11

Desigualdades Lineares

Toda reta decompõe o plano em duas regiões, chamadas *semi-planos*.

Se a reta r é representada pela equação $ax + by = c$, os semi-planos H^- e H^+ por ela determinados são definidos pelas desigualdades $ax + by \leq c$ e $ax + by \geq c$ respectivamente. Assim,

$$H^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \leq c\} \text{ e } H^+\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \geq c\}.$$

Na prática, dada a reta r pela equação $ax + by = c$, como saber qual dos dois semi-planos por ela determinados é $ax + by \leq c$ e qual é $ax + by \geq c$?

Considerando a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x, y) = ax + by$, a reta $ax+by = c$ é a linha de nível c da função φ. Como $\varphi(0, 0) = 0$, a origem está no nível zero de φ. Por outro lado, como $\varphi(a, b) = a^2+b^2 > 0$, o ponto $A = (a, b)$ está no nível positivo $c = a^2 + b^2$. Logo, quando percorremos a reta OA no sentido de O para A, os níveis c das retas $ax + by = c$ (todas perpendiculares a OA) vão crescendo. Isto nos permite distinguir os semi-planos $ax + by \leq c$ e $ax + by \geq c$.

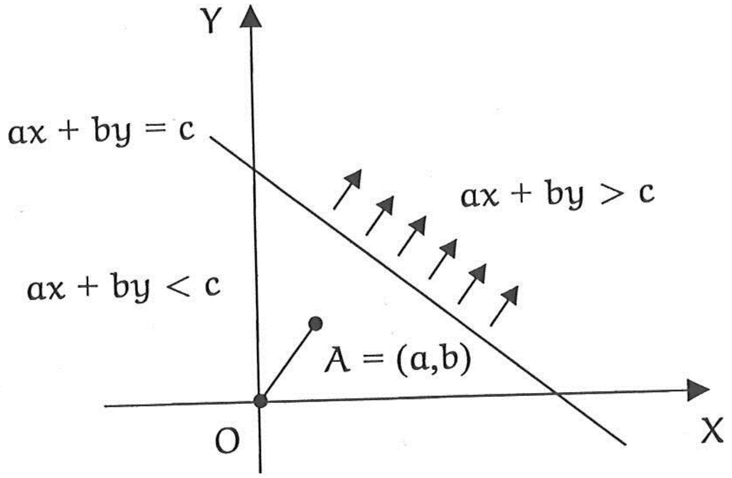

Figura 11.1 - As setas indicam o crescimento da função $\varphi(x,y)=ax+by$.

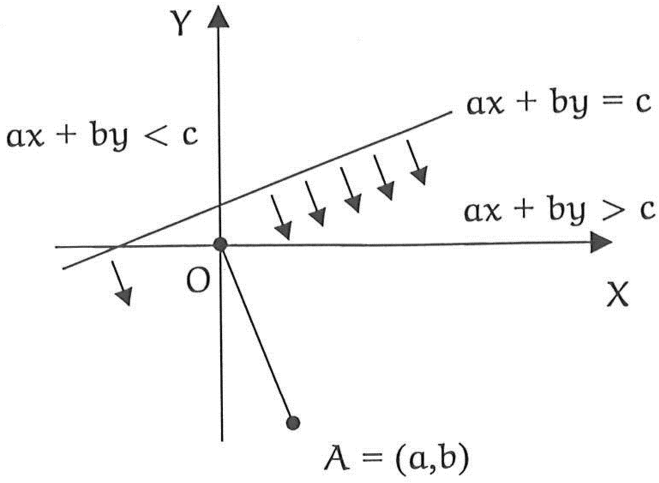

Figura 11.2 - A figura exibe os semi-planos $ax+by \geq c$ e $ax+by \leq c$.

As figuras desta seção ilustram o fato de que, para $A = (a, b)$, o sentido de percurso de O para A é o sentido do crescimento da função $\varphi(x, y) = ax + by$.

Multiplicando, se for preciso, ambos os membros por -1, podemos sempre escrever qualquer desigualdade linear sob a forma $ax + by \leq c$.

