5.a Lista de Exercícios de SMA304 - Álgebra Linear

Exercício 1. Quais das seguintes aplicações entre os correspondetes espaço vetoriais são transformações lineares?

(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) \doteq (x,x,x)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) \doteq (2x^2+3y,x,z)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) \doteq (x+y,x-y)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(d) $T\colon \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p)(x) \doteq (a_1-2a_3-a_2)-a_0x^2$, $\quad$ onde $\quad p(x) \doteq a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, $\quad x \in \mathbb{R}$.
(e) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(x) \doteq |x|$.
(f) $T\colon \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dada por $T(p) \doteq p'$, $\quad p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.
(g) $T\colon \mathscr{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dada por $T(p) \doteq \displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx$, $\quad p \in \mathscr{P}_4(\mathbb{R})$.
(h) $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dada por $T(x,y,z) \doteq \begin{pmatrix} -z & z-y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(i) $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dada por $T(x,y,z) \doteq \begin{pmatrix} 1 & -y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(j) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(x) \doteq x^2-2x$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Verifique se as transformações abaixo são lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x,y,z) \doteq x+5y-z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x,y,z) \doteq x+5y-z+1, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x,y,z) \doteq x^2+5y-z, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(d) $T : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, dada por $T(X) \doteq AX+X$, $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ com $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixa.
(e) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, dada por $T(p) \doteq p'+p''$, $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.
(f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dada por $T(X) \doteq AX$, $X \in M_2$, onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ está fixada.
(g) $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p) \doteq p+q$, $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é dada por $q(t) \doteq t^2+1$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x,y,z) \doteq (3x, x-y, 2x+y+z), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $\left(T^2-I\right)\circ(T-3I)=0$, onde I é operador identidade em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4. Sejam $T,\, S \in L(V)$ tais que $S\circ T = T \circ S$. Mostre que

(a) $(T+S)^2 = T^2 + 2(T\circ S) + S^2$.
(b) $(T+S)\circ(T-S) = T^2 - S^2$

Exercício 5. Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ e $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ definidas por

$$T(x,y) \doteq (0,x,x-y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad S(x,y,z) \doteq (x-y, x+2y+3z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Determine $(T\circ S)(x,y,z)$, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 6. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) \doteq (y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determine $T^n(x,y)$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 7. Determine todas as transformações lineares $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tais que $T^2 = T$ e $T(x,y) = (ax, bx+cy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 8.

(a) Determine uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1,0,0) \doteq (2,0), \quad T(0,1,0) \doteq (1,1) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) \doteq (0,-1).$$

Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3,2)$.

(b) Determine uma transformação linear $T\colon \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(p_o) \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(p_1) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T(p_2) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Determine uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(1,1,1) \doteq (2,0,0,0), \quad T(1,1,0) \doteq (1,1,-1,1) \quad \text{e} \quad T(1,0,0) \doteq (0,0,0,-1).$$

Exercício 9. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x,y) \doteq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Mostre que a aplicação T é um operador linear em $\mathbb{R}^2$.
(b) Encontre todos os vetores $u \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = u$.
(c) Encontre todos os vetores $v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(v) = -v$.

Exercício 10. Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a respectiva dimensão do núcleo e da imagem.
(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$ dada por $T(x,y,z) \doteq x + z - y, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^2$.
(b) Seja $p_2(x) \doteq x^2,\ x \in \mathbb{R}$ e $T\colon \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p) \doteq p_2\, p'', \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
(c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$ dada por $T(x,y,z) \doteq (z, x-y, -z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$ dada por $T(x,y) \doteq (2y, x-y, -x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(e) Seja $M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}),$ dada por $T(X) \doteq MX + X, \quad X \in M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 11. Dê exemplos de transformações lineares $T : U \to V$, satisfazendo:
(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim[\mathcal{N}(T)] = 1$.
(b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{N}(T) = \{(0,0,0)\}$.
(c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\left(\mathbb{R}^2\right) = \{(0,0,0)\}$.
(d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\left(\mathbb{R}^3\right) = [(2,1,1),(1,-1,2)]$
(e) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{N}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = y\}$.
(f) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{N}(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ z = -x\}$
(g) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\dim\left[T\left(\mathbb{R}^4\right)\right] = 3$.
(h) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{N}(T) = [(2,1)]$.

