

Superfícies Singulares



Em topologia podemos imaginar que os objetos são modelados por um material elástico perfeitamente deformável. Por exemplo, um disco plano e uma calota esférica representam o mesmo objeto topológico. Dizemos que eles são *homeomorfos*. Uma superfície é um objeto bidimensional, ou seja, em torno de cada ponto deste objeto podemos encontrar uma vizinhança homeomorfa a um disco.

Uma *superfície singular* é um objeto bidimensional mais geral.

De fato, no espaço tridimensional pode acontecer de uma superfície possuir auto-intersecção transversal ao longo de linhas. Tais linhas são denominadas *pontos duplos*. Também pode acontecer que três pedaços (folhas) da superfície se interceptam transversalmente num único ponto. Tal ponto é chamado *ponto triplo*. Pontos duplos, pontos triplos e etc são chamados *pontos múltiplos*. Um ponto quádruplo ou ainda um ponto múltiplo de ordem superior não ocorre genericamente numa superfície no espaço tridimensional. Com efeito, se quatro folhas da superfície se encontram num único ponto (ponto quádruplo), uma pequena perturbação nestas folhas transformará o ponto quádruplo em quatro pontos triplos (criando uma composição homeomorfa a um tetraedro (onde as arestas são intersecções de dois planos e os vértices são pontos triplos)).

Os pontos duplos e pontos triplos provenientes de intersecção transversal numa superfície são denominados estáveis, no sentido que eles se mantêm, mesmo sob pequenas perturbações.

Nos anos quarenta, H. Whitney mostrou que superfícies no espaço tridimensional podem ainda apresentar um outro tipo de ponto estável, hoje denominados *guarda-chuvas de Whitney* (devido ao seu formato se assemelhar ao de um guarda-chuva, ao menos na imaginação de um matemático !). Estes são pontos finais nas linhas de auto-intersecção transversal de uma superfície. São também conhecidos como pontos singulares (é possível encontrar já nos trabalhos de Cayley em torno de 1850 menção a este tipo de ponto singular, daí que alguns autores os denominam guarda-chuvas de Cayley). Assim, os guarda-chuvas de Whitney (ou Cayley, se você preferir) são as únicas singularidades estáveis de superfícies no espaço tridimensional.

Uma superfície singular é uma superfície no espaço tridimensional que possui linhas de auto-intersecção e um número finito de pontos triplos e guarda-chuvas de Whitney. A superfície apresentada aqui (em movimento) possui um ponto triplo e seis guarda-chuvas de Whitney nos pontos finais dos segmentos de pontos duplos. Esta superfície é um toro (ie, a superfície de uma câmara de ar de um pneu), se auto-interceptando no nosso espaço ambiente

tridimensional (três pontos foram removidos para melhor visualização). Recentemente demonstrou-se que existem apenas sete superfícies singulares topologicamente distintas no espaço tridimensional, ie cada uma não homeomorfa a outra, que possuem um ponto triplo e seis guarda-chuvas de Whitney localizados nos pontos finais dos três segmentos de pontos duplos que se interceptam no ponto triplo. Uma destas superfícies é conhecida desde o início do século 19 e foi apresentada por Steiner e denominada por ele *Superfície Romana* (pois na ocasião de sua descoberta, Steiner estava em férias em Roma). Ela é uma representação do plano projetivo no espaço tridimensional. É uma superfície dita não orientável, pois contém uma faixa de Moebius.

A superfície que apresentamos ao lado é a única superfície orientável entre as sete possíveis. Como o autor a descobriu em 1993 quando estava em férias em Bauru, sua cidade natal, poderíamos denominá-la *Superfície Bauruense*.

[Ton Marar](#)