3.a Lista de Exercícios de SMA304 - Álgebra Linear

Exercício 1. Para cada um dos subconjuntos $S \subseteq V$, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.

(a) $S \doteq \{(1,0),(2,-1)\}\,,\ V \doteq \mathbb{R}^2$.
(b) $S \doteq \{(1,1,1),(2,2,0)\}\,,\ V \doteq \mathbb{R}^3$.
(c) $S \doteq \{p_0,p_1,p_2,p_3\}\,,\ V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde

$$p_0(t) \doteq 1, \quad p_1(t) \doteq t \quad p_2(t) \doteq t^2 \quad \text{e} \quad p_3(t) \doteq 1+t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(d) $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ V \doteq M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 2. Mostrar que os conjuntos $\{f_1,f_2,f_3\}$ e $\{g_1,g_2,g_3\}$ geram o mesmo subespaço vetorial do espaço vetorial $C(\mathbb{R})$, onde

$$f_1(t) \doteq \operatorname{sen}^2(t), \quad f_2(t) \doteq \cos^2(t), \quad f_3(t) \doteq \operatorname{sen}(t)\cos(t),$$

e

$$g_1(t) \doteq 1, \quad g_2(t) \doteq \operatorname{sen}(2t), \quad g_3(t) \doteq \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3.

(a) Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
(b) Mostre que os números complexos $z_1 \doteq 2+3i$ e $z_2 \doteq 1-2i$ geram o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 4. Verificar se as seguintes matrizes A_1, A_2, A_3, A_4 geram o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, onde:

$$A_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 5. Mostre que os polinômios p_1,p_2,p_3,p_4 geram $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ onde:

$$p_1(x) \doteq 1, \quad p_2(x) \doteq 1-x, \quad p_3(x) \doteq (1-x)^2, \quad p_4(x)(1-x)^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$; $u_1 \doteq (-1,0,1)$ e $u_2 \doteq (3,4,-2)$. Determine um sistema de equações lineares homogêneas para o qual o espaço solução seja exatamente o subespaço gerado pelos vetores u_1, u_2.

Exercício 7. Determine os geradores para cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

(a) $U \doteq \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x-2y=0\,\}$. Intreprete geometricamente.
(b) $V \doteq \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+z=0 \text{ e } x-2y=0\,\}$. Intreprete geometricamente.
(c) $W \doteq \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+2y-3z=0\,\}$. Intreprete geometricamente.
(d) $U \cap V$. Intreprete geometricamente.
(e) $V + W$. Intreprete geometricamente.

Exercício 8. Em cada um dos itens abaixo encontrar um subconjunto S, finito, que gere o subespaço vetorial W do espaço vetorial V indicado.

(a) $W \doteq \left\{(x,y,z) \in V \doteq \mathbb{R}^3;\ x-2y=0\right\}$.
(b) $W \doteq \{p \in V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p'(t)=0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
(c) $W \doteq \{A \in V \doteq M_2(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\}$.
(d) $W \doteq \{X \in V \doteq M_{3\times 1}(\mathbb{R})\,;\, AX=0\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercício 9. Encontrar, em cada um dos itens abaixo, os subconjuntos S do espaço vetorial V que geram U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

(a) $U \doteq [(1,0,0),(1,1,1)],\ W \doteq [(0,1,0),(0,0,1)],\ V \doteq \mathbb{R}^3$.
(b) $U \doteq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+y=0\right\},\ W \doteq [(1,3,0),(0,4,6)],\ V \doteq \mathbb{R}^3$.
(c) $U \doteq \{A \in M_2(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\}\,,\ W \doteq \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right],\ V = M_2(\mathbb{R})$.

(1) $U = [p, q, r]$, $W \doteq [s, u, v]$, $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde

$$p(t) \doteq t^3 + 4t^2 - t + 3, \quad q(t) \doteq t^3 + 5t^2 + 5, \quad r(t) \doteq 3t^3$$

e

$$s(t) \doteq t^3 + 4t^2, \quad u(t) \doteq t - 1, \quad v(t) \doteq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 10. Obtenha o subconjunto formado por vetores do espaço vetorial $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ que geram os seguintes subespaços;

(a) $U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p(1) = p(0) = 0\}$,
(b) $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$,
(c) $U \cap W$.

Exercício 11. Seja V o espaço vetorial das funções reais de uma variável real (isto é, $V \doteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$).
Mostre que $f, g \in [u, v] \subseteq V$ onde

$$f(x) \doteq 1, \quad g(x) \doteq \cos 2x, \quad u(x) \doteq \operatorname{sen}^2 x, \quad v(x) \doteq \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 12. Verifique se $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é gerado por $S \doteq \{p, q, r\}$ onde

$$p(x) \doteq 1 + x, \quad q(x) \doteq x + 2x^2 \quad \text{e} \quad r(x) \doteq 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 13. Sejam $M \neq 0$ uma matriz simétrica e $N \neq 0$ uma matriz anti-simétrica em $M_3(\mathbb{R})$. Mostre que as matrizes M e N são l.i. em $M_3(\mathbb{R})$.

