Exercícios

1. Em cada um dos casos a seguir, decida se o segmento AA' corta um dos eixos, nenhum deles ou ambos. Determine o(s) ponto(s) de interseção quando existir(em).

a) $A = (-5, 3), A' = (-1, -2)$;

b) $A = (2, -1), A' = (7, -15)$;

c) $A = (-3, -1), A' = (4, 2)$.

2. Em cada um dos casos abaixo, determine (se existir) o ponto de interseção dos segmentos AA' e BB'. Se os segmentos não se intersectarem, decida se eles pertencem a retas concorrentes, paralelas ou coincidentes.

a) $A = (1, 3), A' = (2, -1), B = (-1, 1), B' = (4, 1)$;

b) $A = (0, 0), A' = (1, 1), B = (3, 4), B' = (-1, 5)$;

c) $A = (1, 234), A' = (0, 123), B = (315, 18), B' = (317, 240)$;

d) $A = (2, 5), A' = (3, 6), B = (18, 21), B' = (40, 43)$.

3. Um dos vértices do quadrado $OABC$ é a origem e o outro é o ponto $A = (2, 3)$. Quais são as coordenadas dos pontos B e C?

(*Observação*: SEMPRE que mencionarmos um polígono, letras adjacentes indicarão vértices adjacentes.)

4. No quadrado $ABCD$, tem-se $A = (-1, -3)$ e $B = (5, 6)$. Quais são as coordenadas dos vértices C e D?

5. Dados $A = (0, 3)$ e $B = (5, y)$, ache y de modo que o segmento AB seja paralelo à diagonal Δ. O ponto C tem abcissa x e pertence à mesma reta AB. Qual é a ordenada de C?

6. Responda as perguntas do exercício anterior com a diagonal Δ', e depois com o eixo OX, em lugar da diagonal Δ.

7. Sejam $A = (2, -5)$ e $B = (5, -2)$. Dê exemplo de dois outros pontos C, D, tais que as retas AB e CD sejam perpendiculares.

8. Tem-se $A = (2, 5), B = (4, 2), C = (3, 4)$ e $D = (0, y)$. Para qual valor de y as retas AB e CD são perpendiculares?

9. $ABCD$ é um paralelogramo. Sabe-se que $A = (1, 3), B = (2, 5)$ e $C = (6, 4)$. Quais são as coordenadas do vértice D? E do ponto M, interseção das diagonais AC e BD?

10. Se X_t é o ponto do segmento AB tal que $d(A, X_t)/d(A, B) = t$, quanto vale $d(A, X_t)/d(X_t, B)$?

11. Sejam $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$ pontos diferentes de $O = (0, 0)$. Prove que se O, A e C são colineares então $c = ta$ e $d = tb$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

Exercícios

1. O triângulo ABC, com $A = (-a, 0), B = (a, 0)$ e $C = (0, y)$ é equilátero. Quais são os valores possíveis de y?

2. Dados $A = (2, 5)$ e $C = (-8, 2)$, calcule os cossenos dos ângulos $O\widehat{A}C$ e $O\widehat{C}A$.

3. Em cada um dos casos abaixo, decida se o triângulo ABC tem um ângulo obtuso, um ângulo reto ou se seus três ângulos são agudos:

a) $A = (0, 0), B = (3, 152), C = (-45, 1)$;

b) $A = (1, 2), B = (2, -3), C = (4, 8)$;

c) $A = (2, 3), B = (6, 7), C = (3, 10)$.

4. Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, a)$, com $a \neq 0$. Ache x de modo que o ponto $C = (x, x)$ seja o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC.

5. Qual ponto do eixo OX é equidistante dos pontos $A = (1, -3)$ e $B = (3, -1)$?

6. Sejam a, b, x e y diferentes de zero. Mostre que os pontos $A = (x, y), B = (a + x, b + y)$ e $C = (x - bc, y + ac)$ são vértices de um triângulo retângulo.

7. Sejam $A = (1, 3)$ e $B = (5, 7)$. Prove que o ponto $P = (x, y)$ pertence à mediatriz do segmento AB se, e somente se, $x + y = 8$. A partir daí, ache as coordenadas de um ponto C tal que o triângulo ABC seja equilátero.

8. Sejam $O = (0, 0), A = (a, b)$ e $C = (c, d)$. Prove que o triângulo OAC é equilátero se, e somente se,

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2(ac + bd).$$

9. Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 1)$. Qual é o ponto C de abcissa 3 tal que AC é perpendicular a AB?

