimento clássico do método da exaustão. Para provar que duas grandezas A e B são iguais, mostra-se que não se pode ter $A > B$ e $A < B$, do que decorre, forçosamente, que $A = B$.

Suponhamos que $S > \frac{4}{3}T$. Devem existir então n triângulos tais que a soma das suas áreas

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}T = A$$

seja inferior a S e superior a $\frac{4}{3}T$ (argumento geométrico). Mas como

$$A = \frac{4}{3}T - \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}T,$$

A seria inferior a $\frac{4}{3}T$, o que seria contraditório com a hipótese de que A é superior a $\frac{4}{3}T$, o que leva a uma contradição.

Suponhamos agora que $S < \frac{4}{3}T$ e consideremos a diferença $\frac{4}{3}T - S$. Pelo Lema de Euclides, deve haver um inteiro m tal que a área $T_m = \frac{1}{4^{m-1}}T$ seja inferior a esta diferença. Mas por outro lado,

$$T_m > \frac{1}{3}T_m = \text{resto} = \frac{1}{3.4^{m-1}}T = \frac{4}{3}T - T\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

e

$$\frac{4}{3}T - S > T_m > \frac{4}{3}T - T\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}\right),$$

(pela desigualdade anterior). Logo,

$$S < T\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}\right),$$

o que contradiz a evidência geométrica, uma vez que

$$T\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

é a área de um polígono inscrito no segmento parabólico. □

3.2.2 A "área" do círculo

Mostraremos, nesta seção, como Arquimedes fez a quadratura do círculo, usando o método da exaustão.

Esta proposição é uma maneira de determinar a área do círculo encontrando uma figura retilínea, um triângulo no caso, com área igual à área do círculo. Observamos que esta é uma das primeiras ocasiões em que se utiliza o perímetro de uma curva no contexto da geometria grega (antes, apenas os perímetros de polígonos estavam em jogo).Salientamos que o Lema de Euclides é essencial nesta demonstração.

Proposição 1. *A área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo.*

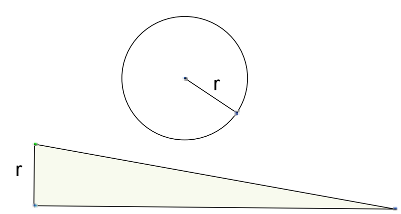


Figura 3.6

Demonstração. A ideia principal da demonstração é aproximar a área do círculo pelas áreas de polígonos inscritos e circunscritos cujos lados são sucessivamente duplicados.

Sejam C e T as áreas do círculo e do triângulo, respectivamente. Arquimedes inscreve no círculo um quadrado, um octógono regular, e assim por diante, passando sucessivamente do polígono regular inscrito de 2^n lados para o de 2^{n+1} lados pelo processo bem conhecido (Veja a Figura 3.7). Além disso, Ele circunscreve ao círculo um quadrado, um octógono regular, etc., passando sucessivamente do polígono regular circunscrito de 2^n lados ao de 2^{n+1} lados. A Figura 3.7 mostra o quadrado inscrito inicial, $ABCD$, e os lados AL e LB do octógono regular inscrito, obtido pela duplicação do número de lados do quadrado. Ela mostra também o quadrado circunscrito original, $EFGH$, e o lado KL do octógono regular circunscrito obtido a partir do quadrado $EFGH$.

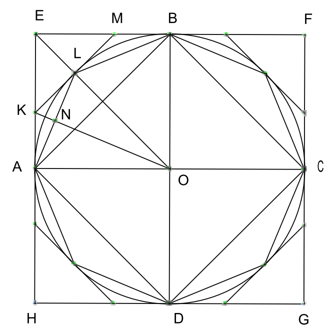


Figura 3.7

Sejam I_n e C_n, $n \geq 2$, os polígonos de 2^n lados respectivamente inscritos e circunscritos na circunferência.

Mostraremos que não podemos ter $C > T$ e $C < T$. Isso acarreta que $C = T$.

Suponhamos, inicialmente, que $C > T$. Neste caso, podemos obter uma quantidade d tal que $d = C - T > 0$.

De maneira geral, dado um polígono regular inscrito em um círculo (Figura 3.8), sua área é o produto de seu apótema, OG, por seu semi-perímetro.

Aplicando isso ao polígono I_n, vemos que ele tem área igual à do triângulo retângulo no qual os catetos são iguais, respectivamente, ao apótema e ao perímetro do polígono regular de 2^n lados inscrito no círculo. Como os apótemas e os perímetros dos polígonos inscritos são sucessivamente menores que o raio e a circunferência do círculo, ou seja, menores do que os lados correspondentes do triângulo de área T, podemos concluir que a área de $I_n < T$ para todo n. Logo, a área de $I_n < T < C$.

Como a área de I_n é menor do que C, podemos obter uma quantidade $k_n = C - \text{área } (I_n)$. Usando o Lema de Euclides, quando aumentamos o número de lados do polígono esta quantidade pode ser tornada menor do que qualquer quantidade dada. Logo, para n suficientemente grande, podemos obter $k_n < d$. Mas, como

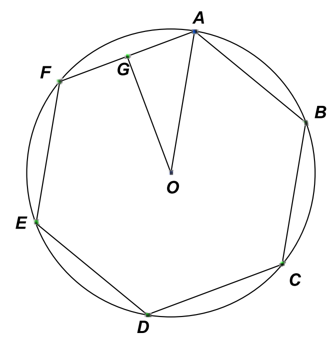


Figura 3.8

$$\text{área de } I_n < T < C,\ d = C - T < C - \text{ área } (I_n) = k_n,$$

chegamos a uma contradição.

Voltando à nossa demonstração, isto implica que podemos tomar k_n menor do que d no raciocínio anterior. Para finalizar a demonstração, supomos agora que $C < T$ e teremos novamente uma contradição. Se $C < T$, temos $d = T - C > 0$. O argumento é análogo, usando polígonos circunscritos.

Isso termina a demonstração da proposição de Arquimedes.

Mas, como calcular π?

Para fazer isso, Arquimedes, inicialmente, inscreveu e circunscreveu hexágonos regulares em uma circunferência de círculo de raio 1. Em seguida, ele duplicou sucessivamente seus números de lados. Assim, ele inscreveu os polígonos regulares com $3 \times 2^{n-1}$ lados, cujos semiperímetros são b_n e circunscreveu polígonos regulares com $3 \times 2^{n-1}$, cujos perímetros são a_n. As sequências b_n e a_n são respectivamente decrescentes e crescentes e temos que

$$b_n < 2\pi < a_n.$$

Os Exercícios 5 e 6 desta seção mostram como podemos chegar a uma boa aproximação de π por este método.

3.2.3 A espiral de Arquimedes e a trisseção do ângulo

Estudaremos, agora, a *espiral de Arquimedes*, curva importante, e que permite resolver dois dos problemas clássicos da geometria grega, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

Transcrevemos a definição de espiral proposta por Arquimedes (Ver [81], p. 154):

> "Se uma linha reta traçada em um plano se move uniformemente em torno de uma extremidade fixa e retorna à sua posição de partida, e se ao mesmo tempo em que a reta se move (uniformemente), um ponto partindo da origem se move (uniformemente) sobre a reta, este ponto irá descrever uma espiral no plano."

Por esta definição, baseada na noção de proporcionalidade, temos que a espiral é uma curva gerada por um ponto que se move sobre um segmento de reta com velocidade constante ao mesmo tempo em que este segmento de reta se move, também com velocidade constante, circularmente com uma extremidade fixa e a outra sobre uma circunferência. A partir desta definição mecânica, Arquimedes define a propriedade fundamental da espiral:

Consideremos a espiral com extremidades em O e R e o círculo correspondente de raio OR (Veja a Figura 3.9). Então, Arquimedes mostra que se dois segmentos de reta, OO_2 e OO_1, são traçados da origem O até dois pontos sobre a espiral e se estes segmentos, prolongados, cortam o círculo respectivamente em R_2 e R_1, temos que estes segmentos estarão entre si na mesma razão que os arcos de circunferência correspondentes.

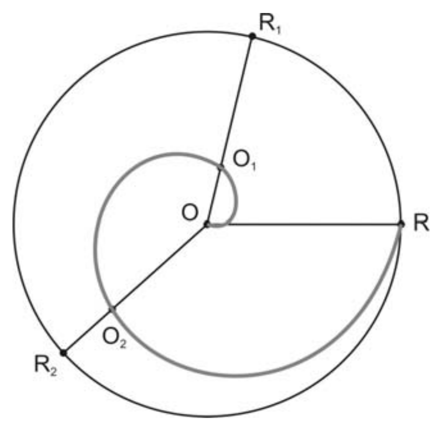


Figura 3.9

Ou seja,

$$OO_2 : OO_1 :: \text{ arco}\, RR_2 : \text{arco}\, RR_1.$$

Com efeito, quando a reta OR gira, os pontos R_i se movem com velocidade uniforme sobre a circunferência enquanto os pontos O_i se movem com velocidade uniforme sobre o segmento de reta OR. Sendo assim, quando R chega a R_1, o ponto O chega a O_1 e quando R chega a R_2 o ponto O chega a O_2. □

Como já mencionamos, o problema de dividir um ângulo em três partes iguais era um dos problemas importantes da geometria grega. Sabemos dividir um ângulo em duas partes iguais com régua e compasso, mas muitas foram as tentativas frustradas de encontrar um procedimento análogo para o caso da trissecção do ângulo. Uma aplicação da Espiral de Arquimedes é justamente permitir achar uma solução para este problema. Isso é feito como segue.

Seja o ângulo POQ que desejamos dividir em três. Marque os pontos Q_1 e Q_2 de modo que dividam OQ em três partes iguais. Traçamos, então, dois arcos de circunferência com centro em O e com raios OQ_1 e OQ_2 que cortarão o trecho de espiral que vai de O a Q em dois pontos O_1 e O_2. Então, as retas OO_1 e OO_2 trissectam o ângulo POQ.

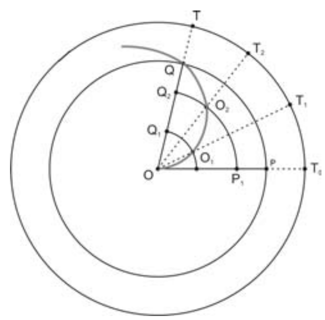


Figura 3.10

Com efeito. Tracemos uma circunferência de raio OT_0, que define a espiral, e marquemos os pontos T_1 e T_2 sobre a mesma, prolongando OO_1 e OO_2. Sejam os pontos T_0 e T os pontos de encontro dos prolongamentos de OP e OQ com a circunferência de raio OT_0 respectivamente. Pela propriedade da espiral, o arco de circunferência T_0T_1 está para o arco T_0T assim como o segmento OO_1 está para o segmento OQ. Mas, mas por construção, $OO_1 = OQ_1 = OQ/3$, o que demonstra que o segmento OO_1 trissecta o ângulo POQ. Isto porque o arco T_0T_1 divide T_0T em três. O mesmo raciocínio pode ser feito para o segmento OO_2. □

Este procedimento permite dividir um ângulo em um número, n, de partes: é suficiente dividir o segmento OQ em n partes.

Observe que a solução para o problema da trissecção é mecânica, pois é gerada por dois movimentos combinados, e leva em consideração a velocidade. Assim, ela não seria aceita como uma solução genuinamente geométrica pelos padrões euclidianos. Mas esta limitação não impediu que os matemáticos da época explorassem construções deste tipo em problemas não elementares.

A principal propriedade da espiral, que é bastante útil para problemas de construção, está no fato de associar uma razão entre arcos (ou ângulos) a uma razão entre segmentos. A espiral estabelece uma proporcionalidade entre uma distância em linha reta e uma medida angular, o que permite reduzir o problema de dividir um ângulo em partes iguais ao problema simples de dividir um segmento de reta em partes iguais. A distância entre a origem e um ponto sobre a espiral é proporcional ao ângulo formado pela reta inicial e pela reta que compõe este ângulo. Esta é exatamente a propriedade expressa, em linguagem atual, pela equação polar da espiral, que pode ser escrita na forma $r = a\theta$, $\theta \geq 0$.[2].

A espiral de Arquimedes também pode ser usada para resolver o problema da quadratura do círculo, como indicado a seguir. Como exercício, deixamos ao leitor completar os detalhes da demonstração.

Sejam O o ponto inicial da espiral e P o ponto quando ela completa a primeira volta (ou seja, quando $\theta = 2\pi$). Trace a tangente à espiral no ponto P, e seja T o ponto em que esta tangente intercepta a perpendicular a OP, pelo ponto O. Então, na proposição 19 de seu livro sobre as espirais, Arquimedes prova que OT é o comprimento da circunferência de centro O e raio OP.

Como Arquimedes demonstrou, em sua obra ***Sobre a medida do círculo***, que a área de um círculo é igual à área do triângulo retângulo cujos catetos medem, respectivamente, o raio e a circunferência do círculo, segue-se que a área do círculo de raio OP é igual à área do triângulo OPT.

Exercícios

3.1. Identifique claramente em que passos da demonstração da proposição 23, sobre a quadratura da parábola (página 113), Arquimedes usa o lema de Euclides e como o emprega.

(Sugestão: Utilize a Figura 3.11.)

3.2. Como você demonstraria a proposição 23 usando séries infinitas? Como você garante que as séries empregadas são de fato convergentes?

3.3. Demonstre, com detalhes, a segunda parte da proposição 1 de Arquimedes, sobre a quadratura do círculo, ou seja, faça a demonstração completa da etapa em que Arquimedes emprega polígonos circunscritos.

[2] A *quadratriz*, outra curva estudada pelos geômetras gregos, permite também associar medidas lineares com medidas angulares, e portanto possibilita, também, a trissecção do ângulo. Veja Carvalho,[28], para uma exposição desta e de várias outras curvas criadas pelos gregos para resolver problemas geométricos.

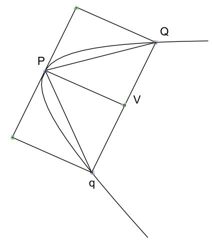


Figura 3.11

3.4. Euclides demonstrou, em XII.2, que círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros. Chamando de A_1 e de A_2, respectivamente a área dos dois círculos, cujos raios são r_1 e r_2, e cujas circunferências são C_1 e C_2, então

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2}.$$

1. Prove que existe uma constante de proporcionalidade, k, tal que

$$\frac{A_1}{(2r_1)^2} = \frac{A_2}{(2r_2)^2}.$$

Por outro lado, como acabamos de ver, Arquimedes demonstrou que

$$2A_1 = C_1 \times r_1,$$

$$2A_2 = C_2 \times r_2.$$

2. Prove que a constante k, é tal que

$$k = \frac{C_1}{2r_1} = \frac{C_2}{2r_2}.$$

Ou seja, demonstramos que a mesma constante de proporcionalidade relaciona a área de um círculo com seu raio e a circunferência do mesmo círculo com seu raio. Hoje esta constante é chamada de de π. Assim,

$$A = \pi r^2,$$

e

$$C = 2\pi r.$$

3.5. Dada a fórmula para o perímetro de um polígono regular com n lados, obtenha a fórmula para o perímetro do polígono com $2n$ lados (Figura 3.12). Note inicialmente que todo hexágono regular é inscritível e que seu lado é igual ao raio do círculo circunscrito. Use então a seguinte proposição (proposição VI.3 dos *Elementos* de Euclides): Se o ângulo de um triângulo é bissectado por uma reta que divide o lado oposto em dois segmentos, a razão entre estes segmentos é igual à razão entre os outros dois lados do triângulo.

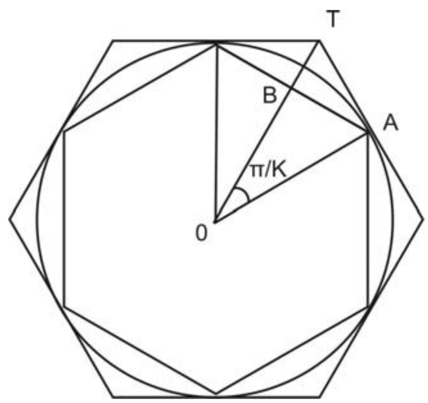


Figura 3.12

3.6. Aplicando sucessivamente aos polígonos a fórmula encontrada no exercício anterior, mostre que podemos obter limites cada vez mais próximos de π. Quantos lados tinham os polígonos que Arquimedes empregou para achar a aproximação $223/71 < \pi < 22/7$?

3.7. Complete os detalhes da demonstração esboçada na página 120 para provar que a espiral de Arquimedes resolve o problema da quadratura do círculo.

3.8. Usando a equação $r = a\theta$, $\theta \geq 0$. Use um programa de computador para explorar diversos tipos de espiral de Arquimedes. Aumente θ para além de 2π e investigue o que acontece com a distância r. Faça a variar. O que acontece com o comprimento do raio vetor quando variamos a de 1 a 2 e de 1 a 1/2?. Experimente, em seguida, valores negativos para a e θ.

3.9. A construção a seguir, que utiliza ***neusis***, é um exemplo das várias soluções do problema da trissecção do ângulo propostas por Arquimedes.

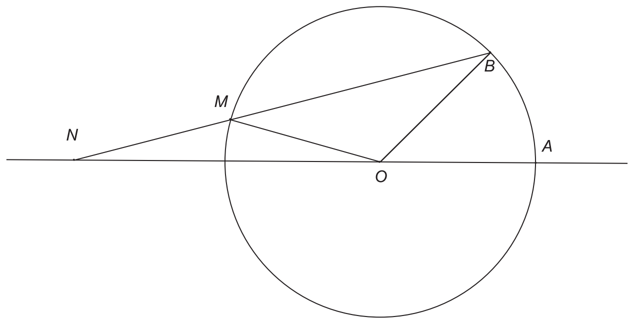


Figura 3.13 Trissecção do ângulo por Arquimedes

Suponha que desejamos trissectar o ângulo BOA. Tome uma reta r que passa por B e, tendo o cuidado para que ela sempre passe por B, movimente-a para que o segmento MN seja igual ao raio OM do círculo. Isso é exatamente o que se denomina uma construção por neusis: ***Ajustamos*** um segmento (o raio OM) entre o círculo e a linha reta que passa por C e por A.

Prove que

$$\widehat{BOA} = \widehat{BNO} + \widehat{MBO} = 3 \times \widehat{BNO}.$$

3.3 Apolônio e as cônicas

Antes de começar a apresentar a maneira de Apolônio abordar as cônicas, é necessário uma breve introdução às aplicações de área da geometria grega. Em língua portuguesa, maiores detalhes podem ser vistos em [27].

3.3.1 A aplicação de áreas

O que é, na terminologia matemática grega, ***aplicar*** uma figura (poligonal) a uma reta dada? Esse problema consiste em construir a figura dada de tal maneira que o segmento de reta seja um de seus lados. Em geral, é exigido que a figura construída, preencha algumas exigências. Por exemplo, sejam $ABCDE$ um polígono e KL um segmento de reta (Figura 3.14). Aplicar ao segmento KL, por exemplo, um paralelogramo, com área igual a $ABCDE$, significa construir um paralelogramo $KLRS$ de que KL é um dos lados, e cuja área seja igual à área de $ABCDE$. Pode também ser pedido que o paralelogramo atenda a outras exigências, como, por exemplo, ter o ângulo SKL igual a um ângulo dado.

Na maioria das aplicações, o paralelogramo aplicado é um retângulo, ou seja, o ângulo SKL é reto. Neste livro, nos limitaremos a este caso.

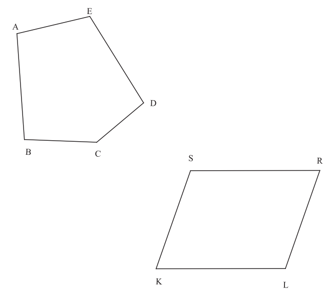


Figura 3.14 Aplicação de áreas

Os gregos usavam três tipos de aplicação de áreas, listados a seguir:

1. Aplicação parabólica;
2. Aplicação elíptica;
3. Aplicação hiperbólica.

Em sua formulação mais geral, a solução desses problemas exige conhecimentos do Livro VI dos *Elementos*, que trata exatamente da teoria de proporcionalidade de grandezas, de Eudoxo (exposta no Livro V dos *Elementos*) no caso particular das figuras planas.

Aplicações parabólicas

Uma aplicação parabólica (Veja a Figura 3.15) consiste em aplicar a um segmento (de) um paralelogramo ($DEFG$) igual a uma figura dada (S), com um ângulo especificado (ABC). Trataremos somente do caso de aplicar um retângulo a um segmento. Ou seja, construir um retângulo, de que um dos lados é um segmento dado, e igual a uma figura poligonal dada.

Aplicações elípticas.

Em sua formulação geral, uma *Aplicação elíptica* ou *com falta* consiste em a aplicar a um segmento de reta AB, um paralelogramo, com um ângulo dado, igual a um polígono dado, e de tal maneira que o que falta para completar

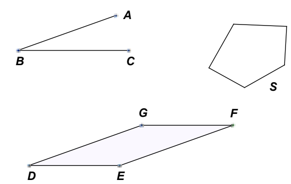


Figura 3.15 Aplicação de áreas parabólica

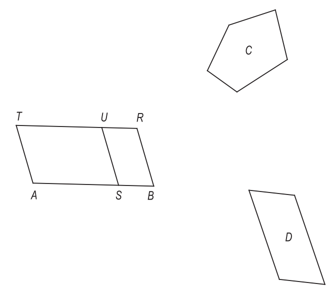


Figura 3.16 Aplicação de áreas elíptica ou com falta

a figura a todo o segmento AB seja um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado (Figura 3.16).

No caso que nos interessa, o de retângulos, o problema é reformulado da seguinte forma: Dado o polígono C, pede-se que seja construído o retângulo $ASUT$, com área igual à de C, e tal que $SBRU$ seja um quadrado. dado. O quadrado $SBRU$ é o "que falta" para que $ASUT$ tenha AB como lado, isto é, esteja aplicado a AB. É este problema que resolveremos.

Aplicações hiperbólicas

Uma *Aplicação hiperbólica* ou *com excesso* consiste em aplicar a um segmento de reta AB, um paralelogramo, com um ângulo dado, igual a um polígono dado, e de tal maneira que ele excede o segmento AB por um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado (Figura 3.17).

Dado o polígono C, pede-se que seja construído o paralelogramo $APOR$ com área igual à de C, e tal que $BPOQ$ seja semelhante ao paralelogramo D. O paralelogramo $BPOQ$ é o "excesso" para que $ABQR$ tenha lado AB, isto é, esteja aplicado a AB.

Não abordaremos o problema nesta formulação mais geral. Mostraremos somente como resolvê-lo, no caso em que o paralelogramo aplicado é um retângulo, e que o excesso é um quadrado.

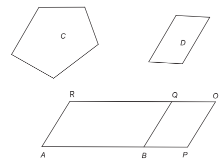


Figura 3.17 Aplicação de áreas hiperbólica ou com excesso

3.3.2 As cônicas

Os nomes "parábola", "elipse" e "hipérbole" têm origem no método euclidiano de aplicação de áreas, exposto nos *Elementos* de Euclides, nas proposições 15 a 19 do Livro VI. A aplicação exata é chamada de "parábola", a aplicação por falta é uma "elipse" e a aplicação por excesso, uma "hipérbole". Qual seria, portanto, a relação entre estes métodos euclidianos e a construção das cônicas?

Na verdade, até os trabalhos de Apolônio de Perga, estas curvas não eram classificadas dessa maneira, justamente porque não eram utilizadas aplicações de áreas na definição das cônicas. Alguns matemáticos da escola de Eudoxo, como Menécmo e Aristeu, descobriram estas curvas estudando o problema da duplicação do cubo. Eles concebiam as cônicas como a interseção de um cone com o plano perpendicular a sua geratriz. Para estes matemáticos, bem como para Euclides e Arquimedes, os três tipos de cônica (denominadas mais tarde por Apolônio elipse, parábola e hipérbole) eram obtidas, respectivamente, quando o ângulo do vértice do cone era agudo, reto ou obtuso.

Apolônio foi o primeiro a conceber as cônicas como interseções de uma mesma superfície cônica circular, não necessariamente reta, cortada por planos de inclinações diferentes. Seu livro mais célebre, escrito no século III a.E.C., chamado *Cônicas*, traz um apanhado de muitos resultados sobre cônicas, obtidos até aquele momento por seus antecessores, mas contém também inovações importantes. Uma das novas concepções introduzidas por Apolônio, utilizadas até hoje, é a consideração de um cone de duas folhas. A partir deste cone, as seções cônicas passarão a ser caracterizadas do seguinte modo: se o plano corta todas as geratrizes sobre uma mesma folha do cone, obtemos uma elipse; se o plano é paralelo a uma das geratrizes, obtemos uma parábola; e se o plano corta as duas folhas do cone, obtemos uma hipérbole. Este ponto de vista de Arquimedes unifica as cônicas, como membros de uma mesma família de curvas.

Veremos agora o modo como Apolônio construiu a parábola e sua relação com o método de aplicação de áreas.

Seja o cone da Figura 3.18, de vértice T, cortado pelo plano de seção P_1:

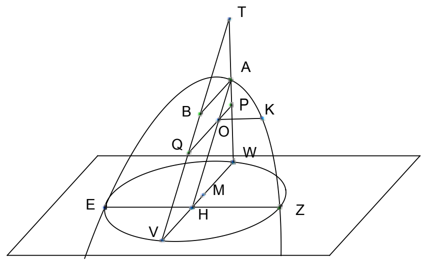


Figura 3.18

O triângulo TVW está em um plano que corta o cone em seu eixo TM (reta pelo vértice até o centro da base). O segmento VW é a interseção deste plano com a base do cone, que faz ângulos retos com o segmento EZ (no qual o plano de seção intercepta a base). O plano de seção P_1 corta TVW no segmento AH. Um plano P_2 paralelo à base corta o cone em uma circunferência com PQ como diâmetro e intercepta o plano de seção em KO. O ponto K está sobre o cone e sobre plano de seção, sendo assim um ponto da cônica.

Um os aspectos mais importantes do método usado por Apolônio, que já era empregado também por seus antecessores, é a caracterização da cônica por meio de um *sintoma*. Trata-se de uma relação entre grandezas que caracteriza os pontos que estão sobre a cônica. Vejamos como o sintoma da parábola é obtido no exemplo acima, em que o plano de seção é paralelo a TV (como o cone não é de revolução, TV não é geratriz).

Seja KO a meia proporcional de QO e PO. Sabemos, pela propriedade da circunferência, que o quadrado de lado KO tem área igual à de um retângulo de lados QO e PO (Veja a Figura 3.19). Por um abuso de linguagem, ou seja, modernizando a linguagem matemática de Apolônio, que usa somente palavras, diremos que $KO^2 = QO \times PO$. Mas, na figura 3.19, BA foi construído para ser paralelo a VW e igual a QO. Logo,

$$BA : TA :: VW : TW$$

e

$$PO : AO :: WV : TV$$

Como $BA = QO$, podemos obter destas proporções que

$$QO \times PO : TA \times AO :: VW^2 : TW \times TV.$$

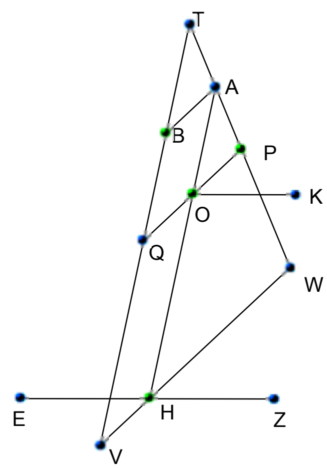


Figura 3.19

Definimos agora um segmento N por

$$N : TA :: VW^2 : TW \times TV.$$

Segue-se desta definição que

$$N : TA :: QO \times PO : TA \times AO.$$

Mas sabemos que $KO^2 = QO \times PO$, logo podemos dizer que

$$N : TA :: KO^2 : TA \times AO.$$

Por outro lado,

$$N : TA :: N \times AO : TA \times AO.$$

Destas duas igualdades podemos tirar a relação $KO^2 = N \times AO$, que é o ***sintoma*** da parábola obtida interceptando-se o cone pelo plano de seção definido paralelamente a TV.

O segmento KO é chamado, já por Apolônio, de "ordenada", que quer dizer literalmente "desenhado em uma direção conjugada". Podemos concluir, portanto, que há duas direções conjugadas, KO e AO, que são co-ordenadas, ou seja, uma é tomada em uma direção conjugada à outra. O sintoma é uma relação característica entre estas duas co-ordenadas de um ponto qualquer sobre a curva.

Traduzindo em nossa linguagem algébrica, é como se tivéssemos um sistema de coordenas oblíquo de origem A dado por AH e EZ. Fazendo $N = p$ (que é uma constante que determina a natureza da parábola), as coordenadas obtidas pela construção seriam $AO = x$ e $KO = y$. Desta forma, o sintoma poderia ser reescrito como $y^2 = px$, que é justamente a equação da parábola.

Isto não quer dizer que Apolônio já empregava equações. Para ele, o significado da relação $KO^2 = N \times AO$ (sintoma) era que o quadrado de lado KO aplicado parabolicamente (ou seja, exatamente) sobre N fornece um retângulo de lado AO. Daí o nome "parábola" para a curva obtida neste caso. Traduzir os resultados de Apolônio em linguagem algébrica, como feito por Zeuthen ([152]) é anacrônico e é típico dos defensores da "álgebra geométrica" dos gregos.

De maneira semelhante, Apolônio estuda a elipse e a hipérbole, relacionadas a aplicações por falta e por excesso, respectivamente (Veja, por exemplo [80], [65]).

Exercícios

3.10. Siga o roteiro abaixo para resolver o problema de aplicar um retângulo a um segmento dado.

- Demonstre a proposição I.43 dos *Elementos* de Euclides:

  Proposição I.43: *Em qualquer paralelogramo, os complementos dos paralelogramos em torno da diagonal são iguais entre si.* (Figura 3.20)

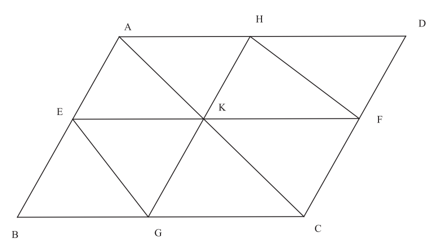


Figura 3.20 *Elementos* I.43

- Demonstre, no caso em que o paralelogramo dado é um retângulo, e o ângulo dado é reto, a proposição I.44 dos *Elementos*:

  Proposição I.44: – *Aplicar a um segmento dado um paralelogramo igual a uma área dada, e com um ângulo dado.*(Veja a Figura 3.21).

  De um ponto de vista totalmente anacrônico, completamente fora das cogitações dos matemáticos gregos, se o comprimento de AB é a, então o comprimento de KL resolve a equação $ax = S$.

3.11. Siga o roteiro abaixo para aplicar um retângulo a um segmento, com falta.

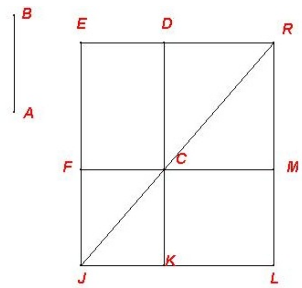


Figura 3.21

- Refaça o Exercício 15, da página 91, que pedia a demonstração da proposição II.5 dos *Elementos*.
- Efetue a construção indicada a seguir:

  Seja C o ponto médio do segmento AB. Trace CO perpendicular a AB e igual a b. Prolongue OC até N, de maneira que $ON = CB$. Com centro em O, e raio ON, descreva uma circunferência que corta CD em D (Figura 3.22).

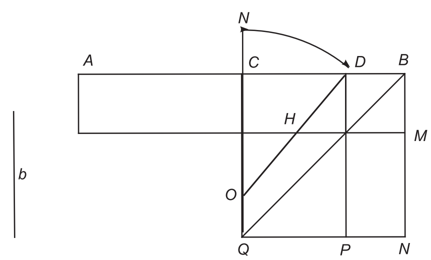


Figura 3.22 Resolução do problema de aplicação de áreas elíptica

  Demonstre que o retângulo de lados AD e DB resolve nosso problema.

  Esta construção resolve completamente o problema de aplicar um retângulo a um segmento, com falta, de maneira que o que falta seja um quadrado.

3.12. Siga o roteiro abaixo para aplicar um retângulo a um segmento, com excesso, no caso em que o excesso é um quadrado.

- Refaça o Exercício 15, da página 91, que pedia a demonstração da proposição II.6 dos *Elementos*.

- Efetue a seguinte construção :

  Em primeiro lugar, podemos supor que a área dada é um quadrado de lado b. Trace BQ perpendicular a AB e igual a b. Una C a Q e com centro C e raio CQ, descreva uma circunferência que corta o prolongamento de AB em D. Prove que o ponto D resolve o problema (Figura 3.23).

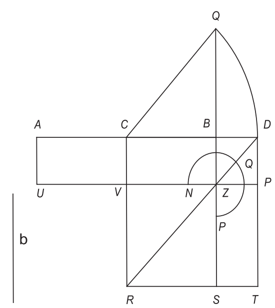


Figura 3.23 Resolução do problema de aplicação de áreas hiperbólica

3.4 A aritmética de Diofanto

No Capítulo 1, descrevemos alguns procedimentos empregados pelos povos antigos que poderiam ser resolvidos, hoje, por equações. No entanto, vimos o quanto seria anacrônico associar os algoritmos usados a qualquer tipo de álgebra. De modo análogo, no capítulo anterior observamos também que seria inadequado considerar que havia uma álgebra nos *Elementos* de Euclides. Em ambos os casos, uma das mais fortes razões para não tirarmos conclusões apressadas é o fato de que não era usado nenhum tipo de notação algébrica, que implica em se utilizar um mesmo símbolo para designar coisas diferentes. Em particular, a quantidade desconhecida, que chamamos hoje de "incógnita", não era representada por uma notação específica.

Ainda no mundo grego, com os trabalhos de Diofanto, surge um modo de pensar bem mais próximo do que chamamos de "álgebra". Este matemático, que viveu no século III E.C., [3] portanto bem depois do que os outros que consideramos neste capítulo, introduziu um novo modo de pensar em um livro chamado *Aritmética*. Uma de suas principais contribuições está em ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como *arithme*, de onde vem o nome "aritmética". Esta obra contém uma coleção de problemas que faziam parte da tradição matemática

[3] Em verdade, há grande incerteza sobre a época em que viveu Diofanto

da época. Já no Livro 1, ele introduz símbolos, que ele chama "designações abreviadas", para representar diversos tipos de número:

ς ((última letra da palavra *arithmos*, a quantidade desconhecida)
Δ^Y (primeira letra de *dynamis*, o quadrado da quantidade desconhecida)
K^Y (primeira letra de *kybos*, o cubo)
$\Delta^Y\Delta$ (o quadrado-quadrado) [quarta potência]
$\Delta\mathrm{K}^Y$ (o quadrado-cubo) [quinta potência]
$\mathrm{K}^Y\mathrm{K}$ (o cubo-cubo) [sexta potência]

Notamos que o fato de haver símbolos para as potências superiores ao cubo já indica a separação entre a aritmética de Diofanto e a geometria, uma vez que, na geometria da época, uma potência maior que três para um número não correspondia a nenhuma grandeza. Para dar um exemplo de como estes símbolos eram usados, descrevemos a solução do problema 27 do Livro 1:

Exemplo 3.1. *Encontrar dois números cuja soma e produto sejam números dados.*

Na verdade, Diofanto considera que a soma é 20 e o produto é 96. Este tipo de procedimento será comum até que o simbolismo algébrico se encontre desenvolvido: chegar a resultados gerais com um caso específico, bem representativo da situação geral.

Suponhamos que a diferença entre os dois números seja 2 *arithmoi*. Começamos por dividir a soma destes números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir deste resultado, consideramos um *arithmos* somado e subtraído, respectivamente, a cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída de 1 *arithmos* mais a metade acrescentada de 1 *arithmos* obtemos 20, que é a soma desejada. Para que o produto seja 96, multiplicamos estas mesmas quantidades, obtendo 100 subtraído do quadrado do *arithmos* (um *dynamis*). Chegamos, assim, à conclusão de que o *dynamis* deve ser 4, logo o valor do *arithmos* é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, 12 e 8.

Explicação misturando as abreviações de Diofanto com os símbolos atuais para as operações: Queremos encontrar dois números com soma 20 e produto 96. Se estes números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ς, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ς de um destes 10 e adicionando ς ao outro. Como a soma não muda após estas operações, temos $10 - \varsigma + 10 + \varsigma = 20$. Mas sabemos também que o produto destes números é 96, logo podemos escrever $(10 - \varsigma)(10 + \varsigma) = 96$.

Concluímos daí que o valor de ς deve ser 2. Logo, os números procurados são respectivamente, 8 e 12.

Notem que uma primeira novidade é o fato de não se recorrer a nenhuma construção geométrica para resolver o problema. Uma segunda grande inovação é que, na resolução deste problema, opera-se com quantidades desconhecidas do mesmo modo que com as conhecidas. Quantidades conhecidas e desconhecidas possuem o mesmo estatuto na resolução do problema. Logo, supõe-se, de alguma forma, que todas sejam conhecidas. Só por esta razão será possível introduzir um símbolo para uma quantidade desconhecida (a letra ς). Isso caracteriza um pensamento algébrico.

Para Diofanto, o *arithme* é uma "quantidade indeterminada de unidades", diferente dos números, que são formados de uma certa quantidade, determinada, de unidades. No entanto, ambos são sujeitos ao mesmo tipo de tratamento:

> Do mesmo modo que as partes dos números são denominadas de maneira correspondente a estes números, como o terço corresponde a três, o quarto corresponde a quatro, denominaremos também as partes dos números definidos acima [os *arithmes*] de maneira correspondente a estes números. Por exemplo, para o *arithme*, diremos o inverso do *arithme*, para sua potência, diremos o inverso do quadrado. (Eecke, 1926, p.3).

A natureza dos novos objetos, e as operações que podemos realizar com eles, está calcada sobre a estrutura dos números determinados, que são os números propriamente ditos. Com o objetivo de resolver problemas, os diversos tipos de números podem ser agrupados em *espécies*, que correspondem aos nossos monômios, ou em *expressões*, que resultam das operações entre espécies.

As soluções são descritas de modo discursivo, como no exemplo acima, mas esta descrição é abreviada pelo uso de símbolos (para números, potências de números, frações, incógnitas e monômios) que constituem um princípio de linguagem algébrica[4]. Este modo de representação, que não é ainda completamente simbólico, é chamado hoje de "álgebra sincopada". Os símbolos são usados para abreviar o texto que descreve a resolução de um problema.

Alguns historiadores, como Heath, acreditam que é possível encontrar, em meio à enorme variedade de exemplos, alguns procedimentos comuns que se prestam a um enunciado geral. Em alguns casos, vemos mesmo regras gerais,

[4]Os resultados dos problemas eram apenas números racionais positivos. Daí dizermos hoje que um problema é "diofantino" quando se procuram suas soluções racionais positivas. Uma solução que não era um número racional positivo era declarada inadmissível.

como para a solução de equações determinadas ditas "puras", que contêm apenas uma potência da quantidade desconhecida, de um grau qualquer. Diz Diofanto, na definição 11:

> Se um problema leva a uma equação na qual quaisquer termos são iguais aos mesmos termos mas têm coeficientes distintos, temos que retirar os semelhantes dos semelhantes em ambos os lados, até que obtenhamos um termo igual a um termo. Mas, se existe de um lado, ou em ambos, algum termo negativo, o termo deficiente deve ser adicionado a ambos os lados até que os termos nos dois lados sejam positivos. Em seguida, retiramos semelhantes de semelhantes até que reste um termo em cada lado.

Em linguagem atual, diríamos que o procedimento serve para reduzir a equação à forma $Ax^m = B$. Ainda que esta regra tenha alguma generalidade, vemos por este exemplo o quanto seria difícil exprimir regras gerais por meio unicamente de palavras, sem os recursos de nosso poderoso simbolismo algébrico. Alguns autores relacionam a descrição de procedimentos gerais à necessidade de transmissão das técnicas aritméticas, ou seja, a uma tradição escolar que estava na base do ensino de Matemática. No Capítulo 4, ficará claro como a introdução de um novo simbolismo foi fundamental na constituição da álgebra. A tradução da *Aritmética* de Diofanto terá um papel importante neste desenvolvimento.

Exercícios

3.13. Resolva o seguinte problema de Diofanto: *Ache dois números tais que sua diferença e a diferença de seus cubos são iguais a dois números dados*.

3.14. Mostre que não pode existir um triângulo retângulo cujos lados são números inteiros e tal que a bissetriz do ângulo reto é um numero racional.

3.15. Resolva os seguintes problemas que fazem parte da *Aritmética* de Diofanto:

- (Problema 21, Livro IV). Ache três números em progressão geométrica tais que a diferença entre dois quaisquer deles seja um número quadrado.
- (Problema 7, Livro III) Ache três números em progressão aritmética e tais que a soma de dois quaisquer deles seja um número quadrado.

3.5 A trigonometria na Grécia antiga

A trigonometria foi uma criação da Matemática grega, e recebeu contribuições importantes de matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus. Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e na geografia. Assim, os estudos de trigonometria se concentravam na trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da trigonometria plana.

No mundo grego, foram desenvolvidas diversas técnicas para medir a posição dos astros. Desde a época de Platão, o modelo grego para descrever os movimentos celestes baseava-se em duas esferas concêntricas. A Terra era tida como uma esfera fixa envolvida por uma outra esfera, de diâmetro muito maior, sobre a qual se encontram os corpos celestes. Incrustadas na superfície interna da esfera celeste estão as estrelas fixas, que vemos em movimento devido ao giro da esfera. Mas, além dos fixos, há também os corpos celestes errantes, que vagueiam sobre a superfície da esfera. Estes incluem o Sol e a Lua e são chamados *planetas* (palavra grega que designa justamente o que é "errante", "vagabundo"). Para os gregos, todos estes corpos celestes, moviam-se, por princípio, uniformemente, pois não podemos imaginar movimentos perfeitos que admitam variação de velocidade.

Como os astros se movem sobre a superfície de uma esfera, a fim de poder calcular suas posições, é necessário usar trigonometria esférica, que lida com triângulos esféricos. Mas esta exige conhecimentos de trigonometria plana. Especificamente, os problemas que interessavam eram problemas de *resolução de triângulos*, ou seja, dados alguns dos elementos de um triângulo – lados e ângulos – calcular os outros.

O estudo dos triângulos esféricos na Matemática grega vinha sendo feito anteriormente a Euclides. Ele próprio, em um de seus trabalhos, o *Fenômenos*, estudou a geometria esférica. mais tarde, aproximadamente em 20 a.E.C., Teodósio compilou o que os gregos conheciam sobre o assunto em seu livro *Sobre a Esfera*.

Aristarco de Samos, que viveu em torno de 300 a.E.C., em seu livro *Sobre as distâncias do sol e da lua*, baseando-se em observações, deduziu que

- A distância da terra ao sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da terra à lua. Na demonstração deste fato vemos pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo pequeno.

- Os diâmetros do sol e da lua têm a mesma razão que suas distâncias da terra.

- A razão do diâmetro do sol para o diâmetro da terra é maior do que 19/3 e menor do que 43/6.

Os erros cometidos por Aristarco devem-se aos dados experimentais que utilizou. Seus raciocínios dedutivos estavam corretos.

Podemos contudo dizer que o fundador da trigonometria foi Hiparco de Nicéia, que viveu em tomo de 120 a.E.C. Semelhantemente a muitos matemáticos gregos, inclusive ao próprio Euclides, pouco sabemos sobre sua vida. A maior parte do que conhecemos sobre ele é devida a Ptolomeu o qual cita vários resultados de Hiparco sobre trigonometria e astronomia, e a fragmentos de descrições de seus trabalhos contidos nas obras de outros autores gregos.

Hiparco tem sido considerado como o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas por ele calculada. Suas tabelas foram construídas para serem usadas em astronomia. As principais contribuições de Hiparco em astronomia foram a organização dos dados empíricos babilônios, a confecção de um catálogo de estrelas e a descoberta da precessão dos equinócios.

Para construir sua tabela, Hiparco necessitava, em primeiro lugar, de uma medida de inclinações ou de ângulos. Até os *Elementos* de Euclides, os ângulos eram medidos por múltiplos ou submúltiplos do ângulo reto. Mais tarde, os astrônomos gregos utilizavam o sistema sexagesimal dos babilônios, que já dividiam a circunferência em 360 partes, cada uma correspondendo a um grau, e estabeleciam subdivisões em minutos e segundos, em estreita relação com a base sessenta utilizada por eles.

Temos notícia da tabela de Hiparco devido a fontes indiretas, sobretudo o *Almagesto* de Ptolomeu. É provável que a divisão do círculo em 360 tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco. Ele provavelmente seguiu a ideia do matemático grego Hipsiclo, o qual por sua vez tinha dividido o dia em 360 partes, uma divisão possivelmente inspirada na astronomia babilônia.

