Superfícies Quádricas — listas - Site

Superfícies quádricas: superfícies em $\mathbb{E}^3$ que podem ser consideradas a versão tridimensional das cônica

Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas.

Definição 1: Chama-se quádrica qualquer conjunto Ω de $\mathbb{E}^3$ que possa ser descrito, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, por uma equação do segundo grau nas variáveis x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0. \qquad (1)$$

Equação do segundo grau nas variáveis x, y, z $\iff$ (pelo menos) $a, b, c, d, e, f \neq 0$.

Observação 1: Se a superfície quádrica (1) for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma cônica. Essa interseção é chamada de traço da superfície n plano.

Exemplo 1: O traço da superfície quádrica (1) no plano $z = 0$ é a cônica

$$ax^2 + by^2 + dxy + gx + hy + j = 0 \qquad (2)$$

contida no plano $z = 0$ (ié, xOy) e representa uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

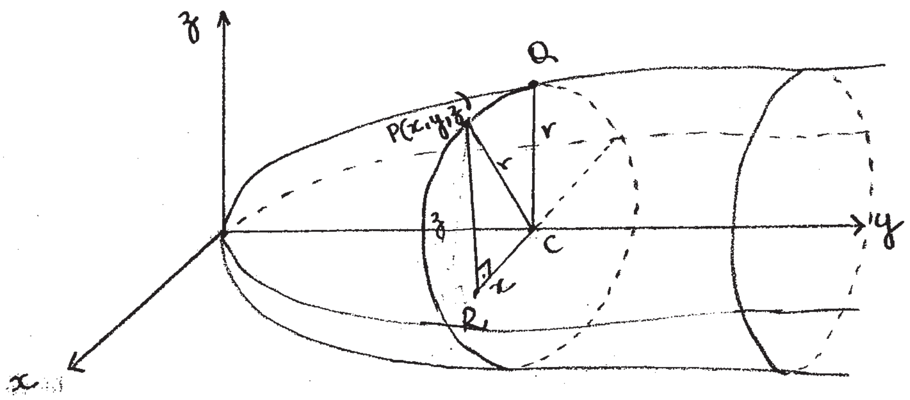
Em casos particulares, no entanto, a equação (2) pode também representar uma reta ($3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$) ou duas retas ($xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$), ou um ponto ($3x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$) ou o conjunto vazio ($x^2 + y^2 + 3 = 0$). Estes casos constituem as cônicas degeneradas. ∎

Reduzir a equação (1) das quádricas às suas formas mais simples é um trabalho árduo. Daremos ênfase ao estudo das quádricas representadas por equações denominadas canônicas, que estão relacionadas às formas reduzidas das cônicas.

Definição 2: Uma superfície de revolução é a superfície gerada por uma curva plana (chamada geratriz) que gira 360° em torno de uma reta (chamada eixo) situada no plano da curva.

Observação 2: O traço da superfície de revolução num plano perpendicular ao eixo é uma circunferência e a equação da superfície de revolução é obtida a partir da equação da geratriz. ∎

Exemplo 2: Seja a superfície gerada pela revolução da parábola $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$ em torno do eixo-y:



$P(x,y,z)$ ponto qualquer da superfície

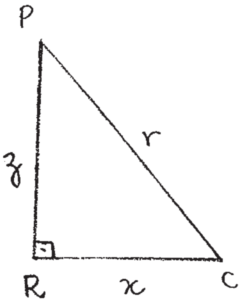
$C(0,y,0)$ centro da circunferência que é o traço da superfície no plano que passa por P e é perpendicular ao eixo-y.

$Q(0,y,z_1)$ interseção da circunferência com a parábola

R pé da perpendicular traçada de P ao plano-xy

Note que $|CP| = |CQ| = r$, pois são os raios da circunferência.

triângulo CRP é retângulo em R



$$|CP| = \sqrt{|CR|^2 + |RP|^2} = \sqrt{x^2+z^2}$$

$$|CP| = |CQ| = z_1 = \sqrt{2y}, \text{ pois } Q \in \text{parábola}$$

Portanto,

$$\sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{2y} \iff \boxed{x^2+z^2 = 2y}. \qquad (3)$$

$\underset{\text{equação da superfície}}{}$

equação da superfície

Observação 3: A equação (3) pode ser obtida imediatamente pela substituição de z por $\sqrt{x^2+z^2}$ na equação $z^2 = 2y$ (geratriz).