10. Ainda com $A = (2, -1)$ e $B = (5, 1)$, o ponto P tem abcissa x e AP é perpendicular a AB. Qual é a ordenada de P?

Exercícios

1. Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas adequado e mostre que $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$ (a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais).

2. O triângulo ABC é equilátero e seu lado mede l. Num sistema de coordenadas em que a origem é equidistante de A, B, C e o ponto C está sobre o eixo OY, quais são as coordenadas dos três vértices?

3. "Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica das projeções (ortogonais) dos catetos sobre essa hipotenusa." Prove este fato escolhendo um sistema de coordenadas onde a hipotenusa está sobre o eixo OX e o vértice do ângulo reto sobre o eixo OY.

4. Escolhendo um sistema de coordenadas com origem no vértice A e com o ponto B sobre o eixo das abcissas, prove que as três medianas de um triângulo se encontram no mesmo ponto, o qual divide cada uma delas na razão $2/3$ a partir do vértice correspondente.

5. Chama-se *baricentro* de um triângulo ao ponto de interseção de suas três medianas. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC nos seguintes casos:

   a) $A=(1,5)$, $B=(3,2)$, $C=(2,4)$;

   b) $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $C=(x_3,y_3)$.

6. Se, no triângulo ABC, as medianas que partem dos vértices A e B são iguais, prove que os lados AC e BC são iguais, logo o triângulo é isósceles. [Escolha um sistema de eixos no qual $A=(a,0)$, $B=(b,0)$ e $C=(0,c)$.]

7. Várias vezes, nas páginas anteriores, foi citada e usada a propriedade de que as diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio. Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas adequado e use-o para provar a referida propriedade.

8. Prove que o segmento de reta que une os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

9. Dados os pontos A, B, determine o conjunto dos pontos do plano cuja soma dos quadrados de suas distâncias a A e B é igual a uma constante c.

Exercícios

1. Identifique os seguintes subconjuntos do plano por meio de suas coordenadas polares r, θ:

a) $R = 3$;

b) $\theta = 3\pi/4$;

c) $R\cos\theta = 5$.

2. Seja X o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas polares satisfazem a equação $R = \cos\theta$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Mostre que a distância de um ponto qualquer de X ao ponto $P = (0, 1/2)$ é igual a $1/2$ e conclua que X é a circunferência de centro P e raio $1/2$, menos um ponto.

3. Tomando no plano um sistema de eixos oblíquos no qual o ângulo de OX para OY é θ, mostre que a distância do ponto $P = (x, y)$ ao ponto $P' = (x', y')$ é dada por

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta}\,.$$

4. Se (x, y) são as coordenadas do ponto P num sistema de eixos ortogonais, quais são as coordenadas polares (R, θ) desse ponto? (Supomos o semi-eixo positivo de $\dot{O}X$ como a origem do ângulo θ.)

5. Esboce a curva descrita pelo ponto de coordenadas polares $R = t$, $\theta = 2\pi t$ quando t assume todos os valores reais positivos.

6. Descreva o conjunto representado, em coordenadas polares, pela equação $R = 3/\operatorname{sen}\theta$.

7. Esboce o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas polares satisfazem a relação $R = \cos 3\theta$.

8. Num sistema de coordenadas oblíquas em que os semi-eixos positivos formam um ângulo α, prove que a rotação de ângulo α em torno da origem leva o segmento OP, onde $P=(x, y)$, sobre o segmento OP' onde $P'=(-y, x+2y\cdot\cos\alpha)$. (Aqui, estamos supondo que α é o ângulo de rotação do eixo x para o eixo y e que o sentido de rotação de OP para OP' é o mesmo.)

Exercícios

1. Qual é a equação da paralela à reta $y = -2x+5$ passando pelo ponto $P = (1,1)$?

2. Ache a equação da perpendicular à reta $y = 3x-1$ baixada do ponto $Q = (2,2)$.

3. Sejam $A(1,2)$ e $B = (-3,-4)$. Qual é o ponto de abcissa 5 sobre a reta perpendicular a AB passando pelo ponto $C = (5,6)$?

4. Seja $A = (3,1)$. Ache B tal que o triângulo OAB seja equilátero.

5. Mostre que, para todos os valores reais de a, as retas $y = ax + 3 - 5a$ passam pelo mesmo ponto. Que ponto é esse?

6. As retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são perpendiculares e contêm o ponto (x_0, y_0). Conhecendo a e b, determine a' e b'.