Os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo, e sim trabalhavam com a corda do arco duplo. Dado o ângulo $\alpha = \widehat{AOC}$, o dobro de α é o ângulo $\widehat{AOB}$, que subtende o arco AB, e a a corda do arco duplo AB será o segmento AB. Além disso, devido à influência babilônia, os gregos tomavam o raio OA com comprimento 60 e dividiam o círculo em 360 partes iguais. Vemos então imediatamente que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{1}{2}\frac{\text{corda}\,AB}{OA} = \frac{1}{120}\,\text{corda}\,AB.$$

Todos os matemáticos gregos que eram obrigados em seus trabalhos a efetuar cálculos com frações (Arquimedes e Ptolomeu, entre outros) utilizavam

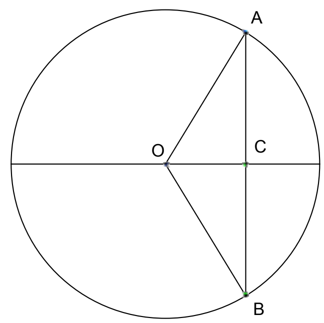


Figura 3.24

as frações sexagesimais babilônias, devido à facilidade que elas introduziam em seus cálculos, daí a razão do raio de comprimento 60.

Um pouco depois de Hiparco, Menelau de Alexandria, que viveu em torno de 100 a.E.C., já apresenta uma trigonometria bem desenvolvida, de que podemos ver partes em seu livro *Geometria esférica*, o qual nos chegou em versão árabe. Nele, Menelau demonstra vários teoremas sobre triângulos esféricos. Provou, por exemplo, que se dois triângulos esféricos têm ângulos correspondentes iguais, então os triângulos são iguais (congruentes). Ele usou, sem demonstrar, o teorema de geometria plana conhecido hoje como teorema de Menelau: Se o triângulo ABC é cortado por uma secante que intersecta seus três lados como mostrado na Figura 3.25 então

$$NA \times RB \times MC = NC \times RA \times MB.$$

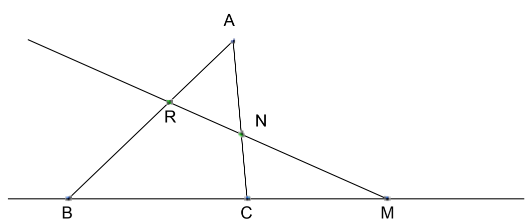


Figura 3.25

Menelau, contemporâneo de Ptolomeu, usou este teorema a fim de provar o resultado correspondente para triângulos esféricos e parece ter escrito o primeiro tratado especificamente sobre trigonometria esférica.

A trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, que viveu em torno de 150 E.C. Seu principal trabalho, o *Almagesto*, permite datar a aproximadamente sua vida, pois nele Ptolomeu se refere a observações que fez de efemérides astronômicas cujas datas conhecemos. O nome grego original desta obra é *A coleção matemática*, ou seja, *A sintaxe matemática*, que foi traduzido pelos árabes como *Megale sintaxis*, *Megisto* e por fim *Almagesto*.

O *Almagesto* tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a terra está em seu centro[5]. Ptolomeu desenvolveu a trigonometria nos capítulos 10 e 11 do primeiro livro de sua obra, na qual o capítulo 11 consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos). Para a construção desta tabela, a partir do fato de que em um quadrilátero inscritível $ABCD$ (Veja a Figura 3.26) vale a relação

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD,$$

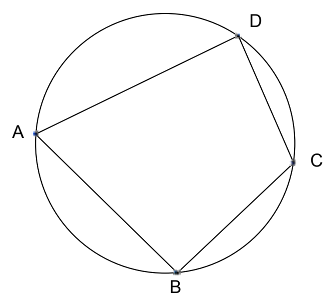


Figura 3.26

Ptolomeu deduz o que, com notação moderna e com as funções seno e cosseno, é a expressão para $\operatorname{sen}(a \pm b)$. Além disso, demonstrou que $\operatorname{sen} A^2 + \cos A^2 = 1$, em que A é um ângulo agudo.

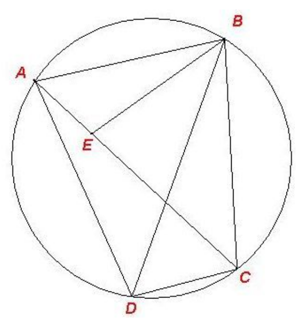


Figura 3.27

[5]ESta é a teoria geocêntrica que será questionada, no século XV, pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico.

Fazendo o raio do círculo igual a 60, Ptolomeu usa este teorema para provar que se α e β são dois arcos, então

$$120\mathrm{crd}\,(\alpha-\beta)=\mathrm{crd}\,\alpha\cdot\mathrm{crd}\,(180-\beta)-\mathrm{crd}\,\beta\cdot\mathrm{crd}\,(18-\alpha).$$

Ptolomeu usou sua tabela de cordas para resolver vários problemas, como, por exemplo, calcular o comprimento de uma sombra, bem como para tratar vários outros de astronomia.

Com as técnicas expostas em seu livro, Ptolomeu é capaz de resolver qualquer triângulo, decompondo-o convenientemente em triângulos retângulos. A exposição da trigonometria dada por Ptolomeu no *Almagesto* foi padrão, até o renascimento.

Como já dissemos, a trigonometria era usada pelos gregos em astronomia. Eles nunca se preocuparam em utilizá-la em topografia, campo em que hoje ela tem emprego constante. A topografia grega, como a romana, sempre recorreu à geometria euclidiana. Para achar a área de um terreno de forma poligonal, ele era decomposto em triângulos e a área de cada um destes triângulos era calculada usando a fórmula de Hierão, que permite achar a área de um triângulo em função de seus lados. Se os lados do triângulo são a, b e c, seu semi-perímetro é $s=\frac{1}{2}a+b+c$. Então,

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exercícios

3.16. Você conhece as "leis" dos senos e dos cossenos, que relacionam os lados de um triângulo e os senos e os cossenos, respectivamente. Leia as demonstrações das proposições II.12 e II.13 dos *Elementos* cujos enunciados são reproduzidos a seguir, e deduza, usando-as, a "lei dos cossenos".

- – Proposição II.12. Em um triângulo obtusângulo, o quadrado sobre o lado que subtende o ângulo obtuso é maior do que os quadrados sobre os lados que compreendem o ângulo obtuso, de duas vezes o retângulo sobre o lado em cujo prolongamento cai a perpendicular, e sobre este lado prolongado.
- – Proposição II.12. Em um triângulo acutângulo, o quadrado sobre o lado que subtende o ângulo agudo é menor do que os quadrados sobre os lados que compreendem o ângulo obtuso, de duas vezes o retângulo sobre o lado em cujo prolongamento cai a perpendicular, e sobre este lado prolongado.

Obs: Nas demonstrações dessas duas proposições, Euclides Euclides realmente prova igualdades, e não desigualdades.

3.17. Sejam BC, CA e AB os lados do triângulo esférico ABC e L, N e M, respectivamente, as intersecções de um círculo máximo com lados do triângulo. Prove que,

$$\frac{\operatorname{sen} AN}{\operatorname{sen} NB} \times \frac{\operatorname{sen} BL}{\operatorname{sen} LC} \times \frac{\operatorname{sen} CM}{\operatorname{sen} MA} = -1$$

3.18. Demonstre o teorema de Ptolomeu: Em um quadrilátero inscritível $ABCD$ (Veja a Figura 3.28) vale a relação

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD.$$

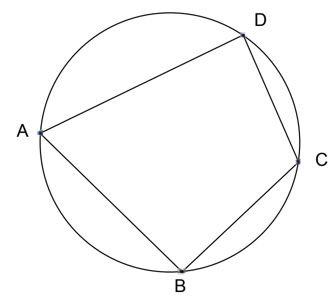


Figura 3.28

Sugestão: Escolha E sobre AC tal que o ângulo ABE seja igual ao ângulo DBC.

3.19. Demonstre o teorema de Menelau: Se o triângulo ABC é cortado por uma secante que intersecta seus três lados, então (Figura 3.29)

Se o triângulo ABC é cortado por uma secante que intersecta seus três lados, como mostrado na Figura 3.29 então

$$NA \times RB \times MC = NC \times RA \times MB.$$

3.6 Exercicios suplementares

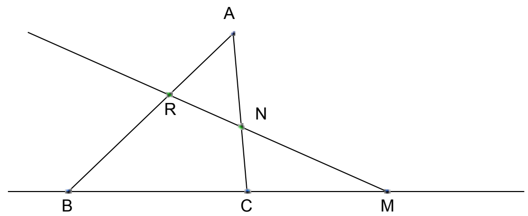


Figura 3.29

3.20. O método de Hierão para extrair raízes quadradas.

Hierão, no Livro I de seu ***Métricas***, reencontrado em 1896, aproxima $\sqrt{2}$ por $\frac{1}{2}\left(a+\frac{k}{a}\right)$. Ele apresenta, no início de seu livro, diversos problemas aritméticos sobre triângulos (cálculo da área e da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são dados, área de um triângulo isósceles cujos lados são conhecidos, entre outros). No problema 8, ele apresenta sua famosa fórmula para o cálculo da área de um triângulo cujos três lados são conhecidos,

$$A = \sqrt{a(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{3.5}$$

na qual $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o ***semi-perímetro*** do triângulo. Neste problema, Hierão apresenta, como ele próprio afirma, uma "prova geométrica" de (3.5) e aplica sua fórmula ao triângulo cujos lados medem, respectivamente, $a = 7$, $b = 8$ e $c = 9$. Neste caso, é necessário calcular $\sqrt{120 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720}$.

Nos problemas anteriores, os números escolhidos por Hierão tinham raízes quadradas fáceis de serem calculadas: ($\sqrt{25}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{144}$). Isso não é verdade no caso de $\sqrt{720}$. Então, ele afirma

> Como 720 não tem lado racional, nós extrairemos o lado com uma diferença muito pequena, da maneira seguinte. Como o primeiro número quadrado maior do que 720 é 729, cujo lado é 27, divida 720 por 27, e o resultado é 26 e $\frac{2}{3}$,[6] adicione 27 e obtemos $53\frac{2}{3}$; tome a metade disso, que é igual a $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.[7] Em verdade, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplicado por ele mesmo dá $720\frac{1}{36}$; de modo que a diferença (dos quadrados) é $\frac{1}{36}$. Se quisermos tornar esta diferença menor do que $\frac{1}{36}$, colocaremos $720\frac{1}{36}$ achado há pouco no lugar de 729 e, procedendo da mesma

[6] Ou seja, $27+\frac{2}{3}$.
[7] Ou seja, $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

> maneira, [8] acharemos que a diferença (sobre os quadrados) é muito menor do que $\frac{1}{36}$.

Hierão menciona explicitamente a ideia de repetir o cálculo, a partir do valor obtido anteriormente, a fim de aproximar a raiz quadrada procurada tanto quanto quisermos. Temos assim um dos mais antigos exemplos de um algoritmo de recorrência. Obtemos, pela iteração do processo de Hierão, uma sucessão infinita, $\{a_n\}$ de números a_1, a_2, a_3, ..., tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{k}$. Nesta sucessão, cada termo está relacionado com o anterior por

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right). \tag{3.6}$$

Temos portanto uma sucessão definida ***por recorrência***, um método poderoso para definir sucessões (Ou, equivalentemente, funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

Hierão não fornece nenhuma indicação de como obteve este resultado. Foi por um raciocínio geométrico, aproximando um quadrado por retângulos de mesma área? Ou se trata de um resultado já conhecido, e que pertencia ao folclore matemático da época? Simplesmente não sabemos. Já vimos, na subseção 1.3.1, que os babilônios conheciam este algoritmo, mas sem efetuar a recorrência.

- Mostre que a sucessão obtida pelo algoritmo de Hierão realmente converge para $\sqrt{k}$.
- Compare os termos da sequência obtida com o método de Hierão com a sequência obtida usando o "método de Newton".
- Estude a convergência do método de Hierão (ou seja, avalie o erro cometido no estágio a_n da aplicação do método).

3.21. A escada de Theon

Theon de Smirna (viveu em torno de 140 E.C.) apresentou um algoritmo muito simples para calcular a raiz quadrada de 2, e que pode facilmente ser generalizado para achar a raiz quadrada de qualquer número natural. Em verdade, pode ser adaptado para achar qualquer raiz de números naturais (Veja [112]).

Considere as sucessões $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definidas recursivamente por

[8] Ou seja, trabalhando com o "lado" $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = x_{n-1} + x_n.$$

Os primeiros termos da escada de Theon estão mostrados a seguir:

n	x_n	y_n
1	1	1
2	2	3
3	5	7
4	12	17
5	29	41
6	70	99
7	169	239
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Seja, para cada n, $r_n = \frac{y_n}{x_n}$. Então, repetindo os primeiros elementos da escada de Theon, acrescentados de r_n, temos

n	x_n	y_n	r_n
1	1	1	1
2	2	3	$3/2 = 1,5$
3	5	7	$7/5 = 1,4$
4	12	17	$17/12 = 1,41666\cdots$
5	29	41	$41/29 = 1,41379\cdots$
6	70	99	$99/70 = 1,41428\cdots$
7	169	239	$239/169 = 1,41420\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Prove que a sucessão $\{r_n\}$ converge para $\sqrt{2}$.

3.22. Equações diofantinas lineares.

Uma equação diofantina linear é uma equação da forma $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$. Resolvê-la significa achar suas soluções inteiras.

Ache condições para que esta equação tenha soluções (inteiras) e um algoritmo que permita achá-las, quando elas existem.

3.23. A quadratriz é a curva construída da seguinte forma: suponhamos que no quadrado $ABCD$ o lado AD gira com movimento circular uniforme em torno de A até que coincide com o lado AB. Ao mesmo tempo, o lado DC desce com velocidade constante até coincidir com AB. Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados, DC e AD coincidam com AB no mesmo instante. A *quadratriz* é o lugar geométrico gerado pelas intersecções destes dois lados móveis. É a curva DPZ da Figura 3.30. Ela foi inventada por Hípias de Elis (viveu em torno de 420 a.C.), originariamente em suas tentativas para trissectar o ângulo. Tudo indica que foi Dinóstrato (viveu em torno de 350 a.C.) quem pela primeira vez usou esta curva para fazer a quadratura do círculo.

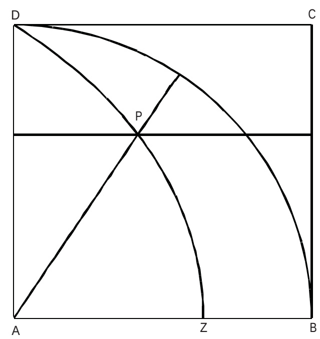


Figura 3.30 A quadratriz

- Ache uma equação cartesiana para a quadratriz.
- Demonstre que, na Figura 3.30, se a é o comprimento do lado do quadrado, então $AZ = \frac{2a}{\pi}$.
- Mostre que a quadratriz permite resolver o problema da trissecção do ângulo.

3.24. Um triâgulo de Hierão é um triângulo cujos lados têm medidas inteiras, e que tem uma altura cuja medida é também um número inteiro.

1. Mostre que a área de um triângulo de Hierão é um número inteiro.
2. Será que todas as três alturas de um triângulo de Hierão têm medidas que são números inteiros?
3. Demonstre a "fórmula de Hierão" que permite calcular a área do triângulo de lados a, b e c: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que p é o semi-perímetro do triângulo.
4. Mostre que o triângulo de lados 13, 14, 15 é um triângulo de Hierão.

5. Como você construiria outros triângulos de Hierão?

3.25. Demonstre a *fórmula de Hierão*: Se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ e A é a área do triângulo, então

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3.26. Apolônio escreveu vários tratados que se perderam. Entre eles, o *Lugares planos*. Prove, geometricamente, sem usar geometria analítica, os dois resultados abaixo, que sabemos faziam parte desta obra de Apolônio:

- Sejam A e B dois pontos fixos e k uma constante positiva. Prove que o lugar dos pontos P do plano tais que

$$\frac{PA}{PB} = k$$

  é uma circunferência se $k \neq 1$ e uma reta se k=1.

- Sejam A, B, C, $\ldots N$ pontos de um mesmo plano e a, b, c, $\ldots n$. Prove que o lugar dos pontos P do plano tais que

$$a(PA)^2 + b(PB)^2 + \cdots + n(PN)^2 = k$$

  é uma circunferência.

s

Capítulo 4

Resolução de equações e Matemática prática: Al-Khwarizmi, Cardano, Viète e Neper

4.1 Contextualização histórica

Conhecemos o papel dos problemas geométricos na Grécia e explicamos, no capítulo anterior, o caráter formal e sistemático de sua exposição nos *Elementos* de Euclides. O pensamento de Platão é invocado frequentemente como a prova de que o homem grego considerava a Matemática um saber superior ao conhecimento do senso comum. Talvez esta separação seja o traço mais atraente do saber grego aos olhos dos pensadores ocidentais que reconstruíram a história da Matemática privilegiando seu caráter teórico. Nossa Matemática seria a legítima continuação do pensamento teórico e abstrato, marca da geometria euclidiana. As artes práticas e a mecânica teriam um papel inferior. Assim, das práticas transmitidas pelos árabes, o maior valor estaria naquelas que traduzissem o ideal grego.

No entanto, ao longo da história da Matemática, a relação entre teoria e prática é mais complexa do que geralmente se considera. O período islâmico, por exemplo, é marcado pela evidência de que práticas sociais e técnicas levaram a investigações teóricas e, reciprocamente, o pensamento científico pode e deve ser aplicado na prática.

Não podemos deixar de achar estranho o gigantesco salto, recorrente nos livros de história da Matemática, entre o século III a.E.C., quando viveu Euclides, e o século XV, quando a Matemática voltou a se desenvolver na

Europa. É bastante conhecido o fato de que as primeiras universidades surgiram na Idade Média, entre os séculos XII e XIII. Suas contribuições, no entanto, são entendidas como herdeiras do saber dos antigos, e muito influenciadas por correntes filosóficas platônicas e aristotélicas.

A singularidade da dominação islâmica teve um papel fundamental no modo como o saber antigo se renovou a partir do século IX. Este mundo foi marcado por uma espécie de síntese entre teoria e prática, o que propiciou o desenvolvimento de uma Matemática de tipo novo, que teve influência sobre os procedimentos algébricos realizados pelos árabes.

Podemos conjecturar a existência de uma Matemática prática e recreativa, em continuidade com as culturas babilônia e egípcia, que se espalhava pelo Oriente e pelos territórios do Império Romano durante a Antiguidade tardia, e parecia estar bem estabelecida nas comunidades comerciais das regiões cobertas pela expansão islâmica. Em textos árabes, há evidências mostrando que esta cultura possuía um prestígio social inferior ao nível do conhecimento propriamente dito, mas era freqüente os matemáticos retomarem problemas do senso comum com o fim de dar-lhes um tratamento mais sistemático. A diferença se estabelecia entre aqueles que se contentavam em reproduzir as práticas comuns e os outros, que refletiam sobre estes procedimentos. Juntamente com a cultura científica grega, estas diferentes tradições teriam convivido no período pré-islâmico, mas sem alcançar o grau de desenvolvimento e criatividade que marcou os primórdios da época de ouro do Islã, iniciada no século IX. Podemos chamar, portanto, de síntese islâmica a conscientização sobre a relevância e as potencialidades da Matemática prática e da Matemática teórica quando aplicadas aos problemas, métodos e resultados uma da outra.

Entre os séculos VIII e XII, a cidade de Bagdá era um dos maiores centros científicos do mundo e seus matemáticos tinham conhecimento tanto das obras Matemáticas gregas quanto das orientais. A partir do século IX, esta cultura evoluiu para uma produção Matemática original que tinha a álgebra como um de seus pontos fortes, no sentido que exporemos adiante. Havia grande influência das obras clássicas, o que não impediu que uma Matemática de tipo novo fosse desenvolvida. O matemático mais ilustre desse século foi Al-Khwarizmi. Daremos alguns exemplos para mostrar em que consiste a álgebra praticada por ele e como os procedimentos geométricos são usados para explicar suas técnicas.

A evolução dos métodos para resolver problemas de terceiro grau teve um papel importante na história da álgebra, passando por Omar Khayam, pelos matemáticos italianos e chegando a François Viète, considerado mais um inventor da álgebra moderna. Neste caso, a origem da álgebra também pode ser associada à introdução do simbolismo, de cujo uso há exemplos bastante expressivos no Magreb, a partir do século XII. As práticas científicas nesta região, próxima da Andaluzia, na Espanha, são conhecidas pelo seu papel na transmissão da cultura antiga.

A partir do século XIII, os tratados gregos começaram a ser traduzidos na Europa ocidental. No que tange ao uso de símbolos em problemas algébricos, citaremos o papel dos árabes e dos matemáticos italianos entre os séculos XII e XIV. Mas foi somente no século XV que parece ter havido um emprego mais sistemático da notação algébrica. A partir do tratamento das equações empreendido pelo italiano Girolamo Cardano, veremos que é possível definir, em um novo sentido, o que entendemos por álgebra.

Diofanto, pelas razões expostas no capítulo anterior, é algumas vezes citado como o pai da álgebra. Mas para falar da história de uma disciplina Matemática, como a álgebra, precisamos, antes de mais nada, caracterizar o que entendemos por "álgebra". Os procedimentos associados a este tipo de conhecimento não podem ter como base sua definição atual, tida como válida desde sempre. O passo decisivo para a constituição da álgebra como disciplina pode ser estar na sua organização em torno da classificação e da resolução de equações, o que teve lugar pela primeira vez no século IX, com os trabalhos de Al-Khwarizmi e de outros matemáticos ligados a ele. Falaremos, portanto, do papel dos árabes na constituição de uma teoria das equações. Começaremos pelos matemáticos indianos, em particular Bháskara, que não é o inventor da fórmula que ganhou seu nome no Brasil. Apesar de conhecerem regras para resolver problemas que seriam hoje traduzidos por equações do segundo grau, e usarem alguns símbolos para representar as quantidades desconhecidas e as operações, não se pode dizer que os indianos possuíssem uma fórmula de resolução dessas equações. Usaremos este exemplo para mostrar o quanto é inadequada a pergunta "quem foi o verdadeiro inventor desta fórmula?".

Chegaremos, portanto, a uma conclusão definitiva sobre quem é o fundador da álgebra? Não. Pretendemos mostrar que, se quiséssemos aplicar a alcunha de "o pai da álgebra" a algum matemático do período, obteríamos múltiplas respostas: Diofanto, se usarmos a definição A para álgebra; Al-Khwarizmi, com a definição B; Cardano, com a C; e, finalmente, Viète, no sentido D. Ou seja, podemos concluir que alcunhas deste tipo são inúteis para a história da Matemática.

Um último mito, que tentaremos desconstruir neste capítulo, diz respeito à difusão da álgebra árabe e dos tratados dos povos antigos na Europa. Ouvimos dizer, normalmente, que a Matemática se desenvolveu na Itália a partir do século XIII, sobretudo com as obras de Leonardo de Pisa. Este matemático, conhecido como Fibonacci, teria feito viagens ao norte da África, onde entrou em contato com a Matemática dos árabes.

É verdade que Fibonacci esteve em Bugia, cidade da Argélia, pela vontade de seu pai, que era comerciante. Depois desta primeira formação em Matemática, viajou pelo Egito, Síria, Sul da França e Sicília. Ou seja, teve contato com o mundo mediterrâneo onde se aperfeiçoou em domínios como a álgebra, uma prática desconhecida para os europeus. No entanto, a versão simplificadora sobre a difusão da álgebra na Itália teve que ser reformulada nos últimos anos, devido a dois complicadores: as descobertas que exibem o desenvolvimento de uma álgebra simbólica no Magreb e na Andaluzia, entre os séculos XI e XIV, bem como sua transmissão para os cristãos na Espanha; e as pesquisas sobre as *escolas de ábaco*, que floresceram na Itália a partir do século XIII.

As *escolas de ábaco*, que treinavam jovens comerciantes desde os 11 ou 12 anos em Matemática prática, se difundiram em várias regiões da Itália, sobretudo em Florença, e estão relacionadas ao desenvolvimento do capitalismo no fim da Idade Média. Para tratar problemas ligados ao comércio, ensinava-se o cálculo com numerais indianos (nossos algarismos que chamamos "hindu-arábicos"), a regra de três, juros simples e compostos, os métodos de falsa posição, entre outras ferramentas de cálculo voltadas para problemas práticos. Ainda que fossem designadas como escolas de ábaco, a partir do século XIII, elas se dedicavam a técnicas de cálculo sem ábaco. Em conexão com estas escolas, sobretudo as do centro e do norte da Itália, foram publicados diversos "livros de ábaco", que podem ser traduzidos também como "livros de cálculo".

Além dos tópicos já citados, estes livros podiam conter seções de álgebra, sobretudo a partir do século XIV. É difícil saber exatamente quem escreveu estas obras, pois, em muitos casos, tratavam-se de adaptações e cópias de materiais já existentes, além de a maioria ser de autoria anônima. O livro mais conhecido de Fibonacci se chama *Liber Abaci*, ou seja, "livro de ábaco", o que levou alguns historiadores a afirmarem que, em geral, os escritos associados às escolas de ábaco eram, de fato, resumos e adaptações desta obra de Fibonacci. Estes textos de Matemática prática, escritos em língua vernácula, receberam pouca atenção dos historiadores até as transcrições feitas Gino Arrighi, e seus colegas italianos, nos anos 1960 e 1970. O interesse foi reforçado pelos estudos que levaram à publicação de uma catálogo destes textos, por Warren van Egmond, em 1980 ([145]).

O primeiro livro de ábaco a propor uma álgebra foi escrito por um certo Jacopo da Firenze, provavelmente em Montpellier, no ano de 1307. O conteúdo deste tratado é totalmente retórico e o autor parece estar se dirigindo a um leitor leigo, sem conhecimento prévio da matéria, e não contém nenhum traço que indique a influência de Fibonacci ou dos clássicos árabes, como Al-Khwarizmi. A partir de múltiplas evidências históricas, pode-se concluir que a álgebra de Jacopo da Firenze pode ter suas raízes em práticas que estavam presentes na área que se estende da Península Ibérica até a região da Provença, na França, ambas com ancestrais comuns na Andaluzia e no Magreb.

Um dos indícios mais fortes para esta conclusão é o fato de o livro não oferecer provas geométricas, mas somente regras, além de se caracterizar por uma mistura de Matemática comercial e algébrica, típica da cultura Matemática da Andaluzia e do Magreb. Uma análise da terminologia e das técnicas empregadas permite afirmar que a álgebra apresentada era influenciada pela álgebra árabe, mas não necessariamente pelos clássicos, como os livros de Al-Khwarizmi e Abu-Kamil. A ausência de simbolismo pode ter sido motivada pela tradição de uso da linguagem retórica pelas pessoas da região à qual se destinava.

Não a-nalisaremos a história da álgebra deste período em detalhes, limitando-nos somente a resumir algumas de suas etapas até 'a difusão do simbolismo algébrico. Esses comentários possuem o objetivo de mostrar que o desenvolvimento algébrico do período não é herança de um autor – nem de alguns autores escolhidos –, mas sim o produto de práticas compartilhadas em um contexto determinado.

No final do século XII, os matemáticos do Magreb usavam, em suas manipulações algébricas, símbolos para a incógnita, para as potências da incógnita, bem como para as operações e para a igualdade. Com estes símbolos, derivados das iniciais das palavras correspondentes, os matemáticos do Magreb conseguiam produzir expressões compostas, usadas para escrever o análogo aos nossos polinômios (ver Abdeljaouad, 2002). Não se encontra nenhum traço desta influência na Europa, em nenhuma das introduções à álgebra dos séculos XII e XIII. A obra de Fibonacci é um dos raros exemplos no qual se destaca o uso de algum simbolismo herdado dos árabes, como a notação para frações. O *Líber Abaci* é conhecido pela defesa da notação indo-arábica e do sistema posicional.

Nos séculos XIV e XV, desenvolveu-se na Itália um movimento que ficou conhecido como *Humanismo*, uma corrente filosófica e literária que se interessava pela antiga cultura grega e latina e se dedicava aos autores clássicos. As inovações aritméticas e algébricas do período, herdadas das praticas do Magreb, não se associavam com esta tendência e, portanto, não foram particularmente estimuladas. Somente no final do século XV, começaram a surgir indícios do uso mais consciente da notação simbólica e o exemplo mais importante disso é a *Summa Aritmética, de Pacioli*, publicada em 1494.

Os algebristas dos séculos XIV e XV, ou mesmo os do século XVI, tinham alguma razão para desenvolver uma abordagem simbólica coerente? Parece que não. O tipo de Matemática no qual estavam engajados não tornava esta necessidade urgente. Mesmo os mestres de ábaco com ambições enciclopédicas, como Pacioli, e mais tarde Tartaglia, não encontravam estímulo para uma tal sistematização na Matemática praticada nas universidades, ou no meio dos pensadores humanistas. Ao contrário, a aspiração de conectar sua Matemática ao ideal euclidiano os fez reinserir provas geométricas na tradição algébrica, que já tinha se livrado desta influência, o que retardou a compreensão de que uma argumentação puramente aritmética, ou algébrica, poderia ser considerada legítima, sem o auxílio da geometria.

A evolução dos métodos para resolver problemas de terceiro grau teve um papel importante na história da álgebra, passando pelos matemáticos italianos e chegando a François Viète. Antes de Viète, a álgebra européia se aplicava a problemas cuja resolução não era auxiliada pelo uso de simbolismo. Somente quando a influência de Arquimedes e Apolônio trouxe novos problemas à cena Matemática, seus praticantes perceberam que o simbolismo era um fator capaz de auxiliar na resolução de problemas e a generalizar os métodos empregados. Exceto pela notação, a álgebra deste período é muito parecida com a que nos é ensinada nas escolas, mas há uma grande distância entre esta arte e a disciplina Matemática que chamamos hoje de álgebra. Veremos, na próxima seção, que o trabalho de Cardano, dedicado à "grande arte", pode ser considerado, em certo sentido, o primeiro tratado de álgebra.

Não falaremos aqui da história da álgebra, e sim da história dos métodos de resolução de equações. Alguns métodos usados pelos babilônicos ou pelos gregos podem ser traduzidos pelo que conhecemos hoje como uma equação do segundo grau e a solução encontrada equivale à raiz positiva desta equação. O processo de resolução pode ser traduzido, em ambos os casos, na fórmula que conhecemos hoje. Podemos concluir daí queestes povos já possuíam uma fórmula? Não. Uma fórmula propriamente dita só pôde ser estabelecida quando:

1. passou-se a representar simbolicamente as incógnitas e as operações que estão contidas em uma equação e;

2. a equação do segundo grau passou a ser considerada de modo genérico, ou seja, com todas as parcelas possíveis e coeficientes indeterminados.

Decorreram séculos para que as condições 1 e 2 fossem satisfeitas, desde os antigos egípcios e babilônios, passando pelos gregos, chineses, hindus e árabes, em um percurso que nada tem de linear.

Veremos que Viète introduziu um simbolismo algébrico sistemático em seu livro *In artem analyticam isagoge* (Introdução à arte analítica), publicado em 1591. Depois de analisar brevemente suas contribuições, aproveitaremos a menção à Matemática prática para falar do desenvolvimento dos logaritmos com John Neper, logo no início do século XVII.

4.2 Bháskara e os problemas do segundo grau

O matemático indiano Bháskara [1] viveu no século XII e, nesta época, os problemas que exigiam o que chamamos hoje de "equação" eram enunciados usando somente palavras e de modo poético. Eis um exemplo de verso:

> Verso 77: "De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?"

O que designamos hoje de "equação" equivalia a um enunciado como o seguinte:

"De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um coeficiente e a soma ou a diferença é igual a um número dado".

A quantidade citada é um quadrado e a raiz deste quadrado é a incógnita. Ele forma, assim, usando somente palavras, a equação $x^2 \pm px = q$.

O método de resolução consiste em reduzir o problema a uma equação linear. Isto era feito por meio do método que Bháskara denominava de "eliminação do termo médio", equivalente ao nosso método de completar quadrados:

> "Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado, etc. Se temos os quadrados da quantidade desconhecida, etc., em um dos membros, multiplicamos os dois membros por um fator conveniente e somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz; igualando em seguida esta raiz à do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida."

Observamos que era concebida uma igualdade, usando somente palavras, entre dois membros, sem utilização do sinal de igual. Esta igualdade, bem próxima de uma equação, estava posta, em geral, entre um membro contendo a quantidade desconhecida e o seu quadrado e outro membro contendo as quantidades conhecidas. Este procedimento está bem próximo do que

[1] Bháskara, também conhecido como Bháskara II e Bháskara Achārya (que significa Bháskara, o professor) viveu de 1114 a 1185. Seu principal trabalho foi o *Siddhanta Siromani*, dividido em quatro partes: *Lilavati*, *Bijaganita*, *Grahaganita* and *Goladhyaya*, dedicados à aritmética, álgebra, astronomia e trigonometria esférica, respectivamente. Ele representa o ápice da Matemática do século XII.

fazemos ao escrever uma equação. A diferença é devida ao fato de que os indianos usavam somente palavras, não utilizavam a linguagem simbólica de nossa álgebra.

O método acima deve ser aplicado a um problema seguindo as especificações:

> E por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar".

Assim temos a condição requerida por Bháskara de que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz. Trata-se do método de completar o quadrado, como dizemos hoje em dia, mas que era expresso por meio de palavras. Este método resolve uma equação expressa hoje como $ax^2 + bx = c$ e consiste no seguinte procedimento: multiplicamos ambos os lados por $4a$, obtendo $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$. Em seguida adicionamos b^2 a ambos os lados, obtendo $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$. Agora o membro das quantidades desconhecidas tem uma raiz e tomamos a raiz quadrada para obter

$$2ax + b = \sqrt{4ac + b^2} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

Isto é exatamente o que faz Bháskara, usando somente palavras.

No exemplo das abelhas, fazendo o enxame igual a $2x^2$, a raiz da metade é x e os oito nonos do todo dão $\frac{16}{9}x^2$, que aumentados do casal de abelhas e da raiz, devem ser iguais a $2x^2$, ou seja,

$$x + \frac{16}{9}x^2 + 2 = 2x^2.$$

Bháskara obtém daí a equação $2x^2 - 9x = 18$ que deve ser resolvida pelo método descrito acima. Lembramos que as quantidades desconhecidas ao quadrado, etc. são reunidas no primeiro membro e as quantidades conhecidas no segundo. Ele explica então, por meio exclusivamente de palavras, o procedimento que podemos traduzir da seguinte maneira: multiplicando os dois membros por 8 e somando 81 temos $16x^2 - 72x + 81 = 225$, na qual os dois membros são quadrados. Tomando as raízes e igualando-as obtemos $4x - 9 = 15$, de que tiramos que o valor de x, 6. Logo, o número de abelhas é 72.

De forma geral, o método de resolução empregado por Bháskara consiste em:

1. completar o quadrado no primeiro membro para tornar o termo que contém a quantidade desconhecida e seu quadrado um quadrado perfeito;

2. diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros;

3. resolver a equação de primeiro grau que daí resulta.

Exercícios

4.1. Em cada um dos seguintes versos de Bháskara, ache, pelo método proposto por ele, as quantidades procuradas.

> Verso 75: "De um bando de gansos, quando apareceu uma nuvem, dez vezes a raiz quadrada [do total] foram para o lago de *Manasa*, um oitavo foi para a floresta coberta de hibiscos, e três pares foram vistos brincando na água. Diz-me, donzela, o número de gansos no bando."

> Verso 76b: [Este episódio encontra-se no *Mahabharata*] "Enraivecido numa batalha, Arjuna disparou uma quantidade de setas para matar Karna. Com metade das setas desviou as setas do seu adversário; com quatro vezes a raiz quadrada do total, matou o seu cavalo; com seis setas, matou o seu cocheiro Salya; depois com três setas destruiu a proteção, o estandarte e o arco do seu inimigo; e com uma seta, cortou a sua cabeça. Quantas setas Arjuna disparou?"

4.2. Resolva o seguinte problema proposto por Bháskara:

> "Um bando barulhento de macacos se divertia. Um oitavo ao quadrado brincava no bosque. Doze, os que sobraram, gritavam ao mesmo tempo, no alto da colina verdejante. Quantos eram os macacos no total?"

Qual o fator novo que aparece nesta resolução?

4.3 A "álgebra" árabe

O matemático árabe mais conhecido foi Al-Khwarizmi, nome que deu origem às palavras "algoritmo" e "algarismo". Após se apropriar do saber matemático grego mais avançado, os matemáticos árabes expandiram esse conhecimento produzindo métodos sistemáticos e se empenharam em generalizá-los. Primeiramente, a álgebra árabe permitiu ultrapassar a predominância do conhecimento grego. A álgebra, tal como estudada pelos árabes, ultrapassou a divisão número/grandeza, que era constituinte da Matemática euclidiana. Essa inovação permitiu que fossem aplicados resultados de um domínio aos objetos de outro.

A palavra *al-jabr*, era utilizada para designar "restauração". A utilização desta nomenclatura para o que conhecemos hoje como álgebra tem origem em um dos livros árabes mais importantes da idade média, o *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, escrito por Al-Khwarizmi. A palavra *al-muqabala* queria dizer algo como "balanceamento".

Apesar de a linguagem utilizada por Al-Khwarizmi usar somente palavras, ele emprega um vocabulário padrão para os objetos que aparecem no problema. Ao estudar problemas que atualmente correspondem a equações do segundo grau, ele introduziu os termos necessários para o seu entendimento, principalmente os três modos sob os quais o número aparecia no cálculo da álgebra: a raiz, o quadrado e o número simples. Na sua notação, o quadrado é um conceito algébrico designado pela palavra *mal*, que significa *possessão*, ou "tesouro". Esta palavra é empregada para designar o quadrado da quantidade desconhecida. Não é o quadrado geométrico (*murabba'a*).

Al-Khwarizmi afirma que raiz é o termo essencial, designado pela palavra *Jidhr*, mas poderia também ser designada pela palavra *coisa*. As duas palavras eram usadas para exprimir o que atualmente chamamos de incógnita. Trata-se da quantidade desconhecida no problema (a raiz do *mal*). Por sua vez, *adad*, é um número dado qualquer, ou seja, a quantidade conhecida.

Palavra	Significado	Sentido nos problemas	Notação moderna
Adad		Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	"raiz"	Quantidade desconhecida	x
Mal	"possessão" "tesouro"	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Vale destacar que a palavra "coisa" era utilizada para enfatizar a condição de incógnita, pois, em árabe, esta palavra está associada a uma "indefinição" ou "indeterminação". Uma vez que o cálculo de Al-Khwarizmi era formal e a incógnita designava objetos de qualquer natureza, a escolha da palavra "coisa" revela a preocupação em elaborar um cálculo que pudesse ser aplicado tanto aos números quanto às grandezas geométricas. Essa preocupação foi fundamental para a criação de um novo domínio (a álgebra).

A utilização do termo "raiz" para a solução de uma "equação" vem da tradução para o latim do termo árabe *jidhr* usado por Al-Khwarizmi. Notem que o emprego do termo "raiz" (*jidhr*) por Al-Khwarizmi para designar a quantidade desconhecida está estreitamente ligado ao fato de que o quadrado desta quantidade desconhecida era também uma incógnita, que possuía inclusive uma nomenclatura própria (*mal*).

Depois de mostrar como efetuar as quatro operações sobre expressões contendo quantidades desconhecidas ou radicais, Al-Khwarizmi passa à enumeração dos seis problemas, ou seis casos, possíveis, enunciados por palavras:

1. quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
2. quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$)
3. raízes iguais a um número ($bx = c$)
4. quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
5. quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
6. raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

Em todos os casos, os coeficientes eram sempre considerados positivos. Para cada um dos tipos enumerados, Al-Khwarizmi possuía regras de solução justificadas por resultados dos *Elementos* de Euclides, ainda que os gregos não concebessem equações propriamente ditas, apenas relações entre grandezas.

Cada caso é tratado inicialmente a partir de exemplos. Para o quarto caso, Al-Khwarizmi considera o exemplo "um *mal* e dez *jidhr* igualam trinta e nove denares", que em nossa notação algébrica moderna seria escrito como $x^2 + 10x = 39$. O algoritmo de resolução era descrito do modo seguinte: tome a metade da quantidade de *jidhr* (que neste exemplo é 5); multiplique esta quantidade por si mesma (obtendo 25); some no resultado os *adad* (fazemos $39 + 25 = 64$); extraia a raiz quadrada do resultado (que dá 8); subtraia deste resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução (esta solução é $8 - 5 = 3$). Traduzindo este procedimento em linguagem algébrica atual teríamos que a solução de uma equação do tipo $x^2 + bx = c$ é dada por $-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$.

Apresentamos esta solução organizada em uma tabela, a fim de comparar a solução de Al-Khwarizmi com o procedimento que utilizamos atualmente:

Solução dada por al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna, para uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$
Tome a metade da quantidade de *jidhr*.	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplique esta quantidade por si mesma.	$5^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Some no resultado os *adad*.	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado.	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
Subtraia deste resultado a metade dos *jidhr*, encontrando a solução.	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Vemos que a solução apresentada por Al-Khwarizmi corresponde exatamente à raiz positiva da equação $x^2 + 10x = 39$, equivalente ao seu problema. Observando a terceira coluna da tabela, percebemos que o algoritmo de resolução é uma sequência de operações equivalentes à formula de resolução de equação do segundo grau usada atualmente, o que mostra a generalidade da solução apresentada, mesmo que tenha sido exposta para um exemplo particular.

Em seguida, ele afirma: "A figura para explicar isto é um quadrado cujos lados são desconhecidos". Deve-se construir um quadrado de diagonal AB que representa o *Mal*, ou o quadrado da raiz procurada, e dois retângulos iguais G e D cujos lados são a raiz e 5, metade de 10. A figura obtida é um *gnomon* de área 39. Usando a proposição II.4 dos *Elementos* de Euclides e completando esta figura com um quadrado de lado 5 (área 25), obtemos um quadrado de área 64 = (39 + 25). O lado AH deste quadrado mede 8. Daí obtém-se que a raiz procurada é 3 = (8 − 5).

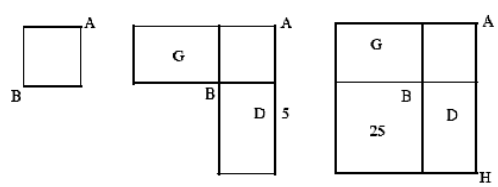


Figura 4.1

Essa construção geométrica reproduz exatamente o procedimento de resolução de Al-Khwarizmi e demonstra a necessidade de completar o quadrado durante a resolução algébrica. Fica claro que ele estabeleceu uma analogia entre a geometria e a álgebra ao identificar o lado do quadrado geométrico à raiz do quadrado algébrico. A justificativa geométrica apresentada por Al-Khwarizmi não serve apenas para garantir a verdade do algoritmo, ela nos faz compreender sua causa: a necessidade de completar o quadrado. Esse papel para uma argumentação geométrica é totalmente novo.

Empregando métodos algébricos expressos por meio de palavras e justificados geometricamente, Al-Khwarizmi fornece soluções para os seis casos enunciados. Em seguida, trata-se de saber como reduzir uma "equação" qualquer, ou seja, um problema qualquer, a um destes casos. Esta é a importância dos procedimentos de "restauração" (*al-jabr*) e "balanceamento" (*al-muqabala*). Suponhamos, por exemplo, em notação atual, a equação:

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Como todos os coeficientes devem ser positivos, para que possamos conceber uma igualdade entre os dois membros desta equação, devemos imaginar que o primeiro membro da equação possua um excedente de *20x* em relação ao segundo. Sendo assim, a igualdade nesta equação deve ser "restaurada" pelo procedimento de *al-jabr*, ou seja, devemos "enriquecer" $2x^2 + 100$ do déficit que lhe causou a retirada de $20x$. Em nossa linguagem, isto é equivalente a dizer que o termo subtraído no primeiro membro deve ser adicionado ao segundo membro, de forma a se obter uma igualdade com todos os termos positivos:

$$2x^2 + 100 = 20x + 58.$$

Observamos que este modo de "passar para o outro lado" não se justifica pela concepção que temos de que a soma e a subtração são operações inversas. O modo de operar dos árabes está mais próximo da crença, frequentemente encontrada, de que realmente retiramos uma quantidade de um lado a fim de "passá-la para o outro lado", forçada pela restrição ao universo dos números positivos.

Em seguida, as espécies do mesmo tipo e iguais são subtraídas de ambos os lados, o que seria equivalente a retirar 58 de ambos os lados. É preciso equilibrar os dois lados, ou seja, balanceá-los pelo procedimento de *al-muqabala*, equilibrando os dois números e reduzindo-os a um só. Chegamos assim a uma equação do tipo (5):

$$2x^2 + 42 = 20x.$$

Dividindo esta equação por 2, podemos resolvê-la pelos métodos já encontrados no Exercício 4.2 para a solução de $x^2 + 21 = 10x$.

