14ª lista de exercícios - SMA0300 - Geometria Analítica

Estágio PAE - Alex C. Rezende

Medida angular, distância, mudança de coordenadas, cônicas e quádricas

1. Seja $\theta = \text{ang}\,(r, s)$. Calcule $\text{sen}\,\theta$ nos casos (a) e (b) e $\cos\theta$ nos casos (c) e (d):

   (a) $r: \ X = (-\frac{5}{2}, 2, 0) + \lambda(\frac{1}{2}, 1, 1)$ e $s: \ z = 3x = 2y - 16$ (R.: $\frac{\sqrt{41}}{21}$);

   (b) $r: \ X = (3, -2, 0) + \lambda(1, -1, \sqrt{2})$ e $s: \ X = (-2, 3, -5) + \lambda(1, 1, \sqrt{2})$ (R.: $\frac{\sqrt{3}}{2}$);

   (c) $r: \begin{cases} x + 3z &= 7 \\ y &= 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x - 4y - 2z &= 5 \\ y &= 0 \end{cases}$ (R.: $\frac{\sqrt{2}}{2}$);

   (d) $r: \ x = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3}$ e $s: \begin{cases} 3x + y - 5z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= -1 \end{cases}$ (R.: 0).

2. O lado BC de um triângulo equilátero está contido na reta $r: \ X = (0,0,0) + \lambda(0, 1, -1)$, e seu vértice oposto é $A = (1, 1, 0)$. Determine B e C. (R.: (0,0,0) e (0,1,-1))

3. Obtenha uma equação vetorial da reta que contém o ponto $P = (0, 2, 1)$ e forma ângulos congruentes com as retas $r: \ X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 2)$, $s: \ X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 3, 0)$ e $t: \ X = (1, 2, 0) + \lambda(0, 0, 3)$. (R.: São quatro soluções: $X = (5/2, 2, -3/2) + \lambda(1, 1, 1)$; $X = (-3, -5/3, 4) + \lambda(1, 1, -1)$; $X = (2/3, 2, 1/3) + \lambda(-1, 1, 1)$; $X = (1/7, 3/7, 6/7) + \lambda(1, -1, 1)$)

4. Sejam $P = (1, 2, -1)$, Q a projeção ortogonal de $R = (-1, -1, -2)$ sobre $\pi: \ x + y + z + 1 = 0$, e θ a medida angular entre a reta PQ e o plano π. Calcule $\cos\theta$. (R.: $\sqrt{10}/5$)

5. Obtenha um vetor diretor da reta que é paralela ao plano $\pi: \ x + y + z = 0$ e forma ângulo de 45º com o plano $\pi_1: \ x - y = 0$. (R.: Duas soluções: (-2+$\sqrt{3}$,1,1-$\sqrt{3}$) e (-2-$\sqrt{3}$,1,1+$\sqrt{3}$))

6. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta $r: \ X = (8, 0, 0) + \lambda(-8, 0, 8)$ e forma ângulo de θ radianos com o plano $\pi: \ x + z + 1 = 0$, onde $\cos\theta = \sqrt{2/3}$. (R.: Duas soluções: $x + y + z - 8 = 0$ e $x + 4y + z = 0$)

7. Qual é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de $A = (1, 0, 0)$ e $B = (-1, 1, 0)$ e também de $C = (0, 2, 0)$ e $D = (0, 0, 0)$? Descreva-o por meio de equações. (R.: reta; $X = (1/4, 1, 0) + \lambda(0, 0, 1)$)

8. Determine o ponto do segmento AB que está mais próximo de P, e o que está mais afastado, sendo $A = (1, 2, -3)$, $B = (4, 5, 0)$ e $P = (1, 0, -4)$. (R.: mais próximo: A; mais afastado: B)

9. Obtenha os pontos da interseção dos planos $\pi_1: \ x + y = 2$ e $\pi_2: \ x = y + z$ que distam $\sqrt{\frac{14}{3}}$ da reta $s: \ x = y = z + 1$. (R.: (2,0,2) e (0,2,-2))