7. Ache um ponto P sobre a reta $y = 2x$ e um ponto Q sobre a reta $y = 3x$, ambos diferentes da origem O, tais que $d(O,P) = d(O,Q)$. Em seguida determine as coordenadas do ponto médio do segmento PQ e, a partir daí, obtenha a equação da bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas dadas.

8. Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x+1$, $y = 3x-2$ e $y = 1-x$. Ache os vértices desse triângulo.

9. Os pontos $A = (2,5)$ e $A' = (14,1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine a equação dessa reta.

10. Sejam $A = (1,2)$, $B = (2,4)$ e $C = (3,-1)$. Ache as equações da mediana e da altura do triângulo ABC que partem do vértice A.

11. Tome, sobre as retas AB e AC do exercício anterior, pontos P e Q tais que $d(A,P) = d(A,Q)$. Ache o ponto médio M do segmento PQ e obtenha a equação da reta AM, bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

12. Ache os pontos da reta $y = 2x + 1$ que estão situados à distância 2 da origem.

13. Sejam p e q tais que $pq \neq 0$. Escreva, sob a forma $ax + by = 1$, a equação da reta que corta os eixos OX e OY nos pontos $P = (p,0)$ e $Q = (0,q)$ respectivamente.

14. Sejam $A = (a,0)$ e $B = (0,b)$, com $ab \neq 0$. Escreva, sob a forma $\alpha x + \beta y = c$, a equação da reta que contém a altura do triângulo retângulo OAB, baixada do vértice do ângulo reto sobre a hipotenusa.

15. Mostre que, para quaisquer valores de s e t, as retas $(2s+3t)x + (3s-2t)y = 5s+4t$ passam pelo mesmo ponto. Mostre também que toda reta que passa por esse ponto é representada por uma equação da forma acima, para uma escolha conveniente de s e t.

16. Seja $ax+by=c$ e $a'x+b'y=c'$ retas que têm um ponto P em comum. Prove que a reta $a''x+b''y=c''$ passa por este mesmo ponto P se, e somente se, existem números s, t tais que $a''=sa+ta'$, $b''=sb+tb'$ e $c''=sc+tc'$.

17. Sob a forma $ax+by=c$, escreva a equação da reta perpendicular à reta $3x+2y=5$ baixada do ponto $P=(-1,-2)$.

18. Qual é o ponto de ordenada 3 na reta paralela a $3x-2y=2$ tirada pelo ponto $A=(5,-1)$?

19. Dê exemplo de uma função linear $\varphi(x,y)=ax+by$, com $ab\neq 0$, tal que, para $c<c'$, a distância entre as linhas de níveis c e c' de φ seja $c'-c$.

20. Quais são as paralelas situadas à distância 5 da reta $3x-4y=1$?

21. Na reta $ax+by=c$ tem-se $c>0$. Quais devem ser os sinais de a e b para que essa reta não contenha pontos do segundo quadrante?

22. Qual é a distância entre as retas paralelas $x-3y=4$ e $2x-6y=1$?

23. Prove que toda reta do plano pode ser representada por uma equação da forma $ax+by=c$, com $a^2+b^2=1$. Represente assim a reta que corta os eixos OX e OY nos pontos $(p,0)$ e $(0,q)$ respectivamente.

24. Qual é o ponto de interseção da reta $ax+by=c$ com a reta OA, onde $A=(a,b)$?

25. Em que pontos a reta $ax+by=c$ corta os eixos OX e OY?

26. Supondo $b\neq 0$, exiba pontos com abcissas $2,3$ e 4 sobre a reta $ax+by=c$.

27. Obtenha equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto $(2,3)$ e é perpendicular à reta $5x-3y=2$.

28. Determine a e b de modo que as equações $x=at+1$, $y=bt+5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y=2x+3$.

29. Dado o ponto (x_0,y_0) sobre a reta $y=ax+b$, determine α e β de modo que as equações $x=\alpha t+x_0$, $y=\beta t+y_0$ sejam uma representação paramétrica da reta $y=ax+b$.

30. Escreva uma representação paramétrica da reta $3x+4y=5$ sob a forma $x=at-5$, $y=bt+5$.

31. Escreva uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos $(7,-2)$ e $(3,4)$.

32. A reta r é representada parametricamente por $x=at+b$, $y=ct+d$. Determine o ponto $P=(x,y)$ em que r intersecta a seta s, cuja equação é $\alpha x+\beta y=c$.

