4.a Lista de Exercícios de SMA304 - Álgebra Linear

Exercício 1. Determinar as coordenadas do vetor $u \doteq (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ em relação a cada uma das bases de $\mathbb{R}^3$ abaixo;

(i) base canônica de $\mathbb{R}^3$.
(ii) $\mathcal{B} \doteq \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$.
(iii) $\mathcal{C} \doteq \{(1,2,1), (0,3,2), (1,1,4)\}$.

Exercício 2. Determinar as coordenadas do polinômio $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dado por

$$p(t) \doteq 10 + t^2 + 2t^3, \ t \in \mathbb{R}$$

em relação as seguintes bases de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$;

(i) base canônica de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.
(ii) $\mathcal{B} \doteq \{q_o, q_1, q_2, q_3\}$, onde

$$q_o(t) \doteq 1, \quad q_1(t) \doteq 1 + t, \quad q_2(t) \doteq 1 + t + t^2, \quad q_3(t) \doteq 1 + t + t^2 + t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iii) $\mathcal{C} \doteq \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$, onde

$$r_o(t) \doteq 4 + t, \quad q_1(t) \doteq 2, \quad q_2(t) \doteq 2 - t^2, \quad q_3(t) \doteq t + t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3. Determinar as coordenadas do vetor $A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ em relação as seguintes bases de $M_2(\mathbb{R})$:

(i) base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.
(ii) $\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exercício 4. Encontre uma base de $M_2(\mathbb{R})$ que contenha

$$S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercício 5. Verifique que as coordenadas de $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ com relação à base $\mathcal{B} \doteq \{p_0, p_2, \cdots, p_n\}$, onde

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \cdots, p_n(x) \doteq x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

é

$$\begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{1}{2!} p''(0) \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} p^{(n)}(0) \end{pmatrix},$$

onde $p^{(k)}(0)$ denota a k-ésima derivada do olinômio p calculado em $x = 0$.

Exercício 6.

(a) Determinar as coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ em relação à base $\mathcal{B} \doteq \{p_1, p_2, p_3\}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, onde

$$p(x) \doteq x^2, \quad p_1(x) \doteq 1, \quad p_2(x) \doteq 2 - x, \quad p_3(x) \doteq 2 + x + x^2 \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Determinar as coordenadas do vetor $1 - 2i \in \mathbb{C}$ em relação à base $\mathcal{C} \doteq \{\, 1 - i, 1 + i \,\}$ de $\mathbb{C}$.

Exercício 7. Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{\, (1,0), (0,1) \,\}, \quad \mathcal{C} \doteq \{\, (-1,1), (1,1) \,\}, \quad \mathcal{D} \doteq \{\, (\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1) \,\}$$

bases de $\mathbb{R}^2$.

(a) Determinar as coordenadas do vetor $(3,2)$ em relação à base $\mathcal{B}$, em relação à $\mathcal{C}$ e em relação à base $\mathcal{D}$?

(b) Encontre as matrizes de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$; da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{D}$ e da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{D}$.

(c) Existe alguma relação entre as matrizes de mudança de bases encontradas no item (b)? Qual?

Exercício 8. Seja $\mathcal{B}$ é uma base de um espaço vetorial V. Qual é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}$?

Exercício 9. Seja V o espaço das matrizes 2×2 triangulares superiores. Sejam

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duas bases de V.

(a) Encontre as coordenadas do vetor $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ em relação às base $\mathcal{B}$ e em relação à base $\mathcal{C}$.

(b) Encontre as matrizes de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ e a da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$.

Exercício 10. A matriz de mudança de uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbb{R}^2$ para a base $\mathcal{C} \doteq \{\,(1,1),(0,2)\,\}$ desse mesmo espaço é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine a base $\mathcal{B}$.

Exercício 11. A matriz de mudança da base $\mathcal{B} \doteq \{p_1, p_2, p_2\}$ para uma base $\mathcal{C}$, ambas de um mesmo subespaço W de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, é $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, onde

$$p_1(x) \doteq 1 + x, \quad p_2(x) \doteq 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determine a base $\mathcal{C}$.

Exercício 12. Considere as bases $\mathcal{B} \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{g_1, g_2, g_3\}$ de um espaço vetorial V relacionadas da seguinte forma

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases}$$

(a) Determine as matrizes mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, isto é, $M_{\mathcal{BC}}$, e da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, isto é, $M_{\mathcal{CB}}$.

(1) Se a matriz das coordenadas do vetor $v \in V$ em relação a base $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ encontrar a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$.

(b) Se a matriz das coordenadas do vetor $v \in V$ em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$, é dada por $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$.

Exercício 13. Considere as bases ordenadas $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$ do espaço vetorial $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, onde

$$p_o(t) \doteq 1, \quad p_1(t) \doteq 1 + t, \quad p_2(t) \doteq 1 + t^2$$

e

$$q_o(t) \doteq t^2, \quad q_1(t) \doteq t, \quad q_2(t) \doteq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Encontre as matrizes de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, isto é $M_{\mathcal{BC}}$, e da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, isto é $M_{\mathcal{CB}}$.

(b) Se $[v]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ encontre $[v]_{\mathcal{C}}$.

(c) Se $[v]_{\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ encontre $[v]_{\mathcal{B}}$.

(d) Se a base $D \doteq \{r_o, r_1, r_2\}$ é a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, encontre as matrizes de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{D}$ e da base δ para a base $\mathcal{C}$, isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ e $M_{\mathcal{D}\mathcal{C}}$, respectivamente.

Exercício 14. Considere W o seguinte subespaço vetorial do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$

$$W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2; x - y - z = 0 \right\}.$$

(a) Mostre que

$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

são bases do subsepaço vetorial W.

(b) Encontre as matrizes de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ e da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, respectivamente.

(c) Encontre uma base $\mathcal{D}$ do subsepaço vetorial W, tal que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz de mudança da base $\mathcal{D}$ para a base $\mathcal{B}$, isto é, $P = M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$.