10. A diagonal BD de um quadrado está contida em $r: \ x-1=y-z=0$. Sendo O um dos vértices, determine os outros três. (R.: (1,1/$\sqrt{2}$,1/$\sqrt{2}$), (1,-1/$\sqrt{2}$,-1/$\sqrt{2}$) e (2,0,0))

11. Obtenha os pontos da reta $r : x = y = z$ que equidistam das retas $s : X = (1,0,0) + \lambda(1,1,0)$ e $t : X = (0,0,1) + \lambda(1,0,-1)$. (R.: (0,0,0) e (1,1,1))

12. Obtenha uma equação vetorial da reta r contida no plano $\pi : y = z$, sabendo que a medida angular entre r e $s : X = (1,1,2) + \lambda(1,-1,0)$ é 60^o e que r dista 1 do ponto $P = (1,0,0)$. (R.: São quatro soluções: $X = (0,0,0) + \lambda(0,1,1)$; $X = (2,0,0) + \lambda(0,1,1)$; $X = (4,0,0) + \lambda(4,1,1)$ e $X = (-2,0,0) + \lambda(4,1,1)$)

13. Calcule a distância do segmento PQ ao plano $\pi : 2x - 2y + z - 6 = 0$, nos casos:

    (a) $P = (1,0,0)$ e $Q = (2,3,2)$; (R.: 4/3)

    (b) $P = (2,1,5)$ e $Q = (1,1,1)$; (R.: 0)

    (c) $P = (3,0,-1)$ e $Q = (-1,-2,3)$. (R.: 1/3)

14. Obtenha uma equação geral do plano π que contém $r : X = (1,0,1) + \lambda(1,1,-1)$ e dista $\sqrt{2}$ de $P = (1,1,-1)$. (R.: $x + z - 2 = 0$)

15. Obtenha uma equação vetorial da reta r que contém $A = (0,0,3)$, está contida em $\pi : x + z = 3$ e dista 3 do eixo-y. (R.: $X = (0,0,3) + \lambda(0,1,0)$)

16. Dadas as retas $r : X = (0,0,1) + \lambda(1,1,0)$ e $s : X = (2,0,1) + \lambda(0,0,1)$, e os pontos $P = (1,0,1)$ e $Q = (2,1,1)$, obtenha uma equação vetorial da reta que contém P, é concorrente com r e equidistante de Q e s. (R.: Duas soluções: $X = (1,0,1) + \lambda(0,1,0)$ e $X = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$)

17. Participando do "Show do Milhão", Angelique ouviu o apresentador: *"Próxima pergunta, valendo R\$ 100.000,00: a reta r contém o ponto $P = (0,0,2)$ e é paralela ao plano-xy. Diga qual das alternativas não pode ser a distância de r à reta $s : X = (1,2,1) + \lambda(0,1,0)$:*

    (a) $1/\sqrt{2}$*;*

    (b) $\sqrt{2}$*;*

    (c) 1;

    (d) $2/\sqrt{2}$.

    Angelique, você tem trinta segundos para a resposta." Se Angelique pedisse ajuda aos universitários e você fosse um deles, que alternativa indicaria? (R.: (a))

18. Dados os planos $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0$, $\pi_2 : 3x + y - z = 0$ e $\pi_3 : x + y + z = 0$, seja π o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular a π_3. Calcule a distância de π a $r : X = (1,2,3) + \lambda(1,1,1)$. (R.: $3/2\sqrt{2}$)

19. Dados os planos $\pi_1 : y + z - 5 = 0$ e $\pi_2 : x + 2y + 2z = 0$, a reta $s : X = (1, 2, 3)+\lambda(0, 1, -1)$, e o ponto $P = (-2, 1, 0)$, obtenha equações da reta contida em π_1, paralela a s, e equidistante de P e π_2. (R.: $X = (-1, 0, 5) + \lambda(0, 1, -1)$)

