Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento Matemática Aplicada e Estatística
SME306 - Métodos Computacionais II
Prof. Murilo F. Tomé 2º **sem/2012**

RESOLUÇÃO 2ª **Prova: 07/05/2012 - UTILIZAR 4 CASAS DECIMAIS**

1. Considere a equação: $e^x - 4x^2 = 0$ (I).

a) **[0.5]** Mostre que essa equação tem 3 raizes reais: $z_1 < z_2 < z_3$, onde $z_1 \in [-1,\ 0]$, $z_2 \in [0,\ 1]$ e $z_1 \in [4,\ 5]$.

SOLUÇÃO: Como $f(x) = e^x - 4x^2$ é continua em $[-\infty,\ \infty]$, pelo teorema do valor intermediário, basta mostrar que $f(x)$ muda de sinal nos intervalos dados.

De fato temos: $f(-1) = -3.6321; f(0) = 1; f(1) = -1.2817; f(4) = -9.4018; f(5) = 48.4132$. Logo,

$$f(-1) * f(0) = -3.6321 < 0 \Longrightarrow \text{ existe } z_1 \in [-1,\ 0] \text{ tal que } f(z_1) = 0;$$
$$f(0) * f(1) = -1.2817 < 0 \Longrightarrow \text{ existe } z_2 \in [0,\ 1] \text{ tal que } f(z_2) = 0;$$
$$f(4) * f(5) = -455.1733 < 0 \Longrightarrow \text{ existe } z_3 \in [4,\ 5] \text{ tal que } f(z_3) = 0;$$

b) Para aproximar as raizes positivas da equação (I), considere o ponto fixo com a função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{(x/2)} \qquad (II)$$

i) **[0.5]** Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.

SOLUÇÃO: Seja z_2 a raiz de $f(x)$ em $[0,\ 1]$. Então temos:
$e^{z_2} - 4z_2^2 = 0 \Longrightarrow e^{z_2} = 4z_2^2 \Longrightarrow e^{z_2/2} = 2z_2 \Longrightarrow z_2 = \frac{1}{2}e^{z_2/2} = g(z_2)$. Logo, z_2 é ponto fixo de $g(x)$. De maneira análoga, mostra-se que z_3 é ponto fixo de $g(x)$.

ii) **[1.5]** Mostre que o método iterativo do ponto fixo associado a g (eq. (II)) converge para a raiz z_2 qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0,\ 1]$.

SOLUÇÃO: Basta mostrar que $g(x)$ satisfaz as condições do Teor. Ponto Fixo em $I = [0,\ 1]$, ou seja, mostrar que:
(i) $g(x)$ é continua e diferenciável em I;condição satisfeita visto que $g(x)$ é função exp.
(ii) $g(I) \subset I$;
(iii) $\max_{x \in I} |g'(x)| \leq L < 1$.

Como $g'(x) = \frac{1}{4}e^{(x/2)} > 0 \forall x \in I \Longrightarrow g(x)$ é monótona crescente em $I \Longrightarrow g(0) = 0.5000\ (\in I) \leq g(x) \leq g(1) = 0.8244\ (\in I) \Longrightarrow g(I) \subset I$, o que mostra que condição (ii) está satisfeita.

Agora, $g''(x) = \frac{1}{8}e^{(x/2)} > 0,\ \forall x \in I \Longrightarrow g'(x)$ é monótona crescente em $I \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{4}e^{(x/2)} = |g'(x)| \leq g'(1) = \frac{1}{4}e^{(1/2)} \leq 0.42 = L < 1,\ \forall\ x \in I$. Logo, condição (iii) está satisfeita.

Pelo Teorema do Ponto Fixo, o método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para o único ponto fixo z_2 de $g(x)$ em $I = [0,\ 1]$.

iii) **[0.5]** Mostre que não é possivel utilizar o método iterativo com a função iteradora da eq. (II) para calcular a raiz $z_3 \in [4,\ 5]$.

SOLUÇÃO: $g''(x) = \frac{1}{8}e^{(x/2)} > 0,\ \forall x \in I = [4,\ 5] \Longrightarrow g'(x)$ é monótona crescente em $I \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{4}e^{(x/2)} \geq g'(4) = \frac{1}{4}e^{4/2} = 1.8473 \Longrightarrow g'(z_3) > 1 \Longrightarrow$ o método iterativo diverge.

c) **[1.5]** Mostre que o método de Newton converge para a raiz z_3 qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [4.1, \Longrightarrow 4.4]$. Determine a ordem de convergência do método e calcule aproximações x_{n+1} para z_3 até que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$.