Uma *solução* do sistema de desigualdades lineares

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y &\leq c_1 \\
a_2x + b_2y &\leq c_2 \\
&\vdots \\
a_nx + b_ny &\leq c_n
\end{aligned}
$$

é um ponto $P = (x, y)$ cujas coordenadas x, y satisfazem todas as desigualdades do sistema. Isto equivale a dizer que o ponto P pertence a todos os semi-planos $H_1, H_2, \cdots, H_n$, definidos por essas desigualdades.

Assim, o conjunto das soluções do sistema acima é a interseção $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n$ desses semi-planos.

Exemplo 11.1 O conjunto das soluções do sistema de desigualdades lineares

$$
\begin{aligned}
x + y &\leq 1 \\
-x + y &\leq 1 \\
-y &\leq 0
\end{aligned}
$$

é a região do plano limitada pelo triângulo ABC, onde $A = (-1, 0), B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$. (Vide figura 11.3.)

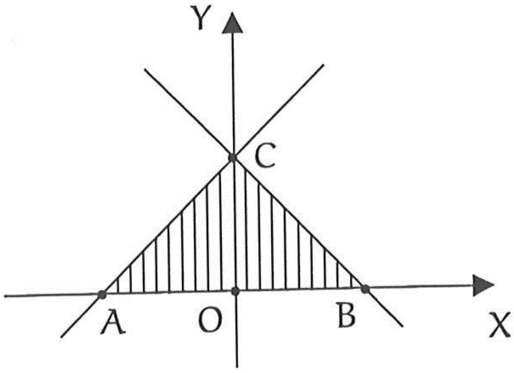

Figura 11.3 - O triângulo ABC delimita a região definida pelas desigualdades $x + y \leq 1$, $-x + y \leq 1$, $-y \leq 0$.

Exemplo 11.2 O sistema de desigualdades $x \geq 0, x + y \geq 1, y \geq 0, 2x - y \leq 3$ tem como conjunto de soluções a região ilimitada que vem hachurada na figura 11.4.

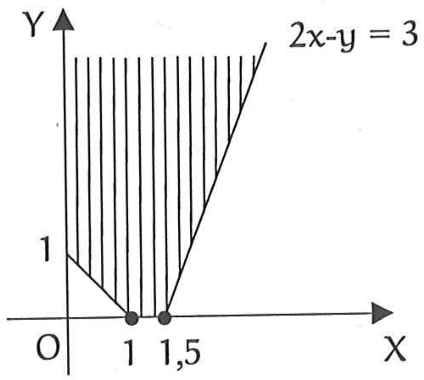

Figura 11.4 - Região definida pelas desigualdades $x \geq 0$, $x+y \geq 1$, $y \geq 0$, $2x-y \leq 3$.

Os sistemas de desigualdades lineares ocorrem em problemas que consistem em maximizar (ou minimizar) funções lineares, do tipo $f(x, y) = \alpha x + \beta y$, onde as variáveis x, y são sujeitas a restrições sob a forma de um sistema de desigualdades lineares. Esses problemas são objeto de estudo de uma área da Matemática chamada Programação Linear.

Num problema de Programação Linear tem-se um sistema de desigualdades lineares

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\le c_1 \\ a_2x + b_2y &\le c_2 \\ &\vdots \\ a_nx + b_ny &\le c_n. \end{aligned}$$

Os pontos $P = (x, y)$ que são soluções deste sistema chamam-se pontos *viáveis*. Eles formam um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^2$, o *conjunto de viabilidade*. É dada uma função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \alpha x + \beta y$ e o problema consiste em determinar, entre os pontos viáveis $P = (x, y)$ aquele (ou aqueles) para os quais o valor $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ é o maior possível.

Sabemos que as linhas de nível da função $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ são as retas perpendiculares à reta OA, onde $A = (\alpha, \beta)$, isto é, em todos os pontos de uma dessas retas a função f assume um valor constante. Sabemos também que, ao deslocarmos essa linha de nível paralelamente a si mesma no sentido de O para A, o valor da função f cresce.

Daí resulta a observação fundamental seguinte: *o valor máximo de f no conjunto V dos pontos viáveis não pode ser atingido num ponto do interior de V; tem que ser atingido num ponto do bordo de V.*

Com efeito, se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto interior de V então a linha de nível que passa por P_0 pode ser deslocada um pouco, de modo a nos dar outros pontos de V nos quais f assume valores maiores do que $f(x_0, y_0)$.