Exercício 14. Determinar $m, n \in \mathbb{R}$ para que os subconjuntos de vetores de $\mathbb{R}^3$ dados abaixo sejam l.i. em $\mathbb{R}^3$.

(a) $\{(3, 5m, 1), (2, 0, 4), (1, m, 3)\}$.
(b) $\{(1, 3, 5), (2, m + 1, 10)\}$.
(c) $\{(m, 2, n), (3, m + n, m - 1)\}$.

Exercício 15. Mostre que o conjunto de vetores $A = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ é l.d. e que qualquer subconjunto de A, com três elementos é l.i., onde

$$q_1(x) \doteq 1, \quad q_2(x) \doteq x, \quad q_3(x) \doteq x^2, \quad q_4(x) \doteq 2 + x + 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 16. Mostrar que se o subconjunto $\{u, v, w\}$ de vetores de um espaço vetorial V for l.i., o mesmo acontecerá com o subconjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$.

Exercício 17. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial V é l.i. ou l.d.:

(a) $S \doteq \{(1, 2), (-3, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.
(b) $S \doteq \{p, q\}$, $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, onde

$$p(t) \doteq 1 + t - t^2, \quad q(t) \doteq 2 + 5t - 9t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.
(c) $S \doteq \{(1, 2, 2, -3), (-1, 4, -2, 0)\}$, $V \doteq \mathbb{R}^4$.
(d) $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V \doteq M_3(\mathbb{R})$.
(e) $S \doteq \{f, g, h\}$, $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde

$$f(x) \doteq 1, \quad g(x) \doteq \operatorname{sen} x, \quad h(x) \doteq \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(f) $S \doteq \{f, g, h\}$, $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde

$$f(x) \doteq 1, \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}^2 x, \quad h(x) \doteq \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(g) $S \doteq \{f, g\}$, $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde

$$f(x) \doteq e^x, \quad g(x) \doteq e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(h) $S \doteq \{f, g, h\}$, $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde

$$f(x) \doteq xe^x, \quad g(x) \doteq x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 18. Seja $S = \{u, v, w\}$ um conjunto l.i. em V. Verifique se os conjuntos abaixo são l.i. ou l.d., justificando a resposta.

(a) $S_1 = \{u, u + v, u + v + w\}$.
(b) $S_2 = \{u - v, v - w, w - u\}$.

(c) $S_3 = \{u+v, u+v+w, w\}$.

Exercício 19. Sejam $f, g \in C^1((a,b);\mathbb{R})$. Mostre que se existir $x_o \in (a,b)$ tal que

$$f(x_o)g'(x_o) \neq f'(x_o)g(x_o)$$

então as funções f e g são l.i. em $C^1((a,b);\mathbb{R})$.

Exercício 20. Sejam $u_1 \doteq (1,3,5)$ e $u_2 \doteq (2,4,-3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais o vetor $(2,7,k)$ possa ser escrito como combinação linear dos vetores u_1 e u_2.

Exercício 21. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $u_1, u_2, \ldots, u_r$ vetores coluna $n \times 1$. Mostre que se os vetores coluna $Au_1, Au_2, \ldots, Au_r$ são vetores l.i., então os vetores $u_1, u_2, \ldots, u_r$ também serão l.i..

Exercício 22. Seja V o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que os vetores $f, g, h \in V$ são l.i., onde

$$f(t) \doteq \mathrm{sen}(t), \quad g(t) \doteq \cos(t), \quad \text{e} \quad h(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 23. Determinar uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,1,1,1)$, $(2,1,2,1)$ como dois de seus elementos.

Exercício 24. Sejam W_1, W_2 subespaços vetoriais do espaço vetorial W e consideremos $V \doteq W_1 \oplus W_2$. Mostre que se $\mathcal{A} \doteq \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base de W_1 e $\mathcal{B} \doteq \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ é uma base de W_2, então $\gamma \doteq \{v_1, v_2, \ldots, v_k, w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ será uma base de V.

Exercício 25. Se $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V mostre que:

(a) $\gamma \doteq \{u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \ldots, u_1+\cdots, u_n\}$ também é um base de V.

(b) se $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$ então $\delta \doteq \{\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n\}$ também será uma base de V.

Exercício 26. Verificar em cada um dos casos se o subconjunto $\mathcal{B}$ do espaço vetorial V é uma base de V.

(a) $\mathcal{B} \doteq \{p_1, p_{2,3}, p_4\}$, $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde

$$p_1(t) \doteq 1, \quad p_2(t) \doteq 1+t, \quad p_3(t) \doteq 1-t^2, \quad p_4(t) \doteq 1-t-t^2-t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) $\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

(c) $\mathcal{B} \doteq \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$, $V \doteq \mathbb{R}^4$.

Exercício 27. Verifique que o espaço vetorial $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$, **<u>não</u>** pode ser gerado por um número finito de elementos do mesmo.