SOLUÇÃO: Temos que mostrar que $f(x) = e^x - 4x^2$ satisfaz as seguintes condições em 4, 5]:

(i) $f(x)$ é continua e diferenciávem em $[4,\ 5]$; (*condição satisfeita visto que $f(x)$ é soma de funções diferenciáveis*)

(ii) $f(4)f(5) < 0$; (*existência de raiz - foi provado na questão 1a)*)

(iii) $f'(x) \neq 0\ \forall\ x \in [4,\ 5]$; (*unicidade da raiz*)

(iv) $f''(x)$ não muda de sinal em $[4,\ 5]$;

(v) $\frac{|f'(4)|}{|f(4)|} < 5 - 4$ e $\frac{|f'(5)|}{|f(5)|} < 5 - 4$

De fato, $f'(x) = e^x - 8x, f''(x) = e^x - 8$. Para $x \in I = [4,\ 5]$, temos:

$f''(x) = e^x - 8 \geq e^4 - 8 = 46.5982 > 0$ $(*)$ $\Longrightarrow f'(x)$ é monótona crescente em I

$\Longrightarrow f'(x) \geq e^4 - 8 * 4 = 22.59 > 0$ $(**)$. Logo, por (*) vemos que condição (iv) está satisfeita e (**) mostra que condição (iii) é válida.

Para mostrar que condição (v) é válida, calculamos:

$$\frac{|f(4)|}{|f'(4)|} = \frac{|-9.4018|}{22.5982} = 0.4160 < 5 - 4 \text{ e } \frac{|f(5)|}{|f'(5)|} = \frac{|48.4132|}{108.4132} = 0.4466 < 5 - 4$$

Logo, as condições acima estão satisfeitas e o método de Newton converge para a raiz de $f(x)$ em $I = [4,\ 5],\ \forall\ x_0 \in I$.

Seja $x_0 = 4$. Então,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \tfrac{e^{x_0} - 4x_0^2}{e_0^x - 8x_0} = 4.0 - \tfrac{(-9.401849966)}{22.5981500331} = 4.416045116 \\
x_2 &= x_1 - \tfrac{e^{x_1} - 4x_1^2}{e_1^x - 8x_1} = 4.31565543179 \\
x_3 &= x_2 - \tfrac{e^{x_2} - 4x_2^2}{e_2^x - 8x_2} = 4.30665268895 \\
x_4 &= x_3 - \tfrac{e^{x_3} - 4x_3^2}{e_3^x - 8x_3} = 4.30658473206 \\
x_5 &= x_4 - \tfrac{e^{x_4} - 4x_4^2}{e_4^x - 8x_4} = 4.30658472822
\end{aligned}$$

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
$f(x_i)$	4.1015	3.6856	2.5013	0.8172	0.9440

a) **[1.0]** Recorrendo a fórmula de Newton para o polinómio interpolador, calcule uma aproximação para $f(1/3)$ usando $P_2(x)$.

SOLUÇÃO: Como $x = 1/3$ está entre 0.0 e 0.5, podemos tomar $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ e utilizando a fórmula de Newton temos:

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Cálculo das diferenças divididas:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	2.5013		
		$\frac{0.8172 - 2.5013}{0.5 - 0.0} = -3.36820$	
0.5	0.8172		$\frac{0.25360 - (-3.36820)}{1 - (0)} = 3.62179$
		$\frac{0.9440 - 0.8172}{1 - 0.5} = 0.25360$	
1	0.9440		

Logo, $P_2(x) = 2.5013 - 3.36820\,(x - 0) + 3.62179\,(x - 0)(x - 0.5)$ e $f(1/3) \approx P_2(1/3) = 1.1773561$.

b) [**1.0**] Sabendo que $|f(x)^j| \leq \frac{j+1}{j!}$, determine um majorante para o erro $f(1/2) - P_2(1/2)$, onde $P_2(1/2)$ é o valor obtido no ítem **a)**.

SOLUÇÃO: Um majorante para o erro da aproximação é dado por:

$$|f(1/3) - P_2(1/3) \leq |(1/3 - 0)(1/3 - 0.5)(1/3 - 1)|\frac{\max|f'''(x)|}{3!}$$

onde $|f(x)^3| \leq \frac{4}{3!} = 4/6 \approx 0.6666$.

Portanto, um majorante para o erro é dado por:

$|f(1/3) - P_2(1/3) \leq |(1/3 - 0)(1/3 - 0.5)(1/3 - 1)|\frac{0.6666}{3!} \approx 0.0041148$.

c) [**1.5**] Calcule α_0, α_1 e α_2 de modo que a função $g(x) = \alpha_0 \cos(x) + \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2$ aproxime $f(x)$ pelo MMQ. Calcule o erro cometido quando aproximamos $f(x)$ por $g(x)$.

