

1ª Lista de Exercícios

1. Dadas as funções:

a) $xe^x - 4 = 0$

b) $\ln(x) - x + 2 = 0$

pesquisar a existência de raízes e isolá-las em intervalos.

2. A equação $x^2 + 5x - 1 = 0$ tem uma raiz no intervalo $[0, 0.5]$. Verifique quais dos processos abaixo podem ser usados, com sucesso, para obtê-la:

a) $x_{n+1} = \frac{1-x_n^2}{5}$

b) $x_{n+1} = \frac{1-5x_n}{x_n}$

c) $x_{n+1} = \sqrt{1-5x_n}$.

3. A equação $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ tem três raízes. Um método iterativo pode ser definido usando a preparação óbvia da equação:

$$x = \pm \sqrt{\frac{e^x}{3}}$$

a) Verificar que começando com $x_0 = 0$ haverá convergência para a raiz próxima de -0.5 , se o valor negativo for usado e que haverá convergência para a raiz próxima de 1.0 , se o valor positivo for usado.

b) Mostrar que a forma acima não converge para a terceira raiz próxima de 4.0 , qualquer que seja a aproximação inicial próxima da raiz.

4. Considere a função $g(x) = \frac{1+e^x+x^3}{14}$.

a) Mostre que o método iterativo definido por $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, converge para $z \in [0, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$. Calcule uma aproximação para z com ordem de precisão 10^{-6} (basta calcular x_{n+1} até que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$).

b) Determine, justificando, a ordem de convergência do método do item **a)** acima. Forneça ainda, uma aproximação para o fator assintótico de convergência (K_∞).

c) Verificar que $g(x)$ tem um outro ponto fixo, z_1 , em $[2, 3]$. O método iterativo da alínea **a)** pode ser utilizado para calcular z_1 ? Justifique a sua resposta.

5. Mostre que $x^3 - 2x - 17 = 0$ tem apenas uma raiz real e determine seu valor correto até 5 casas decimais usando o método de Newton.

6. Mostre que a fórmula para determinar raiz cúbica de um número real Q ,

$$x_{k+1} = \frac{1}{3} \left(2x_k + \frac{Q}{x_k^2} \right), k = 0, 1, \dots$$

é um caso especial de iteração de Newton.

7. Aplique o método iterativo definido no exercício 6 para determinar a raiz cúbica de 2 com precisão de 10^{-5} . Obtenha o valor inicial, x_0 graficamente.

8. A equação $x^3 - 2x - 1 = 0$ possui apenas uma raiz positiva.

a) Se desejássemos também pesquisar as raízes negativas usando intervalos de amplitude $\frac{1}{2}$, até o ponto -2 , em que intervalos seriam encontradas tais raízes?

b) Obtenha a menor raiz negativa (em módulo), usando o método de Newton. Trabalhe com arredondamento para 6 casas decimais.

9. Usando o método de Newton determine, sem efetuar a divisão, o valor numérico de $x = \frac{1}{3}$ com 5 casas decimais corretas, iniciando com $x_0 = 0.3$.

10. Seja a função

$$g(x) = \frac{1}{3} \ln(x^2 + 1)$$

a) Prove que a sequência definida por

$$x_{m+1} = \frac{1}{3} \ln(x_m^2 + 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

converge para um número $z \in [-1, 1]$. Determine z e a ordem de convergência.

b) Efetue algumas iterações, começando com $x_0 = 5$, e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \quad \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \dots$$

Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior ?

11. Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:

a) método de Newton aplicado a função $f(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4$ então o método de Newton converge e a ordem de convergência é dois. Calcule três iteradas e determine um majorante para o erro de x_3 . Quantos algarismos significativos pode garantir ? (Note que pode concluir convergência se escolher para x_0 qualquer valor ≥ 4)

b) método de Newton aplicado à função $f(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge, mostre que a ordem de convergência é 3.