Exercício 12. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1,0,0) \doteq (1,1,0), \quad T(0,1,0) \doteq (1,1,2) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) \doteq (0,0,2).$$

Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços:

(a) $\mathcal{N}(T)$ **(b)** $T(\mathbb{R}^3)$ **(c)** $\mathcal{N}(T) \cap T(\mathbb{R}^3)$ **(d)** $\mathcal{N}(T) + T(\mathbb{R}^3)$.

Exercício 13. Sejam U e V dois espaços vetoriais tais que $\dim U > \dim V$. Mostre que se $T\colon U \to V$ é uma transformação linear, então existe um vetor, não nulo, $u_0 \in U$ tal que $T(u_0) = 0$.

Exercício 14. Determinar o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x,y) \doteq y + 2x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x,y,z) \doteq z - 2x,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) \doteq (2x+2y, x+y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) \doteq (x+y, x-y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) \doteq (z-x, z-2x, z-3x),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 15. Determinar bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo.
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) \doteq (x+y, 2x+y, 3x+y),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x,y) \doteq y + 2x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dada por $T(X) \doteq AX,\ X \in M_2(\mathbb{R}),$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
(d) $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p) \doteq p',\ p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
(e) $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p) \doteq p' + p'',\ p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
(f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}),\ T(X) \doteq AX + X,\ X \in M_2(\mathbb{R}),$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear em $\mathbb{R}^3$tal que

$$T((1,0,0)) \doteq (2,3,1), \quad T((1,1,0)) \doteq (5,2,7) \quad \text{e} \quad T((1,1,1)) \doteq (-2,0,7).$$

(a) Encontre $T(x,y,z)$, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.
(c) T é injetora? Justifique sua resposta.

(d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Exercício 17. Seja $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ um operador linearem $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$(T(p_0))(t) \doteq 1 + t, \quad (T(p_1))(t) \doteq t + t^2 \quad \text{e} \quad (T(p_2))(t) \doteq 1 + t - 2t^2,$$

onde $p_i(t) = t^i, t \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, 2$.

(a) Encontre $T(p)$ para $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
(b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.
(c) T é injetora? Justifique sua resposta.
(d) T é bijetora? justifique sua resposta.

Exercício 18. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ um operador linear em $M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontre $T(X)$ para $X \in M_2(\mathbb{R})$.
(b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.
(c) T é injetora? Justifique sua resposta.
(d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Exercício 19. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$.

Exercício 20. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo e a imagem sejam gerados pelos (mesmos) vetores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$.

Exercício 21. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão 1.

Exercício 22. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e a imagem gerado pelo vetor $(1, -1, 1)$.

Exercício 23. Determinar $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ tal que

$$T(\mathbb{R}^3) \doteq [(2, 2, 3, 2), (3, 2, 0, 2)].$$

Exercício 24. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbb{R}^5) \doteq [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)] \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(T) = [(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0)].$$

Exercício 25. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, 0) \doteq (1, 2), \quad T(0, 1, 0) \doteq (3, 4), \quad T(0, 0, 1) \doteq (0, 0).$$

Exercício 26. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim[\mathcal{N}(T)] = 2$ e $\dim[T(\mathbb{R}^5)] \doteq 3$.

Exercício 27. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{N}(T) \doteq [(1, 0, 1)]$.

Exercício 28. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{N}(T) = T(\mathbb{R}^4) \doteq [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$.

Exercício 29. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbb{R}^2) \doteq [(1, 1, 1), (1, 2, 0)]$.

Exercício 30. Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbb{R}^2) = [(1, 1, 1)]$ e $\mathcal{N}(T) \doteq [(1, 1)]$.

Exercício 31. Sejam V espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear **idempotente**, isto é, $T^2 = T$.
Mostrar que $V = \mathcal{N}(T) \oplus T(V)$.

Exercício 32. Mostre que $T, R, S \in L(\mathbb{R}^2)$, dados por $T(x, y) \doteq (x, 2y)$, $R(x, y) \doteq (x, x + y)$, $S(x, y) \doteq (0, x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, formam um subconjunto l.i. em $L(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 33. Sejam U, V, W espaços vetoriais, $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$ tais que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $N(S) = \{0\}$.
Mostre que $\mathcal{N}(S \circ T) = \{0\}$.