1ª Lista de Exercícios
Revisão de Matrizes, Determinantes, Vetores e Sistemas Lineares.
SMA0330 - Complementos de Geometria e Vetores
Estagiária PAE: Ingrid Sofia Meza Sarmiento.

1. Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcular $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
   (b) Calcular $\frac{1}{4}\mathbf{A}$ e $4\mathbf{B}$
   (c) Calcular $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$

2. Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

   Calcular a matriz X tal que $X = 2A - 4B$.

3. Sejam

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e } 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Determine as matrizes

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{V}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

   tais que $M \cdot V = W$ e $N \cdot V' = 0$.

4. Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

   calcular: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}^t)(\mathbf{A}^t - \mathbf{B})$.

5. Provar que, se A e B comutam, (isto é, $AB = BA$), então

   (a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   (b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

6. Uma matriz quadrada A diz-se *simétrica* se $A^t = A$; *anti-simétrica* se $A^t = -A$. Provar que, se A e B são simétricas, então $A + B$ e λA também o são. Faça o mesmo exercicio considerando que A e B são anti-simétricas. O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica?

7. Calcule as inversas das seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

8. Encontre todos os valores de a para os quais a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

tem inversa. Achar a inversa.

9. Resolver a equação (em λ) det $(A - \lambda I) = 0$ onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(As raízes dessa equação, denominam-se valores próprios da matriz $\mathbf{A}$).

10. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que existe

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$$

que satisfaz $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$.

(b) Para cada um dos valores de λ encontrados no item anterior determinar todos os

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$$

tais que $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$.

11. Resolver os seguintes sistemas

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \\ 4x + 4y + 5z = 3 \end{cases} \quad (2)$$

12. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre a solução geral do sistema $(A + 4I_3)\,X = 0$

(b) Encontre a solução geral do sistema $(A - 2I_3)\,X = 0$

13. Para cada um dos sistemas a seguir, decida se existem ou não soluções. No caso afirmativo, exiba todas as soluções do sistema em termos de um ou dois parâmetros independentes.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 5z = 3 \\ 4x - 2y + 10z = 5 \end{cases}$$

14. Determine todas as soluções do sistema, se houver.

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 1 \\ 4x - 3y + z = 2 \\ 2x - 7y + 3z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 4 \\ 4x - 3y + z = 3 \\ 5x - 7y + 3z = 2 \end{cases}$$

15. Prove o Teorema 10 da 'Guia-1.pdf'