Dessa forma, se a geratriz estiver contida num dos planos coordenados e girar 360° em torno de um dos eixos desse plano, a equação da superfície gerada será obtida da seguinte maneira: se a curva girar em torno

a) do eixo-x, substitui-se y ou z na equação da curva por $\sqrt{y^2+z^2}$;

b) do eixo-y, substitui-se x ou z na equação da curva por $\sqrt{x^2+z^2}$;

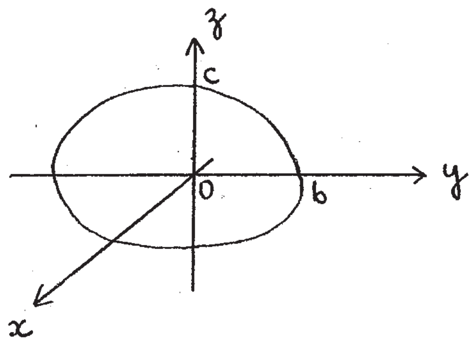
c) do eixo-z, substitui-se x ou y na equação da curva por $\sqrt{x^2+y^2}$.

A seguir estudaremos as superfícies quádricas denominadas elipsóides, hiperbolóides e parabolóides.

(1) Elipsóide

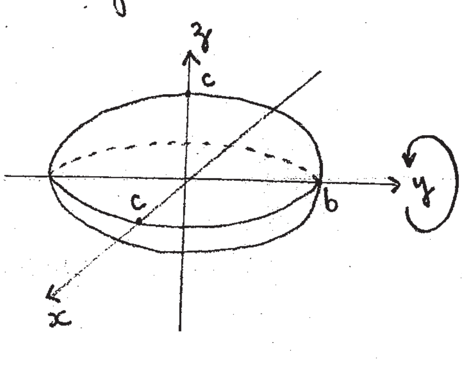
Consideremos no plano-yz a elipse de equações

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0.$$



Ao girarmos essa elipse em torno do eixo-y, obtemos o elipsóide de revolução, cuja equação será obtida da equação da elipse, substituindo-se z por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \iff$$



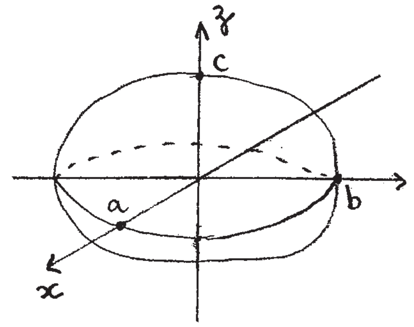
$$\iff \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Podemos também girar a elipse em torno do eixo-z e obter o elipsóide com equação

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

O elipsóide de maneira mais geral é representado pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (4)$$



onde $a, b, c \in \mathbb{R}^*_+$ e representam as medidas dos semieixos do elipsóide.

Observação 4: Os pontos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ e $(0, 0, \pm c)$ são soluções da equação (4), chamada forma canônica do elipsóide. ∎

O traço no plano-xy é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

e os traços nos planos xz e yz são as elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; y = 0 \qquad e \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; x = 0,$$

respectivamente.

No caso $a = b = c$, a equação (4) toma a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{5}$$

e representa uma superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio a.

Se o centro do elipsóide é o ponto (h, k, ℓ) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação (4) assume a forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-\ell)^2}{c^2} = 1$$

obtida por uma translação de eixos. $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \\ z = w + \ell \end{cases}$

Exemplo 3: Seja Ω a quádrica de equação

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x - 4y - 8z + 8 = 0.$$

a) Prove que Ω é um elipsóide.

Completar quadrados:

$$4x^2 - 8x = (2x)^2 - 2.2x.2 + 4 - 4 = (2x-2)^2 - 4$$

$$y^2 - 4y = y^2 - 2.y.2 + 4 - 4 = (y-2)^2 - 4$$

$$4z^2 - 8z = (2z-2)^2 - 4$$

$$\therefore\ 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x - 4y - 8z + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x-2)^2 + (y-2)^2 + (2z-2)^2 + 8 - 4 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4(z-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} + (z-1)^2 = 1.$$

b) Faça uma translação do sistema de coordenadas para eliminar os termos de primeiro grau e obter uma equação reduzida de Ω.

Consideremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 2 \\ w = z - 1 \end{cases}$$

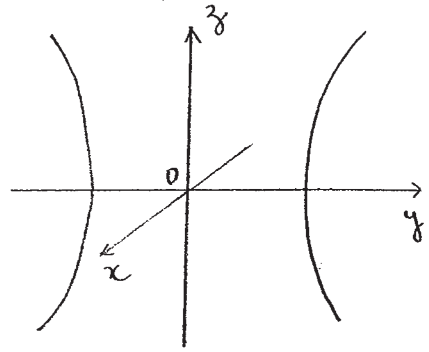
Portanto,

$$\Omega:\ u^2 + \frac{v^2}{2} + w^2 = 1.$$

② Hiperbolóide

Consideremos no plano yz a hipérbole de equações

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0.$$



Os hiperbolóides de revolução serão obtidos por rotações em torno de um de seus eixos.

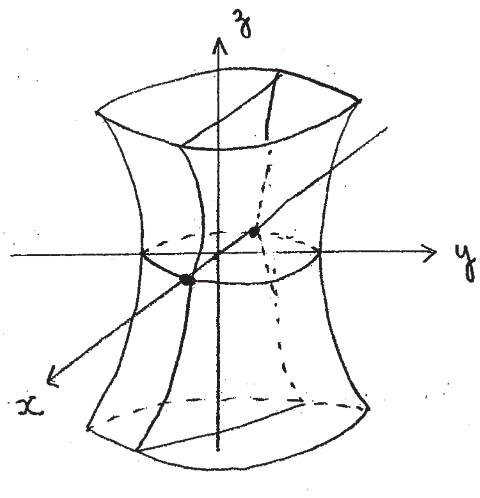
a) Hiperbolóide de uma folha

A rotação dessa hipérbole em torno do eixo-z resulta no hiperbolóide de uma folha, cuja equação será obtida da equação a hipérbole substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Um hiperbolóide de uma folha de maneira mais geral é representado pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

chamada forma canônica do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo-z. As outras duas formas são

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e representam hiperbolóides de uma folha ao longo dos eixo-y e eixo-x, respectivamente.

Observação 5: A equação (6) mostra que o traço do hiperbolóide no plano xy é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; z = 0$$

e os traços nos planos xz e yz são as hipérboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \; y = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \; x = 0,$$

respectivamente.

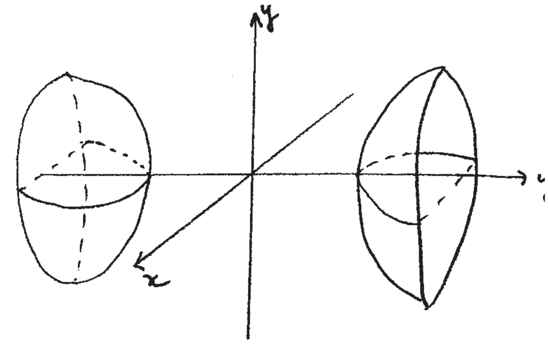
b) Hiperbolóide de duas folhas

A rotação da hipérbole em torno do eixo-y resulta no hiperbolóide de duas folhas cuja equação será obtida da equação dessa hipérbole, substituindo-se z por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2+z^2}{c^2} = 1$$

ou

$$-\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$



Um hiperbolóide de duas folhas da maneira mais geral é representado pela equação

$$-\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

chamada forma canônica do hiperbolóide de duas folh ao longo do eixo-y. As outras duas formas são

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

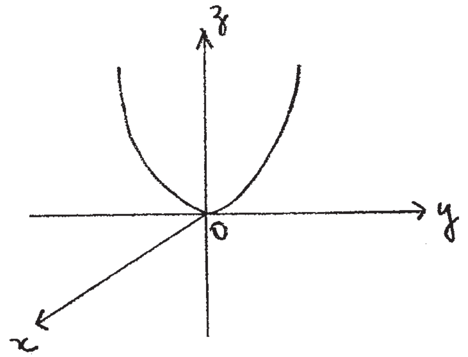
e representam hiperbolóides de duas folhas ao longo dos eixos Ox e Oz, respectivamente.