Vimos até aqui que o procedimento de Al-Khwarizmi resolve perfeitamente o que chamamos hoje de equação do segundo grau, como já era o caso, aliás, do método de Bháskara. Ainda assim, seria um exagero atribuir-lhes a invenção da fórmula que usamos atualmente. Por quê? Os indianos já utilizavam símbolos para as incógnitas e para as operações. O método enunciado por Bháskara permite reduzir uma equação do segundo grau a uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$, mas ainda não havia símbolos algébricos para expressar coeficientes genéricos da equação, no caso, os coeficientes a, b e c. Se traduzirmos o método usado por eles na linguagem algébrica atual e o aplicarmos a uma equação geral do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, obteremos o equivalente da fórmula para resolução de equações do segundo grau. Isto quer dizer que havia um método geral para resolução de equações, ainda que expresso por palavras. No entanto, não podemos dizer que já existisse uma "fórmula" para resolução de equações, no sentido que entendemos hoje, uma vez que não se usava nenhum simbolismo para os coeficientes. Isto será feito por Viète, como veremos ao final deste capítulo.

Vimos que Bháskara considerava equações do segundo grau, expressas em palavras, com algumas abreviações e alguns símbolos para incógnitas e operações. Al-Khwarizmi forneceu algoritmos de resolução justificados por procedimentos geométricos, alguns dos quais já utilizados por egípcios e babilônios. Ou seja, não sabemos exatamente quem inventou o método, mas fórmula geral que utilizamos hoje para resolver uma equação do segundo grau genérica não pode ter sido formulada por Bháskara, nem pelos árabes, uma vez que eles não dispunham de um simbolismo para os coeficientes.

O método árabe é bem diferente da nossa fórmula, em particular por tratar cada um dos seis casos separadamente e associar sua solução a métodos geométricos.

Exemplo 4.1. *Estudemos a resolução de Al-Khwarizmi para as equações do tipo* $px + q = x^2$*, exemplificado por* $3x + 4 = x^2$*, justificada pela seguinte ilustração (Figura 4.2).*

Seja $AB = x$ e construa o quadrado $ABDE$. Marque F, sobre AE, de maneira que $EF = p$. Como $x^2 = px + q$, vemos que a área do retângulo $ABCF$ é igual a q.

Seja G o ponto médio de EF. Então, por construção, AG mede $s = x - \frac{p}{2}$.

Construa os quadrados $FKLG$ e $APOG$. Então, a congruência dos retângulos $KNOL$ e $PBNC$ acarreta que (traduzindo em nossa notação):

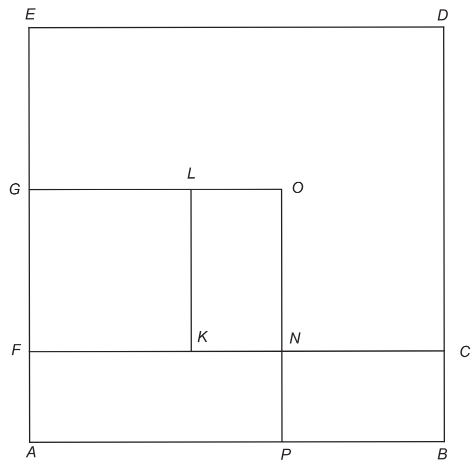


Figura 4.2 Solução de $3x + 4 = x^2$.

$$\begin{aligned} S_{APOG} &= s^2 = S_{FKLG} + S_{APNF} + S_{KNOL} = \\ &= S_{FKLG} + S_{APNF} + S_{PBNC} = \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q. \end{aligned}$$

Assim,

$$x = s + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}.$$

Exercícios

4.3. Resolva os seguintes problemas propostos por al-Khwarizmi:

- "Um Mal e vinte e um igualam dez Jidhr" ($x^2 + 21 = 10x$) pelo seguinte algoritmo: tomamos a metade de dez, que é 5, e multiplicamos 5 por 5 obtendo 25. Subtraímos, em seguida, 21 de 25 e obtemos 4 cuja raiz é 2. Subtraímos então 2 de 5 encontrando a primeira raiz que é 3. Em seguida, somamos 24 a 5 para obter a segunda raiz que é 7. Use este exemplo para deduzir um método geral para o quinto caso. Enuncie este método algebricamente e justifique-o, em seguida, pela geometria.
- Inscrever, em um triângulo isósceles de base igual a 12 e lados iguais a 10, um quadrado de que um dos lados repousa sobre a base do triângulo.

- Dividi dez em duas partes, e dividia primeira pela segunda, e a segunda pela primeira, e a soma dos quocientes e dois. Ache as partes.

4.4. Resolva o seguinte problema proposto por Abu Kamil: Suponha que 10 é dividido em duas partes e que o produto de uma delaspor ela mesma é igual ao produto da outra pela raiz quadrada de 10. Ache as duas partes.

4.5. Escreva os algoritmos para os casos 4 e 5 dos tipos estudados por Al--Khwarizmi usando simbolos para representar incógnitas e coeficientes e obtenha a nossa fórmula para resolução de equações do segundo grau.

4.6. Resolva, usando o método de Al-Khwarizmi, a equação $x^2 + 5x = 15$, justificando geometricamente a resolução.

4.4 A resolução de equações algébricas por radicais

O Ocidente começou a tomar conhecimento dos tratados árabes no século XII, a partir de traduções para o latim. Nesta época, a Matemática árabe era muito superior à que se fazia na Europa. No início do século XIII, os tratados árabes tiveram grande difusão na Itália.

Nesta época, os termos árabes usados na resolução destes problemas serão traduzidos para o latim, bem como os métodos algébricos e aritméticos empregados. As traduções latinas dos tratados árabes usavam o termo "coisa" para designar a quantidade desconhecida, ou *radix* (raiz). O seu quadrado se chamará *quadratus* ou *census*, o cubo, *cubus* e o termo constante, *numerus*. Ao longo dos séculos XIII e XIV diversas abreviações começaram a ser usadas. As operações de mais e menos eram designadas por variações das letras *p (de plus) e m* (de *minus*) e a raiz era designada por variações de *R* (de *radix*).

Mas será apenas no século XV que a álgebra irá se desenvolver, sobretudo na Alemanha e na Itália (mas também na Inglaterra e na França), a partir do livro de Fibonacci e da influência direta dos tratados árabes, em particular do livro de Al-Khwarizmi. Foi então que a tradução do termo "al-jabr" levou a que os métodos árabes fixassem conhecidos como "álgebra".

Mas o que era a álgebra do século XV e início do XVI? Essencialmente a mesma dos árabes, mas com o recurso a um simbolismo (não unificado) tanto para as incógnitas quanto para as operações.

No século XVI, desenvolveram-se na Europa pesquisas dedicadas à álgebra, empregando uma grande quantidade de símbolos, e que foram responsáveis por alguns que conhecemos hoje. Os símbolos de + e − já eram usados na Alemanha. O símbolo para raiz quadrada, por exemplo, foi introduzido em 1525 pelo matemático alemão Christoff Rudolff. Seu aspecto vem de uma abreviação da letra *r*, inicial de "raiz". Em 1557, o matemático inglês Robert Recorde publicou um livro de álgebra no qual introduziu o símbolo "=" que usamos hoje para a igualdade: um par de retas paralelas, pois "não pode haver duas coisas mais iguais". Os símbolos para o quadrado e o cubo da quantidade desconhecida provinham de abreviações das palavras latinas e eram distintos.

Supondo que o cubo fosse expresso por C, o quadrado por Q, reunindo todos os avanços simbólicos da época, a equação expressa hoje como $x^3 - 5x^2 + 7x = \sqrt{x+6}$ seria escrita como

$$C - 5Q + 7R = \sqrt{R} + 6.$$

No entanto, não havia um padrão comum na notação algébrica, como hoje em dia. O símbolo de "=", por exemplo, proposto em 1557, era usado na Inglaterra, mas não era difundido no resto da Europa, onde eram usadas abreviações da palavra "igual". A padronização dos símbolos matemáticos se deu muito mais tarde, sobretudo a partir do final do século XVII, devido à popularidade dos trabalhos de Descartes, Leibniz e Newton, como veremos nos capítulos seguintes.

Os desenvolvimentos algébricos mais importantes dos séculos XV e XVI deveram-se aos esforços para encontrar uma solução da cúbica por radicais. Hoje, pensamos em equações cúbicas como sendo essencialmente todas de um mesmo tipo e que podem ser resolvidas por um mesmo método. Contudo, naquela época, quando os coeficientes eram numéricos e os coeficientes negativos ainda não eram utilizados, existiam diferentes tipos de equações cúbicas, como as enumeradas por Al-Khayam, que dependiam da posição do termo quadrático, do linear e do termo numérico.

No início do século XVI, Scipione Del Ferro obteve uma fórmula usando radicais para a solução de um certo tipo de equação, o que constituiu uma novidade em relação aos trabalhos árabes. Mas esta fórmula foi mantida secreta, como era costume na época. Alguns anos mais tarde, por volta de 1535, outro matemático italiano Niccolo Fontana, conhecido pela alcunha de Tartaglia, resolveu diversas equações cúbicas, em particular as do tipo que escrevemos hoje como $x^3 + mx^2 = n$, considerada com coeficientes exclusivamente numéricos.

Um terceiro matemático italiano, Girolamo Cardano, que parece ter obtido a fórmula de Tartaglia, com a promessa de manter segredo, publicou esta fórmula por volta de 1545. Ainda que os coeficientes da equação devessem ser números positivos, Cardano chega a admitir soluções negativas para as equações, denominadas "raízes menos puras" ou "números fictícios".

Em seu livro *Ars magna* (*A grande arte*), publicado em 1545, Cardano trata a solução de cada um dos treze tipos de equação cúbica em capítulos separados. O capítulo XI, por exemplo, é destinado à resolução da cúbica do tipo "cubo e coisas igual a número". A demonstração é feita tendo como base um exemplo particular, numérico, de uma cúbica e, posteriormente, estabelece-se uma regra de resolução deste tipo de cúbica.

Exibiremos o método de resolução fornecido por Cardano, que não utilizava nossa linguagem algébrica e que possuía uma fundamentação geométrica. A demonstração feita por Cardano é difícil de compreender pelo que a traduzimos para nossa linguagem simbólica, para facilitar o entendimento do raciocínio de Cardano.

A equação $x^3 + 6x^2 = 20$ era escrita como *cub p* 6 *reb æqualis* 20 (cubo e seis coisas igual a 20). No capítulo XI do *Ars magna*, Cardano fornece um método para resolver esta equação. Queremos determinar um segmento GH tal que o cubo de GH mais seis vezes o lado GH seja igual a 20. Sejam dois cubos AE e CL cuja diferença é 20 (A representação plana destes cubos está na Figura 4.3).

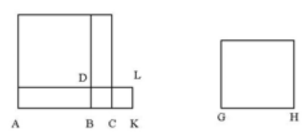


Figura 4.3

Logo, o produto do lado AC pelo lado CK deve ser 2, ou seja, a terça parte do número de "coisas". Fazendo BC igual a CK, teremos que AB é igual a GH, ou seja, o valor da "coisa". Neste momento, podemos associar às grandezas AC e CK as variáveis u e v, tais que $AC = u$ e $CK = v$, de modo que $u \cdot v = 2$, que equivale a 1/3 do coeficiente de x na equação. A solução desejada é $AB = GH = u - v$.

Devemos determinar AB. Começamos por observar que DC é o cubo de BC, DF é o cubo de AB, DA é três vezes CB vezes o quadrado de AB e DE é três vezesAB vezes o quadrado de BC. Primeiro, Cardano enuncia a propriedade de decomposição do cubo: se uma quantidade é dividida em duas partes, o cubo do todo é igual aos cubos das duas partes mais três vezes os produtos de cada uma das partes pelo quadrado da outra. Esta regra, que nada mais é do que nossa regra para o cubo da soma, é demonstrada geometricamente. Observemos a figura abaixo:

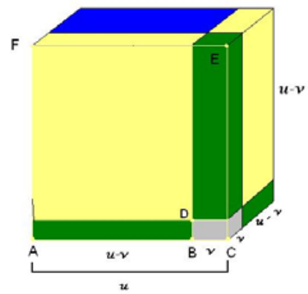


Figura 4.4

A partir da figura, podemos obter que $DC = v^3$, $DF = (u-v)^3 = x^3$, $DA = 3(u-v)^2 v$ e $DE = 3(u-v)v^2$.

Já que o produto de AC por CK dá 2, o triplo de AC vezes CK dá 6, que é o número de "coisas". Como AB é igual a GH (coisa), temos que AB vezes o triplo de AC vezes CK dá "6 coisas". Sendo CK igual a BC, temos que três vezes o produto deAB, BC e AC é 6 vezes AB. Pela hipótese, temos que a diferença entre o cubo de AC e o cubo de CK é 20, que é a diferença entre o cubo de AC e o cubo de BC.

Em outros termos, já que $u.v = 2$, temos que $3.u.v = 6$, que é o coeficiente de x na equação dada. Assim, $AB \times 3u.v = 6x$. Por hipótese, temos que $u^3 - v^3 = 20$. A soma dos sólidos DA, DE e DF é 20, o que nos remete à equação $(u-v)^3 + 3.(u-v)^2 v + 3.(u-v)v^2 = 20$.

Cardano manipula esta igualdade para concluir que o cubo de AB mais 6 vezes AB será igual a 20. Mas o cubo de GH mais 6 vezes GH também é igual a 20. Logo, GH será igual a AB, portanto GH é a diferença entre AC e BC. As grandezas AC e BC, ou AC e CK, são números ou linhas contendo uma área igual à terça parte do número de "coisas" cujos cubos têm como diferença o termo numérico da equação. Assim, teremos a seguinte regra:

> "Eleve ao cubo a terça parte do número de coisas ao qual será somado o quadrado da metade do termo numérico da equação e extraia a raiz quadrada deste total que será usado, em dois momentos. Em um deles, adicione a metade do termo numérico da equação e no outro subtraia o mesmo número. Teremos então, um binomium e o seu apotome respectivamente. Subtraia a raiz cúbica do apotome da raiz cúbica do binomium e o resultado final é o valor da coisa."

No caso particular da equação "cubo e seis coisas igual a 20", teremos: eleve 2 ao cubo, que é a terça parte de 6, o que resulta em 8; Multiplique 10, metade do termo numérico, por ele mesmo resultando 100; some 100 e 8, obtendo 108. Extraia a raiz quadrada, que é $\sqrt{108}$, e a utilize em um primeiro momento somando 10, e em um segundo momento subtraindo a mesma quantidade, e teremos o *binomium* $\sqrt{108}+10$ e o *apotome* $\sqrt{108}-10$. Extraia a raiz cúbica desses valores e subtraia o valor do *apotome* do valor do *binomium*, e teremos o valor da coisa: $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$, escrito em sua linguagem como *R. v. cu. R. 108. p. 10. m. R. v. cu. R. 108. m. 10.*

Utilizando termos algébricos atuais, poderíamos reescrever como segue o desenvolvimento e a regra de Cardano para a resolução de uma equação cúbica reduzida do tipo $x^3+mx=n$. Escrevemos os coeficientes m, n da equação em termos de valores a e b. observando uma identidade do tipo $(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$. Tomando $m=3ab$ e $n=a^3-b^3$ na equação, obtemos $x=a-b$. Desta forma, é possível obter x a partir dos valores de a e de b, mas para isso devemos resolver as equações de a e b em termos de m e n. Fazendo $a=\frac{m}{3b}$ e $n=a^3-b^3$ chegaremos à equação $27b^6+27nb^3=m^3$ que pode ser resolvida para achar b por meio de uma equação quadrática. Resolvendo o sistema para a e b obtemos:

$$a^3=(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}$$

$$b^3=-(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}$$

Tomando as respectivas raízes cúbicas positivas, Cardano obtém o valor de x. Lembramos que Cardano não usava este simbolismo algébrico e não empregava um raciocínio puramente algébrico na dedução da fórmula. O papel da geometria na demonstração de Cardano é o de justificar o método algébrico. Vemos que ele se orgulha de ter obtido um método algébrico baseado em argumentações geométricas:

> "No mais, quando entendi que a regra que Tartaglia havia fornecido tinha sido descoberta por mim a partir de uma demonstração geométrica, pensei que este seria o melhor caminho a seguir em todos os casos."

Nesta citação, podemos ver que o objetivo de Cardano podia não ser o de disputar a prioridade do método com Tartaglia, mas fornecer uma justificativa mais legitima, permitindo que este método fosse generalizado para outros casos, de ordens superiores.

Analisando a fórmula escrita em nossa notação, podemos ver que quando $(n/2)^2 + (m/3)^3$ é negativo, encontramos duas raízes de números negativos durante a solução. Como veremos no Capítulo 6, mesmo neste caso, pode existir uma raiz válida para a equação, que seria obtida pela fórmula quando as raízes de números negativos se cancelam, quando fazemos $x = a - b$. É o caso da equação $x^3 = 15x+4$, chamada "irredutível". Se aplicarmos a fórmula a esta equação, obtemos que $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Por tentativas e erros, baseados em fórmulas geométricas como a que Cardano obteve para o cubo da soma, era possível descobrir que as raízes cúbicas acima eram algo como o que expressamos hoje por $2+\sqrt{-1}$ e $2-\sqrt{-1}$. Fazendo $x = a+b$, temos que $x = 4$ é uma raiz válida da equação.

Mas para resolver este tipo de equação e obter raízes válidas, era preciso manipular expressões que contêm raízes de números negativos, que não eram consideradas números. Quantidades negativas já tinham aparecido em problemas mais simples, envolvendo equações do segundo grau. Neste caso, no entanto, quando a quantidade negativa aparece no resultado, era fácil driblar a dificuldade, bastava dizer que a equação não tinha solução. A aplicação da fórmula para resolver equações do terceiro grau faz com que não seja possível se desviar da questão com facilidade.

O problema das equações irredutíveis será resolvido por outro italiano chamado Bombelli. [2] Para isto, ele designará as raízes quadradas de números negativos por *più di meno* (p.d.m.), no caso da raiz positiva que chamamos hoje de i, e *meno di meno*, (m.d.m.), no caso da raiz negativa, que chamamos de $-i$, e fornecerá as regras de adição e multiplicação destes números. Mas deixaremos esta discussão para o Capítulo 6, que trata da história dos números complexos.

Dentre os métodos mais importantes introduzidos por Cardano no *Ars magna* está a transformação ou redução de equações. Por exemplo, reduzia-se uma equação cúbica em outra sem o termo de segundo grau que, em linguagem atual, significa reescrever a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ em uma nova variável. Fazendo a substituição $x = y - \frac{a}{3}$, obtém-se uma equação com coeficientes arbitrários onde o termo em y^2 fica ausente. Com esta nova variável, a equação adquire a forma $y^3 + py = q$, que também é conhecida como uma forma reduzida da equação cúbica.

Em muitos casos, Cardano estuda o efeito que a transformação de uma equação em outra pode ter na alteração das raízes. Por exemplo, da equação $x^3+8x = 64$, que ele sabia resolver pelo método descrito acima, podemos obter $x^3 = x^2 + 8$ por meio da transformação que leva x em $8/x$. Logo, aplicando

[2] Rafael Bombelli nasceu em Bolonha, 1526 e morreu em 1572, provavelmente em Roma. Seu livro *Algebra* foi importante no desenvolvimento da álgebra.

esta transformação, também podemos resolver a segunda equação.

Este método permite transformar problemas conhecidos em problemas desconhecidos e descobrir novas regras. Realmente, a transformação de equações e a solução pela adaptação das raízes foi um método central para os matemáticos posteriores, como Viète.

Diferente dos exemplos anteriores, de descrição de métodos para resolver equações de determinados tipos, Cardano inaugurava a investigação sobre a estrutura e a solvabilidade das equações, ponto de partida da álgebra moderna abstrata. Segundo Stedall, esta razão é suficiente para considerarmos Cardano o verdadeiro pai da álgebra européia, ver ([137]). Viète seria o seu herdeiro.

Se acreditarmos nesta afirmação e lembrarmos que o trabalho de Cardano continha muito pouca notação, seremos obrigados a relativizar nossa definição usual de álgebra como o ramo da Matemática que usa letras, e símbolos em geral, para representar números e quantidades. A inovação de Cardano está nos métodos propostos, sobretudo os de transformação de equações, descritos praticamente sem notação simbólica.

Veremos, na última seção, que Viète mostrará como a álgebra permite entender outros ramos da Matemática, como a geometria, em contraste com seus predecessores, como Al-Khwarizmi e Cardano, que usavam a geometria para justificar a álgebra. Antes disso, falaremos de um novo simbolismo introduzido por este matemático francês que, apesar de não ser o traço mais relevante de sua obra, contribuiu de modo decisivo para que se possa escrever fórmulas para resolver equações.

Exercícios

4.7. Resolva a equação $x^3 = 63x + 162$ pelo método de Tartaglia e Cardano. Note que $(-3+2\sqrt{-3})^3 = 81+30\sqrt{-3}$ e $(-3-2\sqrt{-3})^3 = 81-30\sqrt{-3}$.

4.8. É possível encontrar as três raízes dessa equação pela fórmula de Cardano? Esta fórmula só vale para uma equação do tipo $x^3 + mx = n$ ou também vale para $x^3 = mx + n$.?

4.9. O seguinte problema fez parte da disputa matemática entre Ferrari e Tartaglia: Divida o número 8 em duas partes x e y tais que $xy(x-y)$ é máximo. Observe que, quando este problema foi formulado, e resolvido, as técnicas do cálculo infinitesimal ainda não existiam. Resolva-o sem usar cálculo.

4.5 Os números negativos e imaginários no contexto da resolução de equações

O advento da álgebra trouxe à tona, ao mesmo tempo, o problema dos números negativos e de suas raízes que, apesar de surgirem no cálculo ou nas soluções das equações, não possuíam um estatuto definido. Nas civilizações mais antigas (babilônios, egípcios, chineses, gregos, hindus, etc), não se usavam números negativos no sentido próprio. Eram admitidas operações de subtração e multiplicação que envolvessem, por exemplo, a subtração de um número maior de um menor, como $2 - 6$, mas o número -4 não era admitido enquanto tal. As regras de operação entre somas ou diferenças, que exprimimos hoje como $(a + b) \times (a - b)$ ou $(a - b) \times (a - b)$, e que eles exprimiam para valores numéricos específicos, deviam levar em consideração as regras de sinais. Muitos destes povos já sabiam, portanto, intuitivamente, que *mais com mais dá mais*, *menos com mais dá menos* e *menos com menos dá mais*. No entanto, esse problema, bem como o dos números imaginários, só surgirá, de modo mais explícito, com o desenvolvimento da álgebra a partir do Renascimento.

Sabemos que alguns matemáticos indianos, bem como Fibonacci, já propunham interpretar um número negativo como uma perda, no lugar de um ganho. No século XV, Nicolas Chuquet já representava o número negativo $-a$ como $0 - a$, o que mostra que o sinal $-$ ainda não era um atributo do número, mas sim a indicação de uma operação.

Cardano, que, como vimos, foi um dos principais responsáveis pelo desenvolvimento da álgebra no século XVI, já admitia raízes negativas de equações, mas designava estas soluções como *fictícias*. Logo, ainda que a natureza destes números não estivesse clara, os matemáticos deste período investigavam as regras de operação com números negativos. No caso de Cardano, ele não admitia que *menos com menos* pudesse dar mais. É interessante observar que números negativos, quando apareciam nos cálculos, já eram chamados, na maioria dos casos, de *negativos*. No entanto, quando representavam a solução de uma equação, deviam ser chamados de *fictícios*, como em Cardano. Isto mostra que, apesar do reconhecimento da utilidade prática destes números para os cálculos, eles não eram considerados números verdadeiros, ou seja, verdadeiros objetos matemáticos. Isto porque os objetos que deviam ser admitidos na Matemática ainda se confundiam com as grandezas geométricas e, por esta razão, o sentido matemático de um número negativo ainda não podia ser plenamente admitido. Em uma tentativa de dar sentido aos números negativos, ainda no século XVI, o italiano Bombelli chegou a enunciar que: $p\,15$ com $m\,20$ dá $m\,5$ porque, se tivesse 15 unidades de moeda e devesse 20, pagando as 15 continuaria devendo 5.

Uma situação semelhante à dos números negativos ocorre para suas raízes. No século XIII, Fibonacci foi desafiado por um problema que levou ao cálculo das raízes da equação que denotaríamos hoje como $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ e mostrou que a solução não pode ser classificada em nenhum dos casos listados nos *Elementos* de Euclides.

Já vimos o método usado por Cardano e Tartaglia para resolver equações cúbicas. No entanto, surgia um problema no caso das chamadas equações *irredutíveis*, como $x^3 = 15x + 4$. É fácil ver que esta equação possui uma raiz válida (racional positiva) que é 4. No entanto, o método fazia aparecer raízes de números negativos como intermediárias no cálculo das raízes das equações cúbicas, apesar de somente as raízes racionais positivas serem admitidas como solução.

Os algebristas da Renascença tinham por objetivo resolver equações e, por esta razão, apesar de não admitirem certas quantidades como solução da equação, podiam aceitar quantidades que apareciam nos cálculos, mas que desapareciam no resultado. Estas quantidades eram utilizadas de modo puramente pragmático, sem que sua natureza fosse questionada. Apesar de afirmar explicitamente que a raiz quadrada de um número positivo é positiva e a raiz quadrada de um número negativo não é correta, Cardano não se priva de operar com raízes de números negativos. Por exemplo, diz ele, se queremos dividir o número 10 em duas partes cujo produto seja 40, *é evidente que este problema é impossível, mas podemos fazer os cálculos do modo que segue*: dividimos 10 em duas partes iguais obtendo 5, que multiplicado por si mesmo dá 25; subtraímos de 25 o produto requerido, ou seja 40, e restará $m15$.

A solução devia ser justificada geometricamente e Cardano apresenta uma tentativa interessante para suprir a ausência de uma representação geométrica natural para esta situação. Segundo as proposições de Euclides, a equação de que tratamos aqui exigiria a construção de um quadrado de área $m15$. Dividindo o segmento AB de comprimento 10 em dois segmentos iguais e desiguais, queremos encontrar o ponto D que resolve o problema. Para isto, seria necessário retirar do quadrado $CEFB$ (Veja a Figura 4.5), de área 25, um quadrado de área 40 (igual ao produto de AD por DB). Sendo assim, o quadrado em CD deveria ter área $m\,15$.

A figura é equivalente à da proposição II.5 dos *Elementos* de Euclides, a qual afirma que $AB \times DB + CD^2 = CB^2 = CEFB$:

A fim de encontrar um sentido geométrico para a regra de cálculo utilizada, Cardano observa que 40 é o quádruplo de 10, logo queremos que o produto $AD \times DB$ seja o quádruplo de AB. Devemos, portanto, retirar de $CEFB$ o quádruplo de AB. Se restasse algo, a raiz quadrada desta quanti-

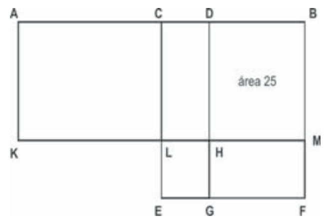


Figura 4.5

dade, respectivamente somada à raiz de $CEFB$ e subtraída da mesma, daria o resultado procurado. Mas como o resultado é negativo, e a diferença entre $CEFB$ e o quádruplo de AB é $m15$, esta raiz seria $Rm15$, quantidade que respectivamente somada a 5 e subtraída de 5, nos daria a solução desejada. Estas soluções eram escritas como 5 p R m 15 e 5 m R m 15 e Cardano afirma que *fazendo abstração das torturas infligidas ao nosso entendimento* podemos concluir que o produto destes dois números é 40, ou seja, 25 $mm15$ *quad est* 40". No entanto, $CEFB$ não possui a mesma natureza que AB, logo não possui a mesma natureza do quádruplo de AB, que é 40, pois *uma superfície é por natureza diferente de um número e de uma reta*. As quantidades obtidas (5 p R m 15 e 5 m R m 15) são, portanto, diz Cardano, *realmente sofísticas*, *uma vez que podemos realizar com elas operações que não podemos realizar nem com os números puramente negativos, nem com os outros* ([24], p.66).

Na verdade, ele esta realizando a multiplicação de $5+\sqrt{-15}$ por $5-\sqrt{-15}$ e obtém como resultado $25-(-15)=40$. No entanto, para justificar geometricamente esta operação, é obrigado a utilizar quantidades *sofísticas* que permitem a realização de operações como retirar um segmento de um quadrado. Este é um dos indícios de que Cardano ficava dividido entre assumir as operações algébricas por si mesmas e tentar justificá-las geometricamente. Um exemplo desta ambiguidade é que, ao mesmo tempo em que afirma que não haveria sentido em considerar equações acima do terceiro grau, uma vez que geometricamente remeteriam a quantidades absurdas, pois superiores ao cubo, Cardano comenta a solução de uma equação de grau quatro. Vemos pelo uso das quantidades *realmente sofísticas* que, para Cardano, era ao mesmo tempo necessário e confuso dar sentido geométrico às operações algébricas as quais, todavia, funcionavam tão bem. Mas o problema de justificar a possibilidade de calcular a raiz de um número negativo permanece.

Vimos que este problema surge no caso das equações irredutíveis estudadas no século XVI e resolvidas pelo método de Cardano e Tartaglia. Este método só apresenta uma raiz, mas pode ser aplicado para o caso em que a equação possui mais de uma raiz. Isto pode exigir o cálculo de raízes cúbicas de números do tipo que exprimimos hoje como $a \pm b\sqrt{-1}$. Atualmente, quando queremos encontrar raízes cúbicas envolvendo números deste tipo, usamos a fórmula de De Moivre. Mas esta fórmula só foi introduzida na primeira metade do século XVIII e, na verdade, o primeiro matemático a calcular efetivamente uma raiz real a partir da raiz cúbica de números complexos (que aparecem na fórmula de Cardano) foi Bombelli.

O problema era o de calcular a raiz da equação que escrevemos hoje como $x^3 = 15x + 4$. Primeiramente, aplicava-se a fórmula de Cardano, que permite obter $a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $b = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. A raiz seria dada, portanto, por:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4.$$

É possível calcular a raiz destes números complexos supondo elas devem ser do tipo $a \pm b\sqrt{-1}$. Supondo que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = x + y\sqrt{-1}$, obtemos

$$2 + 11\sqrt{-1} = x^3 + 3x^2y\sqrt{-1} - 3xy^2 - y^3\sqrt{-1}.$$

Separando os termos que são multiplicados pela raiz dos que não são, concluímos que $x^3-3xy^2 = 2$ e $3x^2y-y^3 = 11$. Partindo de que $x(x^2-3y^2) = 2\times1$ e supondo que $x = 2$, obtemos de $4-3y^2 = 1$ que $y = 1$ (poderíamos ter suposto inicialmente $x = 1$, mas isto forneceria $y = 0$ o que não é possível). Concluímos assim que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$.

Obviamente, Bombelli não usa esta notação e não sabemos se ele empregou um procedimento deste tipo. O raciocínio apresentado supõe que um número complexo tem sempre a forma $a \pm b\sqrt{-1}$, uma conclusão que só foi estabelecida no século XVIII.

Designando a raiz quadrada por $R.q.$ e a raiz cúbica por $R.c.$, Bombelli escreve que $R.c.$ $2.p.dm.R.q.121 + R.c.2.m.dm.R.q.121$ é 4s. Observamos que ele usa a notação $dm.R.q.121$ para $\sqrt{-121}$, o que é diferente de $R.q.m121$. A notação muda se esta raiz é somada ou subtraída, o que indica que sua notação para $\sqrt{-121}$ privilegia a operação realizada com este número e não o número dado pela raiz de um número negativo.

O mais interessante desta notação é que *p.dm.*, que é a abreviação para *più di meno* em italiano, designa que estamos somando, na verdade, a raiz quadrada do número negativo 121 e *m.dm.*, abreviação de *meno di meno*, designa a subtração desta mesma quantidade. Não está claro exatamente como Bombelli encontra a raiz cúbica, mas ele conclui que seu valor é 4. Quanto às outras operações entre os números *p.dm.* e *m.dm.*, Bombelli fornece algoritmos que permitem calcular suas multiplicações por qualquer outro número, afirmando inclusive que *m.dm.* vezes *m.dm.* dá *m.*, o que é equivalente a dizer que $-\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -1$. Isto mostra que Bombelli já admitia estes números como entidades aritméticas aceitáveis, sobre as quais podíamos enunciar regras de cálculo.

Os números imaginários são abordados em seu primeiro livro, juntamente com definições de conceitos elementares, como potências, raízes, binômios e as operações que os envolvem. Ele reconhece a existência das raízes negativas e segue adiante afirmando que estas expressões são mais *sofísticas* que reais, como podemos perceber no trecho citado abaixo, encontrado na página 133 de *L'algebra*:

> "Encontrei um outro tipo de raiz cúbica composta muito diferente das outras, que nasce no capítulo do "cubo igual a tanto e número", quando o cubo da terça parte do tanto é maior que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se demonstrará, (...) porque quando o cubo do terço do tanto é maior que o quadrado da metade do número, o excesso não se pode chamar nem mais nem menos, pelo que lhe chamarei de *più di meno*, quando se adicionar e meno di meno quando se subtrair. (...) E esta operação é necessária (...) pois são muitos os casos de adicionar onde surge esta raiz, (...) que poderá parecer a muitos mais *sofística* que real, tendo eu também essa opinião, até ter encontrado a sua demonstração (...) mas primeiro tratarei de os multiplicar, escrevendo a regra de mais e de menos.

Alguns historiadores da Matemática, como Bourbaki, chegam a afirmar que *più*, *meno*, *meno di meno* e *più di meno* são respectivamente 1, -1, $-i$ e i. Sobretudo porque Bombelli, no capítulo *Summare di p.di m. et m.di m*, apresenta um importante axioma que revela que não se pode somar *più* com *piú.di.meno*. Esta ideia é vista como uma primeira noção de independência linear entre os valores real e imaginário.

Poderíamos efetivamente estabelecer uma comparação entre as regras de Bombelli e aquelas que utilizamos atualmente, porém dizer que *più*, *meno*, *meno di meno* e *più di meno* são respectivamente 1, -1, $-i$ e i nos parece perigoso. A razão mais forte para nos precavermos desta associação apressada é que nós utilizaremos mais tarde o símbolo i para representar a unidade imaginária, ao passo que *più di meno* e *meno di meno* contém em suas expressões as ideias de adição e de subtração, ou seja, relacionam-se a operações. Ou seja, nos parece valioso insistir, do ponto de vista da história da Matemática, que *più di meno* e *meno di meno*, mesmo tendo respectivamente o significado de $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, não significam os nossos i e $-i$. Os sinais que precedem as raízes do número -1 indicam que estas quantidades não são independentes, mas são sempre somadas a, ou subtraídas de, um número real.

A obra de Bombelli não teve muita repercussão e o emprego dos números negativos e de suas raízes ainda inquietava os matemáticos do século XVII, com exceção do caso em que as raízes de números negativos eram apenas um intermediário para se chegar a raízes reais.

A introdução de uma nova notação, com os trabalhos de Viète, desviou a atenção dos matemáticos que sucederam aos algebristas do século XVI. No entanto, apesar das grandes inovações propostas em sua obra, Viète não admitia nem números negativos, nem suas raízes.

Um problema ligado ao da consistência desses números diz respeito justamente à notação, ou seja, ao modo como eles são escritos. Na solução da equação cúbica, com base nas fórmulas desenvolvidas pelos matemáticos do século XVI, os números imaginários eram sempre da forma $a \pm b\sqrt{-1}$ (com a e b reais), escritos na notação da época (antecipações do símbolo $\sqrt{-1}$ só começaram a ser usadas no final do século XVII). Cabia perguntar, no entanto, se nas equações de grau maior os números *imaginários*, como designados por Descartes, seriam sempre desta forma, ou se existiriam universos mais amplos onde esses números poderiam ser escritos de outro modo. Isto porque não se sabia sequer se as raízes de equações de grau maior que três podiam ser expressas por radicais.

Em 1629, o francês Albert Girard introduziu o problema de saber qual o número de raízes de uma equação qualquer, problema que funda uma perspectiva mais geral de análise das equações. Ele afirma que todas as equações possuem tantas soluções quanto o grau da quantidade de maior grau, o que consiste em uma primeira versão do que conhecemos hoje como *teorema fundamental da álgebra*. Obviamente, para admitir este número de soluções, será necessário admitir como válidas as soluções que ele chama de *impossíveis*. Mas para que servem estas soluções se elas são impossíveis? Girard responde que elas servem pela sua utilidade, mas, sobretudo, para garantir a generalidade do resultado:

> "Todas as equações da álgebra recebem tantas soluções quanto a denominação da mais alta quantidade, exceto as incompletas. (...) Poderíamos perguntar para que servem as soluções que são impossíveis, respondo que para três coisas: para a certeza da regra geral, para a certeza de que não há outra solução por sua utilidade."([69])

Em seguida, ele afirma que as soluções podem ser "mais que nada", "menos que nada" ou do tipo $\sqrt{-}$. A solução negativa é interpretada por Girard de um modo já bastante próximo do atual, indicando que, em geometria, ela se explica como um "recuo´´, no lugar do "avanço´´ indicado pelo símbolo $+$.

Alguns anos mais tarde, em seu *A geometria*, Descartes também admite que uma equação possui tantas raízes quantas são as dimensões da quantidade desconhecida. No entanto, Descartes afirma que pode acontecer que algumas destas raízes sejam "falsas ou menos que nada" e investiga, dada uma equação qualquer, quantas são as raízes verdadeiras e quantas são as falsas. Ele conclui, então, que:

> "Tanto as verdadeiras raízes quanto as falsas não são sempre reais, mas às vezes apenas imaginárias; o que quer dizer que podemos sempre imaginar tantas quanto dissemos em cada equação, mas às vezes não há nenhuma quantidade que corresponda àquelas que imaginamos." ([43], p.86).

O exemplo utilizado para ilustrar este caso é o da equação $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$, para a qual podemos imaginar três soluções das quais apenas uma é real, dada pelo número 2, ao passo que as outras, mesmo que as aumentássemos, diminuíssemos, ou multiplicássemos, não conseguiríamos fazer com que deixassem de ser imaginárias. A palavra *imaginária*, talvez devido à grande influência da obra de Descartes, passará a ser a mais usada para designar estas quantidades e indica a impossibilidade de representação geométrica para as soluções encontradas.

Resultados como os que antecederam o teorema fundamental da álgebra levam à necessidade de se considerar todas as raízes, sejam elas reais ou imaginárias. Observamos que o *real* de que se trata aqui é um real geométrico. A exigência algébrica faz surgir o problema de se estabelecer o estatuto para as quantidades negativas e imaginárias, mas ainda não era colocado o problema de fornecer uma definição e uma representação para estes números.

Exercícios

4.10. Empregando a substituição $x = y - 2/3$ use a fórmula de Cardano e Tartaglia para encontrar as raízes da equação $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$.

4.11. Resolva o seguinte problema, que se encontra no livro de Bombelli, e que transcrevemos em notação moderna: Escreva $\sqrt[3]{52 + \sqrt{-2209}}$ na forma $a + bi$.

4.12. Resolva o seguinte problema proposto por Cardano: "O dote da mulher de Francisco é igual a mais 100 moedas de ouro do que os bens do próprio Francisco, e o quadrado do dote é 400 moedas de ouro a mais do que o quadrado dos bens de Francisco. Ache o dote e os bens de Francisco." (Cardano interpretaa a solução negativa como uma dívida).

4.13. Siga o roteiro abaixo para resolver, como Ferrari, a equação $x^4+4x+8 = 10x^2$.

1. Reescreva a equação como $x^4 = 10x^2 - 4x - 8$.
2. Adicione $-2bx^2 + b^2$ a ambos os lados.
3. Determine que condição b deve satisfazer para que cada lado da equação resultante seja um quadrado perfeito.
4. Para cada solução da equação cúbica obtida, ache todos valores da incógnita x.
5. Quantas raízes tem a equação original?

4.6 O passo decisivo para a obtenção de uma fórmula para resolver equações e o trabalho de Viète

Sabemos que os matemáticos indianos já utilizavam abreviações para designar as incógnitas, que eram expressas pelas iniciais dos nomes das cores. Em meados do século XVI torna-se razoavelmente comum o uso de letras (distintas) para designar incógnitas (distintas) em equações com coeficientes numéricos. Além disso, as potências das incógnitas eram designadas por palavras que eram também abreviadas, ou mesmo simbolizadas, desde alguns matemáticos árabes que sucederam a Al-Khwarizmi. Mas note que, nas regras para a resolução de equações de segundo grau, dizemos: *tomar a metade do número de Jidhr*. O que muda nestas regras de resolução de equações quando introduzimos símbolos para as quantidades desconhecidas, considerando que as potências destas quantidades eram expressas por símbolos distintos? Se substituirmos *Jidhr* por x teríamos: *tomar a metade do número de* x. O mesmo para o *Mal*, quantidade desconhecida que é o quadrado de x mas que seria, dentro desta lógica, designada por y.

Símbolos para adição e subtração já eram conhecidos desde os egípcios. Símbolos para operações mais gerais já foram usados por Diofanto, incluindo a designação simbólica para uma quantidade desconhecida. Os indianos já usavam abreviações e símbolos para operações de modo generalizado. No caso dos árabes, a álgebra usava predominantemente palavras (apesar do uso esparso de simbolismo para a utilização de algoritmos), mas suficientemente geral para enunciar regras que poderiam ser aplicadas a um tipo geral de equação. Os matemáticos dos séculos XV e XVI, especialmente os italianos, introduziram um simbolismo, que incluía a representação das incógnitas e das operações, para enunciar as regras algébricas desenvolvidas pelos árabes.

Se alguém tivesse reunido a um só tempo, nesta época, todos estes avanços simbólicos isolados, vejamos o que essa pessoa poderia ter obtido. Adicionando a generalidade das regras árabes ou indianas a todos os simbolismos usados até então, teríamos algo como a expressão abaixo, obtida pela adaptação da regra de Al-Khwarizmi aos simbolismos existentes:

Seja a equação $A+21=10B$, em que A é o quadrado de B. Para qualquer número que substituirmos por 21 e 10 na equação, o valor de B (que é a raiz da equação) pode ser obtido pelo procedimento: tomar a metade do número de B's (note que aqui não estamos falando de $B\div 2$, mas da metade do número que multiplica B, que nesta equação é 10, mas pode mudar de uma equação para outra); multiplicar o resultado por si mesmo; subtrair do resultado o número (que na equação é 21 mas também pode mudar de uma equação para outra); ...

O passo decisivo para que possamos transformar esta regra em uma fórmula, tal como conhecemos hoje, será a introdução de um simbolismo para os coeficientes da equação, que nos permita escrever algo como $A+m=nB$. A introdução destes símbolos nos permite entrever, diante somente do símbolo, a relação entre A e B, que é o que temos quando escrevemos $A+m=nB$. Os três primeiros passos do procedimento descrito acima se resumiriam, então, a escrever: $(n/2)^2-m$.

Este foi justamente o passo dado pelo matemático francês François Viète, que viveu entre os anos 1540 e 1603. Ele introduz uma representação padrão para os "coeficientes" de uma equação. As incógnitas serão representadas pelas vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas. Além disso, ele simboliza as potências usando uma mesma letra: se A é a incógnita, seu quadrado é chamado A *quadratum*, seu cubo A *cubum*, e assim por diante. Se chamarmos x de A, a equação $x^2+b=cx$ (significando área+área=área) seria escrita, na notação de Viète, como A *quadratum* + B *aequatur* C *in* A. (A palavra *aequatur* quer dizer "igual"). Na verdade, esta equação é escrita adicionando a palavra *plano* depois B, uma vez que todas as parcelas devem possuir as mesmas dimensões, e teríamos A *quadratum* + B *plano aequatur* C *in* A. De modo análogo, um número a ser igualado a um cubo era denominado *solido*.

Chegamos, assim, a uma concepção próxima da álgebra que conhecemos atualmente, sobretudo após o século XVII, quando algumas notações serão sugeridas, como a substituição das vogais, para representar as incógnitas, pelas últimas letras do alfabeto como x, y, z, w, ...; e a representação dos coeficientes pelas primeiras letras do alfabeto.

É importante observar que há uma diferença de natureza fundamental entre uma "incógnita" e um "coeficiente". A incógnita é uma quantidade que está desconhecida e que será conhecida a partir das restrições representadas pela equação, já o coeficiente é uma quantidade conhecida genérica que está, portanto, indeterminada na expressão de uma equação qualquer. Ambos os casos pressupõem indeterminações, mas em níveis distintos: a determinação dos coeficientes é obtida pela escolha de uma equação particular (arbitrária) e a determinação do valor da incógnita, pela resolução (não arbitrária) desta equação. Sendo assim, no universo das equações, a escolha arbitrária de coeficientes determina uma equação. Já a determinação da incógnita depende das restrições dadas por uma equação.