33. Ache uma representação paramétrica para a reta $5x - 2y = 1$.

34. São dados os pontos $A = (5, 7)$, $B = (6, 9)$ e $C = (6, 0)$. (a) Escreva a equação da reta BC. (b) Escreva a equação da reta r, que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta BC. (c) Ache as coordenadas do ponto D, interseção das retas r e BC. (d) No triângulo ABC, determine a medida da altura AD, que parte do vértice A.

35. Escreva, sob a forma $ax + by = c$, a equação da reta que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao segmento OQ, com $Q = (m, n)$.

36. Sejam a, b constantes não-nulas. A cada ponto $P = (x, y)$ façamos corresponder o ponto $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$, com $\overline{x} = x/a$ e $\overline{y} = y/b$. Mostre que quando P descreve uma reta r, seu correspondente $\overline{P}$ também descreve uma reta $\overline{r}$. Se a equação de $\overline{r}$ é $m\overline{x} + n\overline{y} = p$, qual é a equação de r?

37. Prove que um sistema de coordenadas oblíquas a equação de uma reta ainda tem a forma $y = ax + b$, onde b é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y e $a = \operatorname{sen} \beta / \operatorname{sen} (\alpha - \beta)$, onde α é o ângulo entre os eixos e β é o ângulo que o eixo x faz com a reta dada.

Exercícios

1. Seja α um dos ângulos formados pelas retas $ax + by = c$ e $y = px + q$. Dê uma expressão para $|\cos\alpha|$.

2. A reta definida pelas equações paramétricas $x = 2t + 7$, $y = 3t + 8$ forma um ângulo agudo α com reta $5x + 11y = 6$. Determine α.

3. Escreva, sob a forma $ax + by = c$, a equação da reta que passa pela origem e faz um ângulo de 45^0 com a reta $\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 1$.

4. Que ângulos faz a reta $3x + 4y = 7$ com os eixos OX e OY?

5. Seja α o ângulo entre o eixo OX e a reta $ax + by = c$. Determine $|\cos\alpha|$.

6. Prove que não existe um triângulo equilátero cujos vértices tenham coordenadas racionais.

Exercícios

1. Qual é a distância da origem à reta $5x - 2y = 8$?

2. Qual é o raio da circunferência que tem centro no ponto $P = (4, 1)$ e é tangente à reta $3x + 7y = 2$?

3. Os vértices do triângulo ABC são $A = (2, 1), B = (1, 4)$ e $C = (5, 5)$. Qual o comprimento da altura baixada de A sobre a base BC?

4. Determine a distância Δ do ponto $P = (3, 1)$ à reta $x + 2y = 3$. Ache o ponto $Q = (x, y)$ sobre esta reta, tal que $d(P, Q) = \Delta$.

5. Obtenha a distância do ponto $P = (-2, 3)$ à reta cujas equações paramétricas são $x = 2 - 3t, y = 1 - 4t$.

6. Dadas as retas $r : ax + by = c$ e $r' : a'x + b'y = c'$, suponha que $a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 = 1$. Mostre que as duas bissetrizes dos ângulos formados por r e r' são

$$(a - a')x + (b - b')y = c - c' \quad \text{e} \quad (a + a')x + (b + b')y = c + c'.$$

[Lembre que todo ponto da bissetriz, é eqüidistante dos lados.]

Exercícios

1. Seja Q um quadrilátero cujos vértices são $A_1 = (a_1, b_1), A_2 = (a_2, b_2), A_3 = (a_3, b_3)$ e $A_4 = (a_4, b_4)$. Estendendo a notação introduzida no final da Seção 10, escreva

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_1 \\ -a_2b_1 - a_3b_2 - a_4b_3 - a_1b_4 \end{array}$$

e mostre que este número é, em valor absoluto, o dobro da área do quadrilátero Q.

2. Calcule a área do pentágono cujos vértices são os pontos $(-2,3)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(2,3)$ e $(0,5)$.

3. Prove que a área de um polígono cujos n vértices têm coordenadas inteiras é um número inteiro ou a metade de um inteiro.

4. Sejam A, B e C pontos cujas coordenadas são números racionais. Assinale (V)erdadeiro ou (F)also:
   ( ) As medidas das alturas do triângulo ABC são números racionais.
   ( ) A área do triângulo ABC é um número racional.

5. Calcule a área do triângulo cujos vértices são interseções de duas das retas $x + y = 0, x - y = 0$ e $2x + y = 3$.

6. Dados os pontos $A = (1,1), B = (2,3)$ e $C = (4,0)$, calcule a distância $d(B, C)$ e a área do triângulo ABC. A partir daí, obtenha a medida da altura baixada do vértice A.