③ Parabolóide

a) Parabolóide elíptico

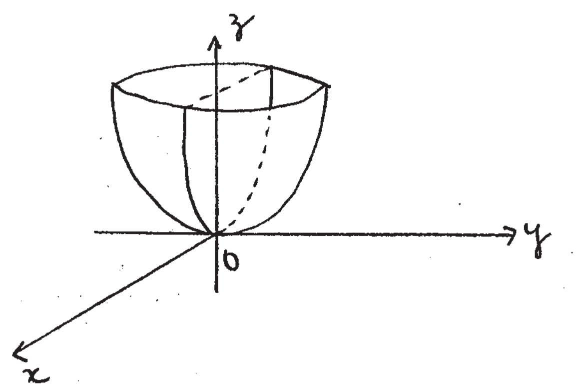
Consideremos no plano-yz a parábola de equações

$$z = \frac{y^2}{b^2}, \; x = 0.$$



A rotação dessa parábola em torno do eixo-z resulta no parabolóide de revolução cuja equação será obtida da equação da parábola, substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$



Um parabolóide mais geral, denominado parabolóide elíptico, é representado pela equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad (7)$$

chamada forma canônica do parabolóide elíptico ao longo do eixo-z. As outras duas formas são

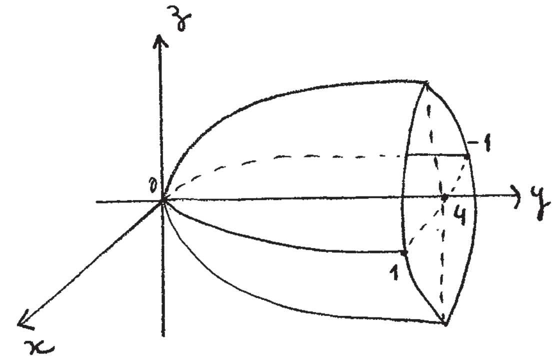
$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{e} \quad x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

e representam parabolóides elípticos ao longo dos eixos

y e x, respectivamente.

Exemplo 4: A figura representa o parabolóide elíptico de equação

$$y = 4x^2 + z^2$$



ou

$$y = \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1}$$

ao longo do eixo-y.

Observemos que no plano $y=4$ está a elipse

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

e as parábolas nos planos $x=0$ e $z=0$ são

$$y = z^2, x=0 \quad \text{e} \quad y = 4x^2, z=0,$$

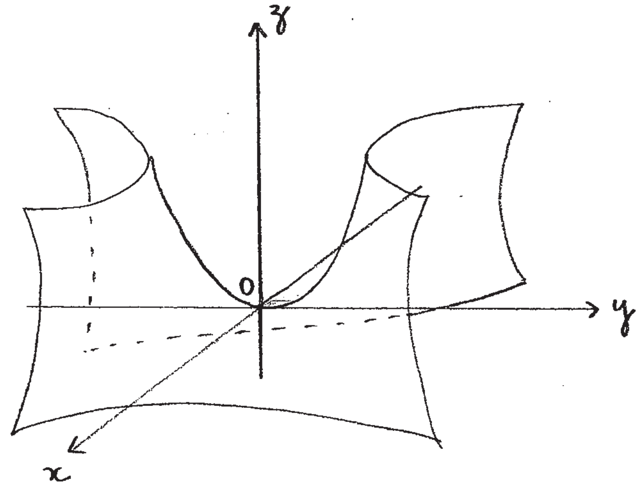
respectivamente.

b) Parabolóide hiperbólico

A superfície dada por uma equação do tipo

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \tag{8}$$

é denominada parabolóide hiperbólico e esta equação é chamada forma canônica do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo-z.



As outras formas são

$$y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} \qquad e \qquad x = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

e representam parabolóides hiperbólicos ao longo dos eixos y e x, respectivamente.

A equação (8) e a figura anterior mostram que os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas, ao passo que em $z = k$ são hipérboles que se degeneram em duas retas quando $z = 0$.

