Exercícios

1. Sejam $a < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A e B sobre o eixo E. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \dots, X_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais.

2. Sejam $a < x < b$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, X e B do eixo E. Diz-se que o ponto X divide o segmento AB em *média e extrema razão (divisão áurea)* quando se tem

$$\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = \frac{d(X,B)}{d(A,X)}.$$

Supondo que X divide o segmento AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

3. Se o ponto O é a origem do eixo E e A é o ponto desse eixo que tem coordenada 1, qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento OA em média e extrema razão? No Exercício 2, calcule a *razão áurea* $d(A,X)/d(A,B)$.

4. Os pontos A, B e X sobre o eixo E têm coordenadas a, b e x respectivamente. Se X' é o simétrico de X em relação ao ponto A e X'' é o simétrico de X' em relação a B, quais são as coordenadas de X' e X''?

5. Dados os pontos A, B no eixo E, defina a *distância orientada* $\delta(A,B)$ entre eles pondo $\delta(A,B) = d(A,B)$ se A está à esquerda de B e $\delta(A,B) = -d(A,B)$ se A está à direita de B. Prove que, para quaisquer pontos A, B e C do eixo E, tem-se $\delta(A,B) + \delta(B,C) + \delta(C,A) = 0$.

6. Sejam $a < b < c$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, B e C situados sobre um eixo. Sabendo que $a = 17, c = 32$ e $d(A,B)/d(A,C) = 2/3$, qual é o valor de b?

7. Qual seria a resposta do exercício anterior se soubéssemos apenas que $a < c$?

8. Sejam A, B, C, D pontos dispostos nesta ordem sobre um eixo E. Esboce os gráficos das funções $\varphi, f, g : E \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= d(X,A) + d(X,B), \\ f(X) &= d(X,A) + d(X,B) + d(X,C), \\ g(X) &= d(X,A) + d(X,B) + d(X,C) + d(X,D). \end{aligned}$$

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

   (i) Pondo $f(0) = a$, defina a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim: $g(x) = f(x) - a$. Prove então que $|g(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Também $(g(x))^2 = x^2$.

   (ii) Use a identidade $xy = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (x-y)^2]$ para mostrar que $xy = g(x) \cdot g(y)$.

   (iii) Se $g(1) = 1$, mostre que $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $g(1) = -1$, mostre que $g(x) = -x$ para todo x.

   (iv) Conclua que $f(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou então $f(x) = -x + a$ para todo x.

Exercícios

1. Diz-se que o ponto A' é o *simétrico* do ponto A em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento AA'. Sabendo que $A = (x, y)$, determine os simétricos de A em relação aos eixos OX e OY respectivamente.

2. O conjunto r, formado pelos pontos $(x, 5)$, cujas ordenadas são iguais a 5, é uma reta paralela ao eixo OX. Determine o simétrico do ponto $P = (3, -2)$ em relação à reta r.

3. Enuncie e responda uma questão análoga à do exercício anterior, com a reta $r' = \{(a, y); y \in \mathbb{R}\}$, paralela ao eixo OY, e o ponto $P = (c, d)$.

4. Para cada uma das equações abaixo, descreva o conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem essa equação:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
b) $y^2 - 6y + 9 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
d) $|x| + y = 0$;
e) $(x^2 - 7x + 10)(y^2 - 7x + 6) = 0$;
f) $(x^2 + 1)(x - y) = 0$;
g) $x^3 + x - x^2y - y = 0$.

5. Esboce o conjunto $X = \{(x, y); |y| \leq x \leq 3\}$.

6. Em cada um dos casos abaixo, esboce o conjunto dos pontos cujas coordenadas x, y cumprem as condições especificadas:

a) $|x - 3| < 1$;
b) $|x - 3| = 1$;
c) $|x - 3| \leq 1$ e $|y - 2| \leq 5$;
d) $|x - 3| \leq 1$ ou $|y - 2| \leq 5$;
e) $|x| \geq 2$ e $|y| \geq 3$;
f) $0 \leq x \leq y \leq 1$;
g) $xy = 0$;
h) $x > y$;
i) $x \geq y$;
j) $x^2 < y^2$;
k) $x^2 \leq y^2$.

7. Dado $A = (x, y)$ com $x \neq y$, observe que os pontos $B = (x, x)$, $C = (y, x)$ e $D = (y, y)$ formam, juntamente com A, os vértices de um quadrado de lados paralelos aos eixos. A partir daí determine o simétrico de A relativamente à diagonal $\Delta = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$.

8. Com argumento análogo ao do exercício anterior, determine o simétrico do ponto $A = (x, y)$ em relação à diagonal $\Delta' = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

9. Qual é o ponto da diagonal Δ mais próximo de $P = (x, y)$? E da diagonal Δ'? (Use as coordenadas do ponto médio de um segmento. V. Seção 3.)

10. O ponto X' chama-se o *simétrico* do ponto X em relação ao ponto A quand A é o ponto médio do segmento XX'. Qual é o simétrico do ponto $X = (x, y$ em relação ao ponto $A = (a, b)$? Em particular, qual é o simétrico de X en relação à origem $O = (0, 0)$?

11. Determine as coordenadas do simétrico do ponto $P = (2, -3)$ em relação

a) ao eixo OX;

b) ao eixo OY;

c) à diagonal Δ;

d) ao ponto $(-3, 2)$.

12. Três vértices de um retângulo são $O = (0, 0), A = (a, a)$ e $B = (-b, b)$. Qua é o quarto vértice?

13. Qual é o comprimento da projeção ortogonal do segmento AB sobre o eix OX? Sabe-se que $A = (1, 2)$ e $B = (-3, 4)$.

14. Todos os pontos P de uma certa reta r têm ordenada igual a três vezes su abcissa. Mostre que r passa pela origem O. Qual é a relação entre a ordenad e a abcissa de um ponto Q pertencente à reta s, perpendicular a r a partir d O?

15. Se somarmos a mesma constante às ordenadas de três pontos colineares, mostr que se obtêm ainda três pontos colineares. Conclua que, para todo $a \in \mathbb{R}$ o conjuntos $X = \{(x, x + a); x \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{(x, -x + a); x \in \mathbb{R}\}$ são retas, paralela às diagonais Δ e Δ' respectivamente.

16. Identifique o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $0 \leq x \leq y \leq 1 - x$.