Note-se que o bordo de V é formado por segmentos de reta ou (duas) semi-retas, que chamamos os *lados* de V. Assim, o valor máximo de f em V é atingido num dos vértices ou em todos os pontos de um dos lados de V (então esse lado está contido numa linha de nível de f). De qualquer modo, o máximo é atingido num vértice.

Vejamos dois exemplos, ilustrando essas possibilidades.

Exemplo 11.3 Consideramos o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x - y$, com as variáveis x, y sujeitas às restrições $x + y \le 1, -x + y \le 1, -y \le 0$ (Vide Exemplo 11.1.)

O conjunto dos pontos viáveis é o triângulo ABC, com $A=(-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$. As linhas de nível de f são $2x - y = c$, ou $y = 2x - c$, perpendiculares ao segmento $OP, P = (2, -1)$ e os valores c da função $f(x, y) = 2x - y$ crescem quando essas linhas se deslocam no sentido de

O para P. O valor máximo de f no triângulo V é atingido no vértice $(1, 0)$.

Esse valor é $f(1, 0) = 2 \cdot 1 - 0 = 2$. A resposta é 2.

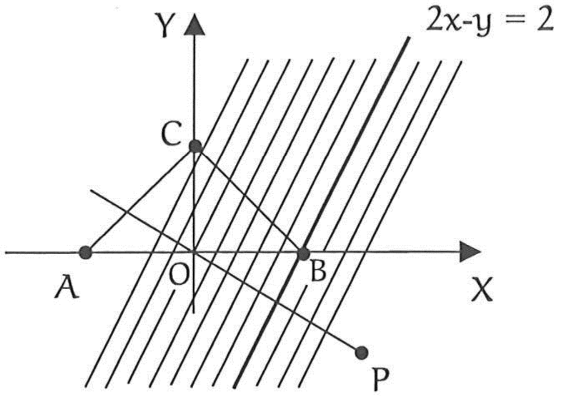

Figura 11.5 - Linhas de nível da função $f(x,y) = 2x - y$. O máximo de f em ABC é 2, atingido no vértice B.

Exemplo 11.4 Seja o problema de achar o maior valor da função $f(x, y) = 3x - 2y$ com as variáveis x, y sujeitas às restrições $x \geq 0, x + y \geq 1, y \geq 0, 2x - y \leq 3$. O conjunto V dos pontos viáveis é aquele do Exemplo 11.2. As curvas de nível $3x - 2y = c$ são perpendiculares ao segmento OA, onde $A = (3, -2)$ e o sentido de crescimento de c é de O para A.

O máximo de $f(x, y) = 3x - 2y$ em V é atingido no vértice $P = (3/2, 0)$, onde se tem $f(3/2, 0) = 9/2$.

Exemplo 11.5 Uma fábrica de rações para cães e para gatos produz rações de dois tipos, obtidos mediante a mistura de três ingredientes básicos: carne desidratada, farinha de milho e farinha de soja.

Ração para	Carne desidr.	f. de milho	f. de soja
Cães	3 kg	1 kg	1 kg
Gatos	2 kg	2 kg	-

A tabela acima indica as quantidades de ingredientes em um pacote de cada tipo de ração.

Para a próxima semana de produção, estão disponíveis 1200kg de carne desidratada, 800kg de farinha de milho e 300kg de farinha de soja. O lucro é de 40 reais em cada pacote de ração, para cães ou para gatos. A fábrica deseja decidir quantos pacotes produzir de cada tipo de ração de modo a maximizar o lucro.

Esta situação pode ser formulada matematicamente como um problema de Programação Linear. Sejam x e y os números de pacotes de ração para cães e gatos, respectivamente, a serem produzidos durante a semana. As limitações nas quantidades disponíveis dos ingredientes impõem restrições expressas por desigualdades lineares a serem satisfeitas por x e y. As seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 1200 \quad &\text{(carne desidratada)} \\ x + 2y &\leq 800 \quad &\text{(farinha de milho)} \\ x &\leq 300 \quad &\text{(farinha de soja)} \end{aligned}$$

Além disto, deve-se ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Cada uma das cinco desigualdades acima corresponde a um semi-plano. A interseção desses cinco semi-planos é a região convexa R representada na figura 11.6. R é o conjunto de todas as soluções *viáveis* (ou possíveis) para o problema. Por exemplo, o ponto $(100, 100)$ está em R, o que indica que a fábrica pode produzir 100 pacotes de cada tipo de ração sem violar qualquer uma das cinco restrições.