20. O plano π é determinado pelas retas $r : x + z = 5 = y + 4$ e $s : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 2, -3)$. Obtenha equações gerais dos planos que distam 2 de π. (R.: $2x - y + 2z - 15 = 0$ e $2x - y + 2z - 3 = 0$)

21. Sejam $\Sigma_1 : (O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\Sigma_2 : (O_2, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ sistemas de coordenadas tais que

$$O_2 = (1, 1, 1)_{\Sigma_1} \quad \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2 \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Obtenha, em relação a Σ_2,

   (a) equações de $r : [X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)]_{\Sigma_1}$; (R.: $X = (-1, 1, -1) + \lambda(0, 0, 1)$)
   (b) uma equação geral de $\pi : [2x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$. (R.: $u - v + 2 = 0$)

22. $\Sigma_1 : (O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\Sigma_2 : (O_2, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ são dois sistemas de coordenadas tais que $O_2 = (1, 1, 1)_{\Sigma_1}$ e a matriz de mudança de base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ para a base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenha, em relação ao sistema Σ_1, equações vetoriais dos eixos coordenados O_2u, O_2v e O_2w, e equações gerais dos planos coordenados O_2uv, O_2uw e O_2vw do sistema Σ_2; (R.: exercício 21-4, Boulos, 3.ed.)

23. Transforme as coordenadas cartesianas em coordenadas polares:

   (a) (1,1) (R.: $(\sqrt{2},\pi/4)$);
   (b) (2,-2) (R.: $(2\sqrt{2},7\pi/4)$);
   (c) $(\sqrt{3},1)$ (R.: $(2,\pi/6)$);
   (d) (4,0) (R.: (4,0));
   (e) (0,-3) (R.: $(3,3\pi/2)$).

24. Transforme as coordenadas polares em coordenadas cartesianas:

   (a) $(1,\pi/2)$ (R.: (0,1));
   (b) $(-2,49\pi/6)$ (R.: $(-1,-\sqrt{3})$);
   (c) $(3,-5\pi/3)$ (R.: $(3/2,3\sqrt{3}/2)$);
   (d) $(0,\pi/9)$ (R.: (0,0));
   (e) $(7,\pi)$ (R.: (-7,0)).

25. Encontre as equações polares das seguintes curvas:

(a) da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (R.: $r = \frac{ab}{\sqrt{b^2-(b^2-a^2)\operatorname{sen}^2\theta}}$);

(b) da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (R.: $r = \frac{ab}{\sqrt{b^2-(b^2+a^2)\operatorname{sen}^2\theta}}$);

(c) da parábola $y = x^2$ (R.: $r = \tan\theta\sec\theta$).

26. Em cada caso, obtenha uma equação reduzida de elipse E.

(a) E tem centro O e focos em Ox; o eixo maior mede 10, e a distância focal é 6; (R.: $x^2/25 + y^2/16 = 1$)

(b) os focos são $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$, e o eixo maior tem medida 10; (R.: $x^2/25 + y^2/9 = 1$)

(c) os focos são $F_1 = (0, -2)$ e $F_2 = (0, 2)$, e o eixo menor tem medida 4; (R.: $x^2/4 + y^2/8 = 1$)

(d) $P = (2, 3)$, $Q = (-2, -3)$ e $R = (2, -3)$ são vértices do retângulo fundamental de E; (R.: $x^2/4 + y^2/9 = 1$)

(e) E tem centro O, eixos contidos nos eixos coordenados, e sua coroa fundamental é determinada pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 3$ e $x^2 + y^2 = 5$. (R.: $x^2/5 + y^2/3 = 1$ e $x^2/3 + y^2/5 = 1$)

27. Calcule a área do quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse de equação $9x^2 + 16y^2 = 100$. (R.: 16)

28. Pela Primeira Lei de Kepler, a trajetória da Terra é elíptica e o Sol ocupa a posição de um de seus focos. Calcule o periélio e o afélio da Terra (que são, respectivamente, a menor e a maior distância da Terra ao Sol), adotando os valores aproximados: distância focal da trajetória da Terra, $0,5 \cdot 10^7 km$; medida do eixo maior, $30 \cdot 10^7 km$. (R.: $14,75 \cdot 10^7 km$ e $15,25 \cdot 10^7 km$)