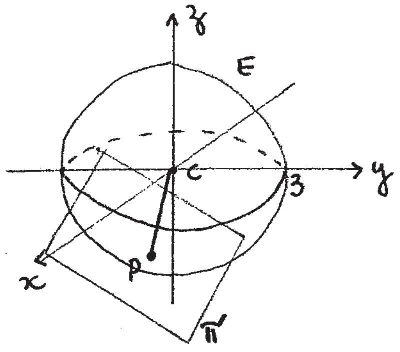
Fazendo $z = 0$ em (8), resulta

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \iff \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0$$

e representam as duas retas referidas acima.

1) Obtenha uma equação geral do plano tangente à superfície esférica $E: x^2+y^2+z^2=9$ no ponto $P=(2,1,-2)$.



$\vec{CP}$ é um vetor normal a π

$\vec{CP} = (2,1,-2)-(0,0,0) = (2,1,-2)$

$\therefore \pi: 2x+y-2z+d=0$

mas $P \in \pi$: $2.2+1.1-2.(-2)+d=0$

$9+d=0 \Rightarrow d=-9$

$\therefore \pi: 2x+y-2z-9=0$

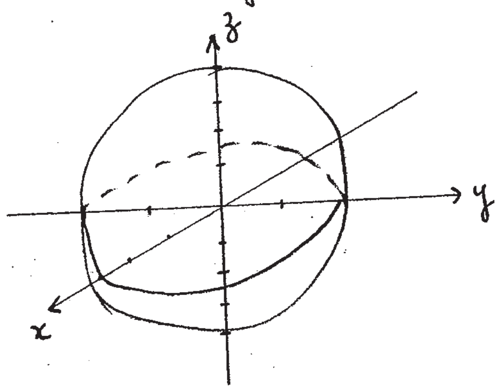
2) Reduza cada uma das equações à forma canônica, identifique a superfície e esboce seu gráfico.

a) $2x^2+4y^2+z^2-16=0$

$2x^2+4y^2+z^2=16$

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$$

elipsóide



b) $4x^2-y^2+4z^2-4=0$

$4x^2-y^2+4z^2=4$

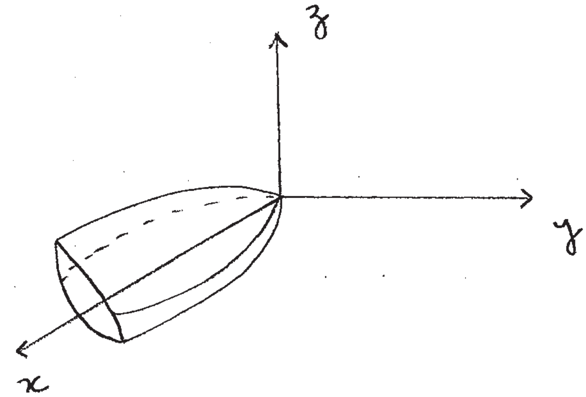
$$x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$$

hiperbolóide de uma folha

c) $y^2 + 4z^2 - x = 0$

$$x = y^2 + 4z^2$$

parabolóide elíptico



3) Identifique a superfície $S: \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{8} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ e a sua interseção com o plano $\pi: x = 2$.

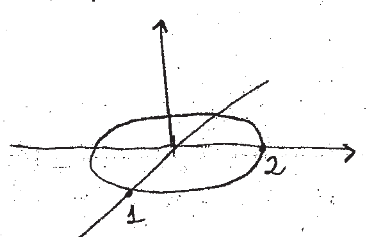
S é um hiperbolóide de duas folhas

Fazendo $x = 2$:

$$\frac{4}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{16} = 1 \Leftrightarrow -\frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{16} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2y^2 + z^2 = 0}_{\text{elipse de "raio" zero}}$$

$$S \cap \pi = \{(2,0,0)\}$$

4) O traço de um elipsóide (com centro na origem) no plano xy é a elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$. Determine a equação do elipsóide, sabendo que contém o ponto $(0, 1, \sqrt{6})$.



Elipsóide : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

$a = 1$, $b = 2$

$$\frac{0}{1} + \frac{1}{4} + \frac{6}{c^2} = 1$$

$$\frac{6}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow c^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} =$$

$$\underline{\underline{8x^2 + 2y^2 + z^2}}$$