Exercício 28. Ache uma base e a dimensão do subespaço vetorial W do espaço vetorial $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ gerado pelos seguintes polinômios:

(a) $\{u, v, w\}$, onde

$$u(t) \doteq t^3 + 2t^2 - 2t + 1, \quad v(t) \doteq t^3 + 3t^2 - t + 4, \quad w(t) \doteq 2t^3 + t^2 - 7t - 7, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) $\{u, v, w\}$, onde

$$u(t) \doteq t^3 + t^2 - 3t + 2, \quad v(t) \doteq 2t^3 + t^2 + t - 4, \quad w(t) \doteq 4t^3 + 3t^2 - 5t + 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 29. Mostre que os subconjuntos $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, onde

$$W_1 \doteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x - 3y + 4z = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 \doteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 3x + 2y - 5z = 0\}$$

são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$. Encontre bases para os subespaços W_1 e W_2. Quais são dimensões dos subespaços W_1 e W_2? Ache um vetor $v \in W_1 \cap W_2$, $v \neq \overrightarrow{0}$.

Exercício 30. Considere os seguintes subespaços vetorias de $\mathbb{R}^3$:

$$S \doteq [(1,-1,2), (2,1,1)], \quad T \doteq [(0,1,-1), (1,2,1)],$$

$$U \doteq \{(x,y,z) \mid x + y = 4x - z = 0\} \quad \text{e} \quad V \doteq \{(x,y,z) \mid 3x - y - z = 0\}.$$

Determine bases e as dimensões dos seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

(a) S, **(b)** T, **(c)** U, **(d)** V, **(e)** $S+T$, **(f)** $S \cap T$, **(g)** $T+U$, **(h)** $T \cap U$.

Exercício 31. Determinar uma base e a dimensão do espaço vetorial formado pelas soluções de cada um dos sistemas lineares homogêneos abaixo:

$$\textbf{(a)} \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}, \quad \textbf{(b)} \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

Exercício 32. Sejam U e W os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

$$U \doteq \{(a,b,c,d)\ ;\ b - 2c + d = 0\} \quad \text{e} \quad W \doteq \{(a,b,c,d)\ ;\ a = d,\, b = 2c\}.$$

Ache uma base e a dimensão dos seguintes susbespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

(a) U, **(b)** W, **(c)** $U \cap W$, **(d)** $U + W$.

Exercício 33. Se U e W são dois subespaços vetoriais do espaço vetorial V tais que $U \oplus W = V$, diremos que U é **suplementar** (ou **complementar**) de W (ou W é **suplementar** de U).

(a) Determinar um suplementar do subespaço W de $\mathbb{R}^3$, onde $W \doteq \{\,(x,y,z)) \in \mathbb{R}^3\,;\ x - y = 0\,\}$.
(b) Determinar um suplementar do subespaço U de $\mathbb{R}^4$, onde $U \doteq \{\,(x,y,z,t)) \in \mathbb{R}^4\,;\ x - y = z - t = 0\,\}$.

Exercício 34. Sejam U e W subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ que teêm dimensões 2 e 3, respectivamente.
(a) Mostre que a dimensão de $U \cap W$ é pelo menos 1.
(b) O que ocorre se a dimensão de $U \cap W$ for 2?
(c) A dimensão de $U \cap W$ pode ser 3?

Exercício 35. Sejam U e W são dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V que tem dimensão $\underline{n}$. Suponha que

$$\dim U > \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \dim W > \frac{n}{2}.$$

Mostre que $U \cap W \neq \emptyset$.

Exercício 36. Seja $V \doteq \{\,x \in \mathbb{R} \mid x > 0\,\}$ e considere em V as seguintes operações:

$$u + v \doteq uv \quad \text{e} \quad \alpha \cdot u \doteq u^{\alpha}.$$

(a) Mostre que $(V, +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
(b) O subconjunto $\mathcal{B} \doteq \{1\}$ é uma base para V? Justifique sua resposta.
(c) Determine uma base e a dimensão de V.

Exercício 37. Encontrar em cada um dos itens abaixo uma base e a dimensão do subespaço vetorial W do espaço vetorial V.
(a) $W \doteq \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\right\}$, $V \doteq \mathbb{R}^4$.
(b) $W \doteq \{X \in M_2\,;\, AX = X\}$, onde $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V \doteq M_2(\mathbb{R})$.
(c) $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\, p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
(d) $W \doteq \{X \in M_2\,;\, AX = XA\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V \doteq M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 38. Dados U, W subespaços vetoriais do espaço vetorial V determinar;
(i) uma base e a dimensão do susbespaço vetorial U.
(ii) uma base e a dimensão do susbespaço vetorial W.
(iii) uma base e a dimensão do susbespaço vetorial $U + W$.
(iv) uma base e a dimensão do susbespaço vetorial $U \cap W$,

nos seguintes casos;
(a) $U \doteq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y + z = 0\right\}$, $W \doteq \{(x,y,0); x,y \in \mathbb{R}\}$, $V \doteq \mathbb{R}^3$.
(b) $U \doteq \{A \in M_2\,;\, \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $W \doteq \{A \in M_2\,;\, A^t = -A\}$, $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, onde $\mathrm{tr}(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A, chamado de traço da matriz A.
(c) $U \doteq \{p(t) \in V\,;\, p'(t) = 0\}$, $W \doteq \{p(t) \in V\,;\, p(0) = p(1)\}$, $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.