O interesse da fábrica, porém, é maximizar a *função objetivo* $\varphi(x, y) = 40x + 40y$. O ponto $(100, 100)$ tem nível 8.000 em relação a φ; a linha de nível correspondente está representada na figura. É claro que $(100, 100)$ não é a melhor solução possível para o problema, já que há outros pontos de R situados em linhas de nível mais alto de φ. Para obter a solução do problema, a idéia é justamnte tomar a linha de nível mais alto de φ que ainda contenha pelo menos um ponto de R. Tal linha de nível é a que passa pelo ponto B de interseção das retas $3x + 2y = 1200$ e $x + 2y = 800$. De fato, a inclinação das linhas de nível de φ é igual a -1; as inclinações das retas $3x + 2y = 1200$ e $x + 2y = 800$ são $-3/2$ e $-1/2$, respectivamente. Como $-3/2 < -1 < -1/2$, a posição relativa das três retas é a indicada na figura 11.6, o que mostra que a linha de nível máximo de φ que contém pontos de R passa por B. O ponto B é obtido resolvendo o sistema

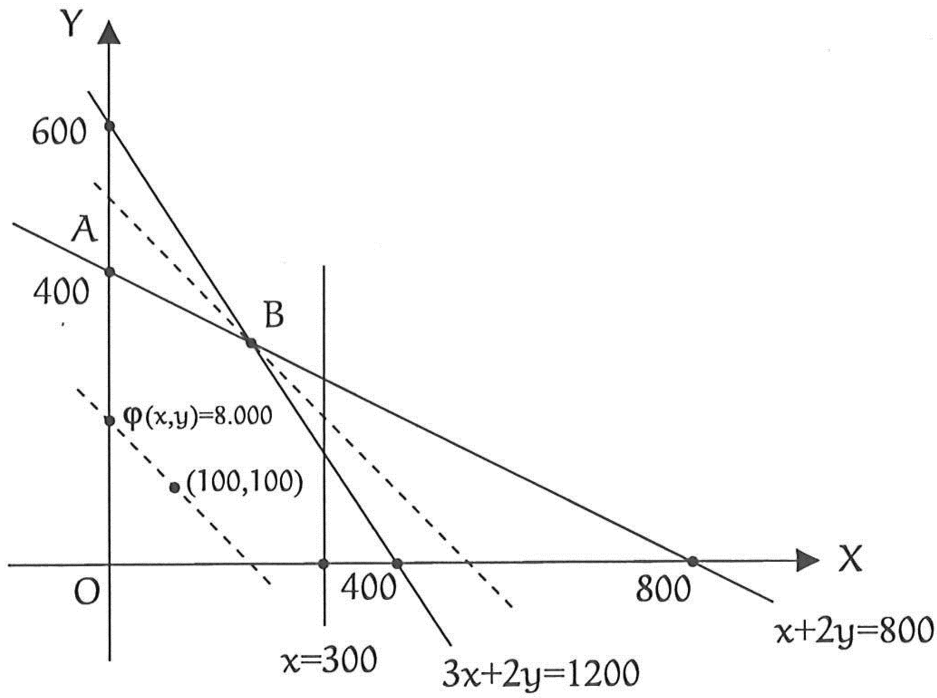

Figura 11.6 - Um problema de programação linear.

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 1200 \\
x + 2y &= 800
\end{aligned}
$$

que fornece $x = 200$ e $y = 300$.

Logo, a estratégia ótima para a fábrica é produzir 200 pacotes de ração para cães e 300 de ração para gatos, o que traz um lucro de 20.000 reais. Notamos que as quantidades disponíveis de farinha de milho e carne desidratada são inteiramente utilizadas, e que há uma sobra de farinha de soja.