A notação introduzida por Viète representou uma generalização dos métodos algébricos que permitiu classificar as equações tratadas anteriormente como "casos". Isto foi possibilitado pelo fato de podermos trabalhar no universo das equações, usando coeficientes.

O livro mais importante de Viète chama-se *Arte analítica*, o que já indica que os métodos que ele desenvolve visam encarar os problemas de forma geral, investigando sua estrutura, antes de buscar resolver casos particulares. Esta obra foi influenciada pela tradução da *Coleção Matemática* de Pappus, em 1588, que fez ressurgir o interesse pelos problemas de construção dos gregos.

Para resolver problemas de geometria, Viète propunha usar o tipo de argumentação denominado "análise", que já tinha sido empregado pelos gregos, mas identificando-o à ferramenta algébrica. A *Arte analítica* começa com uma explicação do que é a análise:

> "Encontra-se na Matemática uma certa maneira de procurar a verdade, que diz-se ter sido primeiramente inventada por Platão, que Theon chamou 'Análise' e que, para ele, define a suposição daquilo que procuramos como se estivesse concedido para chegar a uma verdade procurada, por meio das conseqüências; ao contrário, a 'Síntese' é a suposição de uma coisa concedida para chegar ao conhecimento daquilo que procuramos pelo meio das conseqüências".

A geometria sintética é aquela na qual construímos as soluções. Já pelo método analítico, supomos que as soluções desconhecidas são conhecidas e operamos com elas como se fossem conhecidas, até chegar a um resultado conhecido que determina a solução. A simbolização algébrica permite representar estas soluções desconhecidas por símbolos, manipulados segundo as mesmas regras que os números conhecidos.

A resolução de equação algébrica fornece um ótimo exemplo de "análise". A incógnita, ou o x, é a quantidade desconhecida. Quando escrevemos $x + 2 = 3$, tratamos o x como se fosse conhecido e operamos com esta quantidade da mesma forma que fazemos com o 3 e o 2 que são, efetivamente, números conhecidos. Com esta manipulação, fazemos $x = 3 - 2 = 1$ e encontramos o valor da quantidade desconhecida. Operamos, neste exemplo, com as quantidades procuradas, como se elas já estivessem dadas. Logo, para resolver o problema de encontrar duas grandezas com soma e produto dados pelo método analítico, começamos supondo que estas grandezas, que procuramos, são dadas, e podem ser chamadas de x e y. Em seguida, por manipulações algébricas, encontramos os valores reais de x e y.

Para Viète, no entanto, o método analítico, empregado por meio da ferramenta algébrica, era somente um auxiliar na resolução de problemas geométricos. Em seu livro *Effectionum geometricarum canonica recensio* ele mostra como as soluções de uma equação do 2ºgrau podem ser achadas geometricamente utilizando somente régua e compasso:

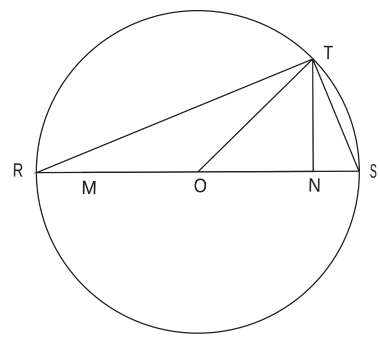


Figura 4.6 Solução de $A^2 + AB = D^2$.

Dada a equação, $A^2 + AB = D^2$, que escreveríamos hoje como $x^2 + px = q^2$, Viète procede como segue (Figura 4.6).

Construa $MN = p$ e seja $TN = q$ perpendicular a MN. Seja O o ponto médio de MN. com centro em O, trace a circunferência de raio OT. Sejam R e S os pontos em que esta circunferência corta o prolongamento de MN. Então, o triângulo retângulo RST fornece imediatamente que $TN^2 = RN \times NS$, ou seja, $q^2 = (x + p)x = x^2 + px$.

No mesmo livro, Viète constrói também, geometricamente, as soluções das equações $A^2 - AB = D^2$ e $AB - A^2 = D^2$. Deixamos ao cuidado do leitor achar construções, análogas à que fizemos, para resolver estas equações.

Exercícios

4.14. Escreva, na notação de Viète, a equação $x^3 + bx^2 + cx = d$.

4.15. Explique como Viète achou, geometricamente, as soluções de equações dos tipos $A^2 - AB = D^2$ e $AB - A^2 = D^2$.

4.16. Siga o roteiro abaixo para resolver o seguinte problema de Viète: Dado o produto de dois números e sua razão, encontrar os números.

- Sejam A e E os dois números, seu produto $AE = B$, e sua razão $A : E = S : R$. Mostre então que

$$R : S = B : A^2 \qquad \text{e que} \qquad S : R = B : E^2.$$

- Se $B = 20$, $R = 1$ e $S = 5$ (ou seja, o produto dos dois números é 20 e eles estão entre si assim como 1 está para 5), conclua que $A = 10$ e $E = 2$.
- Como você resolveria o problema, hoje?

4.7 Os logaritmos de Neper

Como vimos na seção sobre a história da trigonometria, desde a Antiguidade eram usadas tabelas contendo quantidades trigonométricas associadas a ângulos. Estas quantidades continuaram sendo usadas até a época de que tratamos, em relação com problemas práticos, como os da astronomia e da navegação. As tabelas trigonométricas construídas para tratar estes problemas usavam circunferências de raios grandes, para evitar o problema de lidar com números fracionários.

Devido aos dados deste tipo de problema serem inacessíveis à medida direta, as grandezas do problema deviam ser obtidas de modo indireto, por meio de propriedades de figuras geométricas. Neste contexto, não é difícil imaginar o valor prático de se calcular o ângulo ou o lado de um triângulo com dimensões dadas por números grandes, como no problema abaixo:

Exemplo 4.2. *Seja o triângulo ABC com lados $AB = 26.302$, $BC = 57.995$ e ângulo $C = 26^o$ dados (Figura 4.7). Queremos calcular o ângulo A sabendo que ele é agudo.*

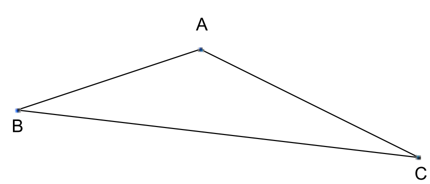


Figura 4.7

Já era conhecida a propriedade de que $\frac{AB}{\text{sen}\,(C)} = \frac{BC}{\text{sen}\,(A)}$. Logo, podemos escrever

$$\frac{26.302}{\text{sen}\,(26^o)} = \frac{57.995}{\text{sen}\,(A)}. \tag{4.1}$$

Para calcular $\operatorname{sen}(A)$ e, portanto, encontrar o ângulo A, era necessário efetuar multiplicações e divisões com estes números que, por advirem de problemas astronômicos, podiam ser muito grandes e conter uma parte fracionária também grande.

Assim, seria conveniente que um problema contendo multiplicações e divisões como este pudesse ser resolvido por intermédio de outro, no qual as multiplicações e divisões fossem reduzidas a adições e subtrações. A partir de nossos conhecimentos da Matemática atual, sabemos que a noção de logaritmo permite esta simplificação. Usando logaritmos, a igualdade 4.1 seria equivalente a:

$$\log(AB) - \log(\operatorname{sen}(C)) = \log(BC) - \log(\operatorname{sen}(A))$$

Com esta transformação do problema, a resolução seria dada pelo seguinte procedimento: procura-se em uma tabela de senos o valor dos logaritmos de $AB = 26.302$, $BC = 57.955$ e $\operatorname{sen}(26^{\text{o}})$. Efetuando somente adições e subtrações com os números encontrados, obtemos $\log(\operatorname{sen}(A)) = 346.675$. Deve-se, em seguida, consultar a tabela de senos para encontrar um ângulo cujo seno seja próximo deste valor[3]. Como $\log(\operatorname{sen}(75^o)) = 346.683$, pode-se concluir que o ângulo A mede, aproximadamente, 75^{o}.

Observamos, no exemplo acima, que o procedimento de resolução usa fortemente as tabelas de senos e de logaritmos. No caso dos senos, já vimos como elas foram construídas, queremos investigar o caso dos logaritmos. Em primeiro lugar, gostaríamos de mostrar como se desenvolveu esta ideia de, a partir de um número dado, definir um novo número que facilite os cálculos com o primeiro. Faremos isso a partir dos trabalhos de John Neper. Obviamente, como é freqüente na história da Matemática, ele não foi o "primeiro a descobrir os logaritmos", nem teve uma ideia brilhante a partir do nada. No entanto, este exemplo exprime de modo claro as preocupações da época e o contexto no qual estas novas ferramentas foram desenvolvidas.

No final do século XVI e início do XVII, os praticantes do cálculo eram astrônomos, navegadores, mas também mercadores e comerciantes. Logo no prefácio de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da maravilhosa tabela de logaritmos)[4], Neper se dirige a eles ao exprimir a preocupação, comum na época, de facilitar certas operações:

"Dado que nada (caros amadores apaixonados pela Matemática)

[3]Lembramos que o valor dos senos usados nos problemas trigonométricos da época não variava entre 0 e 1, pois considerava-se um ciclo trigonométrico cujo raio fosse um número conveniente para os cálculos astronômicos.

[4]Talvez a melhor tradução para *canonis* não seja tabela, e sim canône ou regra. Usamos tabela associando esta ideia à sua nomenclatura atual.

> é tão desagradável à prática Matemática (freiando e retardando os especialistas no cálculo) quanto as múltiplicações, as divisões e as extrações de raízes quadradas ou cúbicas de números grandes que, além do incômodo devido ao seu tamanho, induzem a diversos erros perigosos; como consequência, eu me dediquei a procurar por que meios seguros e cômodos poderia me livrar destas dificuldades" (Prefácio).

Pouco depois, ainda sem dizer como foi feita a construção, Neper exibe uma tabela de logaritmos dos senos usados em problemas práticos. Interessante notar que a descrição da tabela foi publicada em um livro separado, publicado antes de outro contendo o procedimento de construção: *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção da maravilhosa tabela de logaritmos). Na verdade, este segundo só foi conhecido depois da morte de Neper, em 1619. Designaremos as duas obras somente por *Descrição* e *Construção*, respectivamente. No primeiro, encontramos tabelas distintas para cada ângulo, com valores dos senos e dos logarítmos para cada minuto somado àquele ângulo. Por exemplo, esta é a tabela para o ângulo 20^o:

20^{O} + minutos	seno	logaritmo
0	3.420.201	10.728.852
1	3.422.934	10.720.865
...	...	...
30	3.502.075	10.492.295
...	...	...

Lembramos que os valores trigonométricos de Neper são calculados usando um ciclo trigonométrico de raio 10^7, logo todos os senos, cossenos e tangentes considerados aqui seriam iguais aos nossos, multiplicados por este valor. O valor do seno de 20^{O} é, portanto, 3.420.201 e o logaritmo deste seno é 10.728.852.

Na verdade, esta tabela era apresentada conjuntamente com a tabela referente a outro ângulo, no caso 69^{O}, com os minutos listados em ordem decrescente (ao contrário dos minutos de 20^{O}). Na segunda tabela, a coluna intitulada "diferença" refere-se à diferença entre as duas colunas intituladas logaritmo. Por exemplo, temos, na primeira linha, 10.728.852 – 622.827 = 10.106.025.

20^{O} + minutos	seno	logaritmo	diferença	logaritmo	seno	69^{O} + minutos
0	3.420.201	10.728.852	10.106.827	622.025	9.396.926	60
1	3.422.934	10.720.865	10.097.781	623.084	9.395.931	59
...	...	...	...	...	...	...
30	3.502.075	10.492.295	9.838076	654.219	9.366.722	30
...	...	...	...	...	...	...

Podemos obter assim que $\text{sen}\,(69^{\mathrm{O}}\,60' = 70^{\mathrm{O}}) = 9.396.926$ e o logaritmo deste seno é 622.025. Usando o resultado da coluna das diferenças, é possível obter que:

$$\log(\text{sen}\,(20^{\mathrm{O}})) - \log(\text{sen}\,(70^{\mathrm{O}})) = \log\,(\frac{\text{sen}\,(20^{\mathrm{O}})}{\text{sen}\,(70^{\mathrm{O}})}) = 10.106.827.$$

Mas $\text{sen}\,(70^{\mathrm{O}}) = \text{sen}\,(90^{o} - 20^{\mathrm{O}}) = \cos(20^{\mathrm{O}})$ e, portanto, a igualdade acima pode ser reescrita como:

$$\log\,(\frac{\text{sen}\,(20^{\mathrm{O}})}{\cos(20^{\mathrm{O}})} = \log(\text{tg}\,(20^{o})) = 10.106.827$$

Consultando-se uma outra tabela de tangentes obtinha-se o valor da $\text{tg}\,(20^{\mathrm{O}})$.

É interessante observar que Neper não fornece uma tabela de logaritmos de números inteiros, e sim de logaritmos de senos. Isto reforça a impressão de que seu objetivo inicial era ganhar a adesão daqueles que iriam usar efetivamente as tabelas. Só depois, ele se preocupa em convencer os leitores de que sua construção é válida. Sabemos que todo inteiro compreendido entre 0 e 10^7 pode ser considerado como um seno, no sentido de Neper. Logo, quando se trata de explicar e justificar como gerou as tabelas, na *Construção*, Neper considera que está obtendo, para cada "número natural", um "número artificial" correspondente. O próprio Neper chamam estes novos números, artificiais, de "logaritmos". Isto decorre da propriedade fundamental admitida por ele, da qual podem ser deduzidas diversas outras:

Os logaritmos de números proporcionais diferem de um mesmo valor.

Em notação atual, isso pode ser escrito como:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\log(a) - \log(b) = \log(c) - \log(d)$.

Assim, compreendemos que o *logaritmo* é o número de uma razão, o *arithmo* (número) de uma *logos* (razão).

Esta propriedade fundamental decorre de sua definição, que passamos a explicar.

Neper define o logaritmo por meio da associação entre uma sequência geométrica e uma sequência aritmética. Suponhamos um segmento G_0B, como na Figura 4.8, percorrido por um corpo móvel que começa a se mover com velocidade igual ao tamanho do segmento (no caso 10^7) e vai diminuindo a velocidade conforme se aproxima de B. Marcamos, sobre este segmento, um ponto G_1 tal que $G_1B = qG_0B$. Ou seja, para uma dada razão $q < 1$, podemos marcar outros pontos G_2, G_k, G_{k+1} respeitando a mesma proporção, ou seja, $G_2B = qG_1B$, $G_3B = qG_2B$ e assim por diante. Os comprimentos dos segmentos G_iB formam uma progressão geométrica de razão q, pois $G_2B = q^2G_0B, \ldots, G_kB = q^kG_0B$.

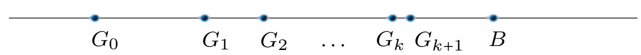


Figura 4.8

Neper deseja definir o logaritmo de q^k por meio de uma correspondência entre os pontos G_i definidos acima e outros pontos, definidos por uma progressão aritmética sobre um segmento de mesmo tamanho que G_0B (Veja A Figura 4.9).

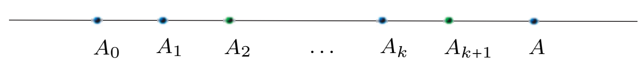


Figura 4.9

Dado o segmento A_0A, também de tamanho 10^7, marcamos os pontos A_1, $A_2, \ldots, A_{k+1}$ a igual distância um do outro, satisfazendo a seguinte condição: se dois móveis partem de G_0 e de A_0, com a mesma velocidade inicial, eles atingem, respectivamente G_1 e A_1 no mesmo intervalo de tempo. Ou seja, quando um móvel vai de A_0 a A_1, um outro móvel vai de G_0 a G_1. Neper afirma, então, que o comprimento do segmento A_0A_1 nos dá o logaritmo de G_1B, bem como o de A_0A_2 dá o logaritmo de G_2B e assim por diante.

Observamos, de imediato, que quanto menor G_kB, maior será o valor de seu logaritmo A_0A_k (pois a razão é menor que um) e o logaritmo do seno total (isto é, G_0B) é o segmento A_0A_0, agora reduzido a um ponto (ou seja, é nulo).

A partir desta associação, ele obtém um modo de calcular o valor do logaritmo. Esta definição fornece o princípio, mas não diretamente um modo de construir as tabelas. No entanto, ela permite justificar a propriedade fundamental enunciada acima que, por sua vez, servirá ao cálculo dos valores das tabelas, como veremos.

Suponhamos, em linguagem atual, que a razão da progressão aritmética definida pelos A_i seja r. Logo, $A_0A_1 = r$, $A_0A_2 = 2r, \dots, A_0A_k = kr$. Como sabemos que $G_0B = 10^7$, $G_kB = q^kG_0B$ e ele definiu que $\log(G_kB) = A_0A_k$, temos que $\log(q^kG_0B) = kA_0A_1$, ou seja, $\log(q^k10^7) = kr$.

Da igualdade acima, podemos concluir que:

Se
$$\frac{G_mB}{G_nB} = \frac{G_pB}{G_sB}$$
então
$$q^{m-n}G_0B = q^{p-s}G_0B$$
.

Pela definição acima do logaritmo, temos que:

$$(m-n)A_0A_1 = \log(q^{m-n}G_0B) = \log(q^{p-s}G_0B) = (p-s)A_0A_1.$$

Logo,

$$A_0A_m - A_0A_n = mA_0A_1 - nA_0A_1 = pA_0A_1 - sA_0A_1 = A_0A_p - A_0A_s.$$

Mas sabemos também, pela definição, que $A_0A_m = \log(G_mB)$ e assim deduzimos a propriedade fundamental sobre as grandezas proporcionais consideradas no início:

$$\log(G_mB) - \log(G_nB) = \log(G_pB) - \log(G_sB).$$

Esta propriedade permite construir as tabelas. Neper constrói, primeiramente, sequências geométricas de números naturais entre 10^7 e $\frac{10^7}{2}$, escritos em forma decimal com vírgulas (o que não era muito comum na época). Em seguida, ele calcula os logaritmos correspondentes. Para obter uma sequência que chamaríamos hoje "densa", que permita obter boas aproximações, os números listados a partir de 10^7 são muito próximos uns dos outros. Ele escolhe uma razão próxima de 1,

$$q = 0,9999999 = 1 - 0,0000001 = 1 - 10^{-7}.$$

Os termos seguintes formarão uma sequência decrescente com esta razão. Resta-nos calcular os logaritmos de tais números. Pela definição, $\log(10^7) = 0$ e os outros termos serão obtidos um a um, por meio da definição cinemática. Por exemplo, se queremos calcular $\log(10^7q) = \log(99999999)$ podemos enquadrar este número entre dois limites:

$$\frac{1}{1-10^{-7}} > \log(99999999) > 1$$

Estas desigualdades decorrem imediatamente das propriedades cinemáticas da definição. O valor de $\frac{1}{1-10^{-7}}$ pode ser aproximado por $1,0000001$ e o logaritmo procurado será obtido pela média entre os dois extremos, o que fornece:

$$\log(99999999) = 1,00000005.$$

Usando a propriedade fundamental e enquadramentos análogos, ele consegue obter os outros valores a partir deste, com um bom grau de aproximação.

Inspirado por Neper e usando um método análogo, também de caráter cinemático, o professor de Matemática inglês Henri Briggs propôs, poucos anos depois, uma tabela de logaritmos decimais dos números inteiros. Ele sugeriu a Neper que o número 10 fosse escolhido como base dos logaritmos, e que $\log 1 = 0$.

Exercícios

4.17. Katz ([96], pp. 536-537.) propõe a seguinte construção dos logaritmos, a qual preserva as ideias de Neper, vistas acima, e simplifica seu texto original.

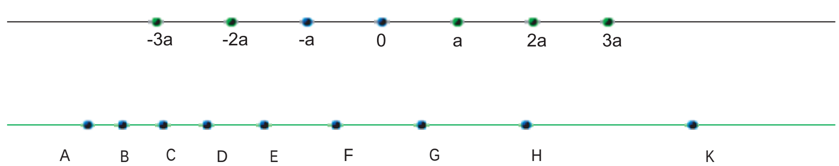


Figura 4.10

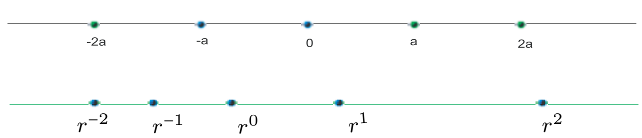


Figura 4.11

Sejam duas sucessões de números, a primeira uma progressão aritmética de razão a, $\ldots, -5a, -4a, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots$, mostrados na reta superior da Figura 4.10, e a segunda de números em progressão geométrica de razão r, $\ldots, 1/r^5, 1/r^4, 1/r^3, 1/r^2, 1/r, 1, r, r^2, r^3, \ldots$ com $r > 1$, mostrados na reta inferior.

Sejam P e Q dois pontos, que se movem sobre cada uma das retas, respectivamente, de maneira que P percorre os intervalos $[a, a]$, $[a, 2a]$, $[2a, 3a]$, ..., no mesmo tempo em que Q percorre os intervalos $[1, r]$, $r, r^2]$, $[r^2, r^3]$, ... e suponha que a velocidade de Q é constante em cada um dos intervalos.

1. Demonstre que a velocidade do ponto Q em qualquer um dos pontos em progressão geométrica é proporcional à distância do ponto considerado ao ponto 0.
2. Prove que, se $[x_1, x_2]$ e $[y_1, y_2]$ são dois intervalos de quaisquer comprimentos e tais que $x_2/x_1 = y_2/y_1$, então os tempos para Q percorrer, respectivamente, os intervalos $[x_1, x_2]$ e $[y_1, y_2]$ são iguais.
3. Entre os pontos 1 e r introduza o ponto s=$\sqrt{r}$ e, nos intervalos $[r, r^2]$, $[r^2, r^3]$, ..., insira os pontos s^2, s^3, ..., respectivamente. Semelhantemente, na reta superior, considere o ponto $b = \frac{1}{2}a$ e os pontos $2b$, $3b$, ... Prove que se P se desloca com velocidade constante, e Q percorre os intervalos $[1, s]$, $[s, s^2]$, $[s^2, s^3]$ no mesmo tempo em que P percorre os intervalos $[0, b]$, $[b, 2b]$, então continuam válidos os resultados dos dois itens anteriores.
4. Suponha agora que o ponto Q se move de tal maneira que em qualquer ponto sua velocidade é proporcional a sua distância do ponto 0. Suponha, também, que P continua se deslocando com velocidade constante, v. Além disso, suponha que o ponto de partida de Q é o ponto 1, que sua velocidade inicial é v e que o ponto de partida de P é o ponto 0. Se, em um certo instante, P e Q estão, respectivamente, em y e x, dizemos que y é o *logaritmo* de x, e escrevemos

   $$y = \log x.$$

   Demonstre que $\log 1 = 0$ e prove que se $x_2/x_1 = y_2/y_1$, então o tempo necessário para Q percorrer $[x_1, x_2]$ é igual ao tempo em que percorre $y_1, y_2]$. Demonstre que, portanto, $\log x_2 - \log x_1 = \log y_2 - \log y_1$.
5. Demonstre que $\log(y_2/y_1) = \log y_2 - \log y_1$, $\log x_2 y_1 = \log x_2 + \log y_1$, e que $\log(x_2^n) = n \log x_2$. Conclua que, para qualquer número racional z, $\log(x_2^z) = z \log x_2$.
6. Demonstre, usando cálculo infinitesimal, que a função log definida acima é nosso logaritmo natural moderno, ln.

4.8 Exercícios suplementares

4.18. O que é a *forma irredutível de uma cúbica*? Que condições os coeficientes (números reais) a, b, c e d da equação cúbica $ax^3+bx^2+cx+d=0$ devem satisfazer para que a equação tenha

- Três raízes reais distintas?
- Somente uma raiz real?

4.19. Resolva, usando a regra de dupla falsa posição, o seguinte problema proposto por Fibonacci:

> Dois pássaros voam do topo de duas torres (Figura 4.12), respectivamente, com a mesma velocidade, e chegam, ao mesmo tempo, a uma fonte. Quais as distâncias das torres às fontes se uma delas tem 40 metros de altura, a outra 30 metros, e distam entre si de 50 metros?

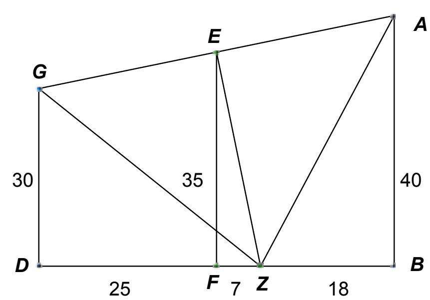


Figura 4.12

4.20. O matemático muçulmano Abu Kamil nasceu no Cairo, em 850. Era apelidado o "calculador egípcio". Ele aprofundou os resultados "algébricos" de al Khwarizmi, tanto tecnicamente quanto conceitualmente. Resolva o seguinte problema proposto por Abu Kamil:

O número 50 é dividido por outro número. Se o divisor é aumentado de 3 unidades, o quociente diminui de $3\frac{3}{4}$. Qual é o divisor?

4.21. Ibrahim Ibn Sinan (908 - 946) foi um matemático muçulmano que fez importantes trabalhos em geometria, entre outros ramos da Matemática. Resolva o seguinte problema proposto por ele:

Dados dois círculos e um segmento de reta, construa o círculo que é tangente a ambos e tal que o segmento de reta entre os pontos de tangência é igual ao segmento dado.

4.22. O seguinte problema encontra-se em um texto italiano das *escola de ábaco*: Divida 10 em duas partes cujo produto dividido por sua diferença é igual a $\sqrt{28}$.

4.23. Resolva este problema discutido por Christoff Rudolff (viveu na primeira metade do século XVI): Escreva $\sqrt{27+\sqrt{200}}$ na forma $a+\sqrt{b}$.

4.24. Resolva os seguintes problemas propostos pelo francês Nicolas Chuquet (? - 1487):

- Um tonel de vinho possui três torneiras. Se abrirmos a maior delas, o tonel é esvaziado em 3 horas. Se abrimos torneira média, o tonel é esvaziado em 4 horas. Se abrirmos a pequena, ele é esvaziado em 6 horas. Se abrirmos todas as torneiras, em quanto tempo o tonel será esvaziado?
- Um homem morreu durante a gravidez de sua mulher. Em seu testamento, ele estipulou que 100 escudos devem ser divididos da seguinte maneira: Se sua mulher der à luz uma filha, a mãe deve receber duas vezes mais do que a filha. Se ela tiver um filho, este deverá receber duas vezes o que couber à mãe. A viúva teve gêmeos, um filho e uma filha. Como devem ser divididos os 100 escudos?

Capítulo 5

A transformação da matemática no século XVII: Descartes, Fermat, Leibniz e Newton.

5.1 Contextualização histórica

O objetivo aqui será analisar as transformações ocorridas na Matemática durante o século XVII, em particular na geometria, com a intervenção de métodos algébricos e infinitesimais. Os nomes de René Descartes (1596-1650) e de Pierre de Fermat (1601-1665) estão no centro das mudanças, que culminaram com a invenção do que chamamos hoje "geometria analítica". Mas se quisermos inserir as transformações da Matemática do século XVII em um contexto mais abrangente, precisaremos relacionar os desenvolvimentos intelectuais com a transformação da sociedade e, em particular, com o crescimento da importância da técnica.

Mencionamos, no capítulo anterior, o desenvolvimento das práticas algébricas, mas havia outros interesses na ordem do dia. A geometria ainda era o principal domínio da Matemática e qualquer pessoa que quisesse aprender ciência devia começar pelos *Elementos* de Euclides. No entanto, aos poucos, foi crescendo a consciência de que grande parte do conhecimento geométrico devia servir a aplicações, desde as mais práticas, como as técnicas para construir mapas, até as mais abstratas, como a teoria da perspectiva, na pintura, e a astronomia.

O século XVII é marcado pela consciência de que o desenvolvimento técnico pode melhorar a vida dos homens, ainda que esta visão não tenha sido inaugurada neste momento. Não iremos detalhar a relação entre as crenças da época e os ideais da sociedade de modo generalizado, mas é possível citar três exemplos típicos deste século: Galileu, Bacon e Descartes.

Descartes postula um método para a invenção de verdades na ciência, publicado em seu *Discurso do Método*, que contém como apêndice a *Geometria*. Por isso, passou a ser interessante associar o empreendimento geométrico de Descartes ao espírito da primeira metade do século XVII. Ao privilegiar a invenção e a intervenção na natureza, o pensamento da época se associava ao estudo quantitativo dos fenômenos. Ou seja, em consonância com o ideal de seu tempo, Descartes defendia que o pensamento não deve se dedicar a compreender todos os tipos de coisas, mas somente aquelas que são passíveis de quantificação. As deduções lógicas que permitem passar de uma proposição a outra devem ser substituídas por relações entre coisas quantificáveis, traduzidas por equações (igualdades entre quantidades).

Contra os saberes antigos, permeados por demonstrações estéreis, seria preciso fundar uma nova arte da invenção, que pudesse fornecer novos objetos capazes de servir à Matemática, assim como os objetos técnicos serviam à vida social. Para muitos pensadores, as demonstrações matemáticas não tinham somente o papel de convencer e estabelecer uma certeza, mas deviam, sobretudo, esclarecer a natureza do problema e propor métodos de invenção direta que permitissem resolvê-los. Por isso, eles rejeitavam, por exemplo, a demonstração por absurdo. Neste contexto, os objetos geométricos passavam a ser vistos com novos olhos, pois podiam ser úteis na resolução de problemas práticos.

No ano de 1626, Descartes frequentou o círculo de pensadores que gravitavam em torno do padre Mersenne, em Paris, que se dedicava, entre outras coisas, a problemas óticos ligados ao estudo do movimento dos raios luminosos. Estes estudos levaram Descartes a escrever *A Dióptrica*, um dos ensaios publicados com o *Discurso do método*, em 1637, ou seja, juntamente com a *Geometria*. Trata-se de um tratado de ótica, compreendendo uma teoria da refração da luz e, desde o início da obra, percebe-se a proximidade de Descartes com os artesãos de instrumentos óticos.

Podemos dizer que a época é marcada por uma concepção geral das curvas que não se limitava ao estudo de curvas particulares, ampliando o universo dos objetos geométricos pela introdução de curvas que descrevem movimentos ou são expressas por equações algébricas. Em diversos problemas, tratava-se de procurar um objeto desconhecido que podia ser uma curva, em um sentido bem mais geral do que se considerava anteriormente. A geometria se transformava, assim, por meio dos objetos que se propunha a investigar e das técnicas empregadas com este fim. O "método" a que se refere o *Discurso do Método* deve ter sua eficácia comprovada por aplicações materiais, como fica claro na *Dióptrica*, mas sua superioridade é demonstrada na geometria. Este será o papel da resolução, descrita adiante, de um problema herdado dos antigos, cuja solução ainda não havia sido encontrada: o problema de Pappus.

O início do século XVII foi marcado por esforços de diversos matemáticos para recuperar as obras gregas que haviam sido perdidas, em particular os clássicos mencionados por Pappus ([147]). Foi neste contexto que Fermat, encantado pelas *Cônicas* de Apolônio, assumiu a tarefa de recuperá-las e o contato com o pensamento matemático deste clássico influenciou profundamente sua obra.

A "exatidão" dos procedimentos empregados em geometria foi redefinida por Descartes. Ao invés de construções geométricas, foram admitidas técnicas algébricas na definição de curvas, instituídas como objeto central da geometria. A segunda metade do século XVII sentirá os efeitos desta mudança e o trabalho com curvas, incluindo a busca de tangentes e áreas, incentivará o desenvolvimento dos métodos infinitesimais. Uma discussão relativa ao modo de justificar a Matemática acompanhou estas transformações técnicas. Para que a Matemática pudesse se libertar dos padrões gregos, associados ao cânone euclidiano, pensadores do século XVII, incluindo Leibniz, defendiam suas práticas como uma arte da invenção: não importavam tanto os critérios de demonstração, mas o que as ferramentas permitiam obter de novo.

Nos trabalhos do fim do século XVII, o conceito de curva recobre três concepções: a curva como expressão algébrica, eventualmente infinita; a curva como trajetória de um ponto em movimento; e a curva como polígono com número infinito de lados. As três exercem um papel central no desenvolvimento dos métodos infinitesimais e Leibniz foi um dos protagonistas desta mudança. Depois de ler a geometria de Descartes, em 1673, ele achou o método de tangentes do matemático francês restritivo. Além de ser complicado, este procedimento não se aplica a uma grande quantidade de curvas. Uma das principais contribuições de Leibniz será estender o domínio das curvas para além das algébricas, consideradas por Descartes como as curvas de que a geometria deve se ocupar.

Após ter estudado direito e filosofia, G.W. Leibniz (1646-1716) participa de uma missão diplomática à corte de Louis XIV, em 1672, onde conhece Christian Huygens. Este último, que tinha sido aluno de Descartes, trabalhava intensamente sobre séries e apresentou a Leibniz, até então praticamente ignorante em Matemática, os trabalhos de Cavalieri, Pascal, Descartes, St.Vincent, Wallis e Gregory.

Os métodos analíticos de Descartes e Fermat motivaram o estudo das propriedades aritméticas de séries infinitas na Inglaterra, sobretudo por John Wallis e James Gregory. Estes pesquisadores conseguiram resolver um grande número de problemas, como o de encontrar a tangente a uma curva, calcular quadraturas ou retificar curvas, e tiveram grande influência sobre Newton e

Leibniz. A grande diferença introduzida por estes últimos está no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos. Antes de Newton e Leibniz, problemas envolvendo o estudo de curvas, como os que envolviam a determinação de tangentes e áreas, eram tratados de forma independente. Os métodos empregados por diferentes estudiosos possuíam semelhanças entre si, mas estas não eram ressaltadas. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre o modo de resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas sem reconhecer a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas.

A deselegante polêmica sobre a prioridade da invenção do cálculo, na qual participaram seguidores de Leibniz e de Newton, os segundos instigados pelo próprio Newton, Leibniz escreveu, em sua defesa, em 1714, o *Historia et Origo Calculi Differentialis*. Hoje, os historiadores refutam a ideia de que Leibniz plagiou Newton e ressaltam que os métodos e motivações dos dois eram basicamente diferentes.

O livro principal de Newton, os *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, não contém desenvolvimentos analíticos. Os resultados são apresentados na linguagem da geometria sintética, ao passo que Leibniz defende vigorosamente os métodos analíticos. Podemos destacar, ainda, as diferentes concepções de quantidade variável, ou as diferentes noções de continuidade de ambos. No entanto, historiadores como N. Guicciardini ([72]), não acham estas diferenças fundamentais. Na prática, seria possível traduzir os procedimentos fluxionais de Newton nos algoritmos diferenciais de Leibniz. Em sua visão, o que os distingue é a relação de cada um com a Matemática de seu tempo. Para Leibniz, os problemas de fundamento do cálculo eram preocupações que não deviam interferir no desenvolvimento dos algoritmos diferenciais. Ao passo que Newton se esforçou para colocar sua teoria em uma linguagem rigorosa, no caso, a da geometria clássica. Para fazer com que sua teoria fosse aceita, Newton se preocupava em garantir uma continuidade histórica entre seus métodos e os dos antigos.

Se compararmos os cálculos de Newton e de Leibniz com o atual, veremos que eles trabalhavam essencialmente com variáveis definidas sobre curvas, ao passo que atualmente o cálculo se fundamenta na noção de função. O principal objeto de estudo no século XVII era o desenvolvimento de métodos para resolver problemas sobre curvas geométricas, muitas vezes de origem física, como o de encontrar a tangente, calcular a área sob uma curva e achar comprimentos de curvas ou velocidades de pontos se movendo sobre uma curva. Ou seja, problemas de natureza geométrica ou cinemática tratados com as ferramentas do cálculo. Tratava-se, portanto, de entrar em um novo domínio, o da relação entre quantidades, o que irá contribuir, mais tarde, para o surgimento da ideia de função como relação entre quantidades.

Neste capítulo enfocaremos o tratamento algébrico de problemas geométricos, como introduzido por Descartes na *Geometria*, o qual analisaremos em detalhes, procurando permanecer fiéis aos termos e aos argumentos da época. Além desta obra, mencionaremos os trabalhos geométricos de Fermat e suas discussões com o colega francês.

Falaremos das contribuições de Leibniz para o cálculo, bem como de suas justificativas, comparando brevemente seu estilo com o de Newton. Para entender porque novas definições foram propostas, é preciso analisar a recepção do cálculo diferencial e integral e as discussões acerca da legitimidade de suas técnicas.

5.2 O método cartesiano

Após Galileu, o movimento e os fenômenos da natureza em geral puderam ser compreendidos por meio da Matemática. O mundo real, que não é equivalente ao mundo percebido, é a materialização da geometria e deve ser descrito pela Matemática. É neste contexto que o pensamento de Descartes se desenvolve, com as certezas aristotélicas, que haviam dominado a Idade Média, sacudidas pela "Nova Ciência", assentada sobre os trabalhos de Galileu.

Em seu *Regras para a direção do espírito*, escrito por volta de 1628, portanto antes de seu *Geometria*, Descartes já anunciava o projeto de uma nova ciência que seria uma espécie de Matemática universal (*Mathesis universalis*).

A *Mathesis universalis* nada tem a ver com a Matemática vulgar de seu tempo. Ela permitiria reduzir a análise de um fenômeno qualquer a problemas relacionados à "ordem" e a "relações", por meio de raciocínios dedutivos. Com a álgebra, qualquer dedução pode ser traduzida em termos de equações. Os problemas geométricos devem ser formulados em linguagem algébrica para que se possa penetrar nas relações que existem entre os objetos do universo. Este passo é fundamental para legitimar o estudo da geometria por meio da álgebra, pois o que esta última permite apreender são as proporções envolvidas nos objetos geométricos.

Logo no início do *Geometria*, Descartes propõe a utilização do método analítico:

> "Se queremos resolver qualquer problema, primeiramente supomos que a solução já está encontrada, e damos nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-la. Tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas. Em seguida, sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural

> possível, mostrando as relações entre estas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos uma Equação, uma vez que os termos de uma destas duas expressões são iguais aos termos da outra." ([43] p. 8-9).

Dar nomes às linhas da figura, *tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas* era a essência do método analítico, como vimos no estudo da *Arte Analítica* de Viète no capítulo anterior. O objetivo de Descartes era utilizar na geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, na qual regras simples de composição levassem dos objetos simples a outros mais complexos. Por razões puramente geométricas, era necessário algebrizar a geometria.

Na abertura do primeiro livro do *Geometria*, Descartes se refere às cinco operações básicas da aritmética, adição, subtração, divisão, multiplicação e radiciação, e mostra que estas operações correspondem a construções simples com régua e compasso. No exemplo abaixo (Figura 5.1), tomando-se AB como unidade, o segmento BE é o produto dos segmentos BD e BC obtidos ligando-se os pontos A e C e desenhando-se DE paralela a AC.

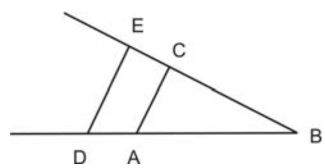


Figura 5.1

Uma consequência deste procedimento é que o produto dos segmentos BD e BC pode ser considerado um segmento BE. Suponhamos, por exemplo, que $BA = 1$ e $BD = a$ e marcamos C de modo que $BC = b$. Temos que $\frac{a}{1} = \frac{BE}{b}$, logo $BE = ab$, produto de BD e BC (notem que aqui já podemos usar o produto dos meios e dos extremos, uma vez que estamos operando com números, e não mais com grandezas). Podemos também marcar o ponto C de modo que $BC = a$ e, neste caso, $BE = a^2$. Temos assim uma potência quadrada que não é associada a um quadrado, mas a um segmento de reta. Procedimentos deste tipo permitirão vencer o problema da homogeneidade das grandezas que estava presente na geometria, até a época de Viète.

Isto foi possível pela escolha de um segmento de reta arbitrário para "unidade". A partir daí, o produto de dois segmentos pôde ser interpretado como um outro segmento, e não mais necessariamente como a área de um retângulo. Este segmento produto era construído pelo procedimento acima. Apesar de construir geometricamente a solução, este método é absolutamente inovador na geometria, pois permite ultrapassar a homogeneidade das grandezas e operar com elas como se fossem números. Isto implica uma mistura entre gêneros tradicionalmente considerados distintos, a aritmética e a geometria.

Depois de construir a multiplicação de dois segmentos, Descartes analisa alguns casos de equações quadráticas, mostrando que a solução, ou seja, a incógnita, é um segmento de reta que pode ser construído. Por exemplo, para a equação $z^2 = az + b^2$, a reta incógnita z seria construída como segue (Figura 5.2).

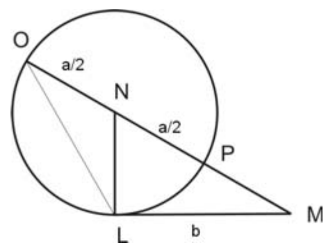


Figura 5.2

Construímos o triângulo retângulo NLM com $LM = b$ e $NL = a/2$. Queremos construir z que satisfaça a equação. Prolongamos MN até o ponto O tal que $NO = NL$ e obtemos $OM = z$. Então, $z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$.

Com efeito trace a circunferência com raio $a/2$ e centro N. Ela corta MN em P. Podemos concluir que

$$\frac{LM}{OM} = \frac{PM}{LM} \Rightarrow OM.PM = LM^2.$$

Isto porque $M\hat{L}P = L\hat{O}M$ (ângulos que determinam o mesmo arco na circunferência), logo os triângulos OLM e LPM são semelhantes. Sendo assim, se $OM = z$, $PM = z - a$, como $OM.PM = LM^2$, concluímos que $b^2 = z(z-a)$, ou $b^2 = z^2 - az$. Logo, OM, a raiz da equação, é dada por $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Descartes ignora a segunda raiz, pois ela é negativa.

Em seguida, Descartes mostra, respectivamente, como podemos construir as raízes das equações $z^2 = -az + b^2$ (notem que ele já usa $-a$, mas, como a é positivo, o sinal de menos é uma operação sobre o coeficiente positivo) e $z^2 = az - b^2$. Para resolver esta última equação, traçamos, como no exemplo anterior, um segmento NL de comprimento $a/2$ e um segmento LM de comprimento b (Figura 5.3).

No entanto, em vez de ligar M a N, traçamos MQR paralela a LN e, com centro em N, traçamos uma circunferência por L, a qual corta MQR nos

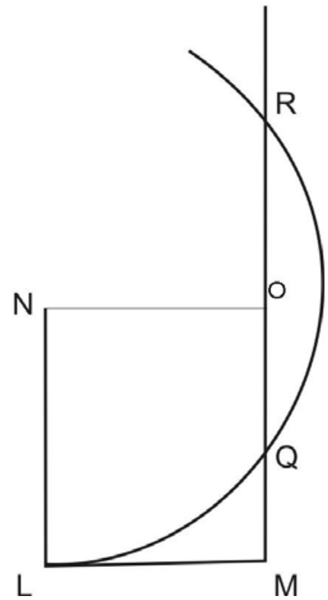


Figura 5.3

pontos Q e R. A linha z procurada é MQ ou MR, expressas respectivamente por:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

De fato, $Q\hat{L}M = L\hat{R}M$, uma vez que são ambos ângulos inscritos que determinam o mesmo arco. Como M é um ponto comum a ambos, os triângulos LRM e LQM são semelhantes. Logo, $LM/MR = MQ/LM$ e $LM^2 = MR.MQ$, do que se conclui que $RQ = 2(MR - a/2)$. Fazendo $LM = b$, se $MR = z$, temos, de $LM^2 = MR.MQ$, que $b^2 = zMQ$. Mas como $RQ = 2(MR - a/2)$, concluímos que $MQ = z - RQ$. Sendo assim, $MQ = z - 2(z - a/2)$ e $MQ = a - z$. Portanto, de $b^2 = zMQ$ obtemos que $b^2 = z(a - z)$. Logo $z = MR$. Fazendo $z = MQ$, obtemos a segunda solução. Neste caso, Descartes fornece as duas soluções, uma vez que ambas são positivas.

Para deduzir a fórmula algébrica da solução a partir da construção geométrica acima, basta observar que $LN = a/2 = NQ = NR$ (Figura 5.3).

Após a análise deste caso, Descartes acrescenta então uma observação importante: "Se o círculo descrito por N e que passa por L não corta nem toca a linha MQR, a equação não tem nenhuma raiz, de forma que podemos dizer que a construção do problema é impossível" ([43], p. 15). Sabemos hoje que o caso em que $b > a/2$ dá origem a duas raízes complexas, o que devia ser excluído.

Observe ainda que Descartes considera separadamente os seguintes tipos de equação quadrática: $z^2 = az + b^2$, $z^2 = -az + b^2$ e $z^2 = az - b^2$. Por que ele não generalizou o problema escrevendo apenas uma equação do tipo $z^2 + az + b^2 = 0$? Porque só eram considerados coeficientes positivos, uma vez que deviam estar associados a linhas construtíveis. Sendo assim, a equação $z^2 + az + b^2 = 0$ não possui raízes positivas e não foi considerada.

