Guia-1

Revisão de Matrizes, Determinantes, Vetores e Sistemas Lineares.
SMA0330 - Complementos de Geometria e Vetores
Estagiária PAE: Ingrid Sofia Meza Sarmiento.

1 Introdução

Este texto cobre o material sobre Matrizes, Determinantes, vetores e Sistemas Lineares que serão trabalhados na lista de revisão. Algumas outras bibliografias poderão ser consultadas. No final deste texto faço referencia a algumas delas.

2 Noção de Matriz

A idéia geral de matriz do tipo $m \times n$ é a de um quadrado retangular com mn elementos, dispostos em m linhas e n colunas. Na grande maioria das vezes, esses elementos são números. Matrizes são frequentemente utilizadas para organizar dados. Por exemplo, as notas finais dos alunos de uma série no colégio podem formar uma matriz cujas colunas correspondem às matérias lecionadas naquela série e cujas linhas representam os alunos. Na interseção de uma linha com uma coluna figura um número, que é a nota daquele aluno naquela matéria. Matrizes são ainda usadas na teoria dos grafos e em muitas áreas de Matemática.

Formalmente, temos a seguinte definição.

Definicão 1. *Uma matriz de tipo $m \times n$ (lê-se: m por n), onde m, $n \geq 1$, é uma lista de números a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz A é representada por um quadrado numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i- ésima linha com a j- ésima coluna:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})$ chama-se a i- ésima linha da matriz $\mathbf{A}$ enquanto $(a_{1j}, a_{2j}, \dots a_{mj})$ é a j- ésima coluna de $\mathbf{A}$.

Se $n = 1$, a matriz é dita *matriz-coluna*; se $m = 1$, *matriz-linha*; se $m = n$, *matriz quadrada de ordem n.* Duas matrizes $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$, de tipo $m \times n$, são iguais (isto é, coincidem) se e somente se $(a_{ij}) = (b_{ij})$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

Exemplo 1. *1.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{matriz de tipo } 2 \times 3$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \textit{matriz-coluna } 2 \times 1$$

3.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{matriz-linha } 1 \times 3$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{matriz quadrada de 3}^{a} \textit{ ordem}$$

Definicão 2 (Adição de Matrizes)**.** *Dadas duas matrizes* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *e* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *de tipo* $m \times n$*, chama-se soma da matriz* $\mathbf{A}$ *com a matriz* $\mathbf{B}$ *(indica-se* $A+B$*) a matriz* $\mathbf{C} = (c_{ij})$*, onde* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *(*$1 \leq i \leq m$*,* $1 \leq j \leq n$*).*

Note-se que só podemos somar matrizes de mesmo tipo.

A matriz de tipo $m \times n$ que tem todos os elementos iguais a zero chama-se *matriz nula* e se indica por 0.

Dada a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$, a matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})$, em que $b_{ij} = -a_{ij}$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) chama-se *oposta de* $\mathbf{A}$ e se indica por $-\mathbf{A}$.

Chama-se *diferença* entre a matriz $\mathbf{A}$ e a matriz $\mathbf{B}$ (indica-se $\mathbf{A} - \mathbf{B}$) a soma de $\mathbf{A}$ com $-\mathbf{B}$.

Definicão 3 (Produto de um número real por uma matriz.)**.** *Dada uma matriz* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *e um número real* t*, chama-se produto de* t *por* $\mathbf{A}$ *a matriz* $\mathbf{B} = (b_{ij})$*, onde* $b_{ij} = ta_{ij}$ *(*$1 \leq i \leq m$*,* $1 \leq j \leq n$*). Indica-se por* $t\mathbf{A}$

Definicão 4 (Produto de Matrizes)**.** *Dada uma matriz* $A = (a_{ij})$ *de tipo* $m \times n$*, e uma matriz* $B = (a_{jk})$ *de tipo* $n \times p$*, chama-se produto de* A *por* B *(indica-se* AB*) a matriz* $C = (c_{ik})$ *de tipo* $m \times p$*, onde*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}.$$

Exemplo 2. *1.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -1 \\ 17 & -3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Vemos que o elemento c_{ik} da matriz produto é obtido multiplicando os elementos da linha i da primeira pelos elementos correspondentes da coluna j da segunda, e somando os produtos assim obtidos. Observe-se que só podem multiplicar duas matrizes se o número de colunas da primeira fôr igual ao número de linhas da segunda. Duas matrizes quadradas só podem ser multiplicadas se tiverem mesma ordem.