É possível, porém, que todos os pontos de um dos lados de R sejam soluções ótimas. Caso a função objetivo no exemplo fosse, $\varphi(x, y) = 30x + 20y$, suas linhas de nível seriam paralelas à reta $3x + 2y = 1200$ e, em conseqüência, todos os pontos do segmento BC seriam soluções ótimas.

Observação 11.1 Um método prático de achar o ponto de máximo (ou de mínimo) de f consiste em calcular $f(P)$ para todo vértice P e ver qual desses valores é o maior (ou o menor).

Exercícios

1. Esboce o gráfico do conjunto das soluções de cada uma das desigualdades a seguir:

a) $y \leq x^2$

b) $x^2 + y^2 \geq 1$

c) $x^2 + 2y^2 \leq 1$

d) $|x| + |y| \leq 1$.

2. Para cada uma das regiões do plano descritas a seguir, escreva uma desigualdade ou sistema de desigualdades que a defina:

a) O semi-plano abaixo da reta $2x + 3y - 6 = 0$.

b) A região formada pelo interior e os lados do triângulo cujos vértices são $(0,0), (3,3)$ e $(4,0)$.

c) A parte da circunferência de centro $(1,0)$ e raio 1 situada acima do eixo OY.

3. Uma pequena fábrica produz copos comuns e copos de vinho. Uma máquina automatiza parte do processo de fabricação. Para produzir uma caixa de copos comuns requer-se 1 hora de uso da máquina mais 1 hora de trabalho de um operário. A produção de uma caixa de copos de vinho requer apenas meia hora de uso da máquina mas ocupa 2 horas de trabalho operário. No período de uma semana, a fábrica dispõe de 80 horas de trabalho manual e 50 horas de uso da máquina. O lucro na venda de uma caixa de copos de vinho é de 50 reais e, numa caixa de copos comuns, o lucro é de 40 reais.

a) Qual deve ser a produção semanal de cada tipo de copo de modo a maximizar o lucro?

b) Suponha que, repentinamente, haja uma falta de copos de vinho no mercado, o que faz subir o preço de venda (portanto o lucro) de cada caixa de copos de vinho. Qual é o lucro máximo por caixa de copos de vinho para que a solução encontrada em a) continue ótima? Se o lucro exceder esse valor, qual será a solução ótima?

4. Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 3, y = 2,1 \cdot x + 1$ e $y = 300$. Determine se o ponto $P = (142, 298)$ está no interior, no exterior ou num dos lados desse triângulo.

5. Um subconjunto C do plano chama-se *convexo* quando o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de C está contido em C. Prove que o conjunto das soluções de um sistema de desigualdades lineares a duas incógnitas é um conjunto convexo.

6. Esboce o gráfico do conjunto das solucões de cada um dos sistemas de desigualdades lineares a seguir

$$\begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ -2x + y \geq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \geq x \\ y \geq 2 - 2x \end{cases}$$

7. Determine o menor valor que $x + 2y$ assume no conjunto definido pelas desigualdades

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ -x + y \geq -1 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

8. No exercício anterior, o que ocorre se o objetivo for maximizar $x + 2y$ sujeito às mesmas restrições?

9. Um banco europeu dispõe de 100 milhões de euros para aplicar imediatamente. Duas opções lhe são oferecidas:

   Opção A: 10% ao ano, baixa liquidez.

   Opção B: 5% ao ano, alta liquidez.

   A diretoria decide que, por segurança, o total investido na opção A no máximo será 3 vezes o que foi investido na opção B.

   O objetivo do banco é receber o máximo de juros dentro dessas condições. Quantos euros em cada opção deve o banco investir?

10. Um agricultor costuma plantar feijão e arroz. Sua propriedade dispõe de 40ha de terra cultivável mas apenas 20ha podem ser usados para plantar arroz.

    Ele tem condições de pagar 2400 horas de trabalho no verão e 1380 horas no inverno. Suas culturas apresentam as seguintes características:

	lucro por ha.	**horas de trabalho por ha. no verão**	**horas de trabalho por ha. no inverno**
feijão	450	30	24
arroz	1200	120	60

    Quantos hectares de feijão e quantos de arroz ele deve plantar de modo a maximizar seu lucro? (A área utilizada para plantar cada um dos cereais é a mesma em ambos os plantios.)