Ele também considerou equações cúbicas, mas sua preocupação não era resolvê-las, como fez Cardano, mas mostrar como possibilitavam construir a solução de problemas geométricos.

Ao mesmo tempo em que renovou a geometria, Descartes estava, de algum modo, ligado à tradição. Não bastava resolver equações, era preciso construir suas soluções. Seu objetivo não era propriamente algébrico, mas consistia em aplicar a álgebra para resolver problemas geométricos. Para isto, ele propõe um método que permite reduzir a resolução de problemas geométricos à resolução de uma ou mais equações.

A grande novidade da obra geométrica de Descartes é a introdução de um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas. A introdução desta ferramenta, fundamental para o projeto cartesiano, foi motivada inicialmente pelo problema de Pappus:

> Encontrar o lugar geométrico de um ponto tal que, se segmentos de reta são traçados desde este ponto até três ou quatro retas dadas, formando com elas ângulos determinados, o produto de dois destes segmentos deve ser proporcional ao produto dos outros dois (se há quatro retas) ou ao quadrado do terceiro (se há três retas).

Pappus ([147]) demonstrou que, no caso geral, a solução deve ser uma cônica e Descartes, inspirado por este matemático grego, passou a considerar o problema para mais de quatro retas, o que dará origem a curvas de maior grau. Em uma forma simplificada o problema consiste em: dadas $2n$ retas, encontrar o lugar geométrico de um ponto móvel tal que o produto de suas distâncias (não necessariamente em ângulo reto) a n das retas (em posições determinadas, com ângulos dados) é proporcional ao produto das distâncias às outras n retas. No caso de quatro retas, o lugar geométrico foi descrito por Descartes de modo generalizável para um maior número de retas.

Vejamos a solução de Descartes.

Sejam inicialmente as retas AB, AD, EF e GH, como na Figura 5.4.

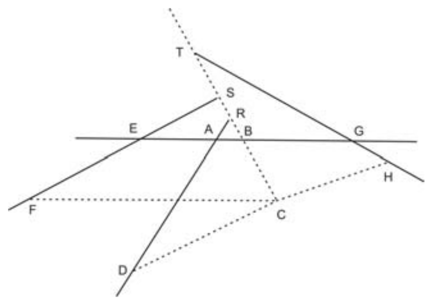


Figura 5.4

Queremos encontrar um ponto C a partir do qual possamos construir segmentos de reta CB, CD, CF e CH que façam ângulos dados CBA, CDA, CFE e CHG com as retas dadas. Além disso, um outro dado do problema é que o produto dos comprimentos de alguns destes segmentos é igual ao produto dos comprimentos dos restantes, ou pelo menos temos que estes produtos estão em uma dada razão. Por exemplo, podemos ter que o produto de CB por CH seja igual a k vezes o produto de CF por CD.

Para resolver o problema de encontrar o lugar geométrico do ponto C, Descartes propõe, primeiramente, que se suponha o problema resolvido, como na figura (o que significa que ele está usando o método analítico). Como há muitas linhas, afirma Descartes, "para simplificar o problema, considero uma das linhas dadas e uma outra a ser traçada (por exemplo, AB e BC) como linhas principais, às quais tentarei referir todas as outras. Chame o segmento da linha AB entre A e B de x e BC de y." ([43], p. 28). O que ele está fazendo é justamente criar um sistema de coordenadas no qual as linhas AB e BC são consideradas como eixos coordenados.

Se os eixos forem escolhidos de modo conveniente, o problema será bastante simplificado. Como os ângulos do triângulo ARB são conhecidos (uma vez que BC corta AB e, indiretamente, AD segundo ângulos dados, pois AB corta AD segundo um ângulo dado), a razão entre AB e BR também é conhecida e podemos dizer que AB está para BR assim como uma constante qualquer z está para uma constante b, isto é, $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$. Logo, como $AB = x$, temos $BR = \frac{bx}{z}$. Considerando que B está entre C e R (como na figura) concluímos que $CR = y + \frac{bx}{z}$. Como os ângulos do triângulo DRC são conhecidos (pois CB e CD cortam AD segundo ângulos dados), a razão entre CR e CD é dada pela razão entre a mesma constante z e uma outra constante qualquer c. Sendo assim, concluímos que $CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$. Usando procedimentos análogos, obtemos também CF e CH em função das quantidades x e y:

$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z}$$

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z}$$

(nas quais todas as letras, com exceção de x e y designam constantes dadas no problema).

O produto de dois destes comprimentos, como CF e CD por exemplo, possui portanto grau (no máximo) 2 em x e em y; o produto de três comprimentos possui grau (no máximo) 3 em x e em y, e assim por diante. Logo, como um dado do problema é uma igualdade entre produtos (a menos de uma constante) teremos uma equação com duas variáveis em cada membro. Por exemplo, se é dado no problema que $CF \times CD = k \times CH \times CB$, esta igualdade será dada pela equação:

$$\frac{ezy + dek + dex}{z} \times \frac{cyz + bcx}{z^2} = k\frac{gzy + fgl - fgx}{z} \times y.$$

Trata-se de uma equação do segundo grau em x e y. Atribuindo, portanto, um valor qualquer a x (ou a y), podemos encontrar o valor da outra quantidade por meio de uma equação do segundo grau. Por exemplo, atribuindo valores a y teremos equações do tipo $x^2 = \pm ax \pm b^2$, para as quais a solução pode ser construída com régua e compasso (graças aos métodos que ele havia deduzido para a construção de raízes de equações quadráticas). Tomando sucessivamente infinitos valores para y, obtemos infinitos valores para x e podemos desenhar uma curva que determinará os infinitos valores que podem ser atribuídos ao ponto C.

Observamos que a utilização de um sistema de coordenadas, passo fundamental na invenção da geometria analítica, está associada a um problema indeterminado, ou seja, com duas quantidades desconhecidas (chamadas mais tarde de "variáveis"). É importante notar ainda que, em Descartes, este sistema não empregava necessariamente um sistema de eixos ortogonais, pois, para cada problema, devia ser escolhido o sistema mais conveniente.

Para cinco retas, o método funciona da mesma maneira, para mostrar que a solução é uma cúbica. Descartes não se preocupou em descrever exatamente qual é a curva que resolve o problema em uma situação específica, mas em mostrar que, mesmo aumentando o número de retas, o seu método pode ser generalizado para encontrar curvas, de diferentes graus, que resolvem o problema.

Observamos que o papel das coordenadas na geometria de Descartes participa do objetivo de introduzir métodos algébricos na geometria para resolver problemas de construção que, mesmo mais sofisticados, não escapam à natureza essencial da geometria grega, dedicada a problemas deste tipo. Resolver problemas sobre os quais os mais brilhantes geômetras gregos se debruçaram era motivo de glória para o espírito vaidoso que caracterizava este que é considerado o pai da geometria analítica. Em relação ao método usado na resolução do problema de Pappus, Descartes chega a dizer que ele está para a geometria antiga como a retórica de Cícero para o ABC das crianças.

Exercícios

5.1. Sejam a e b os comprimentos de dois segmentos. Faça uma construção para calcular geometricamente o quociente a/b.

5.2. Dado um segmento de reta a, construa o segmento de reta $\sqrt{a}$.

5.3. Descartes concebeu um compasso especial, o ***mesolábio*** para construir meias proporcionais entre dois comprimentos dados a e b, ou seja, achar comprimentos x e y tais que $a : x :: x : y :: y : b$.

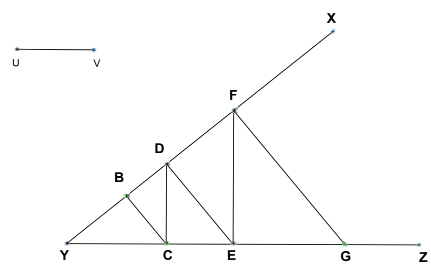


Figura 5.5

A reta YZ é fixa, e YX gira em torno de Y. Seja $YB = a$. De B, levante a perpendicular a YX, a qual corta YZ em C. Por C, levante a perpendicular a YZ, a qual intercepta YX em D. Finalmente, por este último ponto, levante a perpendicular a YD, e seja E seu ponto de intersecção com YZ.

Faça YX girar, até que $DE = b$. Demonstre que, então, YC e YD são duas meias proporcionais entre a e b.

5.4. Demonstre que o ***mesolábio*** de Descartes permite construir n meias proporcionais entre dois comprimentos dados.

5.5. Descartes afirma que a situação mais simples do problema de Pappus, no caso de termos cinco retas l_1, l_2, l_3, l_4 e l_5, é quando as quatro primeiras são paralelas e equidistantes entre si e a quinta, l_5 é perpendicular a esse feixe de paralelas. Se d_i é a distância do ponto P à reta l_i, devemos achar o lugar geométrico dos pontos P tais que

$$ad_2d_5 = d_1d_2d_4.$$

Escolha os eixos convenientemente e prove que a equação cartesiana do lugar geométrico é

$$axy = y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3.$$

5.6. Com um aplicativo de álgebra simbólica (por exemplo o programa gratuito "Winplot"), trace o gráfico da curva dada pela equação do item 5.5, para alguns valores de a, ou seja, o lugar geométrico que é a solução deste caso do problema de Pappus.

5.3 Fermat e os lugares geométricos

Já mencionamos que Fermat foi profundamente influenciado pelas traduções das obras gregas, em particular a de Apolônio. Logo, ele estava suficientemente familiarizado com o fato de que, dada uma curva, há sempre uma relação entre duas quantidades indeterminadas (sintoma da curva). O objetivo inicial de Fermat será exprimir, na linguagem algébrica proposta por Viète os problemas geométricos tratados por Apolônio. Seu principal interesse era, portanto, realizar um estudo geral dos lugares geométricos.

Sua primeira obra, denominada *Ad locos planos et solidos isagoge* (*Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*), foi escrita provavelmente em 1636 e é contemporânea do *Geometria* de Descartes. No entanto, ao que parece, estas obras não se influenciaram mutuamente. Apesar de ambas introduzirem coordenadas para tratar de problemas geométricos, os objetivos de Descartes e Fermat eram distintos.

A geometria analítica tal como a conhecemos atualmente consiste em duas associações recíprocas: (i) dado um lugar geométrico, encontrar a equação que seus pontos satisfazem; e (ii) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. Descartes estudou o primeiro problema, mas Fermat foi pioneiro em atacar o segundo. Logo no princípio de sua *Introdução*, enuncia: "Sempre que em uma equação final, duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva".

Exemplo 5.1. *Vejamos como Fermat mostra, usando a notação de Viète, que uma equação do primeiro grau é satisfeita por pontos que estão em linha reta.*

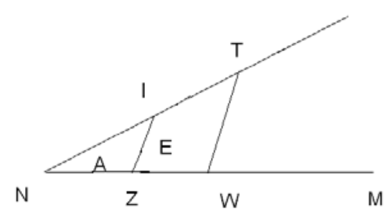


Figura 5.6

Sejam NZM uma reta, com um ponto N fixo, e NZ igual à quantidade desconhecida A, e ZI (a reta traçada para formar o ângulo NZI) a outra quantidade desconhecida E (Figura 5.6). Se D vezes A é igual a B vezes E, o ponto I descreve uma reta.

Para chegar a esta conclusão, basta observar que $D \cdot A = B \cdot E$ implica que $B : D = A : E$. Mas a razão $B : D$ é conhecida, pois só envolve quantidades conhecidas. Logo, a razão $A : E$ entre as quantidades desconhecidas também será determinada, assim como o triângulo NZI. Sendo assim, NI é uma reta (dada "em posição", como diz Fermat).

Observamos que ele utiliza apenas um eixo coordenado e a reta é gerada pela extremidade I do segmento variável ZI quando Z se move ao longo do eixo. As coordenadas ZN e ZI sã o soluções da equação $D \cdot A = B \cdot E$.

Em seguida, ele passa a estudar as equações de segundo grau. Para cada caso, Fermat mostra que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica. Ele conclui que, se os eixos coordenados forem dados em posição e os coeficientes da equação forem dados em magnitude, os parâmetros que definem a cônica (o vértice e o eixo) serão dados em posição e em magnitude. Ou seja, a cônica está definida e seus pontos podem ser traçados (apesar da construção não ser descrita).

Dada uma hipérbole, por exemplo, os gregos já haviam deduzido a propriedade assintótica dos seus pontos, enunciada em termos de proporções. Usando a álgebra de Viète, Fermat escrevia a equação desta cônica e aplicava o procedimento inverso: dada uma certa propriedade, expressa por uma equação, deduzir a curva que a satisfaz.

Antes de Descartes e Fermat poucos matemáticos, além de Arquimedes e Omar Khayam, haviam trabalhado sobre a construção de problemas sólidos usando cônicas. Viète tinha acrescentado o axioma da *neusis* à sua geometria justamente para lidar com a construção de tais problemas. Mais tarde, Fermat utilizou as técnicas algébricas para definir cônicas e estudar suas interseções aplicando-as à resolução de problemas sólidos.

À sua *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, Fermat acrescentou um apêndice sobre a "solução de problemas sólidos por lugares geométricos". Nestes problemas, dada uma equação de grau três ou quatro em uma variável, era preciso determinar o valor da incógnita x. Para encontrá-lo, Fermat escrevia duas equações de segundo grau em duas variáveis x e y, tomados como coordenadas dos pontos de interseção de cônicas. Um dos exemplos em que este método pode ser aplicado é o da construção de duas meias proporcionais, ou seja, dados os segmentos a e b, encontrar x e y tais que a:x:: x:y:: y:b.

Exemplo 5.2. *Método de Fermat para achar duas meias proporcionais entre os segmentos a e b:*

Para obtermos a meia proporcional, x deve satisfazer à equação do terceiro grau $x^3 = a^2b$, e podemos escrever

1. $x^2 = ay$, uma parábola (na verdade $x^2 = y$);

2. $xy = ab$, uma hipérbole.

Em seguida, supondo o problema resolvido, ou seja, x dado, encontramos efetivamente x, solução da equação, por meio da interseção das cônicas (Veja a Figura 5.7).

1. considerando as duas equações (1) e (2) em x e y que deram origem à equação de terceiro grau, pode-se concluir que o problema é resolvido por uma hipérbole e por uma parábola (cujas equações haviam sido estudadas na introdução);

2. considerando eixos perpendiculares OX e OY, fazemos $x = OA$ $y = AB$;

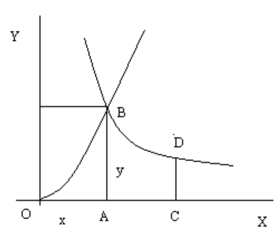


Figura 5.7

3. da equação (1), temos que B está em uma parábola com vértice em O e eixo OY;

4. tomamos um ponto C arbitrário em OX e desenhamos uma perpendicular CD a este eixo tal que $CD \times OC = ab$. Desenhamos, em seguida, uma hipérbole pelo ponto D com assíntotas OX e OY. Esta hipérbole contém todos os pontos tais que o produto da abscissa pela ordenada é ab. Assim, pela equação (2), sabemos que esta hipérbole passa pelo ponto B;

5. o ponto B pertence, portanto, à interseção da parábola com a hipérbole e satisfaz às equações (1) e (2), logo sua abscissa e sua ordenada são as meias proporcionais requeridas.

Fermat constrói deste modo a solução da equação cúbica obtida a partir do problema das duas meias proporcionais. O método pode ser assim resumido: dada uma equação cúbica com uma incógnita, obtém-se duas equações quadráticas com duas "incógnitas" que correspondem a cônicas e resolve-se o problema construindo a intersecção destas cônicas.

Podemos usar o mesmo procedimento para um problema qualquer que recai em uma equação do terceiro ou do quarto grau, como ele mostra no exemplo abaixo:

Exemplo 5.3. *Dado um problema sólido reduzido a uma equação de terceiro ou quarto grau em x, encontrar as equações de dois lugares geométricos, planos ou sólidos, cujas interseções determinam x.*

Solução:

1. assumimos que a equação pode ser reduzida, pela eliminação do termo de terceiro grau, à forma $x^4 = a + bx + cx^2$;

2. adicionamos $-2dx^2 + d^2$ a cada um dos lados (d um número qualquer a ser ajustado posteriormente), obtendo $(x^2 - d)^2 = a + bx + (c - 2d)x^2 + d^2$;

3. igualamos cada lado a e^2y^2 (e um número qualquer a ser ajustado posteriormente), obtendo as duas equações do segundo grau em x e y: $x^2 - d = ey$ e $a + bx + d^2 = (2d - c)x^2 + e^2y^2$;

4. a primeira equação representa uma parábola e a segunda pode representar um círculo se tomamos d tal que $2d - c > 0$ e se tomamos e tal que $e^2 = 2d - c$;

5. o problema é resolvido desenhando-se a parábola e o círculo.

Fermat criou assim um método para resolver uma equação de grau três ou quatro utilizando intersecções de cônicas. Com uma notação próxima de Viète, ele combina os objetivos de investigar problemas clássicos de lugares geométricos e de construir soluções de equações cúbicas e quadráticas pela interseção de cônicas.

Descartes deduzia equações para resolver problemas geométricos e não estava tão interessado em estudar as equações por si mesmas. Já Fermat não se debruçou sobre as questões de legitimidade das construções geométricas que motivaram Descartes. Ele aceitava a análise algébrica como tópico matemático autônomo, independente da geometria, o que não era uma atitude comum na sua época.

Exercícios

5.7. Resolva, utilizando os métodos de Fermat, o seguinte problema que ele propôs e resolveu: "Dividir a reta AC pelo ponto E, de tal maneira que o produto do quadrado de AE por EC seja máximo."

5.8. A *Cissóide de Diocles*, estudada desde a antiguidade grega, é a curva definida como segue (Veja a Figura 5.8):

Considere a circunferência de diâmetro OA e sua tangente por A. Seja C um ponto arbitrário sobre a tangente. Seja B o ponto em que o segmento OC corta a circunferência. A cissóide é o lugar geométrico dos pontos P tais que $OP = BC$.

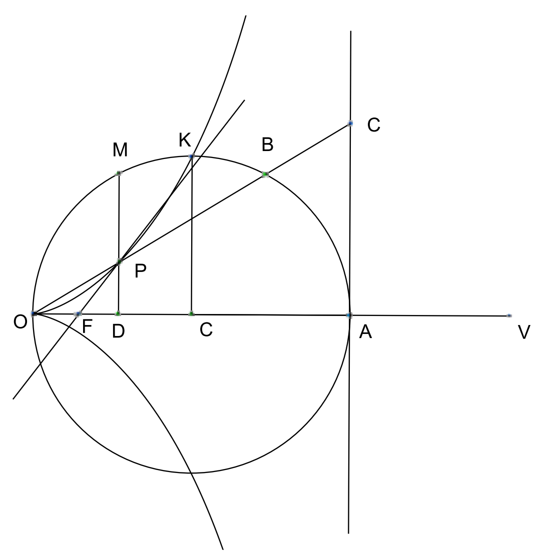


Figura 5.8

1. Sejam M e D os pontos em que a paralela à tangente por A cortam, respectivamente, a circunferência e o diâmetro OA. Demonstre, como fez Fermat, usando a definição da cissóide, que

$$\frac{MD}{DO} = \frac{DO}{DP}.$$

2. Empregue o método de Fermat para provar que a tangente à cissóide pelo ponto P pode ser determinada da seguinte maneira, enunciada por Fermat:

   Seja K o ponto em que a cissóide intercepta a circunferência e C o pé da perpendicular por K ao diâmetro. Sobre o prolongamento do diâmetro, tome V tal que $VA = AC$. Divida $AD \times DG$ por VD. Seja DF o quociente. A reta que passa por F e por P é a tangente pedida.

5.4 O estudo das curvas e as primeiras noções de função

O conceito de função surgiu bem depois das técnicas de derivação introduzidas por Leibniz e Newton. Começaremos, pois, com algumas noções que antecedem a de função, passando em seguida ao advento do cálculo.

Atualmente, quando pensamos no conceito de função, algumas ideias nos vêm à mente. Por exemplo, a ideia de uma correspondência. Deste ponto de vista, poderíamos dizer que as tabelas babilônias e egípcias já pressupunham, de alguma forma, a ideia de função, uma vez que se tratavam justamente de registros de correspondências (entre um número e o resultado das operações que envolvem este número). As tabelas astronômicas de Ptolomeu, similares às nossas tabelas de senos, também estabeleciam correspondências que consideramos hoje de natureza funcional.

A ênfase sobre a ideia de correspondência fez com que alguns historiadores da Matemática vissem um antecedente desta noção nas tabelas babilônicas e egípcias, ou ainda nas tabelas usadas pela astrônomia grega e na Matemática antiga em geral. Obviamente, estes povos não propuseram uma noção de função para compreender suas tabelas e esta associação não parece ajudar a entender a natureza da Matemática que praticavam.

Além disso, diversas ideias fundamentais no conceito que temos hoje de função não estavam presentes nestes exemplos, como é o caso da ideia de de variação. A noção de variável só foi introduzida formalmente no século XIX, mas antes da formalização deste conceito, a noção de variação estava presente na física matemática dos séculos XVI e XVII. O estudo da variação dos fenômenos naturais em relação ao tempo, por meio de leis matemáticas, se deve em grande parte ao desenvolvimento da física após Galileu. Esta relação era analisada, contudo, por meio de proporções geométricas. Em seguida, passou-se a associar o movimento a uma curva, que pode ser expressa por meio de uma equação. Vimos que Descartes trabalhava com equações indeterminadas, nas quais tomando-se infinitos valores para x, é possível encontrar infinitos valores para y. Está presente aqui a ideia de que uma equação em x e y é um modo de representar uma dependência entre duas quantidades variáveis, de modo que se possa calcular os valores de uma delas a partir dos valores da outra. As quantidades ocupam um lugar geométrico representado por uma curva que pode não respeitar a restrição atual de que, a cada valor da abscissa, corresponda apenas uma ordenada. Uma circunferência, por exemplo, é um exemplo de curva que, hoje em dia, não seria considerada função. Esta característica não importa para nós no momento, uma vez que estamos falando somente de relações entre variáveis que estão sobre uma curva, o que antecede o conceito de função propriamente dito.

Desde Viète, a representação simbólica de uma quantidade desconhecida permitia exprimir estas relações por fórmulas algébricas. Mas este matemático se dedicava, principalmente, à solução de problemas determinados, nos quais não se coloca o problema de se relacionar duas grandezas que variam.

Diferença entre uma equação determinada e uma equação indeterminada.
A quantidade desconhecida assume um valor dado quando resolvemos a equação, ou seja, ela é apenas provisoriamente desconhecida; trata-se de uma quantidade que possui um valor determinado que está, em uma certa equação, desconhecido e resolvemos a equação com o objetivo de encontrá-la. Mas há uma grande diferença entre equações determinadas, que possuem uma incógnita, e as indeterminadas, que podem possuir duas ou mais incógnitas. Como o próprio nome diz, nessas equações as quantidades estão "indeterminadas", ou seja, não encontro nunca apenas um valor para uma quantidade desconhecida, mas uma infinidade de valores que "variam" de acordo com os valores de outra quantidade.

Na análise de equações indeterminadas, realizada por Descartes, introduz-se a ideia de que uma equação em x e y é um modo de representar uma dependência entre duas quantidades variáveis, de modo que se possam calcular os valores de uma delas a partir dos valores da outra. Podemos dizer, portanto, que nas curvas estudadas por Descartes a relação entre as quantidades indeterminadas é de tipo funcional, uma quantidade sendo associada à outra por meio de uma equação. As quantidades ocupam um lugar geométrico representado por uma curva que pode não respeitar a restrição atual de que, a cada valor da abscissa, corresponda apenas uma ordenada. Uma circunferência, por exemplo, é um exemplo de curva que, hoje em dia, não seria considerada uma função. Esta característica não importa para nós no momento, uma vez que estamos falando somente de relações entre variáveis que estão sobre uma curva, o que antecede o conceito de função propriamente dito.

Ainda que os tipos de relação entre variáveis não fossem tematizados na época, havia uma concepção implícita de que estas relações eram dadas por expressões analíticas de curvas algébricas ou por meio de séries infinitas. Diversos exemplos demandavam o uso de séries infinitas, o que levou a uma ampliação do universo de objetos considerados centrais na Matemática da época. As curvas constituiam o principal objeto da Matemática neste momento e mencionaremos dois problemas paradigmáticos, associados ao estudo das curvas.

5.4.1 Aplicações da nova geometria: o cálculo de tangentes

No livro III dos *Elementos* de Euclides encontramos apenas a definição da tangente a um círculo: uma reta que encontra o círculo, mas que pode ser prolongada sem voltar a cortá-lo. A proposição III.16 demonstra que a reta perpendicular ao diâmetro do círculo traçada por um ponto no círculo será exterior ao círculo. Além disso, não é possível intercalar uma outra reta deste tipo entre a reta tangente e o círculo.

Na antiguidade, o problema de encontrar tangentes a curvas devia ser tratado de modo puramente geométrico. No século XVII, a importância de se determinar tangentes a curvas passou a ser justificada pelo estudo do movimento, uma vez que a tangente a uma curva fornece a direção do vetor velocidade de um móvel que percorre esta curva. Mas para Descartes, não devia ser permitido empregar um movimento dependente do tempo para encontrar a tangente a uma curva e, na *Geometria*, ele propõe o seguinte método algébrico.

Deve-se traçar um círculo, com centro O sobre um eixo coordenado, interceptando uma curva dada por uma equação. Em geral, este círculo corta a curva em dois pontos C e E e o método se resume a encontrar qual deve ser o centro do círculo de modo que estes dois pontos se reduzam a um só.

Suponhamos que a equação da curva da qual queremos encontrar a tan-

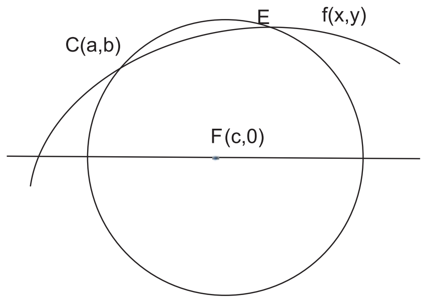


Figura 5.9

gente seja dada por $f(x,y) = 0$ e que o ponto C no qual queremos encontrar a tangente tenha coordenadas (a,b) (Figura 5.9). Tomemos outro ponto F sobre o eixo coordenado, com coordenadas $(c,0)$. A equação da circunferência com centro em F passando por C é $(x-c)^2+y^2 = (a-c)^2+b^2$. Se eliminamos y entre esta equação e a equação $f(x,y) = 0$ temos uma equação em x que determina as abscissas dos pontos onde o círculo corta a referida curva.

Determinamos em seguida o valor de c tal que esta equação em x tenha raízes iguais. O círculo com centro no ponto $(c,0)$ toca a curva apenas no ponto C e a tangente à curva será a tangente ao círculo. Logo, quando este círculo é conhecido podemos construir a tangente.

Exemplo 5.4. *Usaremos este método para encontrar a tangente à parábola* $y^2 = x$ *no ponto* $(1,1)$.

O raio da circunferência com centro no ponto $(c,0)$ seria $r^2 = (1-c)^2+1^2$ e sua equação seria, portanto, $(x-c)^2+y^2 = (1-c)^2+1$. Substituindo $y^2 = x$ temos a equação $x^2+(1-2c)x+2c-2 = 0$. Para que esta equação tenha apenas uma raiz, fazemos $(1-2c)^2-4(2c-2) = 4c^2-12c+9 = 0$ e obtemos $c = \frac{3}{2}$. Logo, o ponto $\left(\frac{3}{2},0\right)$ é o centro da circunferência procurada que também passa pelo ponto $(1,1)$. O coeficiente angular da tangente, portanto, deve ser $\frac{1}{2}$, e esta reta tangente, que passa pelo ponto $(1,1)$ e por um ponto (x,y) qualquer, possui equação $y = \frac{x+1}{2}$.

Fermat também apresenta uma maneira de encontrar tangentes em seu *Método para a procura do máximo e do mínimo*, publicado em 1637, mesmo ano da geometria de Descartes ([60], tome III, pp. 122-123).

Seja a parábola BDN, de vértice D e eixo AD (Figura 5.10). Se B é um ponto sobre a parábola, traço por este ponto uma perpendicular ao eixo, passando pelo ponto C. Em seguida, traçamos uma reta BE tangente à parábola cortando o eixo no ponto E (temos B e E e é fácil determinar uma reta por dois pontos). Resta determinar, portanto, a posição do ponto E.

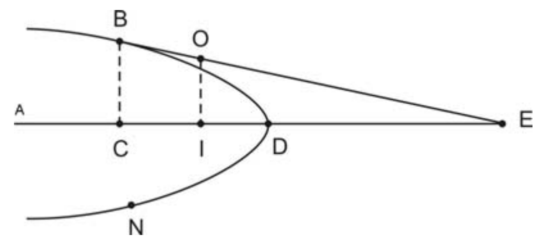


Figura 5.10

Tomemos um ponto O qualquer sobre a reta BE. Traçamos, respectivamente, as ordenadas OI do ponto O e BC do ponto B. Se o ponto O estivesse sobre a parábola, pelas propriedades que vimos no Capítulo 4, teríamos que $DC/DI = BC^2/OI^2$. Como o ponto O é exterior à parábola, temos que $DC/DI > BC^2/OI^2$. Por semelhança de triângulos, $BC^2/OI^2 = CE^2/IE^2$, logo $DC/DI > CE^2/IE^2$. Mas o ponto B é dado, logo conhecemos a ordenada BC, o ponto C e DC. Assim, podemos considerar que $DC = d$ e fazemos $CI = e$ e $CE = a$, em que CE é o que queremos determinar e CI é uma quantidade a ser ajustada. Obtemos assim a desigualdade expressa por $d/(d-e) > a^2/(a^2+e^2-2ae)$. Fazendo o produto dos meios pelos extremos obtemos que $da^2+de^2-2dae > da^2-a^2e$.

O ponto central do método de Fermat está na aplicação de um procedimento, que ele atribui a Diofanto, chamado ***adequação***, que significa estabelecer uma *equação*, ou uma *igualdade*, aproximada. Ele obtém, portanto, uma igualdade aproximada a partir da desigualdade acima.

Retirando os termos comuns e dividindo todos os termos por e temos que $de + a^2 \approx 2da$. Supondo que O é suficientemente próximo de B e está sobre a parábola, podemos desprezar o termo de (a desigualdade $DC/DI > BC^2/OI^2$ torna-se uma igualdade). Podemos concluir então que $a^2 = 2da$, ou $a = 2d$.

Este método é característico do *cálculo infinitesimal* que será desenvolvido alguns anos mais tarde por Leibniz e Newton. Podemos observar que o método de Descartes só funciona para curvas algébricas (as únicas que lhe interessavam), ao passo que o método de Fermat pode funcionar para qualquer curva, desde que justificado pelo cálculo infinitesimal.

Exercícios

5.9. Demonstre a proposição III.16 dos *Elementos* de Euclides:

"A reta que faz ângulo reto com o diâmetro de um círculo a partir de uma das extremidades é exterior ao círculo, e na região compreendida entre a reta e o círculo é impossível intercalar outra reta; além disso, por um lado o ângulo do semi-círculo é maior, e por outro lado o ângulo que sobra é menor, do que qualquer ângulo retilíneo agudo."

Segundo Euclides, o ângulo entre duas curvas é a inclinação de uma relativamente à outra (Definição 8, Livro I). No caso em que as curvas são retas, o ângulo é chamado de ***retilíneo*** Este resultado mostra que os gregos sabiam que o conceito geral de ângulo é complexo. Esta proposição mostra que não é possível estabelecer a razão entre dois ângulos (Definição 4, Livro V).

5.10. No exemplo citado, aplicamos o método de Descartes à parábola de equação $y^2 = x$. Usando o mesmo procedimento, tente calcular a tangente em um ponto da parábola $x^2 = y$. O que aconteceria se quiséssemos calcular a tangente a uma função de grau 3?

5.11. Empregue o método de Fermat para achar a tangente à elipse de equação $x^2/16 + y^2/9 = 1$, no ponto de coordenadas $(2, 3\sqrt{3}/2)$.

5.4.2 O cálculo de áreas por meio de decomposições infinitas

Cavalieri e Pascal, no século XVII, calculavam áreas usando a decomposição de uma figura. Cavalieri argumentava que uma linha é composta de pontos, assim como um cordão é composto de contas; um plano é feito de linhas, assim como uma roupa, de fios; e um sólido é composto de planos, assim como um livro, de páginas. A área da figura seria a soma de um número indefinido de segmentos de reta paralelos, e o volume seria a soma de um número indefinido de áreas paralelas. Estes seriam, respectivamente, os indivisíveis de área e de volume.

Uma consequência deste método é que, se dois sólidos têm a mesma altura e se as seções obtidas por cortes paralelos às suas bases estão, sempre, na mesma razão, os volumes dos sólidos estão um para o outro nesta mesma razão. Usando este princípio, Cavalieri demonstrou que o volume do cone é 1/3 do volume do cilindro circunscrito. Após a publicação da *Geometria* de Descartes, Cavalieri também usa coordenadas para calcular, por seu novo método, a quadratura da parábola. A praticidade do método de Cavalieri fez com ele que fosse amplamente utilizado em sua época. Tratava-se de uma maneira eficaz de evitar os procedimentos infinitos indiretos usados pelos gregos. Por sua vez, durante a primeira metade do século XVII, Fermat, Roberval e Pascal utilizam o método dos indivisíveis, concebendo, entretanto, a área como uma soma de retângulos infinitamente pequenos, em vez de uma soma de linhas.

Neste período, surge uma nova maneira de calcular áreas e volumes, distinta do método de exaustão, que expusemos no Capítulo 3. Ao passo que o procedimento usado pelos gregos empregava diferentes tipos de figuras retilíneas para aproximar uma área curvilínea, como os triângulos usados na quadratura da parábola, fundava-se agora um procedimento sistemático que usava retângulos. A vantagem é que a aproximação por retângulos "infinitamente" finos serve para qualquer figura curvilínea. Um exemplo típico deste tipo de aproximação é fornecido por Fermat e Pascal.

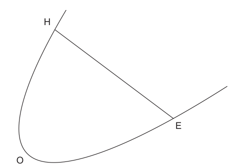


Figura 5.11

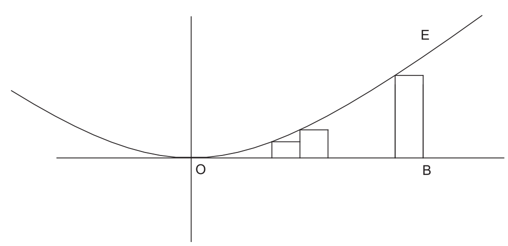


Figura 5.12

Um problema importante, que já tinha sido atacado por Arquimedes, como vimos no Capítulo 3, era o de achar a *quadratura da parábola*, ou seja, dada a parábola da Figura 5.11, calcular a área limitada pela corda HE e pelo arco de parábola situado entre os pontos H e E.

Se O é o vértice da parábola, podemos colocá-lo na origem de um sistema de coordenadas cujo eixo dos y seja o eixo da parábola. Neste sistema, a equação da parábola será da forma $y = kx^2$. Suponha que a corda HE é paralela ao eixo dos x, $k = 1$ (ou seja, a equação da parábola é então $y = x^2$) e que as coordenadas do ponto E são (b, b^2).

É fácil ver que para efetuar a quadratura deste setor parabólico, é suficiente calcular a área entre o eixo dos x, a parábola, e a reta vertical que passa por E. Entre O e B marcamos n pontos equidistantes. Seja $d = \frac{b}{n}$ e construamos os retângulos com base D, como mostrado na Figura 5.12. As bases destes retângulos medem sempre d e suas alturas, de acordo com a equação da parábola, serão dadas respectivamente por d^2, $4d^2$, $9d^2$, $\ldots$ n^2d^2. Para encontrar a área, somam-se as áreas destes retângulos obtendo:

$$S = d^3 + 4d^3 + 9d^3 + \cdots + n^2d^3 = d^3(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

Motivados pela resolução de problemas deste tipo, Pascal e Fermat já haviam calculado a soma das m-ésimas potências dos n primeiros números naturais. Logo, a soma dos termos entre parênteses podia ser substituída por

$$\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Mas d é obtido dividindo-se OB por n, logo a soma S será dada por

$$d^3\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = OB^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).$$

Quando o número de retângulos aumenta, os dois últimos termos podem ser desprezados. Assim, a soma das áreas dos retângulos será

$$S = \frac{OB^3}{3} = \frac{x^3}{3}.$$

Observamos que este será justamente o resultado encontrado quando integramos, pelos procedimentos que conhecemos atualmente, a função que define a parábola.

Há uma diferença fundamental entre este método e os processos usados pelos gregos, pois aqui não se usa nenhuma prova indireta para se chegar ao resultado final. O número de retângulos cresce arbitrariamente, ou, como dizemos hoje, ***tende para o infinito***. Toma-se o limite da soma quando n tende para o infinito, embora este procedimento de passar ao limite não fosse explicitado, nem considerado rigoroso, nesta época. Além disso, o resultado do cálculo da área é uma expressão analítica, e não outra área (como era o caso dos métodos gregos de que tratamos no Capítulo 2).

É fácil observar que este método se estende facilmente para outras curvas, desde que tenhamos uma expressão analítica pela qual possamos calcular as alturas dos retângulos. Para isto, era preciso conhecer a soma das m-ésimas potências dos n primeiros números naturais. Por volta de 1636, Fermat já sabia que, para n racional e diferente de -1, a área sob o gráfico de $y = x^n$ entre dois pontos O e B (situado a uma distância a de O) é dada por $\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Os métodos analíticos de Descartes e Fermat motivaram o estudo das propriedades aritméticas de séries infinitas na Inglaterra, sobretudo por John Wallis (1616-1703) e James Gregory (1638-1675). O primeiro é o responsável pela introdução do símbolo ∞ para designar o infinito e utilizou o método dos indivisíveis para fazer diversas quadraturas. Um de seus resultados mais importantes é obtido a partir da tentativa de calcular analiticamente a área do círculo, o que permite obter uma boa aproximação para π. Apesar das restrições em relação à legitimidade dos métodos infinitesimais, eles permitiam resolver um grande número de problemas, como o de encontrar a tangente a uma curva, calcular quadraturas ou retificar curvas. Poderíamos citar ainda os nomes de Isaac Barrow e Christian Huygens, que tiveram grande influência, respectivamente, sobre Newton e Leibniz.

Antes das definições formais de função e de limite, a derivada era sempre a derivada de uma curva e, portanto, se identificava à tangente (como melhor aproximação local da curva por uma reta). O interesse por esta questão foi suscitado por dois desenvolvimentos paralelos: o movimento passou a ser representado por curvas; e estas curvas passaram a ser expressas por equações. Sendo assim, as equações passam a descrever movimentos e as tangentes às curvas passam a representar a velocidade do movimento. As tangentes deixam de ser definidas por propriedades geométricas globais (reta que toca a curva em apenas um ponto) e passam a ser definidas localmente de modo dinâmico (reta que aproxima localmente a curva). É a partir daí que o problema de encontrar a velocidade de um corpo em um determinado instante poderá ser visto como o equivalente do problema matemático de se encontrar a tangente a uma determinada curva descrita algebricamente. Esta associação será uma das motivações para o surgimento do cálculo infinitesimal. No entanto, o problema de achar a tangente a uma curva e o problema de encontrar taxas de variação ainda eram estudados separadamente.

Veremos adiante algumas características do cálculo desenvolvido paralelamente por Leibniz e Newton. Ao passo que o cálculo de Newton estava intimamente ligado ao estudo de quantidades variáveis com o tempo, o cálculo de Leibniz considera quantidades que variam em uma sequência de valores infinitamente próximos um do outro, daí a estreita relação de seus procedimentos com o estudo de séries. Assim, ao passo que o conceito fundamental do cálculo newtoniano é o de fluxão, que pode ser traduzido como velocidade ou taxa de variação de uma quantidade em relação ao tempo, o conceito fundamental do cálculo leibniziano é o de diferencial, que é uma diferença infinitamente pequena entre valores sucessivos de uma série.

Exercícios

5.12. O seguinte problema é geralmente considerado difícil por alunos universitários, e resolvido, nos cursos de cálculo, usando integração. Em verdade, o problema parece ter sido resolvido, a primeira vez, por Evangelista Torricelli (1608 - 1647), contemporâneo de Cavalieri. Resolva o problema usando o princípio de Cavalieri.

Problema: São dadas duas superfícies cilíndricas circulares, com raios iguais, e cujas diretrizes se cortam em ângulo reto. Calcule o volume do sólido formado pela intersecção das duas superfícies.

(Sugestão: Inscreva uma esfera no sólido formado pela intersecção dos dois cilindros. Cortando o sólido por planos paralelos ao plano definido pelas duas diretrizes, obtemos círculos de raio r, de área πr^2, e quadrados de área $4r^2$. Assim, a razão entre duas seções feitas pelo mesmo plano é $4r^2/(\pi r^2)$.)

5.13. Calcule a área da elipse usando o princípio de Cavalieri.

(Sugestão: Considere a elipse e o círculo de equações, respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Corte o círculo e a elipse por retas paralelas ao eixo dos y e veja qual a razão das cordas obtidas.

5.14. Calcule, usando o princípio de Cavalieri, o volume de uma esfera.

5.15. Usando o procedimento para calcular áreas sob gráficos de curvas descrito acima, já empregado por Pascal e Fermat, tente calcular a área sob uma curva de grau 3 entre dois pontos dados.

5.5 O Cálculo de Leibniz

Em seu livro *Historia et Origo Calculi Differentialis*, Leibniz afirma que sua primeira inspiração para a invenção do cálculo foi tirada do *Tratado dos senos do quarto de círculo*, de Pascal. O método exposto nesta obra é usado pelo autor para demonstrar um resultado sobre quadraturas, mas Leibniz extrai dele o *triângulo característico*, uma ideia bem mais geral, que será usada muitas vezes em seus trabalhos.

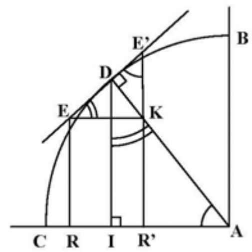


Figura 5.13

Traçamos um quarto de círculo ABC (Figura 5.13) e uma tangente EE' em um ponto D. Em seguida, desenhamos uma perpendicular a AC e marcamos o ponto I de interseção. Por E, traçamos EK paralela a AC e por E', traçamos $E'K$ paralela a DI.

Pascal já havia observado que o triângulo DIA é semelhante a EKE', pois $E\hat{D}I = \frac{\pi}{2} - A\hat{D}I = I\hat{A}D$, logo $D\hat{E}K = I\hat{D}A$ e $E\hat{E}'K = I\hat{A}D$ (isto vale para a circunferência porque a tangente EE' é perpendicular ao raio DA). Como este resultado independe das posições de E e de E', ele permanece válido se fizermos com que E e E' se aproximem muito de D. Leibniz afirma, então, que Pascal não enxergou a relevância da semelhança de triângulos que ele próprio tinha demonstrado, pois ela permite diminuir a distância entre E e E', até que não possamos mais atribuir-lhe um valor. Ainda assim, ou seja, quando esta grandeza (a distância) não é "atribuível", o triângulo pode ser determinado pela sua semelhança com o triângulo DIA que, ele, é "atribuível". Há uma relação que se conserva no triângulo EKE' na passagem do finito ao infinitesimal, que é justamente a sua semelhança ao triângulo DIA.

O argumento acima só é válido para a circunferência, mas Leibniz fornece um método análogo que é válido em um caso mais geral. Podemos tratar o triângulo não atribuível constituído por um pedaço da tangente como sendo o elemento característico de uma curva, designado como triângulo característico (análogo ao triângulo EKE').

Fazemos $\Delta y = E'K$ e $\Delta x = RR'$ e este método exprime analiticamente todos os elementos do problema fazendo com que a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se torne uma relação infinitesimal $\frac{dy}{dx}$ (grandezas do triângulo característico).

Os artigos de Leibniz sobre o cálculo foram publicados a partir de 1684 em um periódico científico da época chamado *Acta Eruditorum*. Um de seus trabalhos mais importantes nesta revista introduz um novo método para encontrar máximos e mínimos, utilizando o cálculo de tangentes por meio do do triângulo característico.

Considere a Figura 5.14, na qual temos uma curva e uma tangente a esta curva no ponto M.

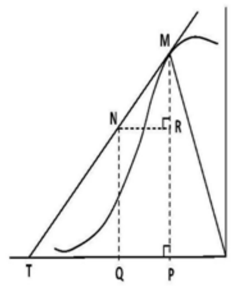


Figura 5.14

Vejamos o método utilizado para encontrar a tangente (que podemos comparar com o de Fermat). Traçando um segmento NR paralelamente ao eixo das abscissas, obtemos um triângulo retângulo NMR semelhante a TMP formado pela ordenada PM, pela subtangente[1] TP e pelo comprimento da tangente TM. O ponto T não é fixo, ou seja, não é um ponto específico da curva. Este ponto é marcado de modo que TM seja perpendicular à tangente. O segmento TP é chamado de "subtangente".