Definicão 5 (Matriz transposta)**.** *Dada uma matriz* $A = (a_{ij})$ *de tipo* $m \times n$*, chama-se trasposta de* A *a matriz* $B = (b_{ji})$*, de tipo* $n \times m$*, onde* $b_{ji} = a_{ij}$ *(*$1 \leq i \leq m$*,* $1 \leq j \leq n$*). A transposta de* A *indica-se por* A^t*.*

Exemplo 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

3 Determinantes

O determinante de uma matriz 2×2 surge frequentemente em questões da Geometria Analítica Plana. Se

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

definimos o determinante da matriz m como segue

Definicão 6. *$det\ m = ad - bc$*

Faremos agora o estudo do determinante de uma matriz 3×3. O caso geral, de uma matriz $n \times n$, pode ser tratado de modo análogo, com uma notação mais complicada porém seguindo os mesmos princípios.

Definicão 7. *O determinante da matriz*

$$m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

é o número

$$\Delta = det\ m = a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2. \tag{1}$$

Ela é a soma de 6=3! parcelas, cada uma das quais é um produto de três fatores, pertencendo esses 3 fatores a linhas e colunas diferentes. Assim, cada uma das seis parcelas é um produto do tipo abc, com os índices 1,2,3 aparecendo, cada um uma vez, em todas essas parcelas. A ordem em que esses índices aparecem é relevante. Ela corresponde às permutações de 1,2,3. As permutações 123,312 e 231 aparecem nas parcelas precedidas do sinal + enquanto as permutações 213, 321, e 132 correspondem às parcelas precedidas do sinal -.

Sejam $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = a_2, b_2, c_2$ e $w = a_3, b_3, c_3$ os três vetores de $\mathbb{R}^3$ que correspondem às três linhas da matriz m acima. Quando quizermos enfatizar a dependência do determinante de m em relação a esses vetores, escreveremos

$$\det m = \det [u, v, w].$$

A seguir, faremos uma lista de algumas das propriedades básicas do determinate.

1. O determinante muda de sinal quando se trocam as posições de quaisquer de suas linhas.

2. Se uma matriz tem duas linhas iguais, seu determinante é igual a zero.

3. Se multiplicamos uma linha da matriz por um número, o determinante fica multiplicado por aquele número.

4. Se uma linha da matriz é combinação linear das outras duas, o determinante dessa matriz é zero. Assim $\det\,[u, \alpha \cdot u + \beta \cdot w, w] = \det\,[u, v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v] = 0$.

5. O determinante não se altera quando se trocam as linhas pelas colunas e vice-versa. Desta propriedade segue-se que dada uma matriz m e sua transposta m^t têm o mesmo determinante.

6. Tem-se $\det\,[u, v, w] = 0$ se, e somente se, os vetores u, v, w são linearmente dependentes, isto é, um deles é combinação linear dos demais.

3.1 Aplicação da teoria dos determinates na noção de matrizes.

Cada matriz quadrada está associado o número real, chamado *determinante* da matriz. Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$, chama-se *cofator* do elemento a_{ij} de A o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz obtida eliminando de A a linha i e a coluna j.

Dada uma matriz quadrada A, podemos formar uma nova matriz, substituindo cada elemento por seu cofator; essa matriz será indicada por $\bar{A}$. A transposta da matriz $\bar{A}$ dos cofatores é chamada matriz *adjunta* da matriz A.

Definicão 8 (Matriz Inversível)**.** *Uma matriz quadrada A de ordem n se diz inversível se existe uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. A matriz B se diz inversa de A e se indica por A^{-1}.*

Uma matriz inversível também é dita não singular e uma matriz não inversível é chamada singular.

Se A é inversível, então a sua inversa é única.

Teorema 9. *Seja B a adjunta da matriz A e $\Delta = \det A$. Então*

$$AB = BA = \Delta I_n$$

.

Teorema 10. *Para que uma matriz quadrada A seja inversível é necessário e suficiente que seu determinante seja diferente de zero.*

Segue-se dos teoremas acima mencionados que supondo $\Delta \neq 0$, podemos afirmar que A é inversível e que $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}B$, onde B é a matriz adjunta de A.

4 Sistemas Lineares

Vamos aplicar a teoria da inversão de matrizes na resolução de um sistema linear. Consideremos um sistema de n equações lineares a n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O 1º membro da i-ésima equação é o elemento da i-ésima linha da matriz-coluna obtida fazendo o produto AX. O sistema pode ser representado, então, pela equação matricial

$$AX = B$$

Supondo $\mathbf{detA} \neq 0$, multiplicamos ambos membros à esquerda, por A^{-1} e obtemos a solução

$$X = A^{-1}B$$

Referências

[1] Lima. Elon Lages: *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Coleção matemática universitária (2011).

[2] Caroli. Alésio: *Matrizes, vetores, geometria analítica*, (1984).

[3] Santos, Reginaldo J: *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*, Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG (2012).