29. Determine, em cada caso, os vértices, os focos, as extremidades do eixo real e equações das assíntotas da hipérbole:

(a) $25x^2 - 144y^2 = 3600$;

(b) $16x^2 - 25y^2 = 400$;

(c) $y^2 - x^2 = 16$;

(d) $9y^2 - 4x^2 = 36$;

(e) $3x^2 - y^2 = 3$;

(f) $x^2 - y^2 = m^2$ $(m > 0)$. (R.: exercício 22-20, Boulos, 3.ed.)

30. A hipérbole H tem centro O, focos em um dos eixos coordenados, e contém os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (1, \sqrt{2})$. Escreva equações reduzidas de H e de suas assíntotas e determine os focos e os vértices. (R.: $-x^2/7 + y^2/(7/4) = 1$, $y = \pm x/\sqrt{5}$, $(0, \pm\sqrt{35}/2)$, $(0, \pm\sqrt{7}/2)$)

31. Determine o foco, o vértice, o parâmetro e a diretriz da parábola P e faça um esboço.

(a) $P: y^2 = 4x$;

(b) $P: y^2 + 8x = 0$;

(c) $P: x^2 + 6y = 0$;

(d) $P: 5y^2 = 8x$;

(e) $P: 5x^2 = 16y$. (R.: exercício 22-30, Boulos, 3.ed.)

32. São dadas a reta r de equação $x - \frac{y}{3} + 2 = 0$ e a elipse α de equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y = 11$. Encontre a equação da reta s que passa pela centro de α e é perpendicular à reta r. (R.: $3y + x - 7 = 0$)

33. Uma elipse que passa pelo ponto $(0, 3)$ tem seus focos nos pontos $(-4, 0)$ e $(4, 0)$. O ponto $(0, -3)$ é interior, exterior ou pertence à elipse? Mesma pergunta para o ponto $(5/2, 13/5)$.

34. Sejam A e B os pontos de interseção da parábola $y = x^2$ com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$. Quais as coordenadas dos pontos A e B? (R.: $(1, 1)$ e $(-1, 1)$)

35. Considere a parábola de equação $y = x^2 - 6x + 5$. Determine a equação da circunferência que passa por seu vértice e por suas interseções com o eixo-x. (R.: $(x - 3)^2 + (y + 3/2)^2 = 25/4$)

36. Cada ponto $P = (x, y)$ de uma C no plano-xy tem suas coordenadas descritas por:

$$\begin{cases} x &= 1 + \cos t \\ y &= 2 + \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Escreva uma equação de C relacionando somente as variáveis x e y. (R.: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$)

37. São dadas as parábolas $p_1 : y = -x^2 - 4x - 1$ e $p_2 : y = x^2 - 3x + 11/4$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que r é a reta que contém V_1 e V_2, calcule a distância de r à origem. (R.: $11/\sqrt{74}$; Sugestão: se $r : ax + by + c = 0$ e $P = (x_0, y_0)$, então $d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

38. Considere a hipérbole $H: \; 5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = -20$ e a parábola $T: \; (y - 3)^2 = 4(x - 1)$. Encontre uma equação para o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T.

39. Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos do $\mathbb{E}^3$ cujas as distâncias ao ponto $A = (2, 1, -3)$ equivale ao triplo da distância ao eixo-y. (R.: $8x^2 - y^2 + 8z^2 + 4x + 2y - 6z - 14 = 0$)

40. Uma partícula se move de tal forma que sua distância ao eixo-x é igual a sua distância ao plano $z = 3$. Encontrar a equação da trajetória dessa partícula. (R.: $y^2 + 6z - 9 = 0$)

41. Dada a equação da superfície quádrica $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 7y - 4z - 21 = 0$, identificar a equação do traço no plano $y = 2$. O que esta equação representa? (R.: $x^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$; uma circunferência de centro $C = (-1, 2, 2)$ e raio 2)