Segundo Leibniz, ainda que dy e dx sejam quantidades infinitamente pequenas, a razão $\frac{dy}{dx} = \frac{MR}{NR}$ entre estas quantidades é finita, pois é dada pelo valor $\frac{PM}{TP}$ da razão entre a ordenada e a subtangente. Logo, sendo dx uma quantidade qualquer, a diferencial dy é definida pela proporção $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{subtangente}}$.

É neste contexto que Leibniz introduz a palavra ***função***, designando a "função" que uma reta desempenha em uma curva, como a de ser tangente, normal ou subtangente. Voltaremos a falar sobre a história desta noção. Retornemos às questões levantadas a partir do triângulo característico.

Como é possível entender e justificar a razão entre duas quantidades que deixaram de existir? Este tipo de consideração gerou inúmeras controvérsias sobre o estatuto destas ***quantidades infinitamente pequenas***, como podemos ver pela seguinte citação de Lazare Carnot em 1797:

> "Não houve descoberta que tivesse produzido, nas ciências matemáticas, uma revolução tão feliz e tão rápida quanto a da Análise Infinitesimal; nenhuma forneceu meios mais simples, nem

[1] Projeção sobre um eixo, e especialmente sobre um eixo de coordenadas, do segmento da tangente compreendido entre o ponto de contato de uma curva e o ponto onde a tangente encontra o eixo considerado.

> mais eficazes, para penetrar no conhecimento das leis da natureza. Decompondo, por assim dizer, os corpos até os seus elementos, ela parece ter indicado sua estrutura interior e sua organização; mas, como tudo o que é extremo escapa aos sentidos e à imaginação, só pôde-se formar uma ideia imperfeita destes elementos, espécies de seres singulares que tanto fazem o papel de quantidades verdadeiras, quanto devem ser tratados como absolutamente nulos e parecem, pelas suas propriedades equívocas, permanecer a meio caminho entre a grandeza e o zero, entre a existência e o nada." ([25]).

Estas quantidades que estão entre a existência e o nada são justamente as grandezas não atribuíveis de Leibniz. Durante muitos anos, os matemáticos se debateram com o problema de fundamentar o uso de quantidades infinitamente pequenas, os "elementos infinitesimais", também chamados de "diferenciais". O problema dos fundamentos deriva do fato de que o cálculo leibniziano empregava os chamados "elementos infinitesimais", que ele designou por dx e dy. Tais quantidades eram utilizadas nos cálculos como quantidades auxiliares, e com muito êxito. Por exemplo, para encontrar a derivada a uma curva de equação $y = x^2$, era preciso tomar a diferença entre as ordenadas de dois pontos vizinhos, obtendo-se que $d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2$, logo $\frac{dy}{dx} = 2x$. No resultado, o último termo deveria ser desprezado, uma vez que possui, comparativamente, ordem de grandeza bem menor que a do primeiro.

Este procedimento obtinha sucesso nos cálculos e nas aplicações. O que estava em jogo, portanto, na discussão sobre os fundamentos, não era a utilização destas quantidades não finitas nos cálculos, mas sim o estatuto destas quantidades, que suscitou críticas e controvérsias, em relação às quais Leibniz ofereceu várias justificativas.

Uma das respostas mais convincentes é a sua observação de que, quando escrevemos o quociente de duas diferenciais $\frac{dy}{dx}$ designamos uma razão que não é o mesmo que a divisão infundada de duas quantidades infinitamente pequenas dy e dx. Logo, esta relação não pode ser entendida como um quociente entre duas quantidades infinitamente pequenas, que equivaleria, no fim das contas, à divisão de 0 por 0. Trata-se de uma relação, cuja natureza é independente dos termos que a compõem. Ou seja, esta relação não é uma quantidade. Justamente por isso, mais tarde, ela será expressa por uma função.

Na verdade, Leibniz pratica um cálculo diferencial sem diferenciais, operando somente com relações diferenciais. A relação $\frac{dy}{dx}$ entre dois infinitesimais não é um infinitesimal, mas é resultado de uma operação de diferenciação (e as derivadas de ordens superiores resultarão da mesma operação reiterada). A riqueza da notação proposta por Leibniz é justamente a de ter introduzido o operador "d", o qual, ao mesmo tempo, separa-o da quantidade x a qual ele se relaciona e indica sua ligação com esta quantidade.

O procedimento de Leibniz supõe um princípio subjacente que demonstra a extrema potência de seu cálculo e sua incompreendida modernidade. Em linguagem atual, este princípio estabelece o seguinte: é sempre necessário determinar a variável em relação à qual se quer derivar. Uma quantidade varia em função da outra, ou seja, já temos aqui uma noção implícita de variável dependente e variável independente, que antecede a noção de função.

Como afirma Bos ([15]), não é sobre a diferencial, como objeto, que se funda o cálculo leibniziano, mas sobre a ideia de diferenciabilidade. Daí a importância de se introduzir a expressão *diferenciar em relação a*, indicando a percepção clara de que a diferenciação é a noção central do cálculo e não as diferenciais. Escolher a variável em relação à qual se quer diferenciar indica uma dupla variação, uma variabilidade combinada que será associada à relação diferencial, que é o fundamento do cálculo para Leibniz.

Não se encontra uma definição de função na obra de Leibniz, mas os trabalhos que irão propor definições explícitas deste conceito serão influenciados por ele.

Exercícios

5.16. Um dos primeiros feitos matemáticos de Leibniz foi achar a soma da série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \cdots,$$

ou seja, achar a soma dos inversos dos números triangulares, problema que lhe foi proposto por Huygens. Mostre, como fez Leibniz, que a soma desta série é igual a 2.

5.17. Estudaremos um desenvolvimento em série de potências para $\pi/4$, proposto por Leibniz.

Considere a curva $OPQD$ da Figura 5.15, na qual os pontos P e Q estão "infinitamente próximos", de maneira que entre eles a curva pode ser considerada uma linha reta e seja a reta que passa por P e Q, que será a tangente à curva, por P, a qual determina o ponto T sobre o eixo dos y. Sejam OW perpendicular a essa tangente e $z = OT$, $h = OW$.

Sejam ds, dx e dy os acréscimos respectivamente ao arco da curva, à abscissa de P e à sua ordenada, quando passamos de P a Q.

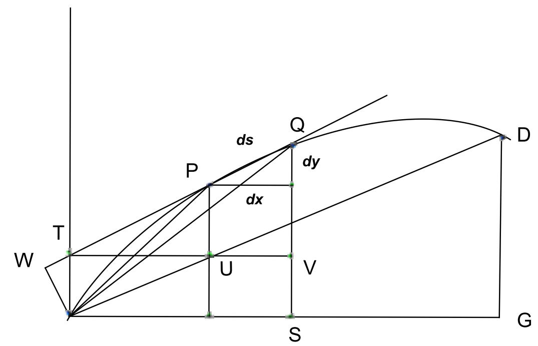


Figura 5.15

1. Mostre que o triângulo TWO é semelhante ao ***triângulo diferencial*** formado por ds, dx e dy e conclua que $dx : h = ds : z$, ou seja, que $zdx = hds$.

2. Mostre que zdx é a área do retângulo $UVRS$ e que hds é duas vezes a área do triângulo OPQ.

3. Prove que a área definida pela curva $OPQD$ e a reta OD é igual a metade da área sob a curva cuja ordenada é z. Conclua que

$$\frac{1}{2}\int z\,dx = \int y\,dx - \frac{1}{2}OG \times GD.$$

4. Fazendo $OG = x_0$ e $GD = y_0$, mostre que

$$\int y\,dx = \frac{1}{2}\left(x_0y_0 + \int z\,dx\right).$$

   Este é o chamado ***teorema da transmutação de Leibniz***. Ele é útil quando $\int z\,dx$ é mais fácil de calcular do que $\int y\,dx$.

5. Considere a circunferência de equação $y^2 = 2x - x^2$. Mostre que, neste caso,

$$z = y - x = \sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

6. Prove que, para a circunferência estudada, $\int z\,dx = 1 - \int x\,dz$. Conclua que

$$\int y\,dx = 1 - \int \frac{z^2}{1+z^2}\,dz.$$

7. Prove que

$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$$

8. Conclua que

$$\int y\,dx = 1 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots$$

9. Prove que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

   Esta é a famosa expressão encontrada por Leibniz para calcular o número π.

5.6 O cálculo de Newton

No final da década de 60 (do século XVII), Newton já empregava procedimentos infinitesimais, como nos mostra o exemplo seguinte.

Seja uma curva como na figura 5.16, tal que a área $ABD = z$,$BD = y$ e $AB = x$.

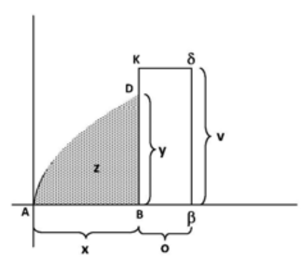


Figura 5.16

Escolhamos em seguida B$\beta = o$ e $BK = v$ tais que a área curvilínea $BD\beta\delta$ seja igual à área do retângulo $KBH\beta = ov$. Consideremos, por exemplo, a curva para a qual $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ (ou $z^2 = \frac{4}{9}x^3$). Podemos concluir então que $(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$ ou $z^2 + 2zov + o^2v^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3)$. Dividindo tudo por o obtemos $2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2)$.

Neste momento, Newton dá o passo crucial que caracteriza o cálculo infinitesimal: considerando Bβ *infinitamente pequeno*, os termos multiplicados por o desaparecem e $v = y$, logo temos $2zy = \frac{4}{3}x^2$. Substituindo o valor de

z, que supusemos ser $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, obtemos a equação $y = x^{\frac{1}{2}}$ que determina o ponto da curva para o qual a área é igual a z. Isso, em linguagem atual, seria a derivada de z. Podemos observar que o mesmo método permite obter a derivada de qualquer função algébrica z de x.

Um pouco mais tarde, no início dos anos 70, Newton irá reformular estes algoritmos na linguagem de *fluentes* e *fluxões*. Os fluentes para Newton eram quantidades variáveis com o tempo, quantidades que *fluem*. Esta concepção leva alguns historiadores a afirmar que sua noção de continuidade implica o movimento, a variação das quantidades no tempo, diferente de Leibniz, que emprega justificativas de natureza metafísica.

A taxa de variação de uma quantidade com o tempo era chamada *fluxão*. Se v, x, y, z são quantidades fluentes, seus fluxões serão designados respectivamente por $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. O problema fundamental do Cálculo seria então: dada a relação entre quantidades fluentes, encontrar a relação entre seus fluxões, e vice-versa.

Se tivermos dois fluentes x e y, o interessante não será calcular os fluxões em si, mas a razão entre eles $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, que determina a inclinação da tangente à curva descrita nas variáveis x e y.

Seja, por exemplo, a curva definida por $y = x^n$. Consideramos o um intervalo de tempo infinitamente pequeno. Então, $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ (correspondentes a dx e dy) são os incrementos infinitamente pequenos de x e y respectivamente. Para encontrar a relação entre os fluxões, Newton substitui $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ na equação da curva obtendo $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$. Utilizando a fórmula que conhecemos hoje como "binômio de Newton", e que ele generalizou para expoentes fracionários, escreveu

$$y + \dot{y}o = x^n + no\dot{x}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2\dot{x}^2x^{n-2} + \cdots$$

Lembrando que $y - x^n$ é igual a 0, e dividindo tudo por o obtém-se: $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}o\dot{x}^2x^{n-2} + \cdots$ Considerando que o é infinitamente pequeno, é possível negligenciar os termos contendo esta quantidade, o que nos permite obter a fórmula $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$.

O problema deste procedimento é que a quantidade o, considerada infinitamente pequena (quase zero) neste último passo, foi usada como quociente em uma etapa anterior. Ora, o que pode ser esta quantidade que é quase zero, mas não é zero?

Reside aqui a fonte dos problemas de fundamentação do cálculo que serão enfrentados por Newton. Ele tem consciência de que a consideração de quantidades infinitamente pequenas poderia inviabilizar a aceitação de seu método e apresenta um novo procedimento que pretende resolver estas ambiguidades por meio do método das *primeiras e últimas razões*.

Em vez de simplesmente eliminar os termos contendo a quantidade o, ele forma a razão $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ entre os fluxões. Esta razão é igual à primeira (ou à última) razão entre os incrementos (ou decrementos) de y e x. Se chamarmos, em notação atual, estes incrementos de Δx e Δy, poderemos dizer que Newton considera a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx e Δy decrescem ambos para 0 ou crescem ambos a partir de 0. No primeiro caso, existe uma *última razão* entre Δx e Δy, antes que ambos atinjam o 0, e no segundo caso uma *primeira razão* entre Δx e Δy, assim que eles começam a existir a partir de 0. A razão $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ é igual a esta última razão entre quantidades evanescentes, ou igual a esta primeira razão entre quantidades nascentes.

No primeiro livro de sua obra mais famosa, *Princípios matemáticos da filosofia natural*, Newton justifica o método das primeiras e últimas razões, empregados em seguida, dizendo que:

> "As quantidades e as razões de quantidades que tendem continuamente a se tornar iguais durante um tempo finito e que, antes do fim deste tempo, se aproximam tanto da igualdade que sua diferença pode ser considerada menor que qualquer diferença dada, terminam por ser iguais."

Vemos que o princípio de continuidade enunciado por Newton é temporal. Nesta tentativa de fundar o método dos infinitesimais, usando as primeiras e as últimas razões, Newton faz o seguinte.

Chamando os incrementos somente de o, em vez de $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$, ele escreve $(y + o) = (x + o)^n = x^n + nx^{n-1}.o + \cdots$. O incremento pode ser obtido como:

$$o = nx^{n-1}.o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.o^2 + \cdots$$

Dividindo tudo por o, obtemos:

$$1 = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.o + \cdots$$

Fazendo com que a quantidade o desapareça, a última razão é $\frac{nx^{n-1}}{1}$ e $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ é a primeira razão. Como a última razão entre quantidades evanescentes deve ser igual à primeira razão entre as quantidades nascentes, temos que $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1}$.

Mas, apesar dos esforços de Newton, e do fato que ele admite implicitamente uma noção de limite, o método das primeiras e últimas razões não resolve por completo o problema dos fundamentos do cálculo, pois enquanto estes incrementos existem, a razão entre eles não é a ultima razão e, quando eles deixam de existir, não existe mais uma razão entre eles. Logo, as primeiras e últimas razões também são difíceis de conceber.

Os métodos de Newton e Leibniz são distintos. No entanto, as justificativas de Newton parecem ser tão difíceis de entender quanto as de Leibniz. O livro principal de Newton, os *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, não contém desenvolvimentos analíticos. Os resultados são apresentados na linguagem da geometria sintética. Preocupado desde o princípio em fundar um cálculo universal, os métodos de Leibniz são apresentados como métodos e algoritmos, o que, juntamente com a praticidade da notação, fez com que os métodos diferenciais deste último tivessem uma melhor recepção do que o primeiro.

Exercícios

5.18. Você certamente conhece o "binômio de Newton", resultado que permite calcular potências de $(a+b)$ e que está relacionado com os coeficientes binomais $\binom{n}{k}$:

Se n é um número natural qualquer, então

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} \binom{n}{i}.$$

Isaac Newton, em torno de 1665 generalizou esta expressão para potências quaisquer de $(a+b)$, definindo os coeficientes binomais generalizados:

Defina, para $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k}.$$

Então, Newton provou que

$$(a+b)^r = \sum_{i=0}^{r} a^i b^{r-1}.$$

1. Demonstre, por indução, a fórmula tradicional do "binômio de Newton", para n um número inteiro.
2. Demonstre que se r é um número natural a nova definição dos coeficientes binomiais coincide com a velha.

3. Prove que se r não é um número natural, então $\binom{r}{k}$ nunca se anula. Em consequência, nesse caso, o desenvolvimento binomial é uma série infinita. Sabe-se que essa série é convergente, o que só foi provado corretamente por Abel, no século XIX.
4. Usando o resultado de Newton, desenvolva em série a função $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2}$.

A descoberta, por Newton, da generalização do teorema do binômio, além de matematicamente importante, é muito interessante porque podemos saber como ele chegou ao resultado. Em resposta a uma carta de Leibniz, Newton descreve como descobriu a generalização do teorema. Em Matemática, poucas vezes temos acesso aos caminhos trilhados pelos matemáticos para chegarem a suas descobertas.

5.19. Newton e o desenvolvimento em série de $\frac{1}{1-x^2}$.

1. Calcule, como Newton, usando o teorema do binômio, o desenvolvimento em série de $\frac{1}{1-x^2}$
2. Verifique, desenvolvendo em série diretamente $1/(1-x^2)$, como fez Newton, dividindo a série formal 1 pela série formal $(1-x^2)$ que
$$\frac{1}{(1-x^2)} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$
3. Multiplique o desenvolvimento obtido no item anterior por $1-x^2$ e verifique que o resultado é 1.

   Isso convenceu Newton da certeza de seu método. Em verdade, uma demonstração correta do teorema do binômio de Newton, só foi achada no século XIX, por Abel.

5.7 As funções como expressões analíticas

Nos trabalhos sobre o cálculo infinitesimal, a noção de função propriamente dita só irá intervir, ainda de modo implícito, no chamado *problema inverso das tangentes*. Neste problema, tratado por Leibniz, dada uma reta, queremos encontrar a curva cuja tangente é essa reta. Sabemos que este problema pode ser dado de dois modos distintos que associamos hoje, respectivamente, a problemas de integração de uma função e de equações diferenciais.

Como vimos, nos problemas da geometria analítica, anteriores ao advento do cálculo, uma curva era sempre o dado de um problema e, a partir da curva, queríamos encontrar uma tangente ou uma quadratura. A partir do final do século XVII, problemas como o *inverso das tangentes* requerem a introdução de uma curva como solução de um problema cujo dado é a reta tangente. Na abordagem newtoniana pensamos também nos problemas de equações diferenciais cuja solução é associada a uma lei de variação. Em ambos os casos, o importante é que a incógnita do problema passa a ser uma curva, uma lei de variação ou, como dizemos hoje, uma função. Trata-se de uma transformação crucial por que passa a Matemática durante o século XVIII e que substitui seu objeto principal. Até o século XX, a Matemática sentiu as consequências desta mudança, descrita por Jaques Hadamard do seguinte modo:

> "O ser matemático, em uma palavra, deixou de ser o número: passou a ser a lei de variação, a função. A Matemática não apenas foi enriquecida por novos métodos, mas foi transformada em seu objeto." ([73]).

Não são mais as grandezas geométricas, nem os números, os objetos centrais da Matemática, mas as funções.

No entanto, apesar de identificarmos esboços da noção de função nos cálculos de Leibniz e Newton, o conceito propriamente dito só foi formulado alguns anos mais tarde.

Vimos que o cálculo infinitesimal partia do estudo de curvas que, desde Descartes, eram expressas por equações. Estas representavam, por sua vez, um modo de associar duas quantidades variáveis x e y. Mas as curvas estudadas por Descartes se restringiam às de natureza algébrica. Em meados do século XVII, diversos matemáticos introduziram séries infinitas para estudar curvas. A partir daí, a relação funcional entre as variáveis podia ser dada por uma série infinita e é justamente pela importância destas séries que uma função será definida por sua expressão analítica. Neste momento, as séries infinitas tornam-se o meio mais geral e fecundo para estudar qualquer função e a definição de sua expressão analítica ocupará um lugar central na análise matemática.

A falta de um termo geral para exprimir quantidades arbitrárias, que dependem de outra quantidade variável, motiva a definição de função, que aparece pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli.

No final do século XVII, Johann Bernoulli já emprega a palavra *função* relacionando-a indiretamente a *quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes*. Em resposta a uma carta de Bernoulli, de 1698, Leibniz discute sobre a melhor notação para uma função. Nesta época, ele já havia introduzido os conceitos de *constante* e de *variável*, que se tornarão de uso corrente com a publicação do primeiro tratado de cálculo diferencial impresso, escrito pelo Marquês de L'Hospital e publicado em 1696. Além destes termos, Leibniz também já usava as noções de *coordenadas* e *parâmetros*. A classificação utilizada por Descartes, que dividia as curvas em geométricas e mecânicas, é considerada inconveniente e Leibniz propõe separar as curvas *algébricas* (que podem ser representadas por uma equação de uma certa ordem) das *transcendentes* (representadas por equações às quais não é possível atribuir uma ordem).

A nova noção de função só foi publicada, todavia, muitos anos mais tarde, em um artigo de Bernoulli apresentado à Academia de Ciências de Paris em 1718:

> "Definição. Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes." (*Opera omnia*, Vol. II, p.241)

No mesmo artigo, ele usa a letra grega ϕ para representar a *característica* da função, escrevendo o argumento sem os parênteses: ϕx. Bernoulli não diz mais nada sobre o modo de constituir funções a partir da variável independente, mas o que ele tem em mente são as expressões analíticas de funções. A noção de função introduzida aqui tem por objetivo somente expressar uma variável em função da outra.

Esta definição analítica indica uma tendência da época, que fez o cálculo infinitesimal abandonar todas as suas referências geométricas e mecânicas, para ser formulado exclusivamente em linguagem aritmética ou algébrica. Este movimento será levado adiante pelos analistas do século XVIII, sobretudo Euler, mas também Lagrange. Em sua *Mecânica Analítica*, publicada em 1788, este último chega a afirmar que a mecânica é uma parte da análise matemática e a sua exposição pode prescindir de figuras, ou de qualquer outra consideração geométrica.

Apesar da noção de função não ter sido inventada por Euler, ele foi o primeiro a tratar o cálculo como uma teoria das funções. A ideia de que a análise matemática é uma ciência geral das variáveis e de suas funções foi fundada por Euler e exerceu grande influência sobre a Matemática da época a partir da publicação de seu *Introdução à análise dos infinitos*, publicado em 1748. Neste trabalho, que praticamente não contém exemplos geométricos, encontramos logo no início uma definição de função:

> "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer desta quantidade e de números, ou de quantidades constantes."(*Opera omnia*, ser. I, Vol. VIII, p.17).

Um pouco antes, na mesma obra, ele já havia definido uma constante como uma quantidade definida que possui sempre um mesmo e único valor, e uma variável como uma quantidade indeterminada, que pode possuir qualquer valor:

> "Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários."

O que significa dizer que uma função é *uma expressão analítica composta de um modo qualquer* destas quantidades constantes e variáveis? Euler considera não somente funções algébricas, mas também transcendentes, as quais podem ser definidas por operações não necessariamente algébricas, ou por combinações de operações algébricas repetidas um número infinito de vezes. Consequentemente, ele tenta definir de modo mais preciso o que é uma *expressão analítica*, enumerando as operações por meio das quais ela pode ser obtida. Em primeiro lugar, estão as operações algébricas (que incluem a resolução de equações algébricas); em seguida, são listadas diversas operações transcendentes, que incluem logaritmos e exponenciais, bem como funções obtidas pela integração de equações diferenciais.

A quantidade variável, como quantidade indeterminada, podia receber qualquer valor, inclusive transcendente, irracional ou imaginário, ainda que, nesta época, estas quantidades não fossem consideradas números como os outros, naturais e fracionários. Uma expressão analítica podia ser formada pela aplicação de finitas ou infinitas operações algébricas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

A definição *analítica* de Euler não é mais uma definição puramente algébrica. Diante da impossibilidade de enumerar todos os métodos para formar uma expressão analítica, ele afirma que a forma mais universal de uma função seria dada por uma série de potências da forma $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$. Como não se sabe se toda função pode ser escrita deste modo, ele acrescenta que devemos considerar também expoentes dados por qualquer número (e não apenas por números inteiros).

A consideração da função como uma expressão analítica, cuja forma mais geral é uma série de potências, foi aceita por inúmeros matemáticos da época, uma vez que já era a noção usada implicitamente desde Leibniz e Newton. Acreditava-se que toda função podia ser escrita deste modo, que corresponde, na Matemática atual, ao domínio das *funções analíticas*.

No entanto, o próprio Euler chegou a apresentar uma concepção mais geral de função, em seus estudos sobre um problema físico, que já o interessava desde antes da publicação de seu livro de análise. Trata-se do estudo das vibrações infinitamente pequenas de uma corda presa por suas extremidades: Uma corda elástica com extremidades fixas 0 e l é deformada até uma posição inicial, e em seguida liberada. A corda começará a vibrar e o problema é o de determinar a função que descreve a forma da corda em um instante t.

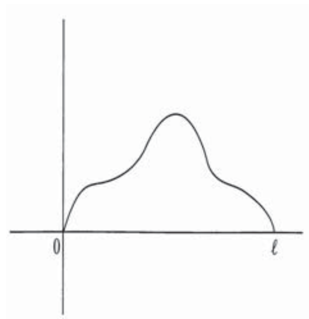


Figura 5.17

D'Alembert já havia traduzido este problema por uma equação diferencial parcial e concluído que sua solução pode ser representada pela soma de duas funções arbitrárias nas variáveis x e t: $\phi(x + at)$ e $\phi(x - at)$. Supondo que a velocidade inicial é nula, a função ϕ é determinada no intervalo $(0, l)$ pela forma inicial da corda. As condições iniciais podem ser muito diversas, mas D'Alembert acreditava que elas deviam ser sempre representadas por uma expressão analítica.

Ainda em 1748, Euler escreve um trabalho no qual concorda com a solução de D'Alembert, mas observa que ela permanece válida se a configuração inicial da corda não é dada por uma única fórmula. As formas iniciais podem ser dadas por diferentes expressões analíticas em subintervalos distintos ou, de modo mais geral por uma curva desenhada a mão livre. Esta última suposição seria a mais razoável, uma vez que a forma inicial é engendrada ao nosso bel prazer, pois podemos atribuir uma posição qualquer à corda, antes de soltá-la. Mas Euler não chega a aprofundar seu estudo da solução neste caso.

Esta questão dá origem a uma longa controvérsia sobre a natureza das condições iniciais das soluções de equações diferenciais parciais. Alguns anos mais tarde, Daniel Bernoulli sustenta que a forma inicial da corda é arbitrária e pode ser representada por uma série infinita de termos trigonométricos, considerada tão geral quanto uma série de potências. Isto implica que uma função qualquer pode ser representada por uma série trigonométrica, mas Bernoulli estava mais interessado no problema físico e não chegou a propor uma nova definição de função.

Para entender os debates que envolveram o problema da corda vibrante, devemos mencionar que os matemáticos do século XVIII acreditavam que se duas expressões analíticas coincidem em um intervalo, então elas coincidem em todo o conjunto de números para os quais estão definidas. Isso era uma verdadeira profissão de fé. Esta pressuposição era natural, visto que o tipo de funções consideradas na época eram as definidas por expressões analíticas. Como consequência, a totalidade de uma curva dada por uma expressão analítica era completamente determinada por uma pequena parte da curva. Implicitamente, assumia-se que a variável independente em uma expressão analítica varia sem restrição no que chamamos hoje de *cojunto dos números reais*. Por exemplo, em 1744, Euler considerava que as funções

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$$

eram iguais, uma vez que as duas expressões analíticas coincidem no intervalo $(0, 2\pi)$, ainda que não coincidam fora dele.

No entanto, a aceitação de condições iniciais mais gerais no problema das cordas vibrantes, sugerida por Euler, teve importantes consequências no desenvolvimento da noção de função, levando os matemáticos a estenderem a definição para incluir funções definidas por partes por meio de expressões analíticas que podem ser distintas em intervalos distintos. Por exemplo, passaram a ser admitidas funções como:

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Até mesmo funções desenhadas a mão livre, possivelmente não expressas por combinações de expressões analíticas passaram a ser consideradas. Alguns anos mais tarde, no prefácio de sua obra *Institutiones calculi differentialis*, publicada em 1755, Euler formula uma nova definição de função que não se baseia nas suas expressões analíticas:

> "Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, estas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Esta denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x

> designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x." (*Opera omnia*, ser. I, Vol.X, p.4]).

Como afirma Lützen, ao passo que D' Alembert deixou que seu conceito de função limitasse as configurações iniciais possíveis da corda, Euler permitiu que a variedade de formas iniciais estendesse seu conceito de função. Ou seja, a generalização da definição de função proposta por Euler teria sido influenciada pelo problema físico das cordas vibrantes.

Em um artigo sobre as funções descontínuas, publicado em 1767, o próprio Euler afirma que o principal aspecto da integração de equações diferenciais parciais é que elas dão origem a uma nova classe de funções descontínuas, absolutamente indefinidas e dependentes de nossa vontade, ou seja, arbitrárias. Mas ele não avança no estudo deste tipo de função.

A concepção geral de uma função, definida de modo arbitrário, ganhará cada vez mais destaque na Matemática. Um dos primeiros a avaliar a sua importância foi Condorcet que enumera, ainda no final do século XVIII, três tipos de funções: as que possuem uma forma conhecida (explícita); as que são introduzidas por equações não explicitadas entre F e x, y, z (implícitas); e as que são dadas somente por certas condições, por exemplo, como soluções de equações diferenciais. Lacroix, que parece ter lido este tratado pouco difundido na época, segue uma definição análoga, afirmando que toda quantidade que depende de outras quantidades é dita *função* destas últimas, ainda que não se saiba por quais operações podemos passar destas últimas quantidades à primeira. O livro de Lacroix, chamado *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, publicado pela primeira vez em 1797, tornou-se muito conhecido e teve grande responsabilidade em difundir esta nova ideia de função.

Em seu *Introdução à análise dos infinitos*, apesar de se dedicar preferencialmente às funções que podem ser expressas por séries de potências, Euler já sabia que poderiam existir funções de outro tipo, estudadas no segundo volume. Ele se dedica ao estudo de curvas planas que podem ser *contínuas* ou *descontínuas*. A continuidade de Euler era uma noção muito distinta da nossa, pois se relacionava à invariabilidade da expressão analítica que determina a curva. Se a curva é expressa por apenas uma equação em todo o domínio dos valores da variável, ela é continua. Ela é descontínua se, ao contrário, é necessário mudar a expressão analítica que exprime a curva quando passamos de um domínio a outro das variáveis.

Com esta definição, seria descontínua, por exemplo, a curva que é gráfico da função que expressamos hoje por:

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2, & 2 > x > 1 \end{cases}$$

Por nossa definição, esta curva é perfeitamente contínua no ponto $x = 1$. As curvas descontínuas, para Euler, eram mistas e podiam ser compostas de partes contínuas. As curvas contínuas estão associadas, portanto, às funções que podem ser expressas por apenas uma expressão analítica em todo o domínio. No contexto do cálculo diferencial, Euler irá se limitar a este tipo de função.

Veremos, no próximo capítulo, que as tentativas de enumerar e delimitar os vários tipos de funções possibilitou a expansão do universo de funções consideradas em Matemática. Isto levou ao surgimento, no século XIX, de uma teoria geral das funções analíticas, por Cauchy, Riemann e Weierstrass.

Por exemplo, em meados do século XIX, Cauchy fornece um exemplo para criticar a definição de funções mistas de Euler, definidas por expressões analíticas distintas em regiões distintas de um mesmo intervalo. Ele mostra que a função *descontínua*

$$y = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

pode ser representada pela única equação $y = \sqrt{x^2}$, $-\infty < x < +\infty$. Logo, ela seria também *contínua* e, portanto, é supérfluo classificar funções contínuas e descontínuas pela unicidade de sua expressão analítica.

Veremos que, no contexto da teoria das séries trigonométricas, desenvolvida por Fourier e Dirichlet, as críticas às concepções anteriores do conceito de função e de continuidade serão ainda mais incisivas.

As pesquisas que ajudaram a desenvolver uma nova visão sobre o cálculo diferencial, durante o século XIX, têm como motivação, segundo alguns historiadores, um *retorno ao rigor*. Esta expressão não é muito elogiosa para com os analistas do século XVIII. Euler, mas também D'Alembert, Clairaut, e mais tarde, Lagrange e Laplace foram responsáveis por transformar o cálculo diferencial de Leibniz e Newton, por meio de uma exploração exaustiva das ferramentas da análise algébrica, que permitissem liberar o cálculo de raciocínios injustificados com infinitésimos. O título da principal obra de Lagrange elucida por si só o seu objetivo: *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniments petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies* (Teoria das funções analíticas, contendo os princípios do cálculo diferencial, livres de qualquer consideração de infinitamente pequenos, evanescentes, limites e fluxões, e reduzidos à análise algébrica de quantidades finitas). Ou seja, o objetivo dos matemáticos do século XVIII também era fundar o cálculo sobre bases rigorosas, mas de acordo com a concepção de rigor da época.

Exercícios

5.20. Siga o roteiro abaixo para provar que existem funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não possuam desenvolvimento em série de potências do tipo $a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-(1/x^2)}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

- Prove que a função f definida acima é derivável na orígem, isto é, $Df(0) = 0$, calculando diretamente esta derivada, pela definição.
- Prove que a função derivada de f, Df, está definida para todo número real, que Df é derivável na origem e que $D^2f(0) = 0$.
- Prove que a função f possui derivadas de todas as ordens na orígem, e que todas elas são iguais a 0.
- Conclua que a função f não pode ser escrita como uma série do tipo $a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$.

5.8 Exercícios suplementares

5.21. Analisaremos o desenvolvimento em série de $\operatorname{arc\,sen} x$ proposto por Newton (Veja o livro de Katz [96], pp. 643-644).

1. Mostre, usando a fórmula do binônio de Newton, que o desenvolvimento em série de $(1 - x^2)^{1/2}$ é igual a
$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$$
2. Na Figura 5.18, seja y o arco de círculo AE. Mostre que a área do setor circular APE é igual a $y = \operatorname{arcsen} x$.
3. Mostre que a área deste setor é igual à área sob $y = \sqrt{1 - x^2}$ de 0 a x menos $\frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2}$.
4. Use integração termo a termo para mostrar que
$$y = \operatorname{arcsen} x = 2\int_0^x \sqrt{1 - x^2}\, dx - x\sqrt{1 - x^2} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

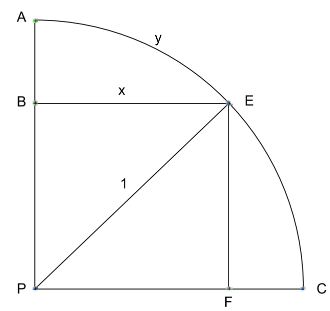


Figura 5.18

5. Deduza, do item anterior, que

$$x = \operatorname{sen} y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{5040}y^7 + \cdots$$

6. Usando o desenvolvimento em série de $\sqrt{1 - (\operatorname{sen} y)^2}$ e o item anterior, ache o desenvolvimento de $\cos y$ em série de potências.

5.22. Considere a parábola de equação $y = kx^2$, estudada por Fermat, entre outros. Prove, usando os métodos do cálculo infinitesimal, que a tangente a esta parábola, pelo ponto de coordenadas (a, ka^2), passa pelo ponto $(0, -ka^2)$. Arquimedes, usando métodos puramente sintéticos, já conhecia este resultado.

Capítulo 6

Funções, números reais e complexos: conceitos fundamentais dos séculos XVIII e XIX

6.1 Contextualização histórica

Hoje, quando pensamos em uma função, duas coisas vêm à mente: a curva que a representa graficamente; e sua expressão analítica. Em seguida, se fizermos um exercício mais formal, também lembramos da ideia de correspondência, expressa pela definição em termos de conjuntos. As duas primeiras ideias serviram, durante muito tempo, como definição do conceito de função.

No universo de Descartes, as curvas que podiam ser expressas analiticamente eram apenas as de natureza algébrica. O passo fundamental para a ampliação desta noção foi dado por Leibniz, quando foi expandido o universo das curvas, para incluir as transcendentes, que podiam ser representadas por séries infinitas. Vimos que o uso de séries infinitas esta na base da definição de função do século XVIII, quando passou a ser o objeto central da análise. A função passou a ser definida como uma expressão analítica composta de um modo qualquer de quantidades constantes e variáveis.

Chama-se "análise algebrizada" esta concepção que transforma o cálculo infinitesimal no estudo algébrico de séries. A institucionalização deste ponto de vista está ligada às mudanças que acompanharam a Revolução Francesa, que levou a uma reestruturação do sistema de ensino e do papel da ciência. Muitos matemáticos importantes viviam na França, como Lagrange, Laplace, Legendre e Monge, mas não tinham a função de ensinar. Na época prérevolucionária, a instrução matemática era relegada a um papel marginal e sofria da carência de professores qualificados. A ideia de que a formação científica podia ser útil à nação era cada vez mais aceita, tanto na expansão da indústria como no aperfeiçoamento da força militar. Esta consciência levou à criação de novas escolas e departamentos científicos. Em 1794, foi fundada a École Polytechnique, dedicada à formação de engenheiros e cientistas. Foi neste contexto que Lagrange e Lacroix produziram livros-textos que se tornaram ferramentas cruciais para o ensino superior da Matemática e formaram gerações de matemáticos fundamentais nesta transformação, como Cauchy.

O estabelecimento destas instituições públicas levou a uma inédita padronização do currículo. A estimada posição do método analítico na sociedade, bem como sua operacionalização na Matemática por meio da ferramenta algébrica, criaram um ambiente favorável, na França, para a recepção do ponto de vista de Euler sobre a análise, além de inspirar a concepção ainda mais radical que terá Lagrange logo em seguida. A arquitetura da análise será reformulada nos livros-textos de Cauchy, em particular em seu *Cours d'analyse algébrique*, escrito para suas aulas na Escola Politécnica.

A definição de função como expressão analítica começará a mudar com os trabalhos de Fourier. A teoria deste último sobre as séries trigonométricas, vista com desconfiança em um primeiro momento, ganhará grande destaque durante o século XIX. O problema da convergência das séries de Fourier será abordado por Cauchy, em 1826 e por Dirichlet em 1829.

A noção de rigor irá se transformar neste contexto, se separando da abordagem da análise algebrizada, proposta pelos matemáticos do século XVIII para dar legitimidade aos métodos do cálculo infinitesimal. Um dos problemas internos, a demandar uma nova noção de rigor, surgiu da crítica à fundamentação de noções básicas da Matemática sobre a ideia de quantidade, como é o caso dos números. Esta associação, a partir de certo momento, passou a bloquear o desenvolvimento da Matemática. A discussão sobre as quantidades negativas, durante o século XVIII, mostra que somente os números absolutos eram aceitos, pois se pretendia relacionar a existência em Matemática a uma noção qualquer de "realidade". Para avançar, era preciso migrar para um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade.

As discussões a partir das quais números problemáticos (como irracionais, negativos e imaginários) passaram a ser admitidos na Matemática têm origem em práticas muito antigas. No desenvolvimento da álgebra, a resolução de equações já fazia aparecer números indesejáveis, que não possuíam um estatuto definido em Matemática. Depois disso, a teoria das curvas, nos séculos XVII e XVIII, e a proliferação de métodos infinitos, para resolver problemas do cálculo infinitesimal, como o das quadraturas, enfatizou a necessidade de ultrapassar a noção de número como quantidade.

Antes do século XIX, todos os nomes que eram usados para designar estes números exprimiam a dificuldade de se admitir sua existência. Eram usadas designações de números "surdos" ou "inexprimíveis", para os irracionais, quantidades "falsas", "fictícias", "impossíveis" ou "imaginárias", para os números negativos e complexos. Isto mostra que estes números não tinham uma cidadania matemática e, em última instância, não eram sequer admitidos como números. Normalmente, a história destes números é desconectada das questões internas que apareceram em outros problemas da Matemática. Mas a percepção da necessidade de se incorporar estes números envolve etapas essenciais do processo de generalização, bem como a compreensão abstrata dos números e das operações. A transição do conceito de quantidade para o de número foi marcante para a noção de rigor que se constituiu a partir do século XIX. Enquanto os números eram associados a quantidades geométricas, não se concebiam operações abstratas e arbitrárias sobre eles. Os matemáticos que se deparavam com problemas relativos à fundamentação da análise estavam cientes de que o progresso deste ramo da Matemática dependia de uma extensão do conceito de número. Não é à toa que uma parte importante deste movimento ficou conhecida como "aritmetização da análise".

Para dar consistência às práticas da análise, tornou-se necessário introduzir um conceito abstrato de número, independente das ideias de quantidade e grandeza. Gauss, por exemplo, defendia uma concepção mais abstrata da Matemática, bem como outros matemáticos alemães do século XIX.

A substituição do paradigma das quantidades implicou em uma mudança irreversível no edifício da Matemática, que culminou com a transformação da Matemática em "Matemática pura". Esta transformação teve início na Alemanha, nos primeiros anos do século XIX. Ainda que procurasse se estabelecer como uma disciplina independente, a análise do século XVIII era motivada por problemas físicos, que continuaram a exercer grande influência no início do século seguinte. Mas com a crescente abstração e formalização imposta pela reflexão sobre os fundamentos da Matemática, no final do século XIX, a física deixará de ser central.

As preocupações com a formalização e a axiomatização da Matemática culminaram com o desenvolvimento da noção de conjunto, que acabou predominando até o início do século XX, levando à redefinição de suas noções centrais a partir dos conjuntos. A predominância do ponto de vista conceitual em Matemática, que abriu caminho para a abordagem conjuntista, já havia sido estimulada por Dirichlet, que juntamente com Riemann e Dedekind, que se via como seu discípulo, será marcante para a Matemática praticada na Universidade de Göttingen. Todos três seguiam a inspiração de Gauss, e promoviam uma visão abstrata e conceitual da Matemática. Apesar das diferenças entre seus campos de pesquisa, eles convergiam nas preferências metodológicas e teóricas. Riemann e Dedekind se dedicaram mais diretamente à compreensão das teorias matemáticas sem recurso a representações externas. Os novos objetos matemáticos deviam ser definidos por suas características internas e admitidos como princípios da teoria. Esta ausência de referência externa pode ser vista como a inauguração de uma nova fase da abstração, que transformará definitivamente a Matemática em Matemática "pura".

A partir deste momento, a teoria dos conjuntos passou a ser o enquadramento mais adequado para se obter um novo consenso sobre os fundamentos da análise, e de toda a Matemática. O papel de Bourbaki foi importante na cristalização deste ponto de vista no ensino, que teve como conseqüência a redefinição de todas as noções básicas da Matemática na linguagem dos conjuntos. Esta tendência mudou a concepção sobre número e função, noções que possuem, todavia, uma longa história prévia.

6.2 Discussão sobre a forma dos números imaginários

O século XVIII apresentou uma intensa atividade em torno da forma dos *imaginários*[1]. Os primeiros resultados podem ser encontrados em 1747, na dissertação de d'Alembert sobre os ventos (Ver [40]). No artigo 79, ele afirma que uma quantidade qualquer, composta de tantos imaginários quanto desejarmos, pode ser reduzida à forma $A + B\sqrt{-1}$ com A e B quantidades reais; Se a quantidade proposta for real, isto significa que $B = 0$.

Em seguida são apresentados os seguintes resultados sobre a forma dos imaginários que resultam de operações com imaginários:

- $\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$;
- $[a + b\sqrt{-1}]^{g+h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$;
- $a+b\sqrt{-1}\pm(g+\sqrt{-1}) = A+B\sqrt{-1}$ e que $a+b\sqrt{-1}\times(g+\sqrt{-1}) = A+B\sqrt{-1}$;

Euler aborda esta temática em sua obra *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, de 1749, com diversos teoremas e corolários, dos quais ressaltamos o teorema XII que afirma que toda fração formada por adição, subtração, multiplicação ou por divisão, envolvendo quantidades imaginárias

[1]De acordo com a terminologia da época, chamaremos de "imaginários" o que designamos hoje como "números complexos".

quaisquer da forma $M + N\sqrt{-1}$, terá a mesma forma $M + N\sqrt{-1}$, em que as letras M e N representam quantidades reais.

Deste teorema decorre que, quando $N = 0$, a forma geral $M + N\sqrt{-1}$ compreende todas as quantidades reais. Deste modo, as quatro operações mencionadas anteriormente atendem não somente aos imaginários da forma $M + N\sqrt{-1}$, mas também aos números reais.

Viète, em seu *Supplementum geometricae*, publicado em 1590, já havia notado que o caso "irredutível" das equações de terceiro grau estava relacionado à trissecção do ângulo e já havia obtido uma fórmula de multiplicação por n usando regras trigonométricas. Descartes já havia observado que o problema da trissecção do ângulo pode ser resolvido por meio de uma equação cúbica e chegou a interpretar a fórmula de Cardano a partir deste problema.