SOLUÇÃO: Sejam $x_0 = -1, x_1 = -0.5, x_2 = 0, x_3 = 0.5, x_4 = 1.0, \phi_0(x) = \cos(x), \phi_1(x) = \sin(x), \phi_2(x) = 1$. Pelo MMQ, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ são obtidos pela solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} (\Phi_0,\Phi_0) & (\Phi_1,\Phi_0) & (\Phi_2,\Phi_0) \\ (\Phi_0,\Phi_1) & (\Phi_1,\Phi_1) & (\Phi_2,\Phi_1) \\ (\Phi_0,\Phi_2) & (\Phi_1,\Phi_2) & (\Phi_2,\Phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{f},\mathbf{\Phi_0}) \\ (\mathbf{f},\mathbf{\Phi_1}) \\ (\mathbf{f},\mathbf{\Phi_2}) \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{\Phi_0} = \begin{bmatrix} \cos(x_0) \\ \cos(x_1) \\ \cos(x_2) \\ \cos(x_3) \\ \cos(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.540302 \\ 0.877582 \\ 1.000000 \\ 0.877582 \\ 0.540302 \end{bmatrix}, \mathbf{\Phi_1} = \begin{bmatrix} -0.841470 \\ -0.479425 \\ 0.000000 \\ 0.479425 \\ 0.841470 \end{bmatrix}, \mathbf{\Phi_2} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 4.1015 \\ 3.6856 \\ 2.5013 \\ 0.8172 \\ 0.9440 \end{bmatrix}$$

Calculando os produtos escalares, obtém-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 3.12415 & 0 & 3.83576 \\ 0 & 1.87584 & 0 \\ 3.83576 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.1789740 \\ -4.032128 \\ 12.049600 \end{bmatrix},$$

Resolvendo esse sistema obtém-se: $\alpha_0 = -0.3575$, $\alpha_1 = -2.1495$,$\alpha_2 = 2.6842$. Logo, $g(x) = -0.3575\cos(x) - 2.1495\sin(x) + 2.6842$.

3. **[1.5]** Determine os parâmetros a e b de modo que a função $g(x) = (1 + x^2)e^{(a\,x+b)}$ aproxime a função tabelada abaixo.

x_i	0.5	1.0	1.2	1.5
$f(x_i)$	3.1256	5.9070	7.7030	11.3380
$F(x) = \ln\left[\frac{f(x)}{1+x^2}\right]$	0.9165	1.0830	1.1496	1.2495

SOLUÇÃO: Como $g(x)$ é uma função não-linear dos parâmetros a e b, precisamos fazer uma linearização de g e resolver o problema linearizado, como segue.

$$f(x) \approx (1 + x^2)e^{ax+b} \implies \frac{f(x)}{1 + x^2} \approx e^{ax+b} \implies \ln\left[\frac{f(x)}{1 + x^2}\right] \approx ax + b$$

Logo, para calcularmos a e b, aproximamos, pelo MMQ, a função $F(x) = \ln\left[\frac{f(x)}{1+x^2}\right]$ pela reta $G(x) = ax+b$ ($\phi_0 = x, \phi_1 = 1$). Para isso, avaliamos $F(x)$ nos pontos dados conforme mostrado na tabela acima. Os valores de a e b são obtidos pela solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{\Phi_0}, \mathbf{\Phi_0}) & (\mathbf{\Phi_1}, \mathbf{\Phi_0}) \\ (\mathbf{\Phi_0}, \mathbf{\Phi_1}) & (\mathbf{\Phi_1}, \mathbf{\Phi_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}, \mathbf{\Phi_0}) \\ (\mathbf{F}, \mathbf{\Phi_1}) \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{\Phi_0} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.2 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \mathbf{\Phi_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.9165 \\ 1.0830 \\ 1.1496 \\ 1.2495 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 4.94 & 4.20 \\ 4.20 & 4.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7950 \\ 4.3986 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema obtemos: $a = 0.3330$ e $b = 0.75$. Logo, $G(x) = 0.330\,x + 0.75$ e $g(x) = (1 + x^2)e^{0.33x+0.75}$.

4. **[1.5]** Ao efetuar-se um certo experimento, chegou-se ao sistema linear abaixo:

$$\begin{aligned} 1.5x - 2y &= -0.5035 \\ 2x + y &= 2.9846 \\ x + 2y &= 3.1132 \\ 3x + 2y &= 4.9783 \end{aligned}$$

Determine a solução aproximada desse sistema linear segundo o MMQ.

SOLUÇÃO: Sejam $\mathbf{u_1} = [1.5\ 2\ 1\ 3]^T$, $\mathbf{u_2} = [-2\ 1\ 2\ 2]^T$ e $\mathbf{b} = [-0.5035\ 2.9846\ 3.1132\ 4.9783]^T$. Pelo MMQ, a solução aproximada desse sistema linear é obtida pela solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_1}) & (\mathbf{u_2}, \mathbf{u_1}) \\ (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}) & (\mathbf{u_2}, \mathbf{u_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}, \mathbf{u_1}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{u_2}) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 16.25 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.2620 \\ 20.1746 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema linear obtém-se: $x = 0.9934$ e $y = 1.0170$.