No caso particular dos números imaginários, De Moivre foi um dos primeiros a observar que estes números podem ser úteis para problemas de divisão de arcos de círculos, mostrando que um número imaginário unitário pode ser representado por $\cos a \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} a$. A partir desta constatação, obtém-se que $\sqrt[n]{\cos a + \sqrt{-1}\operatorname{sen} a}$ fornece n valores para a divisão do arco a, uma vez que

$$(\cos a \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} a)^n = \cos na \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} na.$$

Isto permite um estudo mais aprofundado das expressões $\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}}$. Em 1738, De Moivre declara que estas expressões admitem n valores, todos da forma $p + q\sqrt{-1}$, em que p e q são números reais. Este resultado se baseia na demonstração da expressão particular $\sqrt[n]{\cos + \sqrt{-1}\operatorname{sen} a}$, em que os n valores são obtidos justamente por meio da divisão do arco a.

Trabalhando sobre os casos irredutíveis das equações de terceiro grau, utilizando o método inventado por Leibniz para fazer desaparecer os números imaginários das expressões $\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}}$, F. Nicole, em seu artigo *Sur le cas irréductible du troisième degré*, publicado em 1738, registra que é surpreendente que uma grandeza real seja expressa por uma composição de quantidades reais e imaginárias. Ele verificou que era necessário que essas quantidades imaginárias se destruissem mutuamente durante os cálculos.

Nicole apresenta um método com uma sequência de resultados e corolários que estão diretamente relacionadas às soluções de uma equação cúbica do tipo $x^3 - px + q = 0$, resolvida pelo método de Cardano. Ele mostra que, no caso de $\frac{1}{27}p^3$ ser maior que $\frac{1}{4}q^2$, a equação possuirá três raízes reais, todas diferentes entre si, embora elas só possam ser encontradas por meio de imaginários, já que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ é uma quantidade imaginária.

Um importante resultado de seu trabalho foi mostrar que a expressão

$$\left(\frac{a}{b}+\sqrt{-1}\right)^n+\left(\frac{a}{b}-\sqrt{-1}\right)^n,$$

que envolve quantidades imaginárias, com n um número inteiro ou fracionário, positivo ou negativo, sempre conduz a uma quantidade real.

Euler prosseguirá com esta investigação, mostrando que, para o caso dos números complexos unitários, já tratados por De Moivre, é possível decompor $(\cos a)^2+(\operatorname{sen} a)^2=1$ como $(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a)(\cos a-\sqrt{-1}\operatorname{sen} a)=1$. Ele comenta em seguida que, "apesar de imaginários", estes fatores são de grande utilidade para as operações com arcos de circunferência. Fazendo o produto dos fatores$(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a)(\cos b-\sqrt{-1}\operatorname{sen} b)$ obtemos:

$$\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b+(\cos a\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} a\cos b)\sqrt{-1}.$$

Euler conclui, a partir das igualdades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b&=\cos(a+b)\\ \cos a\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} a\ \cos b&=\operatorname{sen}(a+b),\end{aligned}$$

que o produto acima deve ser igual a $\cos(a+b)+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(a+b)$. A partir desta igualdade, o resultado que chamamos hoje "fórmula de De Moivre" pode ser demonstrado sem problemas. Euler deduz daí que a raiz de um complexo qualquer $a\pm b\sqrt{-1}$ também pode ser escrita desta forma.

No entanto, a representação de um complexo qualquer ainda não está completamente estabelecida. A representação trigonométrica foi anterior à representação geométrica dos números complexos, assunto de que trataremos na próxima seção.

Todos os estudos que relacionavam o grau de uma equação polinomial e o número de suas raízes esbarravam necessariamente na possibilidade de decompor esta equação em fatores simples. Para isso, foram indispensáveis conjecturas a respeito dos números imaginários e de sua forma genérica. Além disso, o estudo da decomposição de uma fração em elementos simples se relaciona com o desenvolvimento da teoria dos logaritmos, que levará a uma extensão da definição desta noção para incluir logaritmos de números negativos e imaginários. O desenvolvimento do estudo dos números imaginários muito se deveu a controvérsias a este respeito: entre Leibniz e Bernoulli, em primeiro lugar; em seguida, entre Bernoulli e Euler; e, posteriormente, entre Euler e d'Alembert.

Um contexto importante no qual se inserem as discussões acerca da forma dos números complexos é o do cálculo infinitesimal. As contribuições de Leibniz e Jean Bernoullli para a integração de funções racionais, decompondo-as em elementos simples, foi o primeiro passo para o estudo de novos problemas envolvendo números complexos. Eles ampliaram para as quantidades imaginárias as regras demonstradas, no cálculo integral, para os números reais. Assim, estes estudos deveriam conduzir naturalmente à decomposição de uma função racional inteira de variável x em um produto de fatores de primeiro grau da forma $x - a$ ou $x - a - b\sqrt{-1}$ e os problemas de integração fazem surgir o problema dos logaritmos dos números imaginários.

Tomemos, como exemplo, a expressão $\frac{1}{x^2+1}$ da qual queremos encontrar uma primitiva.

Em uma primeira etapa chegamos à decomposição $\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right)$, cuja primitiva será $\operatorname{arctg} x$, ou em um cálculo formal, $\frac{1}{2i}\log\left(\frac{x-i}{x+i}\right) + c$.

Efetuando as seguintes mudanças de variáveis, $\operatorname{arctg} x = \frac{y}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = t$, obteremos

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{2i}\log\frac{t-i}{t+i},$$

ou

$$yi = \log\frac{t-i}{t+i},$$

ou ainda

$$yi = \log\frac{t^2 - 2it - 1}{t^2 + 1},$$

o que nos dá, finalmente,

$$xi = \log\left[-\left(\cos x + i\operatorname{sen} x\right)\right].$$

O sinal "–" nesta expressão foi a primeira dificuldade que originou a divergência entre Leibniz e Bernoulli. Partindo do fato que $\log(+1) = 0$, Bernoulli conclui que:

$$\log(1) = \log(-1)^2 = 2\log(-1) = 0,$$

ou seja,

$$\log(-1) = 0.$$

$$\log\left(\sqrt{-1}\right) = \log(-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(-1) = 0,$$

ou seja,

$$\log\left(\sqrt{-1}\right) = 0.$$

Desta forma, ele afirma que todo número negativo possui um logaritmo real que é igual ao logaritmo de seu valor absoluto. Esta conclusão – que sabemos hoje não ser verdadeira – pode ser expressa em linguagem matemática por:

$$\begin{aligned}
(-a)^2 = a^2 \;&\Rightarrow \\
\log(-a)^2 = \log(a)^2 \;&\Rightarrow \\
2\log(-a) = 2.\log(a) \;&\Rightarrow \\
\log(-a) = \log(a)\,.&
\end{aligned}$$

Euler, em uma carta enviada a Bernoulli, em 1728, mostra a contradição e sugere que ele desconsidere a característica unívoca do logaritmo, apontando para o fato de que todo número complexo deve admitir uma infinidade de logaritmos.

Usando métodos de comparação entre progressões aritméticas e geométricas, o estudo da função exponencial – realizado principalmente por Wallis, Newton e J. Bernoulli – revelou que a função logarítmica seria a inversa desta nova função.

A aplicação das exponenciais aos números imaginários já consta do trabalho de Euler em torno de 1740. Na nota 133 de sua *Introdução à análise dos infinitos* (1748), ele parte do resultado $\left(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z\right)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$ e obtém as seguintes igualdades:

$$\cos\phi = \frac{e^{\phi\sqrt{-1}} + e^{-\phi\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin\phi = \frac{e^{\phi\sqrt{-1}} - e^{-\phi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Por conseguinte:

$$e^{\phi\sqrt{-1}} = \cos\phi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\phi$$

e

$$e^{-\phi\sqrt{-1}} = \cos\phi - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

Euler então partiu dos pontos de vista de Leibniz e Bernoulli e esclareceu a questão no artigo *Da controvérsia entre os senhores Leibniz e Bernoulli sobre* *os logaritmos dos números negativos e imaginários*. Para provar a existência de logaritmos de números negativos, ele partiu do princípio de que o número e é base para todos os logaritmos e exponenciais. Ele observou que, se o símbolo $\log w$ for interpretado como o conjunto de todos os números complexos z, tais que $e^z = w$, continua válida a propriedade do logaritmo do produto, ou seja, um número complexo é logaritmo de wz, se e somente se, $\log(wz) = \log w + \log z$, como pretendia Bernoulli.

Isso significa que, ao admitir-se uma infinidade de logaritmos para cada número, manteve-se a validade da regra $e^{\log w} = w$, como queria Leibniz, o que não ocorreria se para cada número houvesse apenas um logaritmo.

A relação

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

conhecida como identidade de Euler, estabeleceu a tão necessária conexão entre os logaritmos e as funções trigonométricas. Além dessas conquistas, a identidade de Euler deu significado aos logaritmos de números negativos. De fato, se $x = \pi$, Euler obteve $e^{\pi i} + 1 = 0$, e assim $\ln(-1) = \pi i$, ou seja, os logaritmos de números negativos são números imaginários puros.

Com esses resultados, podemos retornar à controvérsia gerada em relação aos logaritmos de números negativos. Durante os anos de 1747 e 1748, Euler remeteu a d'Alembert diversas cartas nas quais sustentava que os números negativos não possuíam logaritmos reais, como pensavam d'Alembert e Bernoulli. Sua objeção em relação à teoria de d'Alembert se baseava no fato de que e na equação $y = e^x$ poderia assumir um valor positivo e negativo. Euler afirma que, se e assumisse o valor da expressão $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots$, x seria o logaritmo hiperbólico do número y e seria impossível encontrar um valor para x tal que e^x fosse negativo. Isto faz com que ele considere que os logaritmos de números negativos devem ser impossíveis.

Esta denominação *impossível* dada por Euler aos logaritmos dos números negativos, remete à denominação dos números imaginários. Esta observação pode ser notada em sua obra *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1769) (*Introdução à álgebra*) em que encontramos as seguintes citações:

> "Uma vez que todos os números que são possíveis de imaginar são, ou maiores ou menores que 0, ou são o próprio 0, é claro que não podemos incluir a raiz quadrada de um número negativo entre os números possíveis, então é necessário dizer que é uma quantidade impossível. É desta forma que nós somos conduzidos à ideia de números que pela sua própria natureza são impossíveis. Nós chamamos ordinariamente estes números de

quantidades imaginárias porque eles existem puramente na imaginação.

(...)

Os números 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., ou seja, todos os números positivos, são logaritmos da raiz a (inteira natural $\geqslant 1$) e de suas potências, e por conseguinte, logaritmos de números maiores que a unidade. Contrariamente, os números negativos como -1, -2,$-\cdots$, são os logaritmos das frações $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a.a}$, etc. que são menores que a unidade, entretanto são ainda maiores que nada. Segue então que, se o logaritmo é positivo, o número é sempre maior que a unidade, mas se o logaritmo é negativo, o número é sempre menor que 1, e portanto maior que zero. Por conseguinte, não saberíamos indicar os logaritmos de números negativos, e é necessário concluir que os logaritmos de números negativos são impossíveis, e que eles pertencem à classe das quantidades imaginárias."

Utilizando os resultados de Euler e a linguagem conhecida atualmente, teríamos que $e^{i\pi} = \cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi$, ou seja, $e^{i\pi} = -1$ o que significaria escrever que $\ln(-1) = \pi \cdot i$, logo os logaritmos de números negativos não seriam reais, como haviam suposto d'Alembert e Bernoulli, e sim quantidades imaginárias. Devido aos seus estudos, Euler também ressalta que os números positivos e negativos possuem uma infinidade de logaritmos e, no caso dos positivos, apenas um é real. Devemos a Euler uma série de resultados na forma $p + q\sqrt{-1}$, envolvendo expressões como sen $\left(a + b\sqrt{-1}\right)$, cos $\left(a + b\sqrt{-1}\right)$ e tg $\left(a + b\sqrt{-1}\right)$, além de uma teoria dos logaritmos muito próxima da que conhecemos atualmente.

Exercícios

6.1. O matemático italiano Bombelli propôs o seguinte o problema de escrever $\sqrt[3]{52 + \sqrt{-2209}}$ na forma $a + bi$, em que $i = \sqrt{-1}$. Como você procederia para resolver este problema?

6.2. Como você explica a seguinte situação, aparentemente correta, que causou perplexidade a Euler?

Como $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, e $(-1)(-1) = 1$, temos:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = i\,i = i^2 = -1\,!$$

Assim, foi provado que $1 = -1$, e portanto $2 = 0$.

6.3 Forma geométrica das quantidades "imaginárias": Argand e Gauss

Apesar de toleradas, pela sua utilidade prática na realização de cálculos, estas quantidades não eram consideradas rigorosas. Somente a partir do final do século XVIII e inicio do século XIX começaram a ser sugeridas diferentes representações geométricas para os números negativos e complexos, o que irá garantir sua plena aceitação no universo dos números. Além do nome de Gauss, o matemático mais conhecido a propor uma representação geométrica para os números complexos, também são importantes os nomes do dinamarquês Caspar Wessel e do suíço Jean-Robert Argand. [2]

6.3.1 Argand

Argand principia com as quantidades negativas, uma vez que elas não podiam ser rejeitadas, sob o risco de termos que questionar diversos resultados algébricos importantes. Tomemos as grandezas a, $2a$, $3a$, $4a$, etc. É evidente que este processo pode continuar indefinidamente. Mas, e a operação inversa? Podemos subtrair a grandeza a de cada um dos termos anteriores, obtendo: $3a$, $2a$, a, 0. E depois? Como prosseguir? Que sentido atribuir à subtração $0 - a$? Os termos que seguem só podem existir na imaginação, sendo chamados, por isso, de "imaginários". Argand proporá uma construção capaz de assegurar, em suas próprias palavras, alguma "realidade" a estes termos.

Consideremos uma balança com dois pratos A e B. Acrescentemos ao prato A as quantidades a, $2a$, $3a$, $4a$, e assim sucessivamente, o que faz a balança pender para o lado do prato A. Se quisermos, podemos retirar uma quantidade a de cada vez, restabelecendo o equilíbrio. E quando chegamos a 0? Podemos continuar retirando estas quantidades? Sim, afirma Argand, basta acrescentá-las ao prato B. Ou seja, introduz-se aqui uma noção relativa do que "retirar" significa: retirar do prato A significa acrescentar ao prato B. Deste modo, as quantidades negativas puderam deixar de ser "imaginárias" para se tornar "relativas".

A representação proposta por Argand permite atribuir um sentido às operações com números negativos, como, por exemplo, à multiplicação por -1, que passa a ser vista como uma reflexão em relação à origem. Isto possibilita entender mais facilmente porque $-1 \times -1 = +1$, pois basta observar que, após a reflexão de -1 em relação à origem, obtém-se $+1$.

[2] Uma discussão sobre a biografia incerta de Argand pode ser encontrada em Schubring ([133]).

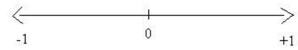


Figura 6.1

Estabelecida uma representação para as grandezas relativas (positivas e negativas) como grandezas direcionadas, Argand passa a analisar todas as possibilidades de relação de proporção entre estas grandezas, obtendo que:

$$+1 : +1 :: -1 : -1 \quad \text{e} \quad +1 : -1 :: -1 : +1.$$

Sabemos que a meia proporcional entre +1 e -1 ou entre -1 e -1 é +1 ou -1, pois se $-1 :: +x :: +x : -1$, ou se$+1 : +x :: +x : +1$, a quantidade x deve ser+1 ou -1. Cabe, portanto, perguntar como seria possível determinar a meia proporcional entre +1 e -1 ou entre -1 e +1? Argand investiga, então, as grandezas que satisfazem à proporção $+1 : +x :: +x : -1$ e encontra a resposta por meio do seguinte diagrama:

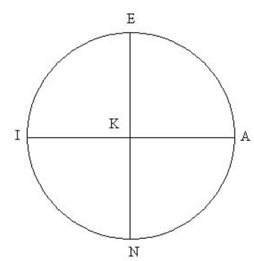


Figura 6.2

Os segmentos KA e KI são entendidos, respectivamente, como segmentos direcionados de K para A e de K para I e representam as grandezas unitárias positiva e negativa. Em seguida, traça-se uma perpendicular EN à reta que une I a A. O segmento KA está para o segmento direcionado KE assim como KE está para KI; e KA está para o segmento direcionado KN assim como KN está para KI. Logo, a condição de proporcionalidade exigida acima para a grandeza x é satisfeita por KE e KN. As grandezas geométricas que satisfazem à proporção requerida são, portanto, KE e KN, que podem ser vistas como representações geométricas de $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.

Para a representação das quantidades imaginárias, somos bem sucedidos combinando as ideias de grandeza absoluta e de orientação, mas a orientação não é mais dada somente como uma oposição, pois a proporção impõe que

$+1$ esteja para $+x$ como esta quantidade está para -1. Portanto, temos uma nova direção que, neste caso, deve ser uma perpendicular. A multiplicação por $\sqrt{-1}$ deve ser entendida agora como uma rotação. As quantidades $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$ tornam-se “reais” porque podemos concebê-las como orientações distintas na direção perpendicular que determinam dois lados para o segmento inicial IA. Como requerido pela meia proporcional, a orientação positiva está para a perpendicular como esta perpendicular está para a orientação negativa, e vice-versa. Temos agora, no lugar de uma reflexão, uma rotação. O zero não é, portanto, um ponto neutro, mas um centro de rotação, o ponto que organiza o giro. A oposição pode ser vista, agora, como o produto do giro, fixando os extremos de uma rotação (se pensarmos a reflexão como o extremo de uma rotação, $(\sqrt{-1})^2 = -1$).

6.3.2 Gauss

Quando, em 1831, Gauss publicou o que denominava “metafísica das grandezas imaginárias” (na obra *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda*), ele já era um matemático de renome, bastante respeitado, diferentemente de Argand, que exercia a atividade de guarda-livros e era considerado um matemático marginal. Gauss foi o primeiro matemático influente a defender publicamente as quantidades imaginárias que, dali em diante, tornaram-se entidades reconhecidas como tais, com lugar na aritmética, “números complexos” sobre os quais será possível realizar cálculos de modo consistente.

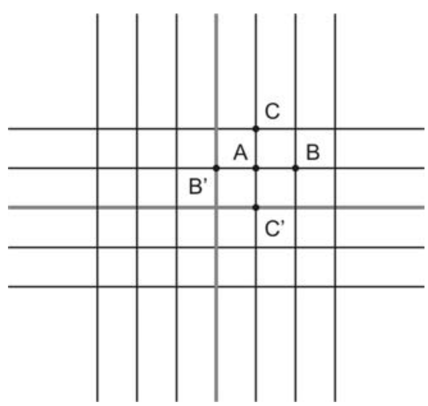
Embora os trabalhos de Gauss sobre *quantidades imaginárias* não tivessem grandes novidades em relação aos de seus antecessores, ele apresentará uma síntese de trabalhos de Wessel e Argand, mas também de outros matemáticos desconhecidos. Defensor da abstração como característica essencial da Matemática, Gauss não enxerga as quantidades imaginárias como entidades que precisam ser “realizadas”, e sim como objetos plenamente abstratos, o que era suficiente para que tivessem lugar na Matemática.

Não será mais necessário, portanto, qualificar as quantidades negativas e imaginárias pela sua natureza, o que as levava a serem consideradas “sofísticas”, “absurdas”, “impossíveis”, “falsas” ou “imaginárias”. As quantidades negativas e complexas passam a ser objetivas, mas, conforme a definição da objetividade matemática proposta por Gauss, elas serão entendidas como relações.

Os números negativos só podem ser compreendidos, segundo Gauss, quando entendemos que “as coisas contadas” podem ser de espécies opostas, de modo que a unidade de uma espécie possa neutralizar a unidade de outra espécie (como $+1$ e -1). Para isso, ele afirma que as coisas contadas não devem ser encaradas como substâncias, como objetos considerados em si mesmos, mas como relações entre esses objetos:

> "É necessário que estes objetos formem, de algum modo, uma série como $\ldots A$, B, C, D, $\ldots$ e que a relação que existe entre A e B possa ser vista como igual àquela que existe entre B e C e assim por diante. Essa noção de oposição implica ainda uma possível troca entre os termos da relação, operando de modo que, se a relação (ou a passagem) de A a B é indicada por +1, a relação de B com A é indicada por −1" (Gauss, *Werke*, II, pp. 175-176; Beman, pp. 178-179).

Quanto aos números complexos, eles devem ser compreendidos também como uma relação e Gauss começa por destacar a similitude entre a relação de +1 com −1 e a relação de $+i$ $-i$ (símbolos que ele introduz). De certa forma, trata-se de um entendimento que não está muito distante da meia proporcional proposta por Argand e a consideração das quantidades imaginárias como objetos reais da aritmética será defendida, justamente, a partir da observação de que $+i$ e $-i$ podem ser vistos como meias proporcionais entre +1 e −1. Gauss afirma então que estas relações podem ser tornadas intuitivas por uma representação geométrica. Para isto, basta considerar no plano um duplo sistema de retas paralelas que se cortam em ângulos retos. Os pontos de interseção serão os números complexos e, dado um certo ponto A, ele é envolvido por quatro pontos adjacentes: B, B', C e C'.



O símbolo +1 indica a relação do ponto A com um dos pontos adjacentes, o que faz com que −1 indique automaticamente a relação com o adjacente no sentido oposto. O símbolo $+i$ indicará a relação com um dos dois pontos adjacentes que restaram, dependendo da escolha anterior para +1, o que faz com que $-i$ indique automaticamente a relação com o adjacente no sentido oposto. Note que, assim, +1 poderia indicar a relação de A com B ou com C, enquanto -1 poderia indicar a relação com B' ou com C'. O fato de podermos trocar +1 por $+i$ indica que os números +1 e $+i$ não possuem nenhuma realidade, mas designam apenas uma relação. No entanto, não podemos trocar +1 por $-i$ (não podemos ter $-i$ no mesmo segmento de +1, mantendo os outros inalterados), o que mostra que é escolhida uma orientação do plano.

Os eixos dos reais e dos imaginários são escolhidos, portanto, de modo arbitrário, mas Gauss não deixa de observar que, se quiséssemos chamar de +1 a relação que exprimimos por $+i$, teríamos que chamar de $+i$ a relação antes chamada de -1, justamente porque $+i$ é uma meia proporcional entre +1 e -1. A representação escolhida utiliza fortemente, como Gauss assinala, a propriedade do plano de que, escolhidos um "em cima" e um "embaixo", a distinção entre uma "direita" e uma "esquerda" fica automaticamente determinada (Werke, II, pp. 176-177); trad. Beman, pp. 179-180). A nomenclatura de "positivo", "negativo" e "imaginário" respectivamente para +1, -1 e $\sqrt{-1}$ foi exatamente o que deu margem, segundo Gauss, a muitas confusões quanto ao estatuto destes números, que deveriam ser chamados "unidade direta", "inversa" e "lateral", o que mostra seu papel relativo à orientação das direções do plano.

A associação dos números complexos aos pontos do plano é enfatizada por Gauss como por nenhum outro matemático antes dele. No entanto, após algumas hesitações introduzidas por Cauchy quanto ao estatuto destas quantidades como *grandezas orientadas*, que ele propõe conceber como expressões simbólicas, o passo decisivo para que o estatuto dos números complexos seja firmemente estabelecido é a construção de uma teoria algébrica para estes números, o que só foi possível com a introdução da noção de *vetor*. Este conceito-chave da Matemática surgiu, ainda no século XIX, com o trabalho de W. R. Hamilton, mas não podemos deixar de notar que as quantidades direcionadas de Argand já se pareciam bastante com vetores.

Exercícios

6.3. Seja z um número completo dado por sua representação trigonométrica:

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Demonstre que

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta).$$

6.4. Seja u um número complexo, tal que $|u| = 1$. Assim, u pode ser escrito como

$$u = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta.$$

Seja $z \in \mathbb{C}$. Mostre que efetuar o produto $u \cdot z$ equivale a girar o número complexo z de θ graus.

Neste exercício vemos que as rotações do plano podem ser feitas por meio da multiplicação por um número complexo de módulo unitário. O matemático e físico irlandês William Rowan Hamilton (1805 - 1865) tentou construir um conjunto de números que pudessem ser usados para descrever rotações no espaço. Ao fazer isso, descobriu os *quaternions*, $\mathbb{H}$.

6.4 Os primeiros passos para a definição de uma função arbitrária: Fourier e Dirichlet

Os trabalhos de Fourier sobre a teoria da propagação do calor, publicados no início do século XIX, deram um novo impulso à evolução do conceito de função. Ele coloca o problema de mostrar que uma função arbitrária definida em um intervalo pode ser sempre representada por desenvolvimentos em séries que contêm funções senos e cossenos.

Este resultado já era conhecido por Euler e Lagrange, mas somente para funções particulares. Fourier defendia que sua validade para qualquer função, no que este termo ganhava uma acepção bem mais geral. Como ele afirma em 1822, uma função $f(x)$ representa uma sucessão de valores, ou ordenadas, arbitrárias. Dada uma infinidade de valores para as abscissas x, existe um igual número de ordenadas $f(x)$, todas com valores numéricos que podem ser positivos, negativos ou nulos. Não precisamos supor que estas ordenadas sejam sujeitas a uma lei comum, elas se sucedem de uma maneira qualquer e cada uma delas é determinada como se fosse uma única quantidade.

Notamos que, para um valor dado da abscissa, deve existir somente um valor correspondente da ordenada, uma vez que deve haver o mesmo número de ordenadas, $f(x)$, que de abscissas, x. Apesar de a demonstração, fornecida por Fourier, de que toda função pode ser expressa por uma série trigonométrica ser insatisfatória para nossa concepção de rigor, este resultado impulsionou uma nova definição de função.

Em primeiro lugar, Fourier não subscrevia a profissão de fé dos matemáticos do século XVIII, uma vez que duas funções dadas por expressões analíticas diferentes podem coincidir em um intervalo sem coincidir fora dele. Além disso, ele mostrou que uma função descontínua, no sentido de Euler, podia ser representada por uma série, que é uma expressão analítica, logo ela também seria considerada contínua. Isto mostra que a definição anterior de continuidade é inadequada.

Inicialmente, a teoria de Fourier foi vista com desconfiança, mas ganhou grande destaque durante o século XIX. Na verdade, uma ano antes da publicação do trabalho de Fourier, em 1821, Cauchy publica seu *Curso de Análise* ([32]), primeiro livro-texto em que a nova visão da análise se fez presente. Nesta obra, são estabelecidos critérios para a convergência de séries e definidos os coeficientes da série trigonométrica que pode representar uma função qualquer, chamada ***série de Fourier***. Sobre o conceito de função, Cauchy já fornecia uma definição análoga à de Fourier, considerando que quantidades variáveis podem ser relacionadas de modo que, dados valores para uma delas (chamada variável independente), podemos obter os valores da outra, ou seja, da função desta variável independente. Apesar do caráter geral desta definição, Cauchy pressupunha implicitamente funções definidas por expressões analíticas.

O período que vai da primeira metade do século XVIII até este trabalho de Cauchy pode ser visto como uma época de exploração de aplicações das ferramentas do cálculo na solução de problemas físicos, como o das cordas vibrantes ou da propagação do calor. Mas estes métodos empregam novos conceitos teóricos, como os de função, continuidade e convergência, que precisam ser mais bem definidos. O conceito de função, por exemplo, era visto primeiramente como uma expressão analítica dada por uma série de potências. Mas, em outros momentos, também era identificado a uma curva desenhada à mão livre. Em seguida, com Fourier, passou a ser visto novamente como uma expressão analítica, mas desta vez uma série específica, trigonométrica. O conceito de função, que passava a ser o objeto central da análise, necessitava, assim, de uma reformulação teórica.

Lejeune-Dirichlet foi um dos primeiros a caracterizar o espírito crítico e teórico que marcou a Matemática do século XIX, sobretudo na Alemanha. Sua visão sobre o que deveria constituir uma prova matemática rigorosa influenciou os matemáticos da época e, em meados do século XIX, ele já era visto por seus contemporâneos como a expressão dos novos tempos e da nova concepção sobre o rigor, que transformaria definitivamente os padrões herdados dos franceses.

Nos anos 1820, Dirichlet estudou em Paris. Assim, ele foi uma figura central na transmissão da tradição francesa em análise e em física matemática para a Alemanha. Ele também estudou e divulgou os trabalhos de Gauss sobre análise de Fourier, integração e física matemática

Antes de tudo, era preciso dar uma consistência aos trabalhos de Fourier, que pareciam não ser corretos mas eram frutíferos. Os trabalhos iniciais de Dirichlet sobre as séries de Fourier nos interessam em particular, uma vez que propõem uma nova definição de função. Em 1829, ele tentou demonstrar que as séries de Fourier convergem.

Fourier queria mostrar que uma função arbitrária definida no intervalo $(-l, l)$ pode ser sempre representada por uma série contendo senos e cossenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right]$$

em que os coeficientes a_n e b_n são dados por integrais que envolvem a função f no intervalo $(-l, l)$.

Para convencer os matemáticos da época de que isso era verdade, era preciso calcular os coeficientes a_n e b_n das séries acima. Fourier interpretou estes coeficientes como áreas sob o gráfico de uma função dada por uma função trigonométrica multiplicada por alguma outra função. Ou seja, ele estudava a área delimitada pelo gráfico de funções do tipo $g(t)\cos(n\pi t)$ ou $g(t)\operatorname{sen}(n\pi t)$. Esta área podia ser calculada por uma integral. Mas obviamente, a área só interessava no intervalo ao qual se referem os dados do problema, que é do tipo $(-l, l)$. Logo, era preciso calcular a área, ou a integral, em um intervalo.

Um dos principais problemas tratados por Dirichlet diz respeito às condições para que se possa calcular a integral de uma função. Até este momento, o cálculo da integral era um problema prático, pois, como as funções eram expressões analíticas, as integrais eram calculadas em exemplos específicos. Bastava ter um método algébrico eficiente e encontrar a expressão analítica da integral, ou da área. Os matemáticos do século XVIII não estavam muito preocupados com as condições de integrabilidade, ou seja, com as condições que uma função deve satisfazer para poder ser integrada.

Dirichlet percebeu que nem toda função pode ser integrada e, em um artigo publicado em 1829, dá o seguinte exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \text{ racional} \\ 1 & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

Tratava-se do primeiro exemplo de função que não pode ser dada por uma, nem por várias expressões analíticas, nem pode ser desenhada à mão livre. Além disso, ela não pode ser representada por uma série de Fourier, não é derivável e é descontínua em todos os pontos.

Fica claro que estas considerações pressupunham um conceito de função mais geral do que os usados anteriormente, logo era preciso discutir a noção que os matemáticos tinham em mente ao colocar problemas deste tipo. Seguramente, já não se tratava de conceber uma função a partir de sua expressão analítica, mas qual será a nova definição?

Cauchy já tinha empregado uma definição conceitual de função, definindo algumas propriedades, como a continuidade, de modo independente da expressão analítica que a representa. Mas o exemplo de Dirichlet é tido como o primeiro passo para que se percebesse a necessidade de expandir a noção de função, uma vez que, neste caso, a função não tem nenhuma das propriedades admitidas tacitamente como gerais: ela não pode ser escrita como uma expressão analítica (segundo Dirichlet); não pode ser representada por uma série de potências; e não é contínua em nenhum ponto (além do que também não é derivável nem integrável). Logo, o exemplo de Dirichlet só pode ser visto como uma função se este conceito for entendido como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas.

A teoria das séries trigonométricas já havia levado Fourier a afirmar que uma função é dada por uma sequência de valores arbitrários das ordenadas. Estas ordenadas se sucedem de um modo qualquer e independentemente umas das outras, sem precisar obedecer a nenhuma lei comum. Dirichlet irá desenvolver, mais detalhadamente, esta concepção.

No primeiro artigo, de 1829, escrito em francês, o autor não define o que é uma função, mas discute problemas relacionados à continuidade das funções estudadas por Cauchy e Fourier. Uma versão revisada deste primeiro texto foi publicada em alemão em 1837, contendo uma definição bastante citada:

> "Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se, a cada x, corresponde um único y finito de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x neste intervalo. Para isto, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas" (Dirichlet, [46], pp. 135-136).

Antes de tudo, observamos que esta definição enfatiza o fato de que, dadas duas quantidades variáveis x e y, para que y seja uma função de x, não é necessário que exista uma expressão algébrica associando esta variável a x. Além disso, para que a função esteja bem determinada, $y=f(x)$ deve receber apenas um valor para cada x. A exigência de que para cada x temos somente um valor para y também está presente na definição conjuntista que aprendemos na escola, mas a concepção de Dirichlet é independente da noção de conjunto.

Esta definição vislumbra uma função como uma relação mais geral entre duas variáveis, o que permite que Dirichlet enuncie as condições para que ela possa ser representada por uma série de Fourier em um intervalo $(-l, l)$. Dentre elas, destacamos:

1. ser bem definida, ou seja, cada um dos valores da ordenada ser determinado univocamente pelo valor da abscissa;

2. ter um número finito de descontinuidades no intervalo (-l,l).

Apesar do que ele considerava como "arbitrário" ser mais um caso particular do que nós entendemos por este adjetivo, parecia importante, naquele momento, afirmar a generalidade como forma de questionar a redução da prática matemática ao escopo das expressões analíticas.

Estas expressões, compostas por operações aritméticas simples, foram, durante muitos anos, o principal objeto de estudo da análise matemática, sobretudo no século XVIII. Com o passar do tempo, outras propriedades tornaram-se importantes de se destacar e classes de função foram introduzidas, a partir de novos problemas, como as funções unívocas, contínuas, descontínuas em pontos isolados, diferenciáveis e etc. Estas propriedades eram independentes das possibilidades de se representar uma função analiticamente. Esta é a principal diferença entre a concepção típica da análise matemática do século XVIII e da teoria das funções fundada no século XIX. As propriedades das funções estudadas deixam de ser deduzidas das suas expressões analíticas e passam a definir, *a priori*, uma classe de funções a ser considerada.

Não queremos dizer, com isso, que a noção de função defendida por Dirichlet foi imediatamente incorporada pela Matemática da época. Sua definição só foi popularizada pelo tratado publicado por H. Hankel em 1870.

Uma noção abstrata de função também será empregada por Riemann, a partir dos anos 1850. Ele propõe uma extensão do conceito de integral que consolidará a definição arbitrária de função, uma vez que seus estudos fazem intervir, de modo sistemático, funções reais descontínuas. Riemann irá se preocupar, portanto, em estabelecer uma teoria das funções a partir somente de suas propriedades.

Veremos no final deste capítulo que, após a consideração de funções patológicas, ou de funções definidas em domínios mais amplos que o dos números reais, o conceito de função passou a ser visto como um tipo especial de relação entre conjuntos. Esta visão foi reforçada com o surgimento da teoria dos conjuntos e sua preocupação em dar um tratamento axiomático à Matemática. Com isto, uma "variável" passou ser vista apenas como um elemento de um conjunto, À noção dinâmica de função, herdada da física, substitui-se uma noção estática.

6.5 Cauchy e a nova noção de rigor na análise

A revolução francesa modificou radicalmente o papel dos matemáticos na França e sua atuação na sociedade. A criação das "Grandes Écoles", nas quais alguns dos melhores matemáticos da época foram professores, introduziu uma componente na atividade Matemática, o ensino, que teria consequências importantes para a evolução da própria Matemática. Enquanto os matemáticos eram membros de academias científicas, mantidos por governantes, geralmente por questão de prestígio, sua obrigação era gerar novos conhecimentos, comunicados frequentemente de maneira informal, por cartas, por exemplo, a colegas matemáticos. Quando o matemático é professor, com a obrigação de expor um campo da Matemática para principiantes, muitos dos quais não almejavam tornar-se matemáticos mas sim engenheiros, oficiais do exército, etc, surge a necessidade de organizar e expor com clareza o campo em questão. A partir desta época, muitos novos métodos e resultados aparecem em primeiro lugar nos livros-texto que consistiam nas lições dadas nas "Grandes Écoles" ou em universidades. Como professor da École Polytechnique, Lagrange publicou sua *Théorie das Fonctions Analytiques*, em 1798, e Cauchy alguns anos mais tarde, em 1821, seu *Cours d'analyse algébrique*.

Um dos fatores que impulsionaram a transformação da análise na época é o fato de que a grande maioria dos matemáticos militantes estavam empenhados no ensino, e portanto tinham que reorganizar didaticamente as teorias matemáticas. Isso significa isolar os princípios fundamentais da teoria (em análise, o conceito de função, continuidade, limite, derivada, integral, etc.) e destes conceitos deduzir o corpo da teoria. A partir desta época, tempos os tratados escritos por matemáticos franceses, como Lacroix, Lagrange e Cauchy.

Nos últimos anos do século XVIII, Laplace adquiriu grande poder na cena francesa e passou a incentivar uma padronização do ensino na Escola Politécnica, com base na análise e na mecânica. O curso de análise devia ser divido em três partes: análise pura (ou análise algébrica); cálculo diferencial; e cálculo integral. A ênfase no lado teórico do ensino e nos fundamentos foi predominante durante a primeira década do século XIX. Depois, a orientação da École mudou radicalmente, passando a se voltar para a formação de engenheiros. Foi decidido que era necessário remover do programa de ensino todo o conhecimento que não fosse essencial para a prática profissional.

Cauchy assumiu a cadeira de análise na Escola Politécnica em 1816 e tratou de reformar radicalmente o curso. A direção não ficou satisfeita de início, pois a abordagem escolhida por ele, por ser muito teórica, ia além das demandas de um curso de engenharia e gerava resistência por parte dos alunos. Depois da mudança de orientação, os professores deveriam introduzir a análise de forma sucinta e conveniente para a mecânica, com ênfase nas suas aplicações. Como forma de resistência, Cauchy decidiu escrever a série de aulas introdutórias que constituem o seu *Cours d'analyse algébrique*. Esta obra contém os fundamentos do tipo de ensino defendido por Cauchy que não segue o método dos antigos.

Este é o primeiro livro-texto no qual a nova visão da análise se fez presente. Os métodos empregados em problemas físicos, como o das cordas vibrantes ou da propagação do calor, faziam uso de novos conceitos, como os de função, continuidade e convergência, que demandavam definições mais precisas. Por exemplo, a obra de Cauchy estabelece critérios para a convergência de séries e define os coeficientes da série trigonométrica que pode representar uma função qualquer, já denominada na época *série de Fourier*.

Uma das características mais importantes do movimento que se inicia com Cauchy é a conscientização, por parte dos matemáticos, de que só poderiam ser usadas propriedades que tivessem sido explicitamente definidas. Ou seja, a definição de função, bem como sua propriedade de continuidade, por exemplo, não deviam ser pressupostas implicitamente, mas definidas explicitamente. A noção de função será então definida antes das noções de continuidade, limite e derivada.

Os trabalhos anteriores sobre as séries de Fourier traziam o problema de se conhecer o comportamento de uma função definida como a soma de uma série de funções. Por exemplo, se estas funções forem contínuas em um ponto, acontecerá o mesmo com a soma da série naquele ponto? Antes de Cauchy, não se formulava a questão de definir com exatidão o que é continuidade de uma função. As conceituações apresentadas se baseavam na percepção visual e intuitiva.

A preocupação com o rigor de Cauchy era expressa pelo cuidado de definir, sempre que possível, o domínio de validade de uma definição ou de um teorema. Esta motivação o levou a introduzir as novas noções de convergência de séries e de continuidade, bem como a fornecer provas de existência, como a de somas de séries e das soluções de equações diferenciais. Foi justamente a arquitetura proposta por Cauchy, vista em seu conjunto, mais do que o modo de definir este ou aquele conceito, ou de demonstrar este ou aquele teorema, que funcionou como um divisor de águas na história da análise.

O rigor matemático é em si mesmo um conceito histórico e, portanto, em transformação. Os matemáticos do século XVIII eram rigorosos de acordo com os padrões do seu tempo. Mas, segundo Grabiner ([71]), quando um matemático do século XIX pensava em rigor na análise, ele tinha três coisas em mente:

1. todo conceito teria que ser definido explicitamente em termos de outros conceitos cujas naturezas fossem firmemente conhecidas;
2. os teoremas teriam que ser provados e cada passo deveria ser justificado por outro resultado admitido como válido;
3. as definições escolhidas e os teoremas provados teriam que ser suficientemente amplos para servir de base à estrutura de resultados válidos pertencentes.

O conteúdo matemático do *Cours d'analyse* se inicia com uma revisão dos diversos tipos de número. Mas, da mesma maneira que os demais matemáticos de sua época, Cauchy admitia como certo, ou como dado, o que, então, era aceito, sem precisão, sobre os números reais. Cauchy definia *função* a partir da distinção entre variáveis independentes e dependentes. Duas quantidades variáveis podem ser relacionadas de modo que, dados valores para uma delas, podemos obter os valores da outra, que será a ***função***:

> "Quando quantidades variáve-s são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente estas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de "variável independente"; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos *funções* desta variável." (Cauchy, [32], p.19)

Apesar do caráter geral desta definição, os comentários subsequentes mostram que Cauchy tinha em mente exemplos particulares de funções. Ele classifica as funções em simples e mistas. As simples são: $a + x$, $a - x$, ax, a/x, x^a, a^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$. As mistas são compostas das simples, como $\log(\cos x)$.

Apesar de não considerar o que designaríamos hoje como "funções arbitrárias", e admitir implicitamente as funções como associadas às curvas que as representam, o universo das funções tratadas por Cauchy é bem mais amplo do que o do século XVIII. Ele fornece um exemplo para criticar a definição de função descontínua de Euler, mostrando que a função "descontínua"

$$y = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

pode ser representada pela única equação

$$y = \sqrt{x^2}, \ -\infty < x < +\infty$$

Logo, ela seria também "contínua", no sentido de Euler. Isto mostra que não faz sentido classificar funções contínuas e descontínuas pela unicidade de sua expressão analítica, como era feito no século XVIII.

Além disso, Cauchy fornece exemplos de funções não analíticas, como $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, que não pode ser escrita como uma série de Taylor, contradizendo o pressuposto de Lagrange, que afirmava que todas as funções podiam ser expressas por uma série deste tipo.

Será preciso definir, de modo novo, o que é uma função contínua:

> "Seja $f(x)$ uma função da variável x e suponhamos que, para cada valor de x entre dois limites (cotas) dados, esta função admite sempre um valor finito bem determinado. Se, partindo de um valor de x situado entre estes limites, dermos à variável x um acréscimo infinitamente pequeno, a função sofrerá um acréscimo dado pela diferença
>
> $$f(x+\alpha) - f(x)$$
>
> que dependerá ao mesmo tempo da nova variável α e do valor de x. Posto isso, a função $f(x)$ será, entre os dois limites da variável x, uma função contínua desta variável, se, para cada valor de x intermediário entre estes limites, o valor numérico da diferença
>
> $$f(x+\alpha) - f(x)$$
>
> diminui indefinidamente com o de α" (Cauchy, [32], p. 34).

Feito isso, Cauchy reformula esta definição em termos de infinitésimos, após o que define derivada e integral.

No *Cours d'analyse* também se encontra a primeira apresentação abrangente dos números complexos. Nele, Cauchy trata não somente das propriedades algébricas mas também do que significa falar de limites no conjunto dos números complexos. Ele define continuidade de funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, suas derivadas e integrais. Para lidar com limites, Cauchy utiliza o conceito de *módulo* de um número complexo (Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, seu módulo, $|z|$ é definido por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$).

Exercícios

6.5. Dentre as inúmeras contribuições de Cauchy à Matemática temos a seguinte maneira de construir o corpo dos números complexos.

1. Considere o anel $\mathbb{R}[x]$, dos polinômios de uma variável e coeficientes reais.

   Seja o ideal de $\mathbb{R}[x]$ gerado pelo polinômio $x^2 + 1$. Prove que o anel quociente

   $$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}$$

   é um corpo, que será representado por $\mathbb{C}$.
2. Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, a classe de equivalência de $p(x)$ será será representada por $\overline{p(x)}$. Prove que podemos escolher, para representante de cada classe de equivalência, um único polinômio da forma $a + bx$. A classe $\overline{a + bx}$ será denotada por $a + b\,i$:

   $$a + b\,i = \overline{a + bx}.$$
3. Prove que $i^2 = -1$
4. Prove que o corpo dos números reais é um subcorpo de $\mathbb{C}$, por meio da correspondência

   $$y \leftrightarrow y + 0\,i, \;\; \forall y \in \mathbb{R}.$$

6.6. Sejam $U \subset \mathbb{R}$, uma função $f : U \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in U$.

1. Dê uma definição, com nosso simbolismo moderno, de continuidade da função f no ponto x_0.
2. Defina a continuidade de f em seu domínio U.
3. Defina a continuidade *uniforme* de f em U.
4. Na página 260 encontra-se a definição de Cauchy para o conceito de continuidade de uma função. Traduza-a para nossa linguagem simbólica atual.
5. Cauchy definiu continuidade ou continuidade uniforme?

6.7. Sejam V um subconjunto dos números complexos, $f : C \leftarrow \mathbb{C}$ uma função e $z_0 \in V$. Defina a continuidade de f no ponto z_0.

6.6 Funções e números reais: Dedekind e Cantor

Como vimos, Dirichlet havia mostrado que, para resolver o problema da convergência das séries de Fourier, é preciso investigar, em primeiro lugar, quando uma função é integrável em certo intervalo. Cauchy tinha tentado esclarecer o significado da integração e as condições que propôs serão aperfeiçoadas por Dirichlet (e mais tarde por Riemann).

Intuitivamente, se concebemos a integral como a área sob o gráfico de uma função, não é difícil entender que a estranha função proposta por Dirichlet não possui integral, no sentido clássico. Sendo descontínua em todos os pontos, ela não pode definir uma área.

Na verdade, este exemplo foi fornecido, nos últimos parágrafos do artigo de 1829, a fim de mostrar que as condições para que uma função pudesse ser integrada deviam ser definidas de modo mais preciso. Fourier já havia notado que, se queremos integrar uma função, seus valores em certo intervalo devem ser "atuais" e bem determinados, ou seja, o valor da função não pode ser infinito em nenhum ponto. Dirichlet acrescenta que, ainda que tenha valores finitos, a função também não pode ser descontínua, como no caso extremo do exemplo.

A partir da segunda metade do século XIX proliferarão exemplos de funções patológicas, sobretudo na segunda metade do século XIX, que levam à percepção da necessidade de se expandir a definição de função. Um exemplo famoso destes "monstros", como diziam alguns matemáticos da época, é a função construída por Weierstrass, que desafiava o senso comum da época.

Por volta de 1860, Weierstrass adotava uma definição semelhante à de Dirichlet, mas, em 1872, apresentou à Academia de Ciências de Berlim um exemplo de função contínua, mas que não é derivável em nenhum ponto. Este tipo de função contraria nossa intuição geométrica de que uma função traçada continuamente, por um desenho à mão livre, deve ser suave, salvo em pontos excepcionais, ou seja, ela não pode ter bicos em absolutamente todos os seus pontos.

Diversos exemplos contra-intuitivos surgiram na época. Riemann foi responsável por alguns deles, em seu estudo da integração; a investigação das séries trigonométricas também deu origem a funções estranhas, como a proposta por du Bois-Reymond (que é continua mas não pode ser desenvolvida em série de Fourier); Hankel e Darboux construíram outras funções patológicas e investigaram suas propriedades.

Antes, as funções surgiam de problemas concretos, como os de natureza física, mas agora elas surgiam do interior da Matemática, em seus esforços para delimitar os novos conceitos que vinham sendo forjados, e que deviam servir de fundamento para a análise, como os de função, continuidade e diferenciabilidade. Esta autonomia sinaliza a tendência crescente de se estabelecer as definições sobre bases abstratas, independentes da intuição sensível e da percepção geométrica.

Na função de Dirichlet, fica claro que sua plena compreensão depende do modo como os racionais e irracionais estão distribuídos sobre o eixo das abscissas, ou seja, sobre a reta numérica. As pesquisas sobre convergência que se seguiram ao estudo das séries de Fourier estabeleciam condições que também se baseavam na distribuição dos pontos sobre uma reta.

Na verdade, em meados do século XIX, diversos problemas matemáticos conduziam a um questionamento sobre o que é um numero real, e como os racionais e irracionais se distribuem na reta. O estudo da convergência de séries e o uso dos limites motivavam a análise dos números para os quais as séries convergem: como estes números se distribuem na reta, como uma sequência de números tende para números de outro tipo, que outras espécies de números podem surgir, etc...

Antes deste momento, supunha-se, de modo geral, que a reta continha todos os números reais, e não havia preocupação de se definir este tipo de número. Um exemplo disso foi visto acima, no estudo das raízes de uma equação de grau ímpar, ao se admitir que o gráfico de uma função, positiva (para x positivo) e negativa (para x negativo), deve cortar o eixo das abscissas em um ponto que é assumido como um número real.

A partir de 1870, Cantor irá se debruçar sobre o problema das séries de Fourier, investigando quando a série trigonométrica que representa uma função é única. Ele mostra que isto acontece se a série é convergente para todos os valores de x. Mas, em seguida, esta exigência é enfraquecida e, na busca de condições menos rígidas, conclui que a unicidade também pode ser verificada quando a série trigonométrica deixa de ser convergente, ou deixa de representar a função, em um número finito de pontos excepcionais. Logo depois, Cantor refina o argumento, percebendo que sua conclusão ainda é valida se o número destes pontos excepcionais é infinito, contanto que eles estejam distribuídos sobre a reta de um modo específico. Para estudar esta distribuição dos pontos, era necessário descrever os números reais de um modo mais meticuloso e detalhado, sem supor implicitamente, e de modo vago, que estes números eram dados pelos pontos da reta. Não entraremos nos detalhes do problema, pois queremos destacar somente a conexão entre o estudo das séries trigonométricas e a conceitualização dos números reais.

O trabalho de Cantor sobre este assunto foi publicado em 1872, mas Dedekind já vinha refletindo sobre os números reais e sobre a necessidade de estudá-los mais a fundo. Em um trabalho publicado em 1872 ([41]), fazendo referência a reflexões anteriores, este último afirma que:

> "Discutindo a noção de aproximação de uma quantidade variável em direção a um valor limite fixo (...) recorri a evidências geométricas (...) É tão frequente a afirmação de que o cálculo diferencial lida com quantidades contínuas, e uma explicação desta continuidade ainda não é dada" (Dedekind, [41], pp.1-2).

A fim de caracterizar a continuidade, Dedekind julgava necessário investigar suas origens aritméticas. Foi o estudo aritmético da continuidade que levou à proposição dos chamados "cortes de Dedekind". Ele começou por estudar as relações de ordem no conjunto dos números racionais, explicitando verdades tidas como óbvias, por exemplo: se $a>b$ e $b>c$ então $a>c$. A partir daí, ele deduziu propriedades menos evidentes, como a de que há infinitos números racionais entre dois racionais distintos a e c. Dedekind nota que um racional a qualquer divide os números racionais em duas classes A_1 e A_2, a primeira contendo os números menores que a, e a segunda contendo os números maiores que a. Podemos concluir, assim, que qualquer número em A_1 é menor do que um número em A_2.

Comparando os racionais aos pontos da reta, ele observou que existem mais pontos na reta do que os que podem ser representados como números racionais. Mas como definir estes números? A argumentação de Dedekind recorre aos gregos, afirmando que eles já sabiam da existência de grandezas incomensuráveis. Mas não é possível usar a reta para definir os números aritmeticamente, pois os conceitos matemáticos não devem ser estabelecidos com base na intuição geométrica. Logo, era necessária a criação de novos números tal que "o domínio descontínuo dos números racionais, $\mathbb{Q}$, possa ser tornado completo para formar um domínio contínuo", como era o caso da linha reta (Dedekind, [41], p. 6). A palavra usada para designar a propriedade da reta que distingue os reais dos racionais é "continuidade", que seria equivalente ao que chamamos de "completude". Apesar de Dedekind afirmar que é preciso "completar" os racionais, este termo não é empregado em sentido técnico.

Até este momento, a continuidade dos reais não era justificada porque não era demandada explicitamente, ou seja, tratava-se de uma pressuposição implícita dos matemáticos. A elaboração de uma teoria aritmética da reta, associada a um contínuo numérico, será iniciada somente no século XIX, com Dedekind. Isto não quer dizer que os matemáticos anteriores falhassem, ou fossem negligentes em relação rigor. Simplesmente a continuidade era um dado, e não um problema.

Dedekind expõe a questão em uma correspondência com Lipschitz, em 1876, afirmando que a continuidade do domínio das quantidades era uma pressuposição implícita dos matemáticos, além da noção de quantidade não ser definida de modo preciso. Até ali, os objetos da Matemática, as quantidades, existiam, e a necessidade de definir sua existência não se colocava. Ao contrário destas suposições, no texto publicado em 1888, ele insiste que o fenômeno do corte, em sua pureza lógica, não tem nenhuma semelhança com a admissão da existência de quantidades mensuráveis, uma noção que ele rejeita veementemente (Dedekind, [42]).

A construção dos reais será feita a partir dos racionais, considerados como dados. para definir estes novos números, Dedekind propôs transferir para o domínio dos números a propriedade que traduz, segundo ele, a essência da continuidade da reta: o fato de que todos os pontos da reta estão em uma de duas classes, de modo que, se todo ponto da primeira classe está à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe apenas um ponto que produz esta divisão.

Como os racionais podem ser representados na reta numérica, o ponto que divide os racionais em duas classes A_1 e A_2 será chamado um "corte" dos racionais. Todo número racional a determina um corte deste tipo, tal que a é o maior número em A_1, ou o menor em A_2. Mas não há somente cortes racionais.

Ilustração da completude da reta

Exemplo 1 (corte racional): Definimos o conjunto A_2 contendo os racionais menores que 1 ($A_2 = \{q \in Q | q < 1\}$) e A_1 contendo os outros racionais, ou seja, $A_1 = Q - A_2$. O número que produz o corte é o racional 1, neste caso temos o exemplo de um corte racional.

Ilustração da completude da reta

Exemplo 2 (corte irracional): Definimos A_2 contendo os racionais positivos cujo quadrado é maior que 2, e A_1 contendo os outros racionais, ou seja:
$A_2 = \{q \in Q | q^2 > 2\} \cup \{q \in Q | q > 0\}$ e $A_1 = Q - A_2$.
O número que produz o corte não é racional, pois deve ser um número cujo quadrado é 2, ou seja, $\sqrt{2}$. Reside justamente nesta propriedade a incompletude, ou a descontinuidade, dos racionais.
A Figura 6.3 mostra alguns elementos de A_1 e A_2 para este segundo exemplo.

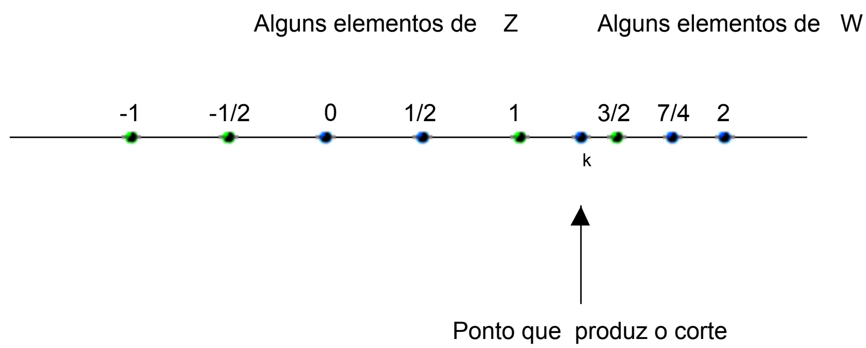


Figura 6.3

Para obter um conjunto numérico que traduza fielmente a continuidade da reta, Dedekind usa um procedimento que se tornará muito frequente em Matemática. Sempre que encontrarmos um número não racional produzindo um corte, deveremos incluir este número na nova categoria a ser criada, que deve incluir racionais e não racionais. Ou seja, quando o corte é um número irracional, este número será reunido aos racionais formando um conjunto, que gozará da propriedade de continuidade da reta, chamado "conjunto dos números reais". Com esta operação, este conjunto não será mais admitido como dado, mas definido de modo preciso.

Os estudos de Cantor e Dedekind sobre o conjunto dos números reais darão origem a uma multiplicidade de novas perguntas envolvendo os seus subconjuntos. Por exemplo: Há mais números racionais ou irracionais? Como enumerar estes números?

No estudo da representação de uma função qualquer por uma série trigonométrica, Cantor já admitia que esta série pudesse ser descontínua em infinitos pontos, contanto que estes pontos se comportassem de um modo específico. Este "modo específico" está relacionado justamente à continuidade dos reais.

É possível que um conjunto infinito de pontos, como os racionais, não complete a reta. A principal propriedade dos números racionais, que os torna essencialmente distintos dos reais, é o fato de eles poderem ser enumerados. O que é isso? Eles são pontos discretos, não imbricados entre si, logo podemos associá-los a números naturais e contá-los. O resultado desta contagem será um número infinito, mas ela permite enumerar os racionais.

Esta propriedade levará Cantor a concluir que o conjunto dos números racionais é infinito de uma maneira distinta do conjunto dos números reais, que não podem ser enumerados. Este procedimento de "enumeração" dos elementos de um conjunto é feita por meio da associação de cada um destes elementos a um número natural. Esta associação é definida como uma função de um conjunto no outro, uma correspondência biunívoca entre seus elementos.

Neste contexto surgirá a ideia de função como uma correspondência entre dois conjuntos numéricos. Se x é um elemento do conjunto dos reais, e n um elemento do conjunto dos naturais, pode ser estabelecida uma correspondência entre x e n, de modo que cada elemento de um conjunto seja associado a um e somente um elemento do outro?

Esta é a pergunta que Cantor formula para Dedekind em 1873. Ele mesmo provou que é impossível encontrar uma tal correspondência, o que estabeleceu uma diferença fundamental entre o número de elementos (cardinalidade) do conjunto de números reais e o número de elementos do conjunto dos números naturais.

O conceito de correspondência biunívoca servirá de base para a constituição da nova teoria dos conjuntos, por volta de 1879. Dois conjuntos têm a mesma "potência" se existe uma correspondência biunívoca entre seus elementos. Os conjuntos que possuem a mesma potência dos naturais são chamados "enumeráveis", e os outros são "não enumeráveis". A resposta ao critério para que uma série trigonométrica represente uma função, fornecida por Cantor, repousa sobre esta diferenciação, e esta resposta é afirmativa no caso de a série deixar de convergir em infinitos pontos, contanto que eles formem um subconjunto enumerável da reta.

Dedekind dará os próximos passos no desenvolvimento da teoria dos conjuntos, ao propor a caracterização dos naturais e racionais em termos de conjuntos. Para ele, os números naturais formam um conjunto de "coisas" ou "objetos de pensamento". Acontece, frequentemente, que, por alguma razão, coisas distintas a, b, c, ... podem ser entendidas a partir de um mesmo ponto de vista. É o caso dos números: coisas distintas são entendidas sob um mesmo ponto de vista quando consideradas a partir de seus números. Neste caso, podemos dizer que estas coisas formam um conjunto. Em seguida, Dedekind enuncia as relações básicas envolvendo conjuntos, que se tratam das noções que conhecemos hoje de subconjunto, união e interseção.

A partir dos anos 1880, Dedekind e outros matemáticos, como Frege e Peano, propuseram construções do conjunto dos naturais, com as quais provaram suas principais propriedades. Cantor e Dedekind já tinham caracterizado os reais e seus trabalhos, juntamente com as contribuições de Weierstrass, foram responsáveis por fundar a análise sobre novas bases.

Exercícios

6.8. Para provar que o conjunto dos números reais não é enumerável, Cantor introduziu seu famoso *processo de diagonalização*, um novo método de demonstração.

Suponha que o conjunto $\mathbb{R}$ é enumerável. Então, seus elementos podem ser postos em correspondência biunívoca com os números naturais, e podemos escrever que

$$\mathbb{R} = \{x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, , x_n,\, \ldots\}.$$

Escrevamos desenvolvimentos dos elementos de $\mathbb{R}$ no sistema de numeração decimal:

$$x_1 = p_1, a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\ldots a_{1,n}\ldots$$

$$x_2 = p_2, a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\ldots a_{2,n}\ldots$$

$$x_3 = p_3, a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\ldots a_{3,n}\ldots$$

$$\ldots$$

$$x_n = p_n, a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\ldots a_{n,n}\ldots$$

$$\ldots$$

Nestas representações, o número p_i é a parte inteira de x_i.

Considere agora o número x dado pelo seguinte desenvolvimento decimal

$$x = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots,$$

no qual os b_i são definidos como segue:

$$\forall i, b_i \neq a_{i,i}.$$

Ora, este número é diferente de cada x_i, e portanto não pode constar da lista $x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, , x_n,\, \ldots$, o que é uma contradição, pois supusemos que todos os números reais constam da lista.

Prove que realmente o número x é diferente de cada x_i.

6.9. Os *cortes de Dedekind* não são a única maneira de tornar rigoroso o conceito de número irracional. O matemático francês Charles Méray, em 1872, em um livro de cálculo infinitesimal para o ensino, entitulado *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, construiu os irracionais como segue. [3]

Definição: Uma sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de números racionais é de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe N_ϵ tal que

$$\forall r,\, s > N_\epsilon, \quad |x_r - x_s| < \epsilon.$$

Seja $\mathbb{M}$ o conjunto de todas as sequências de números racionais que são de Cauchy.

Introduza a seguinte relação em $\mathbb{M}$:

Se $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são elementos de $\mathbb{M}$, dizemos que eles são *equivalentes* $[(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (y_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$, existeN_ϵ tal que

$$\forall r,\, s > N_\epsilon, \quad |x_r - y_s| < \epsilon.$$

1. Prove que a relação "$\sim$" definida acima é uma relação de equivalência.

   A classe de equivalência da sucessão $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ será representada por $\overline{x}$. O quociente $\mathbb{M}/\sim$ será representado por $\overline{\mathbb{M}}$.
2. Defina $\overline{x} + \overline{y} = \overline{(x_i + y_i)}$ e $\overline{x \times y} = \overline{x_i \times y_i}$. Prove que estas operações estão bem definidas em $\overline{\mathbb{M}}$ (isto é, seus resultados independem dos representantes de classes escolhidos).
3. Seja $\mathbb{Q}$ o campo dos números racionais, isto é, o conjunto dos números racionais com as operações e a relação de ordem usuais. Prove que $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{M}}$.
4. Mostre que a relação de ordem "$<$" em $\mathbb{Q}$ pode ser estendida, de maneira natural, a uma relação de ordem em $\overline{\mathbb{M}}$.
5. Prove que, com as operações e a relação de ordem definidas acima $\overline{\mathbb{M}}$ é um corpo ordenado.
6. Prove que qualquer sucessão de Cauchy em $\mathbb{Q}$, interpretada como uma sucessão de elementos de $\overline{\mathbb{M}}$ tem um limite. Ou seja, $\overline{\mathbb{M}}$ é um corpo ordenado completo.

[3]Na exposição a seguir, modernisamos o método seguido por Méray para facilitar seu entendimento.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é, **por definição**, o conjunto $\overline{\mathbb{M}}$ com as operações de soma e produto e a relação de ordem definidas acima.

Assim, os números irracionais podem ser definidos como classes de equivalência de sucessões de Cauchy com elementos em $\mathbb{Q}$.

6.10. Normalmente, nos referimos ao "conjunto dos números reais", sem explicitar que muito mais está envolvido: $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, isto é,

- $\mathbb{R}$ é um corpo.
- Existe em $\mathbb{R}$ uma relação de ordem, $<$, compatível com as operações de corpo.
- Toda sequência de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$ converge para um elemento de $\mathbb{R}$.

Assim, não é suficiente definir os números irracionais como *cortes de Dedekind*. É necessário definir a *adição e o produto de cortes* e uma relação de ordem entre cortes, compatível com as operações definidas.

Dados dois cortes de Peano, c_1 e c_2, defina $c_1 + c_2$ e $c_1 \times c_2$. Defina uma relação de ordem entre cortes e prove que ela é compatível com as operações definidas.

6.7 Exercícios suplementares

6.11. Houve, ao longo de muitos séculos, uma ampliação crescente dos campos numéricos, ou seja, do que são considerados números e das operações com os mesmos. De maneira historicamente incorreta, pode-se dizer que houve uma ampliação sucessiva $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Nos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, pode-se sempre "comparar" dois elementos, ou seja neles existe uma *relação de ordem* "$<$" tal que, dados dois números x e y, então ou

1) $x = y$

ou

2) $x < y$

ou

3) $x > y$.

Nos conjuntos dos números inteiros, racionais e reais, pode-se mesmo afirmar que se x, y são ambos maiores do que 0, então

4) $x + y > 0$;

5) $x \times y > 0$

6) Se $x \neq 0$, então temos somente uma das seguintes alternativas $x > 0$ ou $-x > 0$.

Demonstre que é impossível definir uma relação de ordem no conjunto dos números complexos com estas propriedades.

6.12. Sejam A um conjunto e X um subconjunto de A, $X \subseteq A$. Defina a *função característica de* X, $f_X : A \to \{0,1\}$, da seguinte maneira: Se $x \in X$, $f_X(x) = 1$. Se $x \notin X$, $f_X(x) = 0$.

- Prove que existe uma correspondência bijetora entre o conjunto das partes de A e o conjunto de todas as funções características definidas em A.

6.13. Considere um conjunto A e o conjunto das partes de A, $P(A)$, ou seja, o conjunto de todos os subconjuntos de A:

$$P(A) = \{X \in A | X \subseteq A\}.$$

- Prove que se a cardinalidade de A é n, então a cardinalidade de $P(A)$ é 2^n. Assim, a cardinalidade do conjunto das partes de A, é estritamente maior do que a cardinalidade de A.
- Agora, seja A um conjunto qualquer. Mostre que ainda é verdade que a cardinalidade de A é estritamente menor do que a cardinalidade de $P(A)$.

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, Asger. *Episodes from the early history of mathematics*.Washington, DC: Mathematical Association of America, 1964.

[2] AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da Matemática*. Coleção Fundamentos da Matemática elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[3] ABDELJAOUAD, M.. Le manuscrit mathématique de Djerba: Une pratique de symboles algébriques maghrebines en pleine maturité. *Actes du 7ème Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes*. Marrakech: ENS de Marrakech, 2002.

[4] ARGAND, Jean-Robert. "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques". *Annales de Mathématiques de Gergonne*, tome IV, 1813-1814. Reimpressão: Paris, Blanchard, 1971.

[5] ARTMANN, Benno. *Euclid*: *the creation of mathematics*. New York: Springer, 1999.

[6] ASPER, Markus. The two cultures of mathematics in ancient Greece. In ROBSON, Eleanor and STEDALL, Jacqueline. *The Oxford handbook of the history of mathematics*. Oxford, GB: Oxford U. Press, 2008, pp. 107-132.

[7] BARBIN, Evelyne et autres. *Histoires de logarithmes.* Paris: Ellipses, 2006.

[8] BARBOSA, João Lucas. *Geometria euclidiana plana*. Coleção Fundamentos da Matemática elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[9] BARON, Margaret E. *The origins of the infinitesimal calculus*. Oxford, GB; New York: Pergamon Press, 1969. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2003.

[10] BARON, Margaret E. *A Matemática grega*. Curso de história da Matemática – Orígens e desenvolvimento do cálculo, Unidade 1. Brasília, DF: Editora da UnB, 1974.

[11] BARON, Margaret E. *Indivisíveis e infinitésimos*. Curso de história da Matemática – Orígens e desenvolvimento do cálculo, Unidade 2. Brasília, DF: Editora da UnB, 1974.

[12] BARON, Margaret E. *Newton e Leibniz*. Curso de história da Matemática – Orígens e desenvolvimento do cálculo, Unidade 3. Brasília, DF: Editora da UnB, 1974.

[13] BASHMAKOVA, I. G. and G. S. SMIRNOVA.*The beginnings and evolution of algebra*, translated from the Russian by Abe Shenitzer, with the editorial assistance of David A. Cox. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 2000.

[14] BICUDO, Irineu (tradutor e organizador). *Os elementos*. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

[15] BOS, Henk J. M. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol.14, pp.1-90, 1974.

[16] BOS, Henk J. M. *O cálculo no século XVII: Fundamentos*. Curso de história da Matemática – Orígens e desenvolvimento do cálculo, Unidade 4. Brasília, DF: Editora da UnB, 1974.

[17] BOS, Henk J. M. *O cálculo no século XVII: Técnicas e aplicações*. Curso de história da Matemática – Orígens e desenvolvimento do cálculo, Unidade 5. Brasília, DF: Editora da UnB, 1974.

[18] BOS, Henk J. M. *Redefining geometrical exactness*: *- Descartes' transformation of the early modern concept of construction.* . New York: Springer, 2001.

[19] BOTTAZZINI, U. *The Higher Calculus:A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer Verlag, 1986.

[20] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

[21] BURKERT, W. *Lore and science in ancient pythagoreanism*. Cambridge: Harvard University Press, 1972.

[22] CAJORI, Florian. *Uma história da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[23] CANTOR, Moritz Beneditk. *Vorlesungen über Geschchicte der Mathematik*, 4 Bände. Leipzig: B.G. Teubner, 1894-1908. Reprinted by Johnson reprint corporation, New York, 1965.

[24] CARDANO, Girolamo. *The rules of algebra* (*Ars Magna*). Translated by T. R. Witmer. New York: Dover, 2007.

[25] CARNOT, Lazare. *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*. Paris: Blanchard, 1970.

[26] CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *Três excursões pela história da Matemática*. Rio de Janeiro: Intermat, 2008.

[27] CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Equivalência e aplicação de áreas. In CARVALHO, J. B. P.. *Três excursões pela história da Matemática*. Rio de Janeiro: Intermat, 2008, pp 5-30.

[28] CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Os três problemas clássicos. In CARVALHO, J. B. P.. *Três excursões pela história da Matemática*. Rio de Janeiro: Intermat, 2008, pp 31-54.

[29] CARVALHO, João Bosco Pitombeira. A equação do segundo grau. In CARVALHO, J. B. P.. *Três excursões pela história da Matemática*. Rio de Janeiro: Intermat, 2008, pp 55-88.

[30] CARVALHO,João Bosco Pitombeira. *A raiz quadrada ao longo dos séculos*. João Pessoa: V Bienal da SBM, 2010.

[31] CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *A construção, por Euclides, do pentágono regular*. João Pessoa: V Bienal da SBM, 2010.

[32] CAUCHY, Agustin-Louis. *Cours D'Analyse de L'École Polytechnique- 1re Partie. Analyse Algébrique*. Paris: Imprimerie Royale, 1821; Paris: Jacques Gabay, 1989.

[33] CAUCHY, Agustin-Louis. *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal.*Tome Premier. Paris: Imprimerie Royale, 1823; Paris: ACL Éditions, 1987.

[34] CAVEING, Maurice. *La constitution du type mathématique de l´idéalité dans la pensée Grecque*. Vol. 1: *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l´Egypte anciennes*. Lille: Presses Universitaires de Lille, 1994.

[35] CAVEING, Maurice. *La constitution du type mathématique de l´idéalité dans la pensée grecque*. Vol. 2: *La figure et le nombre. Recherches sur les premières mathématiques des Grecs*. Villeneuve d´Ascq: Presses Universitaires du Septentrion, 1997.

[36] CAVEING, Maurice. *La constitution du type mathématique de l´idéalité dans la pensée grecque*. Vol. 3: *L´irrationalité dans les mathématiques Grecques jusqu´à Euclides*. Villeneuve d´Ascq: Presses Universitaires du Septentrion, 1998.

[37] CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES – IREM DE BASSE-NORMANDIE. *Aux origines du calcul infinitésimal*. Paris: Ellipses, 1999.

[38] CHACE, Arnold Buffum. *The Rhind mathematical papyrus*: *free translation and commentary with selected photographs, transcriptions, transliterations, and literal translations*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1979.

[39] COSTA, S. "O *Método* de Arquimedes". L.M. Carvalho, H.N. Cury, C.A. de Moura, J.Fossa e V. Giraldo, *História e tecnologia no ensino da Matemática* (V. II). Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

[40] D'ALEMBERT, Jean Le Rond. *Réflexions sur la cause générale des vents.* Paris, 1747.

[41] DEDEKIND, Richard. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg, 1872. Incluido em *Gesammelte Mathematische Werke*, Vols. 1-3, R. Fricke, E. Noether und Ø. Ore, (eds.). Braunschweig: Vieweg, 1930-1932. Republicado por New York: Chelsea Publishing Company, 1969.

[42] DEDEKIND, Richard. *Was sind und was sollen die Zahlen*? Braunschweig: Vieweg, 1888. Incluido em *Gesammelte Mathematische Werke*, Vols. 1-3, R. Fricke, E. Noether e Ø. Ore, (eds.). Braunschweig: Vieweg, 1930-1932. Traduzido como *What are numbers and what should they be*? H. Pogorzelski, W. Ryan and W. Snyder, (eds.) and (trans.). Orono, Maine: Research Institute for Mathematics, 1995.

[43] DESCARTES, René. *The geometry*. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. New York: Dover, 1954.

[44] DHOMBRES, Jean. *Nombre, mesure et continu*. Paris: Cedic/Fernand Nathan, 1978.

[45] DIJKSTERHUIS, Eduard Jan. *Archimedes*. Translated by C. Dikshoorn; with a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1987.

[46] DIRICHLET, Johann Peter Gustav Lejeune. Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus - und Cosinusreihen. *Repertorium der Physik*, 1, 1837, 152-174. *Werke*, 1, 135-160.

[47] DREYER, J. L. E.: *A History of astronomy from Thales to Kepler*. New York: Dover, 1953.

[48] DUTKA, Jacques. "On square roots and their representations". *Archive for History of Exact Sciences* Volume 36, n.1, (Dez 2004), pp. 21-39.

[49] ENRIQUES, Federigo: *Gli elementi d'Euclide e la critica antiga e moderna. Libri* V-IX. Edita da Federigo Enriques col concorso di diversi collaboratori. Bologna: Nicola Zanichelli, 1930.

[50] ENRIQUES, Federigo: *Gli Elementi d'Euclide e la critica antiga e moderna. Libro* X. Edita da Federigo Enriques col concorso di diversi collaboratori. Bologna: Nicola Zanichelli, 1932.

[51] ENRIQUES, Federigo: *Gli Elementi d'Euclide e la critica antiga e moderna. Libri* XI-XIII. Edita da Federigo Enriques col concorso di diversi collaboratori. Bologna: Nicola Zanichelli, 1956.

[52] EUCLIDES: *Les éléments*: traduits du texte de Heiberg / Euclide d'Alexandrie. Trad. et commentaires par Bernard Vitrac. - Introduction générale; Livres I - IV: Géométrie plane. Paris: Presses Univ. de France: 1. éd. - 1990.

[53] EUCLIDES: *Les éléments*: traduits du texte de Heiberg / Euclide d'Alexandrie. Trad. et commentaires par Bernard Vitrac. - Livres V - VI: Proportions et similitude; Livres VII - IX: Arithmétique. Paris: Presses Univ. de France: 1. éd. - 1994.

[54] EUCLIDES: *Les éléments*: traduits du texte de Heiberg / Euclide d'Alexandrie. Trad. et commentaires par Bernard Vitrac. Livres X: Grandeurs commensurables et incommensurables, classification des lignes irrationelles. Paris: Presses Univ. de France: 1. éd. - 1998.

[55] EUCLIDES: *Les éléments*: traduits du texte de Heiberg / Euclide d'Alexandrie. Trad. et commentaires par Bernard Vitrac. - Livres XI-XIII: Géométrie plane. Paris: Presses Univ. de France: 1. éd. - 1990.

[56] EULER, Leonhard. *Introduction to analysis of the infinite*, 2 vol.; Translated by John D. Blanton. New York: Springer-Verlag, 1988-1990. Original: *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748. **8-9**.

[57] EVES, Howard. *An introduction to the foundations and fundamental concepts of mathematics*. New York: Rinehart, 1965.

[58] EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. (Coleção Repertórios). Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.

[59] FAUVEL, John and GRAY, Jeremy. *The history of mathematics*: *A reader*. Basingstoke, Englad: Macmillan Education in association with the Open University, 1987.

[60] FERMAT, Pierre de. *Oeuvres*. TANNERY, Paul et HENRY, C. (eds.). Paris: Gauthier-Villars, 1891-1922. Disponível em http://name.umdl.umich.edu/ABR8792.

[61] FIBONACCI, Leonardo. *Fibonacci's Liber abaci*: a *translation into modern English of Leonardo Pisanos Book of calculation*. New York: Springer, 2002.

[62] FLAMENT, Dominique. *Histoire des nombres complexes*: *Entre algèbre et géométrie*. Paris: CNRS Éditions, 2003.

[63] FOWLER, David H. *The mathematics of Plato's academy*: *a new reconstruction*. Oxford: Clarendon Press, 2nd ed., 1999.

[64] FOWLER, David and ROBSON, Eleanor. Square roots approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context. *Historia mathematica*, 25, 1998, 366-378.

[65] FRIED, Michael N. and UNGURU, Sabetai. *Apollonius of Perga's conica*: *text, context, subtext*. (Mnemosyne, Supplementum 222). Leiden: Brill, 2001.

[66] GAUSS, Carl Friedrich. *Disquisitiones Arithmeticae*. Werke, vol 1, König. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1870. English translation by Arthur Clarke, S.J. New Haven, Conn: Yale University Press, 1966.

[67] GIBERSON, Shaun and Thomas J. OSLER. Theon's ladder to any square root. *The college mathematics journal*, vol. 35, n. 3 (May 2004), pp. 222-226.

[68] GILLINGS, Richard J. *Mathematics in the time of the pharaohs*. Cambridge, MAS: The MIT Press, 1972.

[69] GIRARD, Albert. *invention nouvelle en l´algèbre*. Amsterdam, 1629.

[70] GONÇALVES, Carlos H. B. e POSSANI, Cláudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. *Matemática Universitária*, v.47, p. 16–24, 2009.

[71] GRABINER, J.V. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge, MA: MIT, 1981.

[72] /GUICCIARDINI, N. Newton's Method and Leibniz's Calculus. In JAHNKE, H. N. (ed.), *A History of analysis*. Providence: American Mathematical Society, 2003.

[73] HADAMARD, Jacques. "Le calcul fonctionnel". *L'Enseignement Mathématique*, 14, 1912, pp. 1-18.

[74] HARTSHORNE, Robin. *Geometry*: *Euclid and beyond*. New York: Springer, 2000.

[75] HEATH, T.L. *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Oxford University Press, 1949.

[76] HEATH, T.L. (ed.). *The thirteen books of the Elements of Euclid*, vol. 1 (Books I-II). New York: Dover, 1956.

[77] HEATH, T.L. (ed.). *The thirteen books of the Elements of Euclid*, vol. 2 (Books III-IX). New York: Dover, 1956.

[78] HEATH, T.L. (ed.). *The thirteen books of the Elements of Euclid*, vol. 3 (Books X-XIII). New York: Dover, 1956.

[79] HEATH, T.L. *A history of Greek mathematics*, vol 1. New York: Dover, 1981.

[80] HEATH, T.L. *A history of Greek mathematics*, vol 2. New York: Dover, 1981.

[81] HEATH, T.L. (ed.). *The works of Archimedes*. New York: Dover, 2002.

[82] HØYRUP,Jens. Archimedism, not Platonism: on a malleable ideology of renaissance mathematicians (1400 to 1600), and on its role in the formation of seventeenth century philosophies of science. In Corrado Dollo (ed.), *Archimede. Mito Tradizione Scienza*. (Biblioteca di Nuncius. Studi e testi IV). Firenze: Leo S. Olschki, 1992, pp. 81-110.

[83] HØYRUP,Jens. The Formation of "Islamic Mathematics. Sources and Conditions. Science in Context, 1, pp. 281-329, 1987.

[84] HØYRUP,Jens. *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and Early Italian Abbacus Culture*. Basel - Boston -Berlin: Birkhäuser, 2007.

[85] HØYRUP,Jens. Algebra and naive geometry. An investigation of some basic aspects of Old Babylonian Texts. *Altorientalische Forschungen*, 17, 1990, pp. 262 -354.

[86] HØYRUP,Jens. The Formation of a Myth: Greek Mathematics – Our Mathematics. Catherine Goldstein, Jeremy Gray & Jim Ritter (eds.), *L'Europe mathématique. Mathematical Europe*. Paris: Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996, pp. 103-119.

[87] HØYRUP, Jens. *Lenghts, widths, surfaces*. New York: Springer, 2002.

[88] HØYRUP, Jens. *L'algèbre au temps de Babylone*. Paris: Vuibert, 2010.

[89] IFRAH, George. *História universal dos algarismos*, vols 1 e 2. Rio de Janeiro, Nova Fronteira: 1998.

[90] IMHAUSEN, Annette. Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources. *The Mathematical Intelligencer*, Vol 28, Nr. 1, 2006, pg 19-27.

[91] IMHAUSEN, Annette. Egyptian mathematics. In KATZ, Victor (ed.). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam – A sourcebook*. Princeton, NJ: Princeton U. Press, 2007, pp. 7-56.

[92] IMHAUSEN, Annette. Tratidion ande myths in the historiography of Egyptian mathematics. In *ROBSON*, Eleanor and *STEDALL*, Jacqueline. *The Oxford handbook of the history of mathematics*. Oxford, GB: Oxford U. Press, 2008. 781-800.

[93] JOSEPH, George Gheverghese. *The crest of the peacock*: *Non-European roots of mathematics*. New York: Penguin Books, 1992.

[94] KATZ, Victor. *A history of mathematics*: *an introduction*. (2^{nd} ed.) New York: Addison-Wesley, 1998.

[95] KATZ, Victor. (ed.). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam – A sourcebook*. Princeton, NJ: Princeton U. Press, 2007.

[96] KATZ, Victor. *História da Matemática*. Lisboa: Fundação Kalouste Gulbenkian, 2010.

[97] KLINE, Morris. *Mathematics, a cultural approach*. Reading, MASS: Addison-Wesley, 1962.

[98] KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford U. Press, 1972.

[99] KNORR, Wilbur Richard. *The evolution of the euclidean elements*: *a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry*. Dordrecht [u.a.], Holanda: Reidel, 1975.

[100] KNORR, Wilbur Richard. Archimedes and the Pre-Euclidean Proportion Theory. *Archives internationales d'histoire des sciences* 28, (1978), pp. 183-244.

[101] KNORR, Wilbur Richard. *The ancient tradition of geometric problems*. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1986.

[102] KNORR, Wilbur Richard. The wrong text of Euclid. *Centaurus*, 38(2-3), 1996, pp. 208-276.

[103] KUHN Thomas Samuel. *The structure of scientific revolutions*. Chicago, Ill.: The University of Chicago Press, 1962.

[104] LIMA, Elon Lages. *Medida e forma em geometria*: *comprimento, área, volume e semelhança*. [1a ed.] Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1991.

[105] LOOMIS, Elisha Scott: *The Pythagorean proposition*. - 2. ed. repr. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1972. (Classics in mathematics education)

[106] LÜTZEN, J. Between Rigor and applications. Developments in the Concept of function in Mathematical Analysis. In NYE, M.J. (ed.): *The Modern Physical and Mathematical Sciences*, Vol. 5 of *The Cambridge History of Science*, Cambridge Univ. Press, 2003, pp. 468-487.

[107] McNEILL, William. *História universal. Um estudo comparado das civilizações*. São Paulo: EDUSP, 1972.

[108] MONNA, A. F. The Concept of function in the 19th and 20th century in particular with regard to discussion between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences*, 9, 1972, pp. 57-84.

[109] MUELLER, Ian. *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's elements*. Boston, MA: MIT Press, 1981.

[110] NAUX, Charles. *Histoire des logarithmes de Neper à Euler*, 2 tomes. Paris: Blanchard, 1966.

[111] NEUGEBAUER, Otto. *The exact sciences in antiquity*. New York: Dover, 1969.

[112] OSLER, T. J., Marcus WRIGHT and Michael ORCHARD. Theon's ladder for any root. *International journal of mathematics education in science and technology*, vol. 36, n. 4, 2005, pp. 389-398.

[113] PROCLUS. *A Commentary on the first book of Euclid's elements*. Translated with introduction and notes by Glenn R. Morrow. Princeton: Princeton University Press, 1970.

[114] PTOLEMY, Claudius. *Almagest I - IV*, translated by R. Catesby Taliaferro. In Hutchins, Robert Maynard (ed.) *Ptolemy, Copernicus, Kepler*. Great books of the western world, vol. 16. Encyclopaedia Britannica, 1848, Chigago, Ill.

[115] RASHED, Roshdi (org.). *Histoire des sciences arabes*, 2 – *Mathématiques et physique*. Paris: Seuil, 1997.

[116] RASHED, Roshdi et VAHABZADEH, B. *Al-Khayam mathématicien*. Paris: Blanchard, 1999.

[117] RASHED, Roshdi. *Al-Khwarizmi - Le commencement de l'algèbre*. Paris, Librairie A. Blanchard, 2006.

[118] RECORDE, Robert. *The Whetstone of witte*, 1557.

[119] RITTER, J.. Babylone −1800. In In M. Serres (org.), *Éléments d´histoire des sciences*. Paris: Larousse-Bordas, 1997, 33-61.

[120] RITTER, J.. Chacun sa vérité: les mathématiques en Egypte et Mésopotamie. In M. Serres (org.), *Éléments d´histoire des sciences*. Paris: Larousse-Bordas, 1997, 63-94.

[121] ROBINS, Gay and SHUTE, Charles. *The Rhind mathematical papyrus*. London: The British Museum, 1987.

[122] ROBSON, Eleanor. Words and Pictures: New Light on Plimpton 322.*American Mathematical Monthly*, 109, 2002, pp.105-120.

[123] ROBSON, Eleanor. *Mathematics in ancient Iraq*: *a social history*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 2008.

[124] ROBSON, Eleanor. Mathematics eduction in an Old Babylonian scribal school. In *ROBSON*, Eleanor and STEDALL, Jacqueline. *The Oxford handbook of the history of mathematics*. Oxford, GB: Oxford U. Press, 2008, pp. 199-227.

[125] ROBSON, Eleanor. Neither Sherlock Holmes nor Babylon - A reassessment of Plympton 322. *Historia Mathematica*, 28(2001), pp. 167-206.

[126] ROBSON, Eleanor. Mesopotamian mathematics. In In KATZ, Victor (Ed.). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam – A sourcebook*. Princeton, N.J.: Princeton U. Press, 2007, pp. 58-186.

[127] ROBSON, Eleanor and STEDALL, Jacqueline. *The Oxford handbook of the history of mathematics*. Oxford, GB: Oxford U. Press, 2008.

[128] ROQUE, Tatiana. *Reescrevendo a história da Matemática*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

[129] ROSENFELD, Boris Abramovich. *A history of non-euclidean geometry*. New York: Springer, 1988.

[130] RÜTHING, D. Some definitons of the concept of function from Johann Bernoulli to Nicolas Bourbaki. *Mathematical Intelligencer*, 6(4), pp. 72-7, 1984.

[131] SACHS, A. J. Babylonian mathematical texts II-III. *Journal of Cuneiform Studies*, 6, 1952, 151-156.

[132] SASAKI,Chikara.*Descartes' mathematical thought*. Dordrecht: Kluwer, 2010.

[133] SCHUBRING, Gert. Argand and the early work on graphical representation: New sources and interpretations. In LÜTZEN, Jesper (ed.)*Around Caspar Wessel and the geometric representation of complex numbers*. Proceedings of the Wessel Symposium at the Royal Danish Academy of Sciences and Letters. Copenhagen: The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, 2001.

[134] SCHUBRING, Gert. *Conflicts between generalization, rigor, and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*. New York: Springer, 2005.

[135] SCHUBRING, Gert. The debate on a geometric algebra and methodological implications. In *Proceedings of HPM - Mexico*, Ciudad de México, 2008.

[136] SMITH, David Eugene. *A source book in mathematics*. New York:Dover, 1959.

[137] STEDALL, Jacqueline A. *A discourse concerning algebra*: *English algebra to* 1685. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[138] STEDALL, Jacqueline A. *Mathematics emerging – A sourcebook 1540 - 1900*. New York: Oxford U. Press, 2008.

[139] STRUIK, Dirk Jan. *A source book in mathematics – 1200 - 1800*. Cambridge, MASS.: 1969. New York: Dover, 1987.

[140] STRUIK, Dirk Jan. *A concise history of mathematics*. New York: Dover, 1987.

[141] STRUIK, Dirk Jan. *Uma história concisa das matemáticas*. Lisboa: GRADIVA, 1997.

[142] SWETZ, Frank J. *From five fingers to infinity*. Chicago, Ill.: Open Court, 1994.

[143] SZABÖ, Arpad. *The beginnings of Greek mathematics*; [translated by A. M. Ungar]. Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1978.

[144] van BRUMMELEN, Glen. *The mathematics of the heavens and the earth. The early history of trigonometry*. Princeton, NJ: 2009.

[145] van EGMOND, Warren. *The commercial revolution and the beginnings of Western mathematics in Renaissance Florence, 1300 – 1500*. Bloomington, Ind.: Indiana University. Doctoral dissertation, 1986.

[146] van der WAERDEN, B. L. *Science awakening*. Gronigen: P. Noordhoff, 1954.

[147] ver EECKE, Paul (ed.). *Pappus d'Alexandrie – La collection mathématique*. 2 tomes. Paris: Albert Blanchard, 1982.

[148] von BRAUNMÜHL, Anton, Edler. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, 2 Bände. Leipzig: Teubner, 1900-1903.

[149] von FRITZ, Kurt. The discovery of incommensurability by Hipparcus of Metapontum. *Annals of mathematics*, second series, vol 46, No 2 (April 1945), pp. 242-264.

[150] WANTZEL, Pierre Laurent. Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 1, 1836, pp. 366-372.

[151] YOUSCHKEVlTCH, A. R. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for history of exact sciences*, 16(1), 1976, pp. 37-85.

[152] ZEUTHEN, H.G. *Die Lehre der Kegelschnitte im Altertum*. Kopenhagen: Host, 1886.